Economía Agraria y Recursos Naturales. ISSN: 1578-0732. Vol. 4, 7. (2004). pp. 43-61

Modelos de valoración en ambiente de incertidumbre

Jerónimo Aznar Bellver* y Francisco Guijarro Martínez*

RESUMEN: En este trabajo se presentan diversos modelos de valoración en ambiente de incertidumbre que combinan información precisa e imprecisa. En el desarrollo de los mismos se ha extendido la técnica de programación por metas básica a modelos que permiten considerar intervalos en la expresión del precio o las variables explicativas del mismo, enunciando una serie de proposiciones con las que se obtiene un completo conocimiento sobre el grado de adecuación entre los valores observados en el precio y los valores estimados por la función de valoración. Asimismo, se ha formulado un índice de adecuación que permite comparar diferentes modelos obtenidos mediante la metodología propuesta.

PALABRAS CLAVE: Valoración, Incertidumbre, Programación por metas con intervalos.

Clasificación JEL: C61, G12, Q14.

Valuation models in an uncertainty environment

SUMMARY: This work presents different uncertainty valuation models that combine precise and imprecise information. We have extended the basic goal programming technique to models that enable handling intervals in the price or exogenous variables expressions, and state some propositions which are able to inform about the accuracy between observed and estimated values. Furthermore, an accuracy index for model comparison is introduced.

KEYWORDS: Valuation, Uncertainty, Interval goal programming.

JEL classification: C61, G12, Q.

* Universidad Politécnica de Valencia. Departamento de Economía y Ciencias Sociales

Dirigir correspondencia a: jaznar@esp.upv.es
Recibido en marzo de 2004. Aceptado en mayo de 2004.

1. Antecedentes y justificación

La línea de investigación en valoración ha sido una de las más fructíferas en el ámbito de la economía agraria. Así, Juliá *et al.* (2001) recopilan un total de 20 trabajos versados sobre valoración y publicados en diferentes revistas científicas de ámbito nacional durante el período 1991-2000, que suponen el 20% de los trabajos analizados y clasificados por los autores dentro del área temática de gestión y organización de empresas agrarias y agroalimentarias en España.

Algunos de estos trabajos constituyen aplicaciones prácticas de diferentes métodos de valoración, aunque también se encuentran importantes aportaciones metodológicas. Entre los estudios más recientes se encuentra la caracterización trapezoidal de las funciones de distribución (García *et al.*, 1999), que tiene como fundamento el método de las dos Betas propuesto inicialmente por Ballestero (1973). Sin duda, la principal virtud de este método es la escasa información necesaria para poder aplicarlo, pues solo se requiere encontrar una variable relacionada con el precio, y fijar, para ambas variables, los valores mínimo, moda y máximo.

La extensión multi-índice de este modelo de valoración ha sido planteada por García *et al.* (2002), mientras que García *et al.* (2003) han sugerido diferentes estadísticos para contrastar tanto la adecuación del índice como las distribuciones supuestas en el precio y el índice.

En otra línea, Caballer y Moya (1998), partiendo del modelo econométrico, proponen un método de valoración para entornos con abundante información. La valoración analógico-bursátil, diseñada inicialmente por los autores para su aplicación sobre empresas agroalimentarias cotizadas en bolsa, obtiene, a partir del análisis de componentes principales sobre variables económico-financieras, modelos de valoración que son aplicables a empresas no cotizadas si se cumplen algunas hipótesis que aseguran la comparabilidad entre la muestra de empresas cotizadas y la empresa a valorar no cotizada.

Esta metodología, como el resto de modelos econométricos y al contrario que la propuesta por Ballestero (1973), necesita abundante información con la que inferir los modelos de valoración, si bien en este caso tal restricción no puede ser considerada un inconveniente, puesto que la disponibilidad y manejo de información contable y bursátil no plantea problemas prácticos en la actualidad.

Precisamente han sido los modelos econométricos los que se han impuesto sobre el resto de métodos utilizados hasta el momento en el campo de la valoración agraria, como los sintéticos y el analítico. Sobre éste último se vierten diferentes críticas, en especial sobre la estimación de la tasa de actualización, de la que el método resulta muy sensible.

Todos los métodos señalados coinciden en una premisa común: la certidumbre sobre la información que emplean para sus cálculos. Para la aplicación de los métodos sintéticos y econométrico, se supone conocido el valor exacto y cierto de las variables explicativas y el precio, mientras que para el método analítico se realizan estimaciones en ambiente de certeza sobre los flujos de caja, tasa de actualización y vida útil del activo [1]. Sin embargo, no se han desarrollado, en el conocimiento de los autores, modelos de valoración en ambiente de incertidumbre, esto es, en situaciones en las que se conocen los distintos estados alternativos que pueden tomar las variables analizadas, pero no su probabilidad de ocurrencia.

El objeto de este trabajo es proponer un método de valoración que permita manejar información en un contexto de incertidumbre. Siguiendo el planteamiento de los modelos econométricos, se parte de una recopilación de testigos, de los que se conocerá, en el mejor de los casos, el valor preciso del precio y las variables explicativas con relevancia valorativa. La principal diferencia entre los modelos que presentamos y los econométricos estriba en que los primeros incluirán la posibilidad de que los valores de alguna/s de las variables vengan expresadas en forma de intervalo, en lugar de venir determinadas de manera precisa.

La utilidad en el campo profesional de los modelos de valoración propuestos queda justificada por el hecho de que en numerosas ocasiones, sino en la mayoría, el tasador no conoce con absoluta certeza el valor del precio o el valor de todas las variables explicativas, bien porque su valor puede fluctuar con el tiempo (sería el caso de la producción en una finca agraria), bien porque se trata de una información que no es directamente observable (riesgo de helada, calidad del suelo), con lo que, en general, se tiende a aproximar sus valores a la hora de conformar la muestra de testigos. Dicha aproximación suele centrarse en la media (por ejemplo, la producción promedio de los 5 años últimos), sin que los modelos econométricos tradicionales permitan incluir información sobre la representatividad de ese valor «estimado» a través de la media aritmética. En estas situaciones, resulta mucho más natural proporcionar un intervalo de valores, en lugar de un valor central, con el que reflejar el grado de precisión en la información recopilada. De esta manera, el valorador utilizará intervalos más estrechos para representar los casos de mayor certidumbre, e intervalos más amplios para situaciones de mayor incertidumbre.

El resto del trabajo se estructura como sigue. En el epígrafe 2 se presentan los modelos de valoración por intervalos basados en programación por metas, y que modelizan dos situaciones diferentes: 1) incertidumbre en el precio, 2) incertidumbre en las variables explicativas. Para comparar la bondad de los modelos de valoración se diseña, en el epígrafe 3, el que hemos denominado índice de adecuación. Finalmente, se ofrece un ejemplo numérico que permite ilustrar el comportamiento de la metodología presentada (epígrafe 4) y se resumen las conclusiones del trabajo (epígrafe 5).

2. Modelos de valoración por intervalos mediante programación por metas

Supóngase que el valorador ha recopilado información sobre una serie de testigos que, por su semejanza con el/los activo/s a valorar, conformarán la muestra a partir de

[1] No obstante, para este último método se han desarrollado extensiones aplicables en situaciones de riesgo, en las que, si bien no se conoce con absoluta certeza el valor de sus diferentes parámetros, sí se pueden determinar estados alternativos para cada uno de ellos y a los que asignar distinta probabilidad, con lo que finalmente se obtiene una estimación del valor esperado.

la cual inferir un modelo de valoración. La información recopilada hace referencia al precio de transacción y a diferentes variables a priori relevantes en un contexto valorativo.

En el modelo clásico de regresión por mínimos cuadrados (*Ordinary Least Squares* - OLS) se realiza una estimación del vector de coeficientes asociado con el vector de variables explicativas en el modelo ideal [1]:

$$y = X\beta + u \qquad [1]$$

donde *y* es un vector T×1 que recoge el precio de los T testigos, X es una matriz $T \times (k + 1)$ con *k* variables explicativas, β es un vector $(k + 1) \times 1$ y *u* es un vector $T \times 1$. El modelo ajustado correspondiente sería [2]:

$$\hat{y} = X\hat{\beta} \qquad [2]$$

En el caso de que el rango de la matriz X'X sea igual a k + 1, se obtiene la expresión del vector de estimadores mínimo-cuadráticos [3]:

$$\hat{\beta} = [X'X]^{-1} X' y \qquad [3]$$

En este modelo se supone que tanto los elementos del vector como los de la matriz X son valores exactos. Sin embargo, puede ocurrir que algunos o todos ellos vengan expresados en forma de intervalo:

$$\begin{array}{l} \{y_j \in \Re \mid a_j \leq y_j \leq b_j\} \quad j \in [1..T] \\ \{x_{ij} \in \Re \mid a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij}\} \quad i \in [1..k], \quad j \in [1..T] \end{array} \qquad [4]$$

donde *a* y *b* representan el límite inferior y superior del intervalo cerrado, respectivamente.

En este caso, la regresión por mínimos cuadrados no resulta aplicable, por lo que debe acudirse a otras técnicas que manejen información en la forma de [4], como la programación por metas (Charnes *et al*., 1955), cuya formulación básica se presenta en [5]:

$$\begin{array}{l} \min\limits_{\beta} \displaystyle\sum_{j=1}^{T} \left| y_j - \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{ij} \right| \\ \beta \in B \end{array} \qquad [5]$$

donde y_j representa el valor de la meta *j*, x_{ij} el valor de la variable o criterio *i* en la meta *j* y β_i y el coeficiente asociado a la variable x_i. El conjunto B incluiría las restricciones que debe cumplir el modelo y que acotan los valores estimados para el vector de coeficientes β.

El modelo anterior puede ser transformado, ignorando las restricciones adicionales en B, en un modelo equivalente (Charnes *et al*., 1955):

$$\min \sum_{j=1}^{T} n_j + p_j$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{ij} + n_j - p_j = y_j\,,$$

$$n_j,\, p_j \geq 0 \qquad [6]$$

en el que la superación por parte de una meta *j* de su nivel de aspiración y_j es recogida por la variable p_j (desviación positiva), mientras que la no consecución de la meta viene cuantificada por la variable n_j (desviación negativa).

Una de las características del modelo básico de programación por metas [6] es que sus estimaciones se corresponden con las de un hiperplano que se ajusta perfectamente a un mínimo de *k* observaciones (Bassett, 1997).

La adaptación de [6] a un contexto valorativo es inmediata, sin más que identificar a *y* con el vector de precios observados en los activos de la muestra (testigos), a *x* con el vector de variables explicativas del precio, y a β con el vector de coeficientes no restringidos en signo a estimar [2].

Con ello se obtiene un modelo básico de valoración basado en programación por metas, y que se corresponde con la formulación LAV (*Least Absolute Value* - Valor Absoluto Mínimo), que permite ajustar un hiperplano sobre una nube de puntos de tal manera que se minimice la suma de desviaciones absolutas entre los puntos estimados y los observados, frente a la minimización de las desviaciones cuadráticas propuesta por OLS. La diferencia entre los dos enfoques radica en la norma utilizada, L_2 en el caso de la estimación OLS y L_1 en LAV [3].

Entre las propiedades más relevantes del modelo LAV está la de su mayor robustez frente a OLS en el caso de distribuciones afectadas por la presencia de datos anómalos (Bassett y Koenker, 1978; Dielman, 1986; Hunt *et al*., 1974; Rosenberg y Carlson, 1977).

---

[2] La no restricción en signo de los coeficientes coincide con la planteada en la regresión por mínimos cuadrados, de manera que la decisión sobre el signo de los coeficientes queda supeditada a la obtención del mejor ajuste posible. Sin embargo, Aznar y Guijarro (2005) han señalado la conveniencia de determinar a priori el signo de los coeficientes a partir del conocimiento de que disponga el valorador sobre el problema o de la relación estadística entre el precio y las variables explicativas. Con ello se pretende superar los problemas de multicolinealidad que podría presentar un modelo planteado con coeficientes no restringidos en signo.

[3] La estimación LAV fue propuesta con anterioridad a OLS por el matemático astrónomo y físico jesuíta Roger Boskovich, aproximadamente 50 años antes de la aparición del trabajo de Legendre sobre mínimos cuadrados en 1805. La complejidad de su cálculo impidió su aplicación práctica hasta la aparición de la técnica de programación por metas, que ha constituido la solución computacional más eficiente para resolver la estimación de la regresión LAV. Esta técnica no se encuentra limitada a la resolución de ajustes basados en la norma L_1, como la regresión LAV, sino que también puede aplicarse a las de orden superior, como L_∞ (minimización de la desviación máxima o MINMAX), o a la aproximación lineal de normas intermedias entre L_1 y L_∞ a través del modelo extendido (véase Romero, 1991).

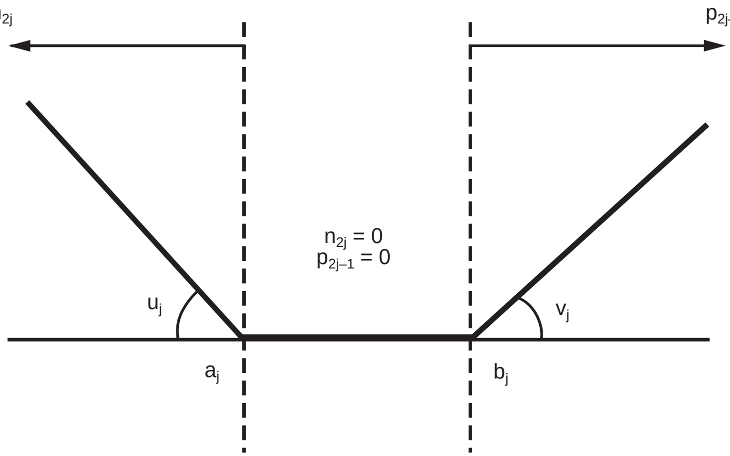
2.1. *Modelo de valoración con el precio expresado como intervalo*

La extensión del modelo [6] a situaciones en las que la meta (que no los criterios) pudiera venir expresada en forma de intervalo fue propuesta en Charnes y Collomb (1972).

En la figura 1 se representa, en línea gruesa, la penalización sufrida por la función objetivo según los valores del precio estimado y los límites definidos para el intervalo. En el caso de que dicho valor se ajuste dentro del intervalo delimitado por los valores a_j y b_j ($a_j \leq b_j$), la penalización sobre la función objetivo es nula (sus variables desviación toman valor nulo, $n_{2j} = p_{2j-1} = 0$), indicando que cualquiera de esos posibles valores es igualmente válido sin que ninguno de los mismos tenga más probabilidad que otro de ocurrir.

Fuera del intervalo, la penalización es positiva y creciente, con pendiente u_j para valores inferiores a a_j, y pendiente v_j para valores mayores que b_1. Con estos coeficientes se posibilitan diferentes penalizaciones según se sobrepase o no se alcance el límite superior o inferior del intervalo, respectivamente.

El modelo así propuesto sería un compromiso entre la programación por metas ponderadas (*Weighted Goal Programming* - WGP) y la programación por metas con intervalos (*Interval Goal Programming* - IGP), según se refleja en el trabajo de Jones y Tamiz (1995). Un análisis de la relación entre estos modelos y otras formas funcionales de la programación por metas puede encontrarse en Victoriano y Romero (1999) y Romero (2004).



$$u_j = \frac{\delta FO}{\delta(a_j - \hat{y}_j)} = \frac{\delta FO}{\delta n_{2j}}, \ \hat{y}_j < a_j \qquad v_j = \frac{\delta FO}{\delta(\hat{y}_j - b_j)} = \frac{\delta FO}{\delta p_{2j-1}}, \ b_j < \hat{y}_j$$

Figura 1. *Intervalo simple para el testigo* j.

FO: función objetivo del programa lineal.

Debemos insistir en que, de situarse el precio estimado dentro del intervalo delimitado por a_j y b_j, la penalización en la función objetivo será cero. Esto es, suponemos que cualquier precio obtenido entre dichos extremos es igualmente factible para el valorador.

La formulación del modelo de valoración basado en programación por metas con el precio expresado como intervalo tomaría la forma de [7]:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{T} u_j n_{2j} + v_j p_{2j-1} \\ &\text{sujeto a } \ \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(i)\beta_i x_{ij} + n_{2j-1} - p_{2j-1} = b_j \,, \\ &\qquad\qquad \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(i)\beta_i x_{ij} + n_{2j} - p_{2j} = a_j \,, \\ &\qquad\qquad n_j, p_j \geq 0 \end{aligned} \qquad [7]$$

en el que se han duplicado el número de restricciones y variables desviación respecto de [6], e incluido el término constante β_0 [4].

La función sgn(i) toma dos únicos valores: +1 cuando la relación entre la variable explicativa x_1 y el precio y es positiva; –1 en caso de ser negativa. La función puede ser definida a priori por el valorador, a partir de su conocimiento del problema, aunque también puede recurrirse al cálculo de la covarianza o el coeficiente de correlación entre el precio y las variables explicativas, en caso de disponer de un número de datos suficiente [5]:

$$\operatorname{sgn}(i) = \begin{cases} +1 & \text{si } \operatorname{corr}(y,x_i) > 0 \\ -1 & \text{si } \operatorname{corr}(y, x_i) < 0 \end{cases} \qquad [8]$$

En aras de la simplificación, no se ha contemplado la posibilidad de modelizar variables de signo indeterminado; esto es, aquellas cuya relación no puede ser establecida a priori bajo los criterios comentados [6].

2.2. *Modelo de valoración con variables explicativas expresadas como intervalo*

En la práctica valorativa no es siempre el precio de los testigos la variable cuyo valor no se conoce de manera precisa, sino que esta situación de incertidumbre es más usual en el caso de las variables explicativas. El modelo que aquí presentamos

---

[4] La inclusión de un término independiente en la expresión del precio resulta habitual en el campo de la valoración, constituyendo una novedad respecto de los modelos clásicos de programación por metas donde el objetivo se centra en la toma de decisiones y, por tanto, carece de sentido considerar un término no vinculado a ninguno de los criterios de decisión.

[5] La relación entre el precio y las variables explicativas puede realizarse a través del cálculo de la covarianza entre éstas últimas y los límites inferior y superior del precio, pues en ambos casos el resultado debería ser similar.

[6] Para la modelización de este tipo de relaciones puede consultarse Aznar y Guijarro (2005).

contempla esta circunstancia, considerando la posibilidad de que sean s $(s \leq k)$ las variables cuyos valores pueden tener forma de intervalo. Sin pérdida de generalización, supondremos que estas variables ocupan las *s* primeras posiciones.

Definición 1: El conjunto R será el compuesto por el total de intervalos considerados en la muestra para cada combinación de variable i $(i \leq s)$ y testigo *j*, de manera que para las variables relacionadas negativamente con el precio los límites superior e inferior habrán sido intercambiados en su estado original:

$$R = \{(a_{ij}, b_{ij}) \,/\, sgn(i) = +1\} \cup \{(b_{ij}, a_{ij}) \,/\, sgn(i) = -1\}^{7} \qquad [9]$$

Así, el modelo de valoración con variables explicativas expresadas como intervalo queda definido por el programa lineal [10].

$$\text{Min} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{T} n_{ij} + p_{ij}$$

s.a.:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{res 1: } \left[\beta_0 + \sum_{i=1}^{s} sgn(i)\beta_i a_{ij} + \sum_{i=s+1}^{k} sgn(i)\beta_i x_{ij}\right] + \sum_{i=1}^{s} n_{ij} - \delta^{+}_{2^s(j-1)} = y_j, \quad \text{con } \left(a_{ij}, b_{ij}\right) \in R \\
\text{res 2: } \left[\beta_0 + \sum_{i=1}^{s} sgn(i)\beta_i b_{ij} + \sum_{i=s+1}^{k} sgn(i)\beta_i x_{ij}\right] - \sum_{i=1}^{s} p_{ij} - \delta^{-}_{2^s \times j-1} = y_j, \quad \text{con } \left(a_{ij}, b_{ij}\right) \in R \\
\text{res } 3_2^s : \\
\left\{\begin{array}{r}
\left[\beta_0 + \sum_{i=1}^{s} sgn(i)\beta_i \mu_{ij} + \sum_{i=s+1}^{k} sgn(i)\beta_i x_{ij}\right] + \sum_{i=1}^{s}\left(n_{ij} \times \dfrac{\mu_{ij} - b_{ij}}{a_{ij} - b_{ij}} - p_{ij} \times \dfrac{\mu_{ij} - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}\right) + \delta^{-}_{l} - \delta^{+}_{l} = y_j, \\
\text{con } l = 2^s(j-1) + \sum_{i=1}^{s} 2^{s-i} \times \dfrac{\mu_{ij} - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}} \\
\forall\, \mu_{ij} \,/\, (\mu_{ij}, b_{ij}) \in R \text{ v } (a_{ij}, \mu_{ij}) \in R
\end{array}\right\} \\
\forall\, j = 1..T
\end{array}\right\}$$

[10]

donde se ha supuesto que los coeficientes de la función objetivo asociados a las variables de desviación, *u* y *v*, toman valor unitario, lo que permitirá deducir una serie de proposiciones que incrementan la capacidad informativa del modelo presentado.

La primera restricción del modelo [10], etiquetada como *res1*, permite obtener el límite inferior del intervalo estimado para el precio: $\hat{y}_{min\,j}$. En la parte izquierda de la igualdad se representa entre corchetes el valor estimado $\hat{y}_{min\,j}$ para el activo *j* cuando todas las variables expresadas como intervalo $(i = 1..s)$ toman el valor del límite inferior del intervalo. En este caso, interesará que $\hat{y}_{min\,j} \leq y_j$, considerando que el límite inferior del intervalo estimado violará esta condición cuando $y_j < \hat{y}_{min\,j}$. Para intentar

[7] En este caso, la relación entre el precio y las variables explicativas en forma de intervalo puede realizarse a través del cálculo de la covarianza entre el precio y los límites inferior y superior del intervalo.

evitar esta situación, en la función objetivo se minimizan las desviaciones negativas $\sum_{i=1}^{s} n_{ij}$ asociadas a cada variable explicativa x_i ($i \leq s$), aunque obviamente se permite $y_j < \hat{y}_{min\ j}$ para que el modelo pueda, en cualquier caso, obtener soluciones factibles ($\delta^{+}_{2^s(j-1)}$), a la que denominaremos variable de holgura, no interviene en la función objetivo).

La segunda de las restricciones, *res2*, tiene por objeto controlar el caso opuesto al descrito anteriormente. Así, en la parte izquierda de la igualdad se representa entre corchetes el valor estimado para el activo *j* cuando todas las variables explicativas x_i ($i \leq s$) toman el valor del límite superior: $\hat{y}_{max\ j}$. En este caso, se pretende que $y_j \leq \hat{y}_{max\ j}$, de tal manera que son las desviaciones positivas las minimizadas en la función objetivo ($\sum_{i=1}^{s} p_{ij}$). Para posibilitar que el valor estimado, $\hat{y}_{max\ j}$, sea inferior al observado, y_j, y obtener una solución factible, se introduce la variable de holgura $\delta^{-}_{2^s xj-1}$.

La última línea del modelo, *res3_2*^{s}, se corresponde con un conjunto de $2^s - 2$ restricciones para cada activo *j*. Aquí se incluyen el resto de combinaciones entre límites inferiores y superiores no consideradas en las dos primeras restricciones de [10].

El valor de μ_{ij} puede coincidir con el límite inferior del intervalo $[a_{ij} / (a_{ij}, b_{ij}) \in R]$ o con el límite superior $[b_{ij} / (a_{ij}, b_{ij}) \in R]$.

Cuando en una restricción se considere el límite inferior del intervalo de la variable x_i ($i \leq s$), entonces se incluirá su correspondiente variable desviación negativa n_{ij}; en caso contrario (límite superior), será p_{ij} la que se incluya. Esto es controlado a través de las expresiones $\frac{\mu_{ij} - b_{ij}}{a_{ij} - b_{ij}}$ y $\frac{\mu_{ij} - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}$, que multiplican a n_{ij} y p_{ij} respectivamente. La primera expresión toma valor 0 cuando $\mu_{ij} = b_{ij}$, lo que equivale a no incluir a n_{ij} en la restricción. Esta variable solo aparecerá cuando $\mu_{ij} = a_{ij}$, en cuyo caso la expresión toma valor 1. De forma análoga se explica el comportamiento de la expresión vinculada a p_{ij}.

En todas las restricciones de este conjunto se incluyen variables de holgura tanto negativas (δ^{-}_{l}) como positivas (δ^{+}_{l}), pues ahora sí puede ocurrir que se necesiten ambas para respetar la igualdad con y_j. El subíndice *l* sirve para identificar la restricción dentro del conjunto, pudiendo fluctuar sus valores entre $2^s (j - 1) + 1$ y $2^s j - 2$. De esta manera, el tamaño del problema resulta de orden exponencial respecto del número de variables definidas en forma de intervalo $[O(2^s j)]$, lo que puede representar un inconveniente para su aplicación práctica. En el epígrafe 4 se presenta un ejemplo numérico para una muestra compuesta por 20 testigos y 3 variables explicativas, de las cuales 2 se expresan como intervalo. Ello supone modelizar un programa lineal con $2^2 \times 20 = 80$ restricciones. Sin embargo, creemos que los problemas reales que hagan uso de esta metodología no se tornarán en intratables desde un punto de vista computacional, puesto que rara vez se emplearán más de 2 ó 3 variables como intervalo y, más concretamente en el campo de la valoración agraria, tampoco se dispondrá de muestras muy numerosas.

Al resolver el modelo [10] se obtendrán los correspondientes estimadores para los k + 1coeficientes, con los que podrá calcularse el precio del/os activo/s problema. Obviamente, si alguna de las variables en el activo problema viniera expresada en forma de intervalo, el precio estimado también imitaría este mismo patrón.

La función objetivo minimiza el total de desviaciones, negativas y positivas, asociadas a cada combinación de testigo y variable explicativa en forma de intervalo. Otra posibilidad consiste en minimizar las variables de holgura. Sin embargo, esta opción proporcionaría intervalos estimados para el precio mayores que los obtenidos con la función objetivo considerada. Nos parece adecuado no sólo reducir el error cometido en las estimaciones, sino también aumentar la precisión de las mismas, lo que se consigue obteniendo intervalos más estrechos.

Además, el modelo que aquí proponemos suministra una completa información sobre el grado de adecuación de los intervalos estimados $[\hat{y}_{\min j}, \hat{y}_{\max j}]$ sobre el precio observado y_j, según el valor alcanzado por las diferentes variables de desviación y holgura introducidas. De esta manera, se cumplirán las siguientes proposiciones:

Proposición 1. Las variables holgura de las restricciones *res1* y *res2* de [10] no pueden tomar, simultáneamente, valores no nulos:

$$\delta^{+}_{2s(j-1)} \times \delta^{-}_{2s_{xj-1}} = 0 \qquad [11]$$

En efecto, en ningún caso pueden ambas variables tomar valores no nulos, puesto que de hacerlo implicaría que y_j se sitúa tanto por encima como por debajo del intervalo estimado $[\hat{y}_{\min j}, \hat{y}_{\max j}]$, lo que no es posible.

Proposición 2. La violación del límite superior estimado $\hat{y}_{\max j}$ ocurre cuando se cumpla $\delta^{-}_{2s_{xj-1}} \neq 0$, y tiene la siguiente implicación:

$$\delta^{-}_{2s_{xj-1}} \neq 0 \;\rightarrow\; |\hat{y}_{\max j} - y_j| = \delta^{-}_{2s_{xj-1}};\;\; |\hat{y}_{\min j} - y_j| = \sum_{i=1}^{s} n_{ij} \qquad [12]$$

La condición de [12] implica que el precio observado o real y_j no pertenece al intervalo estimado $|\hat{y}_{\min j}, \hat{y}_{\max j}|$, quedando situado por encima del mismo $(y_j - \hat{y}_{\max j} > 0)$. La distancia entre dicho precio y el límite superior del intervalo, $y_j - \hat{y}_{\max j}$, vendrá cuantificada en la variable de holgura $\delta^{-}_{2s_{xj-1}}$. De igual modo, la distancia entre el precio observado y el límite inferior del intervalo estimado, $y_j - \hat{y}_{\min j}$, coincidirá con la suma de desviaciones negativas $\sum_{i=1}^{s} n_{ij}$ (figura 2).

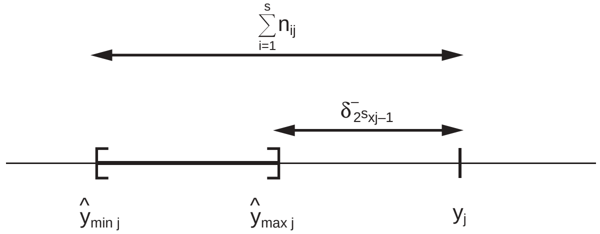


Figura 2. *Violación del límite superior.*

Proposición 3. La violación del límite inferior estimado $\hat{y}_{\min j}$ ocurre cuando se cumple $\delta^+_{2^s(j-1)} \neq 0$, y tiene la siguiente implicación:

$$\delta^+_{2^s(j-1)} \neq 0 \;\rightarrow\; |\hat{y}_{\min j} - y_j| = \delta^+_{2^s(j-1)};\;\; |\hat{y}_{\max j} - y_j| = \sum_{i=1}^{s} p_{ij} \qquad [13]$$

Si se viola el límite inferior marcado por la restricción *res2* en [10], la diferencia entre este extremo y el precio observado, $\hat{y}_{\min j} - y_j$, quedará reflejada en la variable de holgura $\delta^+_{2^s(j-1)}$, mientras que la diferencia entre el extremo superior estimado y el precio observado, $\hat{y}_{\max j} - y_j$, coincidirá con la suma de las desviaciones positivas $\sum_{i=1}^{s} p_{ij}$ (figura 3).

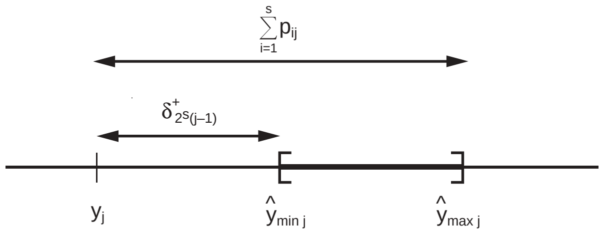


Figura 3. *Violación del límite inferior.*

Proposición 4. Si las variables de holgura son nulas, el precio observado pertenece al intervalo estimado, y las distancias entre el primero y cada uno de los extremos vienen recogidas en las variables desviación:

$$\delta^+_{2^s(j-1)} = \delta^-_{2^s\times j-1} = 0 \;\rightarrow\; y_j \in |\hat{y}_{\min j}, \hat{y}_{\max j}|;\;\; |\hat{y}_{\max j} - y_j| = \sum_{i=1}^{s} p_{ij};\;\; |\hat{y}_{\min j} - y_j| = \sum_{i=1}^{s} n_{ij} \qquad [14]$$

En este caso, el intervalo estimado incluye al precio observado, y las distancias entre el precio real y el límite inferior y superior del intervalo vendrán determinadas por la suma de desviaciones negativas y positivas, respectivamente (figura 4).

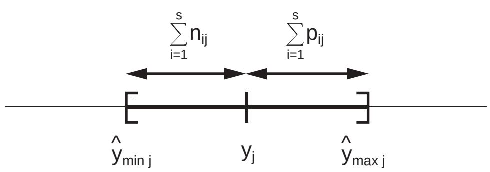


Figura 4. *Precio observado entre límite inferior y superior del intervalo estimado.*

Además, cada variable desviación n_{ij} (p_{ij}) recoge la diferencia entre el precio observado y el extremo del intervalo inferior (superior) por causa directa de la variable x_i, frente al error total cuantificado por la suma de las desviaciones $\sum_{i=1}^{s} n_{ij}$ ($\sum_{i=1}^{s} p_{ij}$).

3. Análisis de adecuación de los modelos

A la hora de comparar la bondad de diferentes modelos de programación por metas, puede hacerse uso de un ratio al que hemos denominado índice de adecuación I_a. Se trata de enfrentar la solución obtenida mediante el modelo de programación por metas con la que se obtendría con una solución ingenua (*naive*) del problema. Esta última sería la que aplicaría el valorador cuando la única variable conocida para la muestra de testigos fuera el precio, de manera que el valor estimado para cualquier activo problema sería el obtenido como promedio entre el conjunto de testigos de la muestra:

$$z' = \sum_{j=1}^{T} |y_j - \bar{y}| \qquad [15]$$

El índice de adecuación se obtendrá a partir de la relación entre la suma de desviaciones del modelo de valoración por intervalos (z) y la del modelo *naive* (z'), pues ambas cantidades expresan el error cometido en la estimación:

$$I_a = \left(1 - \frac{z}{z'}\right) \times 100 \qquad [16]$$

donde I_a puede fluctuar entre 0 y 100, con valores más próximos al límite superior cuanto más ajustado resulte el modelo.

Dependiendo de si es el precio o las variables explicativas las definidas en forma de intervalo, la expresión del error cometido en la estimación tomará una u otra forma.

Así, para el modelo con el precio como intervalo [7], la suma de desviaciones seguirá la expresión de [17]:

$$z = \sum_{j=1}^{T} |y_j - \hat{y}_j| \qquad [17]$$

mientras que para el caso en que son algunas o todas las variables explicativas las definidas en forma de intervalo [10], el error cometido en la estimación se obtendrá como [18]:

$$z = \sum_{\substack{j=1 \\ y_j \notin [\hat{y}_{min\,j},\, \hat{y}_{max\,j}]}}^{T} \left| y_j - \frac{\hat{y}_{max\,j} - \hat{y}_{min\,j}}{2} \right| \qquad [18]$$

Una alternativa a la anterior habría sido medir la distancia entre el valor observado y_j y el límite del intervalo más próximo al mismo, según la expresión [19]:

$$z = \sum_{\substack{j=1 \\ y_j \notin [\hat{y}_{min\,j},\, \hat{y}_{max\,j}]}}^{T} \min\left(\left| y_j - \hat{y}_{min\,j} \right|,\ \left| y_j - \hat{y}_{max\,j} \right| \right) \qquad [19]$$

pero en este caso no se estaría considerando la amplitud del intervalo estimado. La expresión [18] resulta preferible puesto que otorga una mayor distancia (error) a una estimación de intervalo más amplio que otra de intervalo más estrecho, a igualdad de distancia entre el valor observado y el límite del intervalo estimado más cercano. De esta manera, entre dos modelos con igual suma de desviaciones calculadas según la expresión [19], el modelo con intervalos más estrechos obtendría un menor valor en la expresión [18] y, por tanto, un mayor índice de adecuación.

Volviendo sobre [18], el error así medido puede obtenerse directamente de las variables consideradas en el programa lineal. En efecto, de considerar el error como la distancia del precio observado al punto central del intervalo estimado, el valor de *z* podría obtenerse directamente según [20], donde ya no es necesario estimar el precio mínimo y máximo para cada testigo.

$$z = \sum_{\substack{j=1 \\ \neg\left(\delta^-_{2s_{j-1}} = \delta^+_{2s(j-1)} = 0\right)}}^{T} \left| \frac{\delta^-_{2s_{j-1}} + \sum_{i=1}^{s} n_{ij}}{2} + \frac{\delta^+_{2s(j-1)} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij}}{2} \right| \qquad [20]$$

4. Un ejemplo ilustrativo

Con el propósito de clarificar la aplicación práctica de los modelos presentados en este artículo, dedicamos el presente epígrafe al desarrollo de un ejemplo sobre el modelo [10], por considerar que su implementación puede resultar algo más complicada que la del modelo [7].

Partimos de una muestra compuesta por un total de 20 activos, que podrían ser fincas agrícolas o cualquier otro bien susceptible de ser objeto en un proceso valorativo. La información recogida sobre estos testigos incluye su precio de transacción, que resulta ser la variable endógena en el modelo propuesto, y un conjunto de tres variables exógenas o explicativas, de las cuales las dos primeras toman valores en forma de intervalo mientras que para la tercera se conocen sus valores de forma precisa.

Esta información aparece resumida en el cuadro 1, donde la primera columna se ha empleado para la numeración de los testigos. En la segunda se recoge el precio de compraventa de los distintos activos. En las dos siguientes columnas se recogen los valores mínimo y máximo de las variables explicativas expresadas en forma de intervalo, x_1 y x_2. En este caso se ha optado por un rango de valores posibles entre 1 y 10, si bien estos límites pueden variar según el caso. En la última columna se representa la variable explicativa x_3, cuyos valores vienen expresados de forma precisa.

El siguiente paso consiste en plantear el modelo en la forma de [10], para lo que es necesario establecer el signo de los coeficientes asociados con cada variable explicativa. Esto puede realizarse a través del análisis de correlación cuando el número de testigos sea suficiente. En el cuadro 2 aparecen los coeficientes obtenidos entre el conjunto de variables consideradas.

CUADRO 1

Caracterización de la muestra

Testigo	Precio	Variable explicativa x_1		Variable explicativa x_2		Variable explicativa x_3
		Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	
1	42	2	4	7	8	29
2	50	3	4	6	6,5	35
3	51	4	4,5	4	5	32
4	49	5	6	6	7	31
5	47	7	7,5	6	6,5	28
6	54	6	7	5	6	30
7	58	8	10	3	5	36
8	52	5	5,5	4	4,5	32
9	53	6	6,5	7	9	35
10	57	8	9	2	3	33
11	62	9	10	2	3	38
12	54	5	7	8	10	33
13	53	4	5	5	5,5	35
14	50	4	5	4	5	29
15	49	3	5	6	6,5	34
16	56	6,5	7	5	7	35
17	54	6	7	3	4	33
18	59	6	6,5	2,5	3,5	37
19	50	4	5,5	4,5	6	31
20	55	5	6	3	4	34

CUADRO 2

Coeficientes de correlación de Pearson

	Precio	x_1 mínimo	x_1 máximo	x_2 mínimo	x_2 máximo	x_3
Precio	1					
x_1 mínimo	0,762** (0,000)	1				
x_1 máximo	0,726** (0,000)	0,954** (0,000)	1			
x_2 mínimo	–0,663** (0,001)	–0,541* (0,014)	–0,476* (0,034)	1		
x_2 máximo	–0,520* (0,019)	–0,409 (0,073)	–0,329 (0,157)	0,961** (0,000)	1	
x_3	0,764** (0,000)	0,378 (0,101)	0,377 (0,102)	–0,372 (0,106)	–0,277 (0,236)	1

** significativo al 99%; * significativo al 95%
Entre paréntesis *p–value.*

Así, las variables x_1 y x_3 aparecen relacionadas positivamente con el precio, mientras que x_2 lo está negativamente. De esta manera, la función sgn(i) quedaría definida según [21]:

$$\begin{aligned} &\mathrm{sgn}(1) = \mathrm{sgn}(3) = +1 \\ &\mathrm{sgn}(2) = -1 \end{aligned} \qquad [21]$$

Puede comprobarse como la relación lineal [8] entre las variables explicativas no es estadísticamente significativa, salvo en el caso de la variable x_1 y los valores mínimos de x_2, con una significación del 95%.

El programa lineal se plantearía según se expresa en [22], donde, por limitaciones de espacio, únicamente se representan la función objetivo y las restricciones correspondientes a los testigos 1 y 20.

$$\mathrm{Min} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{20} n_{ij} + p_{ij}$$

s.a.:

$$\begin{aligned} &\beta_0 + 2\beta_1 - 8\beta_2 + 29\beta_3 + n_{1,1} + n_{2,1} - \delta_0^+ = 42 \\ &\beta_0 + 2\beta_1 - 7\beta_2 + 29\beta_3 + n_{1,1} - p_{2,1} + \delta_1^- - \delta_1^+ = 42 \\ &\beta_0 + 4\beta_1 - 8\beta_2 + 29\beta_3 - p_{1,1} + n_{2,1} + \delta_2^- - \delta_2^+ = 42 \\ &\beta_0 + 4\beta_1 - 7\beta_2 + 29\beta_3 - p_{1,1} - p_{2,1} + \delta_3^- = 42 \\ &\vdots \\ &\beta_0 + 5\beta_1 - 4\beta_2 + 34\beta_3 + n_{1,20} + n_{2,20} - \delta_{76}^+ = 55 \\ &\beta_0 + 5\beta_1 - 3\beta_2 + 34\beta_3 + n_{1,20} - p_{2,20} - \delta_{77}^- - \delta_{77}^+ = 55 \\ &\beta_0 + 6\beta_1 - 4\beta_2 + 34\beta_3 - p_{1,20} + n_{2,20} - \delta_{78}^- - \delta_{78}^+ = 55 \\ &\beta_0 + 6\beta_1 - 3\beta_2 + 34\beta_3 - p_{1,20} - p_{2,20} - \delta_{79}^- = 55 \end{aligned} \qquad [22]$$

Para resolver dicho programa lineal se ha utilizado el paquete de optimización LINGO en su versión 8.0, obteniendo los coeficientes que aparecen en la función del precio [23], con una aproximación de cuatro decimales:

$$\hat{y} = 8{,}7816 + 0{,}4598x_1 - 0{,}1609x_2 + 1{,}2874x_3 \qquad [23]$$

a partir de los cuales se pueden estimar los precios mínimo y máximo de cada uno de los testigos o de cualquier otro activo a valorar de similares características. Estos precios mínimo y máximo se obtendrán, respectivamente, a partir de los extremos inferior y superior considerados en las variables x_1 y x_2 y en la forma propuesta en [9].

Para verificar las proposiciones enunciadas en §2.2, se representan los valores proporcionados por el paquete informático para las variables de desviación y de holgura, que aparecen en la tabla 3 junto con el precio observado, los límites inferior y superior del intervalo estimado para el precio de cada testigo, y la distancia utilizada en el cálculo del índice de adecuación.

Se comprueba como la función obtenida para el precio consigue estimar intervalos que incluyen el precio observado cuando las variables de holgura toman simultáneamente valor cero, $\delta^+_{2^s(j-1)} = \delta^-_{2^s \times j-1} = 0$, hecho que ocurre para los testigos 5, 7, 16, 17, 18 y 19. Consecuentemente con la proposición 4, la distancia entre el precio ob-

[8] Se han excluido del análisis las de cualquier otro orden.

servado y cada uno de los límites estimados para el intervalo se obtiene a partir de la suma de las variables de desviación. Así, para el testigo número 5, con un precio observado de 47 u.m., el intervalo estimado resulta ser [47’000, 47’310], con una suma de desviaciones positivas 0,310 (distancia entre y_5 y $\hat{y}_{max\ 5}$) y suma de desviaciones negativas nula ($y_5 = \hat{y}_{min\ 5}$).

Los testigos 1, 2, 3, 4, 9, 13 y 15 obtienen intervalos estimados por encima del precio observado, puesto que todos ellos obtienen variables de holgura positiva no nulas ($\delta^+_{2^{s}(j-1)}$). Para todos ellos se cumple la proposición 3, como es el caso del testigo 1, donde la distancia entre el precio observado (42) y el extremo inferior del intervalo estimado (45,747) viene dado por la variable de holgura positiva ($\delta^+_0 = 3{,}747$), mientras que la distancia entre el precio observado y el extremo superior del intervalo estimado (46,828) aparece registrada por la suma de variables de desviación positivas ($\sum_{i=1}^{s} p_{i1} = p_{11} + p_{21} = 4{,}828$).

En el extremo opuesto se encuentran los testigos 6, 8, 10, 11, 12, 14 y 20, para los que se obtienen intervalos del precio estimado inferiores al precio observado. Por ejemplo, el testigo número 6, con un precio de 54 u.m., obtiene una estimación de [49’195, 49’816]. Siguiendo lo enunciado en la proposición 2, la diferencia entre el precio real y el límite superior del intervalo estimado viene reflejada en el valor de la variable de holgura negativa ($\delta^-_{23} = 4{,}184$), mientras que la distancia entre el precio observado y el límite inferior del intervalo estimado se calcula como:

$$\sum_{i=1}^{s} n_{i6} = n_{16} + n_{26} = 4{,}805$$

En el cuadro 3 también se ha incluido el valor del error para cada testigo, calculado según la expresión [24], a partir del cual se puede obtener el índice de adecuación del modelo:

$$I_a = \left(1 - \frac{z}{z'}\right) \times 100 = \left\{1 - \frac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ \neg\left(\delta^-_{2^{s}j-1} = \delta^+_{2^{s}(j-1)} = 0\right)}}^{T} \left| \frac{\delta^-_{2^{s}j-1} + \sum\limits_{i=1}^{s} n_{ij}}{2} + \frac{\delta^+_{2^{s}(j-1)} + \sum\limits_{i=1}^{s} p_{ij}}{2} \right|}{\sum\limits_{j=1}^{20} \left| y_j - \bar{y}_j \right|}\right\} \times 100 =$$

$$= \left(1 - \frac{30{,}782}{69{,}500}\right) \times 100 = 55{,}710 \qquad [24]$$

CUADRO 3

Resultados del programa lineal

Testigo	y	y_{min}	y_{max}	z	$\delta^{+}_{2^{s}(j-1)}$	$\delta^{-}_{2^{s}xj-1}$	$\sum_{i=1}^{2} p_{ij}$	$\sum_{i=1}^{2} n_{ij}$
1	42	45,747	46,828	4,287	3,747	0	4,828	0
2	50	54,172	54,713	4,443	4,172	0	4,713	0
3	51	51,011	51,402	0,207	0,011	0	0,402	0
4	49	49,862	50,483	1,172	0,862	0	1,483	0
5	47	47,000	47,310	0	0	0	0,310	0
6	54	49,195	49,816	4,494	0	4,184	0	4,805
7	58	58,000	59,241	0	0	0	1,241	0
8	52	51,552	51,862	0,293	0	0,138	0	0,448
9	53	55,149	55,701	2,425	2,149	0	2,701	0
10	57	54,460	55,080	2,230	0	1,920	0	2,540
11	62	61,356	61,977	0,333	0	0,023	0	0,644
12	54	51,954	53,195	1,425	0	0,805	0	2,046
13	53	54,793	55,333	2,063	1,793	0	2,333	0
14	50	47,149	47,770	2,540	0	2,230	0	2,851
15	49	52,885	53,885	4,385	3,885	0	4,885	0
16	56	55,701	56,253	0	0	0	0,253	0,299
17	54	53,379	54,000	0	0	0	0	0,621
18	59	58,609	59,000	0	0	0	0	0,391
19	50	49,563	50,494	0	0	0	0,494	0,437
20	55	54,207	54,828	0,483	0	0,172	0	0,793

5. Resumen y conclusiones

El objeto de este trabajo ha sido proponer métodos comparativos de valoración que permitan combinar información precisa e imprecisa. En el campo profesional de la valoración resulta habitual encontrar situaciones en las que la información viene determinada no de manera exacta y cierta, sino en ambiente de incertidumbre. Esto es particularmente habitual en el caso de la información cualitativa, con ejemplos de variables en el campo agrario como el riesgo de helada o la calidad del suelo, que deben ser cuantificadas para su incorporación a un proceso matemático de valoración, y donde por lo general se les adjudica un valor determinado y preciso. A nuestro juicio, resulta mucho más natural asignarles un intervalo de valores que refleje adecuadamente el grado de incertidumbre con el que el experto o valorador realiza la transformación de información cualitativa a información cuantitativa.

En este sentido, la metodología que aquí presentamos modeliza, a diferencia de los métodos tradicionales como los sintéticos o el econométrico, situaciones que combinen información precisa e imprecisa. Y para ello se ha utilizado la técnica matemática de programación por metas, que permite considerar variables en forma de intervalo, además de determinar a priori el signo de las variables explicativas.

En el presente artículo hemos diferenciado dos situaciones, de las que se obtienen, a su vez, dos modelos de valoración diferentes. La primera situación, asociada a los casos donde únicamente la información del precio viene expresada en forma de intervalo, y cuya utilización práctica se circunscribe a mercados poco transparentes. La segunda, donde son las variables explicativas relevantes desde un punto de vista valorativo cuyos valores adoptan forma de intervalo, como son los casos en que se maneja información de tipo cualitativo, o donde la información cuantitativa no se conoce con certeza o está asociada a continuas oscilaciones temporales.

Para esta última situación, se presenta un modelo que facilita una completa información sobre el grado de satisfacción del precio observado. Así, mediante la inclusión de un número determinado de variables de desviación y holgura, el programa lineal planteado informa de si el intervalo estimado incluye al precio observado o, en caso de no hacerlo, el error cometido en la estimación.

También se ha presentado un índice de adecuación con el que medir el grado de ajuste entre la función de valoración obtenida con los modelos y la muestra de testigos. Dicho índice compara la precisión de la función que se obtendría de aplicar un modelo *naive*, donde el precio estimado coincidiera con el promedio en el precio observado, con la producida por los modelos aquí considerados.

Nos parece necesario señalar que aunque teóricamente el número de restricciones y, por tanto, el tamaño del programa lineal sea de $2^s j$, en la práctica profesional se manejarán problemas tratables desde un punto de vista computacional, pues no es habitual operar con muestras con gran número de testigos ni con excesivo número de variables definidas como intervalo.

Queda pendiente el desarrollo de aplicaciones informáticas de interfaz amigable, que faciliten la implementación de los modelos aquí propuestos y su introducción en el ámbito profesional de la valoración.

Bibliografía

Aznar, J. y Guijarro, F. (2005). «Métodos de valoración basados en la programación por metas: Modelo de valoración restringido». *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros.* En prensa.

Ballestero, E. (1973). «Nota sobre un nuevo método rápido de valoración». *Revista de Estudios Agrosociales*, **85:**75-78.

Bassett, G. y Koenker, R. (1978). «Asymptotic theory of least absolute error regression». *Journal of the American Statistical Association*, **73:**618-622.

Bassett, G.W. (1997). «Robust Sport Ratings Based on Least Absolute Errors». *The American Statistician,* **51**(2):99-105.

Caballer, V. y Moya, I. (1998). «Valoración bursátil de empresas agroalimentarias». *Investigación Agraria: Economía,* **9**(3):319-344.

Charnes, A. y Collomb, B. (1972). «Optimal economic stabilization policy: linear goal-interval programming models». *Socio-Economic Planning Sciences,* **6:**431-435.

Charnes, A.; Cooper, W.W. y Ferguson, R.O. (1955). «Optimal estimation of executive compensation by linear programming». *Management Science,* **1:**138-150.

Dielman, T. (1986). «A comparison of forecasts from least absolute value and least squares regression». *Journal of Forecasting,* **5**(3):189-195.

García, J.; Cruz, S. y Rosado, Y. (2002). «Extensión multi-índice del método beta en valoración agraria». *Economía Agraria y Recursos Naturales,* **2**(2):3-26.

García, J.; Herrerías, R. y García, L.B. (2003). «Valoración agraria: contrastes estadísticos para índices y distribuciones en el método de las dos funciones de distribución». *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros,* **199:**93-118.

García, J.; Trinidad, J.E. y Gómez, J. (1999). «El método de las dos funciones de distribución: la versión trapezoidal». *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros,* **185:**57-81.

Hunt, J.G.; Dowling, J.M. y Glake, F.R.L. (1974). «L_1 estimation in small samples with Laplace error distributions». *Decision Sciences*, **5**(1):22-29.

Jones, D.F. y Tamiz, M. (1995). «Expanding the Flexibility of Goal Programming via Preferente Modelling Techniques». *Omega*, **23**(1):41-48.

Juliá, J.F.; del Campo, F.J. y Sales, J.M. (2001). «La gestión y organización de empresas agrarias y alimentarias en España. Su estudio y avances metodológicos en la década de los noventa». En Álvarez, A. (Coord) *Economía Agraria y Recursos Naturales. Nuevos enfoques y perspectivas*. Ed. Asociación Española de Economía Agraria, pp. 175-194.

Romero, C. (1991). *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press, Oxford.

Romero, C. (2004). «A general structure of achievement function for a goal programming model». *European Journal of Operational Research*, **153:**675-686.

Rosenberg, B. y Carlson, D. (1977). «A simple approximation of the sampling distribution of least absolute residual regression estimates». *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **B6:**421-438.

Vitoriano, B. y Romero, C. (1999). «Extended interval goal programming». *Journal of Operational Research Society,* **50**(12):1280-1283.