



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ETS INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

TRABAJO DE FIN DE MASTER

Análisis crítico del método de la impronta/LIR para el cálculo dinámico de puentes de ferrocarril de alta velocidad ante el paso de composiciones regulares: aplicación al proyecto de estructuras isostáticas de distintas luces.

Presentado por

Martí Grau, Víctor

Para la obtención del

Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Curso: 2017/2018

Fecha: Mayo de 2018

Tutor: Museros Romero, Pedro

Cotutor: -

Índice

1. Introducción y objetivos	1
2. Antecedentes y resumen de la bibliografía empleada	5
3. Bases matemáticas del método LIR.....	7
4. Descripción de los modelos de carga, métodos de cálculo analíticos y parámetros utilizados	16
5. Resultados I: Análisis de la validez del método LIR.....	21
6. Resultados II: Definición de nuevos trenes	28
7. Aplicación al proyecto de puentes isostáticos	39
8. Análisis de trenes convencionales	54
9. Conclusiones	65
10. Referencias bibliográficas	69
Anexo 1. Estudio de la cancelación por superposición	71
Anexo 2. Simplificación de la impronta para trenes elementales	75
Anexo 3. Planos del paso inferior P.K. 25+240 Benalmádena	80

Capítulo 1. Introducción y objetivos

Desde la aparición de las líneas de ferrocarril de alta velocidad se han creado diversos métodos de cálculo, modelos de carga, y normativas de acciones, con el fin de predecir los efectos dinámicos de trenes de alta velocidad sobre puentes. Así, el eurocódigo de acciones en estructuras establece la velocidad de paso de trenes en 200 km/h como umbral antes del cual el cálculo dinámico no es necesario para los puentes con características no singulares.

Detrás de este umbral se encuentra la asunción general de que los efectos dinámicos, en particular la aceleración de la estructura, serán siempre lo suficientemente bajos como para ignorarlos en los puentes comunes, cuando no se sobrepase tal umbral de velocidad.

Sin embargo, se tiene conocimiento de que el cálculo dinámico de algunos trenes sobre *puentes isostáticos* de entre 10 y 15 m prevé aceleraciones elevadas para velocidades en el entorno de 200 km/h sin ser estos puentes singulares en ninguna de sus características.

El interés del cálculo dinámico en velocidades alrededor de 200 km/h se fundamenta en la tendencia presente de mejorar los servicios ferroviarios mediante aumentos moderados en la velocidad de circulación sobre infraestructuras existentes, hasta límites no muy superiores a los mencionados 200 km/h. También resulta de interés para la construcción de nuevas líneas de velocidad moderadamente alta, con menores costes que las de alta velocidad.

Objetivos del trabajo

- ❖ Estudio de los métodos de cálculo dinámico utilizados en puentes simplemente apoyados, con comparación de las soluciones analíticas exactas obtenidas de publicaciones científicas contrastadas con los métodos de cálculo simplificado planteados en algunas normas de acciones.

En particular, el estudio incluye el desarrollo matemático del *método LIR* para mostrar el significado de los distintos términos que componen la expresión matemática del desplazamiento y la aceleración calculados con dicho método, ilustrando así las diferencias con el *método DER*, con el que comparte el concepto de *impronta dinámica* pero con diferente expresión.

- ❖ Análisis crítico de puentes isostáticos cortos ante el paso de *trenes regulares*, tratando de encontrar el origen de determinados casos en que se presentan aceleraciones elevadas bajo condiciones en que no es obligatorio el cálculo dinámico, y estudiar el contraste de estos resultados con los obtenidos con el modelo de cargas *HSLM-A*.

Para este análisis resulta de gran utilidad el concepto de *impronta dinámica* como representación de la “agresividad” del tren independientemente de la estructura.

- ❖ Comprobación de la aproximación del método LIR a la solución analítica exacta para los casos críticos estudiados.
- ❖ Definición de un nuevo modelo de trenes (HSLM-C), derivado del HSLM-A mediante los conocimientos obtenidos con los análisis realizados, que permita complementar el modelo de cargas en la norma *EN 1991-2* para cubrir el efecto de los trenes regulares en determinadas condiciones.

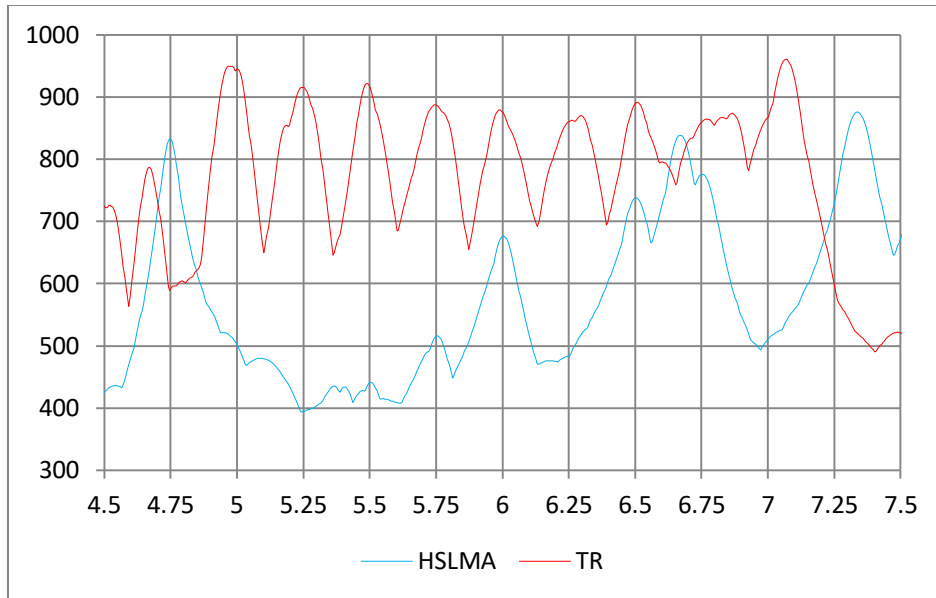


Figura 1.1. Fragmento de impronta (kN) de los modelos HSLM-A y trenes regulares, función de la longitud de onda (m), $\zeta=1.5\%$

- ❖ Utilizar los conocimientos y experiencia obtenidos durante el trabajo para definir un conjunto de *trenes convencionales* de “máxima agresividad dinámica”, que al tiempo que cumplen las limitaciones expuestas para estos trenes en la norma EN 1991-2 y los rangos geométricos habituales en la fabricación, reproducen el mismo fenómeno de alta aceleración sobre puentes isostáticos en velocidades cercanas a 200 km/h.
- ❖ Adaptar el modelo propuesto HSLM-C para cubrir al mismo tiempo los trenes regulares y los trenes convencionales generados.
- ❖ Análisis estructural detallado del puente P.K. 25+240 línea Málaga-Fuengirola, que complementa el estudio de los puentes críticos de distintas luces para cuantificar la importancia de los fenómenos estudiados y las diferencias entre los distintos trenes de carga en relación a los Estados Límite y a las magnitudes principales del cálculo estático.

El análisis estructural incluye la determinación de desplazamientos y esfuerzos principales para el cálculo estático y dinámico, utilizando los modelos de carga de la normativa en contraste con los trenes regulares estudiados y el nuevo modelo propuesto.

La aplicación a estos puentes permite demostrar que los fenómenos teóricos estudiados tienen repercusión en el proyecto de puentes isostáticos para líneas de ferrocarril de velocidad alta, y en la adecuación de estructuras existentes para un aumento de velocidad de la línea.

Capítulo 2. Antecedentes y resumen de la bibliografía empleada

El trabajo desarrollado se nutre de los planteamientos matemáticos generales de la dinámica de estructuras, y más concretamente los referidos al planteamiento dinámico de la viga de Bernoulli bajo una fuerza móvil y a su solución por superposición modal. Las expresiones matemáticas de estos problemas se han extraído del libro [1] *Dynamics of structures*. J. Humar. y de la tesis doctoral [2] *Interacción vehículo-estructura y efectos de resonancia en puentes isostáticos de ferrocarril para líneas de alta velocidad*. P. Museros.

La solución analítica exacta para las amplitudes modales de la vibración amortiguada de la viga de Bernoulli ha sido extraída del artículo [3] *Comments on "Vibration of simply supported beams under a single moving load: A detailed study of cancellation phenomenon"*. P. Museros, E. Moliner.

Para la comprensión de los fenómenos de cancelación y resonancia han sido de interés el artículo [4] *Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration*. P. Museros, E. Moliner, M.D. Martínez-Rodrigo. y la tesis doctoral [5] *Comportamiento dinámico de puentes de ferrocarril para tráfico de alta velocidad y reacondicionamiento mediante disipadores viscoelásticos pasivos*. E. Moliner. En particular, el estudio de la máxima resonancia y el concepto *factor de bogie* presentes en [4] han resultado muy importantes para alcanzar los objetivos de este trabajo.

El planteamiento que ha conducido al desarrollo matemático del método LIR ha seguido las líneas trazadas en la tesis doctoral [6] *Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia*. J. Domínguez., cuyas expresiones finales son correctas pero el desarrollo matemático es confuso en algunas partes; siendo ésta una de las razones para clarificar el desarrollo en este trabajo.

Los datos sobre la geometría habitual en fabricación de trenes convencionales provienen de la tesis doctoral [9] *Influencia del modelo de vehículo en la predicción del comportamiento a flexión de puentes isostáticos de ferrocarril para tráfico de alta velocidad*. A. Doménech.

Finalmente, los modelos de carga y condiciones relativas al cálculo y los trenes son las especificadas en las normas [7] *Eurocódigo 1: Acciones en estructuras. Parte 2: Cargas de tráfico en puentes*. UNE-EN 1991-2. y [8] *Instrucción de acciones a considerar en puentes de ferrocarril (2010)*. IAPF-07. Ministerio de Fomento.

Capítulo 3. Bases matemáticas del método LIR.

El método LIR (Línea de Influencia Residual) es uno de los métodos de cálculo simplificado para la estimación de desplazamientos y aceleraciones producidas sobre una viga isostática al paso de un tren de cargas puntuales. El origen del método se encuentra en un informe del comité ERRI D214 (1998); sin embargo la difícil accesibilidad de ese documento y la confusión que produce ver diferentes formulaciones en otras publicaciones o normas que aparentemente refieren a una misma cosa, justifican que sea de interés realizar el desarrollo matemático completo en este trabajo.

El método LIR se basa en el cálculo de la adición de las ondas desfasadas de la vibración libre que genera cada eje del tren al salir del puente. Como habitualmente lo que se busca es el valor máximo de la respuesta de la estructura, este proceder asume que la respuesta máxima en la vibración libre será una buena aproximación de la respuesta máxima en toda la historia de la vibración. Esta hipótesis se espera que sea acertada para las velocidades cercanas a la resonancia.

1. Desarrollo matemático del método LIR

El desarrollo empieza considerando la ecuación del desplazamiento en vibración libre de una sola carga al salir del puente, con la simplificación de bajo amortiguamiento que permite prescindir de los términos de segundo orden.

$$(I) \quad y(t) = \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} \left(\sin(\omega_0 t) e^{-\zeta\omega_0 t} + \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{L}{v}\right)\right) e^{-\zeta\omega_0 \left(t - \frac{L}{v}\right)} \right)$$

Donde “r” representa la velocidad adimensional, “F” la carga por eje, “M” la masa modal, “ ω_0 ” la frecuencia fundamental, “L” la longitud del puente, “v” la velocidad del tren, y “ ζ ” la fracción de amortiguamiento crítico.

La ecuación (I) representa una suma de senos amortiguados con un cierto desfase, y se puede expresar de forma más compacta:

$$(II.I) \quad y = \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} \sum_{i=1}^2 \left(\sin(\omega_0(t - t_i)) e^{-\zeta\omega_0(t-t_i)} \right)$$

Donde $t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{L}{v}$.

Operando los senos mediante el uso de exponenciales complejas, y extrayendo del sumatorio los factores comunes:

$$(II.II) \quad y = \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} e^{-\zeta\omega_0 t} \sum_{i=1}^2 \left(\sin(\omega_0 t - \omega_0 t_i) e^{\zeta\omega_0 t_i} \right) =$$

$$= \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} e^{-\zeta\omega_0 t} \sum_{i=1}^2 (e^{\zeta\omega_0 t_i} \operatorname{Im}\{e^{j\omega_0(t-t_i)}\}) =$$

$$= \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} e^{-\zeta\omega_0 t} \operatorname{Im}\left\{e^{j\omega_0 t} \sum_{i=1}^2 (\mu_i e^{\zeta\omega_0 t_i} e^{-j\omega_0 t_i})\right\}$$

El operador $\operatorname{Im}\{\}$ representa la parte imaginaria. En la ecuación (II) el tiempo t tiene su origen en el instante en que la carga entra en el puente, pero lo que se quiere conocer es la expresión de la vibración libre a partir del momento que abandona el puente. Por ello se introduce el cambio de variable $\tau = t - L/v$.

$$(III) \quad y = \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} \sum_{i=1}^2 \left(\sin\left(\omega_0\left(\tau + \frac{L}{v} - t_i\right)\right) e^{-\zeta\omega_0\left(\tau + \frac{L}{v} - t_i\right)} \right) =$$

$$= \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} e^{-\zeta\omega_0\tau} \operatorname{Im}\left\{e^{j\omega_0\tau} \sum_{i=1}^2 \left(e^{-\zeta\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)} e^{j\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)} \right)\right\}$$

Si "Z" representa el número complejo resultante del sumatorio que forma un ángulo " β " en el plano complejo, y desarrollando a partir de él en senos y cosenos, se puede formar el sistema:

$$(IV. I) \quad \sum_1^2 e^{-\zeta\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)} \cos\left(\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)\right) = |Z| \cos \beta$$

$$(IV. II) \quad \sum_1^2 e^{-\zeta\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)} \sin\left(\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)\right) = |Z| \sin \beta$$

Cuya solución es inmediata:

$$(V) \quad |Z| = \sqrt{\left(\sum_1^2 e^{-\zeta\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)} \cos\left(\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)\right)\right)^2 + \left(\sum_1^2 e^{-\zeta\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)} \sin\left(\omega_0\left(\frac{L}{v} - t_i\right)\right)\right)^2}$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (II.III):

$$(VI. I) \quad y = \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} |Z| \sin(\beta + \omega_0\tau) e^{-\zeta\omega_0\tau}$$

Desarrollando el sumatorio la expresión se puede simplificar notablemente utilizando la relación de la velocidad adimensional $r = \frac{\pi v}{\omega_0 L}$:

$$(VI. II) \quad y = \frac{-r}{1-r^2} \frac{F}{M\omega_0^2} \sqrt{e^{-2\zeta\frac{\pi}{r}} + 1 + 2e^{-\zeta\frac{\pi}{r}} \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)} \sin(\beta + \omega_0\tau) e^{-\zeta\omega_0\tau}$$

La ecuación (VI.II) representa exactamente la vibración libre del puente a partir del momento en que la carga sale de él cuando $\tau = 0$. Utilizando esta solución, se puede plantear la suma de las ondas de N cargas de un tren desfasadas según su distancia desde la cabeza del tren, tal que: $\tau_i = \frac{x_i}{v}$. Al igual que antes se ha planteado el cambio de variable τ para obtener la suma en el momento de salir la carga, ahora se plantea un cambio similar τ' para obtener la suma en el momento de salir la última carga del tren, tal que: $\tau' = \tau - \frac{x_N}{v}$.

$$(VII. I) \quad \Lambda = \frac{-r}{1-r^2} \frac{1}{M\omega_0^2} \sqrt{e^{-2\zeta\frac{\pi}{r}} + 1 + 2e^{-\zeta\frac{\pi}{r}} \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}$$

$$(VII. II) \quad y = \Lambda \sum_1^N F_i \sin\left(\beta + \omega_0\left(\tau' + \frac{x_N}{v} - \frac{x_i}{v}\right)\right) e^{-\zeta\omega_0\left(\tau' + \frac{x_N}{v} - \frac{x_i}{v}\right)}$$

Utilizando las mismas operaciones hechas en (III) y (IV), la solución de este sumatorio es:

$$(VIII. I) \quad y = \Lambda \sin(\beta + \gamma + \omega_0\tau') e^{-\zeta\omega_0\tau'}$$

$$\cdot \sqrt{\left(\sum_1^N F_i e^{-\zeta\frac{\omega_0}{v}(x_N - x_i)} \sin\left(\frac{\omega_0}{v}(x_N - x_i)\right)\right)^2 + \left(\sum_1^N F_i e^{-\zeta\frac{\omega_0}{v}(x_N - x_i)} \cos\left(\frac{\omega_0}{v}(x_N - x_i)\right)\right)^2}$$

Que se puede expresar de forma más compacta mediante las siguientes sustituciones: $\lambda = \frac{2\pi v}{\omega_0}$, $\delta_i = \frac{x_N - x_i}{\lambda}$, $\alpha = \beta + \gamma$.

$$(VIII. II) \quad y = \Lambda \sin(\alpha + \omega_0\tau') e^{-\zeta\omega_0\tau'}$$

$$\cdot \sqrt{\left(\sum_1^N F_i e^{-\zeta 2\pi\delta_i} \sin(2\pi\delta_i)\right)^2 + \left(\sum_1^N F_i e^{-\zeta 2\pi\delta_i} \cos(2\pi\delta_i)\right)^2}$$

La ecuación (VIII) representa la solución de la vibración libre producida por un tren de cargas en términos de desplazamientos. Para obtener la solución en aceleraciones basta con derivar dos veces el factor que depende del tiempo, obteniendo:

$$(IX) \quad e^{-\zeta\omega_0\tau'} (-2\zeta\omega_0^2 \cos(\alpha + \omega_0\tau') + (\zeta^2 - 1) \omega_0^2 \sin(\alpha + \omega_0\tau'))$$

En coherencia con la hipótesis inicial de amortiguamiento reducido, se puede demostrar que los valores máximos de la aceleración cumplen la siguiente relación respecto a los desplazamientos, en la vibración libre:

$$(X) \quad \ddot{y}_{\text{máx}} \approx -\omega_0^2 y_{\text{máx}}$$

Efectivamente, derivando e igualando a 0 la ecuación (IX) para obtener los valores máximos, y tras eliminar los términos de amortiguamiento de orden superior a uno, se llega a la ecuación:

$$(XI.I) \quad 3\zeta\omega_0^3 e^{-\zeta\omega_0\tau'} \sin(\alpha + \omega_0\tau') - \omega_0^3 e^{-\zeta\omega_0\tau'} \cos(\alpha + \omega_0\tau') = 0$$

De esta ecuación se extrae que todos los puntos que representen extremos relativos en la función de aceleraciones han de cumplir la siguiente condición:

$$(XI:II) \quad \tan(\alpha + \omega_0\tau') = \frac{1}{3\zeta} \rightarrow \cos(\alpha + \omega_0\tau') = 3\zeta \sin(\alpha + \omega_0\tau')$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación (IX) se llega a:

$$\begin{aligned} (XII) \quad & \text{máx} \{e^{-\zeta\omega_0\tau'} (-2\zeta\omega_0^2 \cos(\alpha + \omega_0\tau') - \omega_0^2 \sin(\alpha + \omega_0\tau'))\} = \\ & = \text{máx} \{e^{-\zeta\omega_0\tau'} (-6\zeta^2\omega_0^2 \sin(\alpha + \omega_0\tau') - \omega_0^2 \sin(\alpha + \omega_0\tau'))\} \approx \\ & \approx \text{máx}\{-e^{-\zeta\omega_0\tau'} \omega_0^2 \sin(\alpha + \omega_0\tau')\} = -\omega_0^2 \cdot \text{máx}\{\sin(\alpha + \omega_0\tau') e^{-\zeta\omega_0\tau'}\} \end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la relación entre aceleración máxima y desplazamiento máximo, y se puede proceder a exponer el conjunto de ecuaciones que forman el método LIR tal como se expresan habitualmente.

Tal como se ha comentado anteriormente, el objetivo del método generalmente es encontrar el valor máximo de la respuesta de la estructura. Para ello, sería necesario determinar el valor de la fase inicial “ α ” en la ecuación (VIII) y a continuación hallar el instante de tiempo en que se alcanza el máximo de la oscilación, contabilizando de forma precisa el decaimiento que se produce desde el instante inicial. Sin embargo, es habitual prescindir de este proceder y establecer como aproximación que la fase inicial son $\pm \frac{\pi}{2}$ rad, de tal manera que el valor máximo se produce en el instante inicial. A este valor se le suele llamar “pseudo-amplitud” de la oscilación, y representa una cota superior del valor máximo del desplazamiento sin llegar a ser en exceso conservador, dados los bajos índices de amortiguamiento de los puentes de ferrocarril.

Además de la pseudo-amplitud, existe otra consideración habitual para hallar la respuesta máxima. Debido a que las ondas que genera cada eje pueden estar desfasadas de forma arbitraria, y las cargas por eje no tienen por qué ser las

mismas, es posible que se produzca la respuesta máxima para una combinación de ondas más pequeña que el tren completo. Para englobar esa posibilidad, se debe considerar un conjunto de N “subtrenes”, tantos como ejes, que son el resultado de ir añadiendo ejes uno por uno para formar cada subtren; el cálculo se debe realizar para todos los subtrenes y escoger el valor máximo obtenido.

Utilizando la aproximación de la pseudo-amplitud y el método de subtrenes, las expresiones del método LIR son las siguientes:

$$(XIII) \quad y_{\text{máx}} = C_{\text{desp}} \cdot A(r) \cdot G(\lambda), \quad \ddot{y}_{\text{máx}} = C_{\text{acel}} \cdot A(r) \cdot G(\lambda)$$

$$C_{\text{desp}} = \frac{1}{M\omega_0^2}, \quad C_{\text{acel}} = \frac{1}{M}, \quad M = \frac{1}{2}mL$$

$$(XIV) \quad A(r) = \frac{r}{1-r^2} \sqrt{e^{-2\zeta\frac{\pi}{r}} + 1 + 2e^{-\zeta\frac{\pi}{r}} \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}$$

$$(XV) \quad G(\lambda) = \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k F_i e^{-\zeta 2\pi\delta_i} \sin(2\pi\delta_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^k F_i e^{-\zeta 2\pi\delta_i} \cos(2\pi\delta_i) \right)^2} \right\}$$

$$\delta_i = \frac{(x_k - x_i)}{\lambda}$$

Se puede apreciar que se ha prescindido del signo negativo que aparece en las ecuaciones (VII.I) y (X), pues sólo interesa el valor absoluto de la respuesta.

La función A(r) se llama *línea de influencia* y tiene la particularidad de depender solamente de las características del puente, a través de la velocidad adimensional “r”. Esta función es singular en r = 1, pero ese caso representa velocidades reales muy superiores a las que alcanzan los trenes de alta velocidad actuales. A efectos de cálculo esta función realiza una ponderación de la acción dinámica de cada carga según su velocidad.

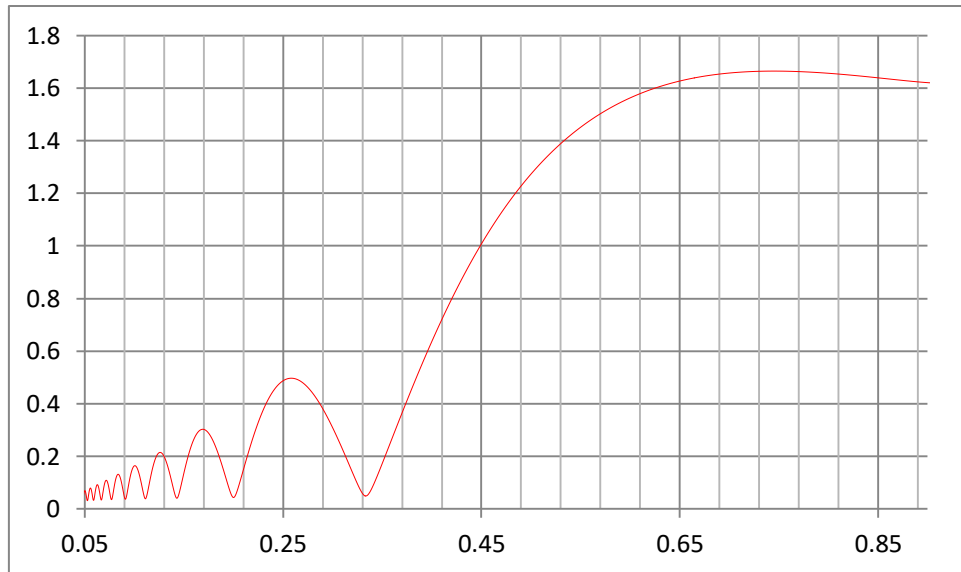


Figura 3.1. Línea de influencia según velocidad adimensional, $\zeta = 1.5\%$

La línea de influencia asigna una ponderación en general creciente con la velocidad, y además tiene una serie de máximos y mínimos relativos que representan los puntos de cancelación y máxima vibración libre de distintos órdenes.

La función $G(\lambda)$ se llama *impronta dinámica* y tiene la particularidad de depender sólo de las características del tren. Es en esta función donde se ha introducido la operación por subtrenes a través del operador “máximo”. La impronta es una representación espectral única para cada tren, y es además la que reproduce el fenómeno de resonancia. En el anexo 2 se ofrece una ecuación simplificada de la impronta para trenes elementales.

2. Impronta dinámica en la norma EN 1991-2

En el eurocódigo actualmente en vigor (Mayo de 2018) no se menciona el método LIR, sin embargo se propone una fórmula similar proveniente del método DER en el anexo E:

$$G(\lambda) = \max_{0 \leq k \leq N-1} \left\{ \frac{1}{\zeta_{X_k}} \sqrt{\left(\sum_{i=0}^k F_i \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^k F_i \cos\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) \right)^2} \left(1 - e^{-\frac{\zeta 2\pi x_k}{\lambda}} \right) \right\}$$

Pese a la similitud, las dos ecuaciones proporcionan distintos resultados incluso para amortiguamiento nulo. En el marco del método DER, esta fórmula proporciona una representación espectral del tren, y conceptualmente es igual a la impronta dinámica, pero su aplicación en el cálculo no es intercambiable.

En el caso de amortiguamiento nulo las dos expresiones están relacionadas de la siguiente manera:

$$G_{DER} = \frac{2\pi}{\lambda} G_{LIR}$$

Además, puede observarse otra diferencia, la impronta del método LIR considera el efecto del amortiguamiento de cada eje específicamente, mientras que el espectro del método DER sólo considera el amortiguamiento de forma general aplicado al conjunto de la oscilación.

3. Deducción del factor de bogie a través del método LIR

El factor de bogie es un concepto extraído de la ecuación (53) en el artículo de la referencia [4]. Este factor representa mediante un único valor numérico la magnitud del acoplamiento de las ondas que generan un conjunto de cargas iguales y equidistantes. Más concretamente, el factor de bogie es el valor por el que hay que multiplicar una de estas cargas para que por sí sola produzca la misma vibración libre que el conjunto de cargas considerado, para una velocidad concreta. Su expresión en la referencia [4] para un conjunto formado por dos cargas es:

$$(XVI) \quad f_B(j, b, d) = 2 \left| \cos \left(j\pi \frac{b}{d} \right) \right|$$

Donde “j” representa el orden de resonancia, “b” representa la separación entre el par de cargas, y “d” representa la longitud del coche asociada a la resonancia considerada.

La deducción a través del método LIR se puede realizar desarrollando la ecuación (XIII) en desplazamientos o en aceleraciones indistintamente. Se debe plantear la respuesta máxima que producen dos cargas iguales “F” separadas una distancia “b”, con el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= C_{\text{desp}} A(r) F \sqrt{\left(e^{-\zeta \frac{2\pi}{\lambda} b} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} b \right) \right)^2 + \left(e^{-\zeta \frac{2\pi}{\lambda} b} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} b \right) + 1 \right)^2} = \\ &= C_{\text{desp}} A(r) F \sqrt{1 + e^{-4\pi \zeta \frac{b}{\lambda}} + 2e^{-2\pi \zeta \frac{b}{\lambda}} \cos \left(2\pi \frac{b}{\lambda} \right)} \end{aligned}$$

Una carga equivalente que produzca el mismo efecto es:

$$y_{\max} = C_{\text{desp}} A(r) F_{\text{eq}}$$

Por tanto, igualando ambas expresiones se tiene:

$$F_{eq}(\lambda, b) = F \sqrt{1 + e^{-\zeta 4\pi \frac{b}{\lambda}} + 2e^{-\zeta 2\pi \frac{b}{\lambda}} \cos\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)}$$

Y el factor de bogie es por tanto:

$$(XVII. I) \quad f_B(\lambda, b) = \sqrt{1 + e^{-\zeta 4\pi \frac{b}{\lambda}} + 2e^{-\zeta 2\pi \frac{b}{\lambda}} \cos\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)}$$

Si se quiere expresar en función del orden de resonancia asociada a un tren con coches de longitud "d" sólo hay que sustituir la condición de resonancia en la longitud de onda $\lambda = d/j$:

$$(XVII. II) \quad f_B(j, b, d) = \sqrt{1 + e^{-\zeta 4\pi j \frac{b}{d}} + 2e^{-\zeta 2\pi j \frac{b}{d}} \cos\left(\frac{2\pi j b}{d}\right)}$$

Las ecuaciones (XVI) y (XVII) son totalmente equivalentes para amortiguamiento cero. La ecuación (XVI) tiene la ventaja de su sencillez mientras que la (XVII) ofrece precisión al permitir amortiguamiento.

Puede verse que el factor de bogie proporciona valores en el rango [0, 2]. La interpretación física de estos valores es, como ya se ha dicho, el grado de acoplamiento entre las ondas que generan las cargas. Un valor 0 implica que las cargas, a esa velocidad, tienen un desfase tal que las ondas al sumarse se anulan entre sí y producen un efecto de cancelación por superposición. En el anexo 1 se ofrece un estudio en profundidad sobre este fenómeno y su predicción. Un valor de 2 por otra parte implica que el acoplamiento entre ondas es total y produce una vibración máxima.

El factor de bogie por tanto es de enorme ayuda para el análisis y la interpretación de los efectos dinámicos que producen trenes de tipo articulado o convencional, porque proporciona una herramienta simple que permite reducir la complejidad de los efectos generados por los conjuntos de cargas de los bogies, resumiéndolos en un único valor numérico de fácil interpretación.

Capítulo 4. Descripción de los modelos de carga, métodos de cálculo analíticos y parámetros utilizados.

Los cálculos dinámicos, siguiendo el procedimiento de la norma EN 1991-2 se han realizado utilizando modelos de trenes de cargas puntuales.

Modelo HSLM-A

El modelo HSLM-A definido en la norma EN 1991-2 de 10 trenes articulados (A1, A2, ..., A10) con longitudes de coche entre 18 y 27 metros respectivamente, cargas por eje entre 170 y 210 kN de forma no ordenada, y empates de bogie entre 2 y 3.5 metros de forma no ordenada. Las locomotoras son las estándar de 3 metros de empate de bogie y 14 metros entre ejes de bogies.

Tren Universal	Nº coches intermedios	Long. coche (m)	Empate de bogie (m)	Carga por eje (kN)
A1	18	18	2.0	170
A2	17	19	3.5	200
A3	16	20	2.0	180
A4	15	21	3.0	190
A5	14	22	2.0	170
A6	13	23	2.0	180
A7	13	24	2.0	190
A8	12	25	2.5	190
A9	11	26	2.0	210
A10	11	27	2.0	210

Tabla 4.1. Características del modelo HSLM-A

Modelo TR

Un modelo de nueve trenes regulares semejantes al tren *Talgo AV* definido en la norma IAPF-07 con longitudes de coche entre 10 y 14 metros cada 0.5 metros. Es decir, se trata de trenes dobles simétricos con dos locomotoras enfrentadas en el eje de simetría. Este modelo utiliza unas locomotoras de 2.65 metros de empate de bogie y 11 metros entre ejes de bogie. La separación entre bogies de dos locomotoras consecutivas entorno al eje de simetría del tren es de 9.04 metros. La longitud del coche de acoplamiento es de 8.97 metros.

Tren Regular	Nº coches intermedios	Long. coche (m)	Carga por eje (kN)
R1	30	10.0	170
R2	30	10.5	170
R3	28	11.0	170
R4	28	11.5	170
R5	26	12.0	170
R6	26	12.5	170
R7	24	13.0	170
R8	24	13.5	170
R9	24	14.0	170

Tabla 4.2. Características del modelo de trenes regulares

Por su relevancia práctica, se hace notar que las características de los trenes regulares de este conjunto cumplen las limitaciones de validez del modelo HSLM especificadas en el anexo informativo E de la norma EN 1991-2.

Métodos de cálculo analíticos

La solución analítica exacta para la vibración de la viga de Bernoulli al paso de una carga móvil P a velocidad constante v por superposición modal puede consultarse en la referencia [1] y es una función del espacio y el tiempo $u(x, t)$.

$$(I) \quad u(x, t) = \sum \xi_n(t) \sin(n\pi x/L)$$

La solución de las funciones de amplitud modal $\xi_n(t)$ para una viga amortiguada se pueden consultar en la referencia [3]. La ecuación (II) representa la solución para vibración forzada i la ecuación (III) la solución para vibración libre.

$$(II) \quad \xi_n(t) = \frac{\xi_{n,st}}{(1-K_n^2)^2 + (2\zeta_n K_n)^2} \left\{ (1 - K_n^2) \sin(K_n \omega_n t) - 2\zeta_n K_n \cos(K_n \omega_n t) + K_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[\frac{2\zeta_n^2 + K_n^2 - 1}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t) + 2\zeta_n \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t) \right] \right\}$$

$$(III) \quad \xi_n(t) = \frac{\xi_{n,st}}{(1-K_n^2)^2 + (2\zeta_n K_n)^2} K_n e^{-\zeta_n \omega_n t} [C_n \cos(\omega_{dn} t) + D_n \sin(\omega_{dn} t)]$$

$$C_n = -2\zeta_n \cos(n\pi) + e^{-\frac{\zeta_n n\pi}{K_n}} \left[\frac{2\zeta_n^2 + K_n^2 - 1}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} \sin\left(\frac{n\pi}{K_n} \sqrt{1 - \zeta_n^2}\right) + 2\zeta_n \cos\left(\frac{n\pi}{K_n} \sqrt{1 - \zeta_n^2}\right) \right]$$

$$D_n = -\frac{2\zeta_n^2 + K_n^2 - 1}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} \cos(n\pi) + e^{-\frac{\zeta_n n\pi}{K_n}} \left[\frac{2\zeta_n^2 + K_n^2 - 1}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} \cos\left(\frac{n\pi}{K_n} \sqrt{(1 - \zeta_n^2)}\right) - 2\zeta_n \sin\left(\frac{n\pi}{K_n} \sqrt{(1 - \zeta_n^2)}t\right) \right]$$

$$q_{n,st} = \frac{2P}{mL\omega_n^2}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$$

$$K_n = \frac{n\pi v}{\omega_n L}$$

Donde L es la longitud de la viga, m la masa por unidad de longitud, n indica el modo de vibración, y ω_n representa la frecuencia modal.

La solución para aceleraciones se obtiene simplemente derivando dos veces respecto al tiempo las funciones de amplitud modal.

Para el método LIR y sus parámetros derivados se han utilizado las soluciones del capítulo 3.

Puentes críticos

Para el análisis de los efectos dinámicos de los trenes elegidos, especialmente la aceleración, se han empleado un conjunto de puentes isostáticos críticos cuyas características se han deducido mediante las siguientes reglas:

- La longitud del puente ha de ser tal que se cumpla la condición de máxima resonancia de segundo orden para un tren con longitud de coche determinada asociado a ese puente crítico, de acuerdo con los valores de la referencia [4].
- La frecuencia fundamental del puente ha de estar dentro de los límites que marca la norma EN 1991-2 en la figura 6.10, un 33% por encima del límite inferior, de tal manera que se considere un puente de rigidez media.
- El amortiguamiento es el que especifica la norma para puentes de hormigón pretensado.
- La masa lineal sigue la siguiente relación: $m = 13\,800 + 200L$. Considerando las fronteras definidas en la referencia [9] al respecto, esta ecuación representa puentes moderadamente ligeros pero lo suficientemente alejados del extremo para que puedan considerarse valores representativos en puentes habituales.

Con todo, se pueden definir nueve puentes críticos cada uno asociado a un tren regular.

Puentes Críticos	Longitud (m)	Masa lineal (kg)	Frec. fundamental (Hz)	Amortiguamiento (%)
PC1	9.80	15 760	11.17	1.7140
PC2	10.29	15 858	10.71	1.6797
PC3	10.78	15 956	10.28	1.6454
PC4	11.27	16 054	9.89	1.6111
PC5	11.76	16 152	9.53	1.5768
PC6	12.25	16 250	9.20	1.5425
PC7	12.74	16 348	8.89	1.5082
PC8	13.23	16 446	8.61	1.4739
PC9	13.72	16 544	8.34	1.4396

Tabla 4.3. Características de puentes críticos

Metodología de análisis

La primera parte del análisis realizado consiste en el cálculo de aceleraciones en los puentes críticos debido al paso del tren regular asociado y en contraste con la envolvente de aceleraciones de los trenes del modelo HSLM-A. El cálculo se realiza en un amplio rango de velocidades centrado en 200 km/h, pues es este entorno en el que se quiere verificar la existencia de casos en los que la aceleración alcanzada por los trenes regulares es superior a la del modelo propuesto en la normativa.

Los cálculos se realizan mediante la solución analítica exacta de las ecuaciones (I) a (III) expuestas en este capítulo, para el primer modo de vibración y con un paso de tiempo $T_0/50$, siendo T_0 el periodo fundamental de vibración. La elección de un solo modo de vibración está justificada por el estudio de la influencia de otros modos de vibración en sendas pruebas preliminares, que han demostrado su poca relevancia en la determinación de la respuesta máxima tanto en aceleraciones como en desplazamientos en situación de resonancia.

Los cálculos anteriores se complementan con la estimación de aceleración máxima que proporciona el método LIR, permitiendo al mismo tiempo verificar la aproximación y validez del método en casos críticos y demostrar la discrepancia mencionada entre los modelos TR y HSLM-A.

La segunda parte del análisis consiste en hallar el origen de dicha discrepancia y, con ayuda de las ecuaciones de análisis simplificado como la impronta y el factor de bogie, definir un nuevo modelo que se adapte mejor en ese rango de velocidades. Para estos cálculos se emplea un amortiguamiento estándar del 1.5%, por ser representativo del tipo de puentes sobre el que versa este trabajo.

Con el nuevo modelo se repiten los cálculos referentes a puentes críticos para comprobar que es efectivamente una solución satisfactoria del problema original.

Capítulo 5. Resultados I: Análisis de la validez del método LIR

Siguiendo la metodología de cálculo expuesta en el capítulo 4, para cada puente y cada tren se realizan sendos cálculos dinámicos a distintas velocidades, cubriendo el rango de velocidades de interés con una resolución adecuada: 0.36 km/h. Para cada velocidad se extrae el valor máximo de aceleración de toda la historia de la respuesta, incluyendo tres ciclos de vibración libre.

A continuación se representan estos resultados en gráficos de aceleración ($m\ s^{-2}$) según velocidad ($km\ h^{-1}$) para cada puente crítico. Los gráficos incluyen la curva de la envolvente generada por los trenes del modelo HSLM-A y la curva generada por el tren regular asociado al puente crítico, tanto el resultado del cálculo analítico (línea continua) como el del método LIR (línea discontinua).

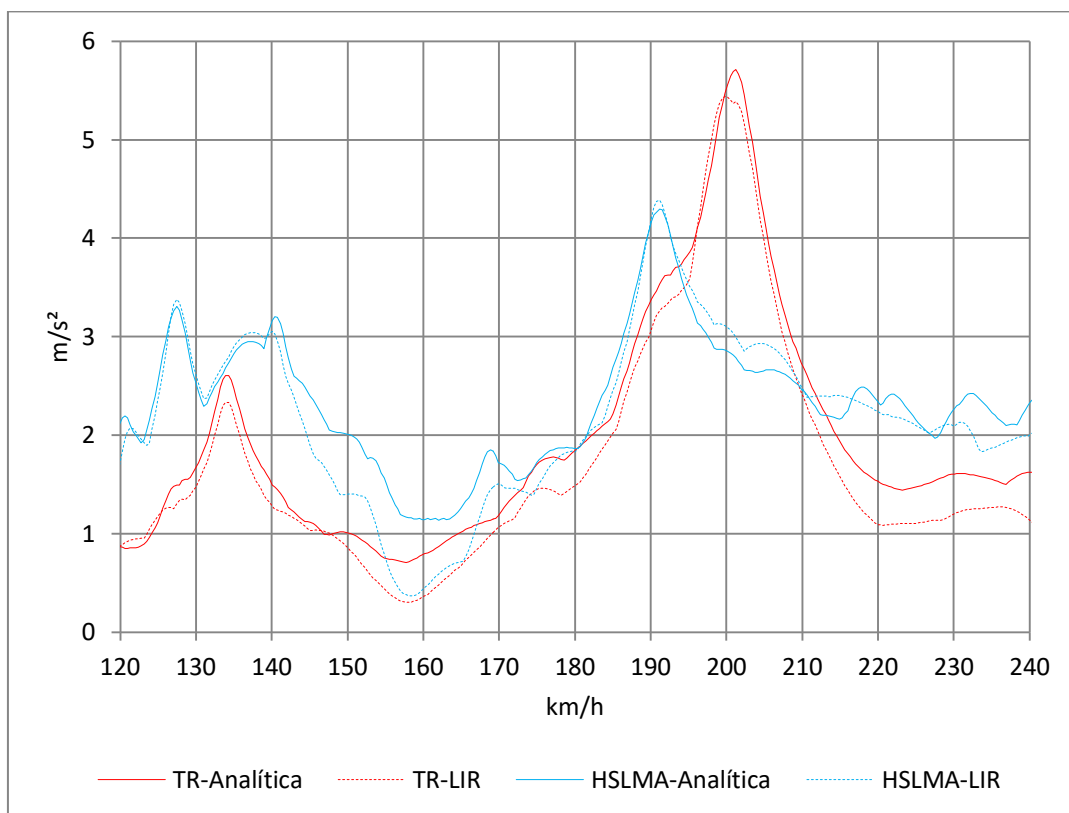


Figura 5.1. Puente crítico 1, tren regular con 10.0 m de longitud de coche

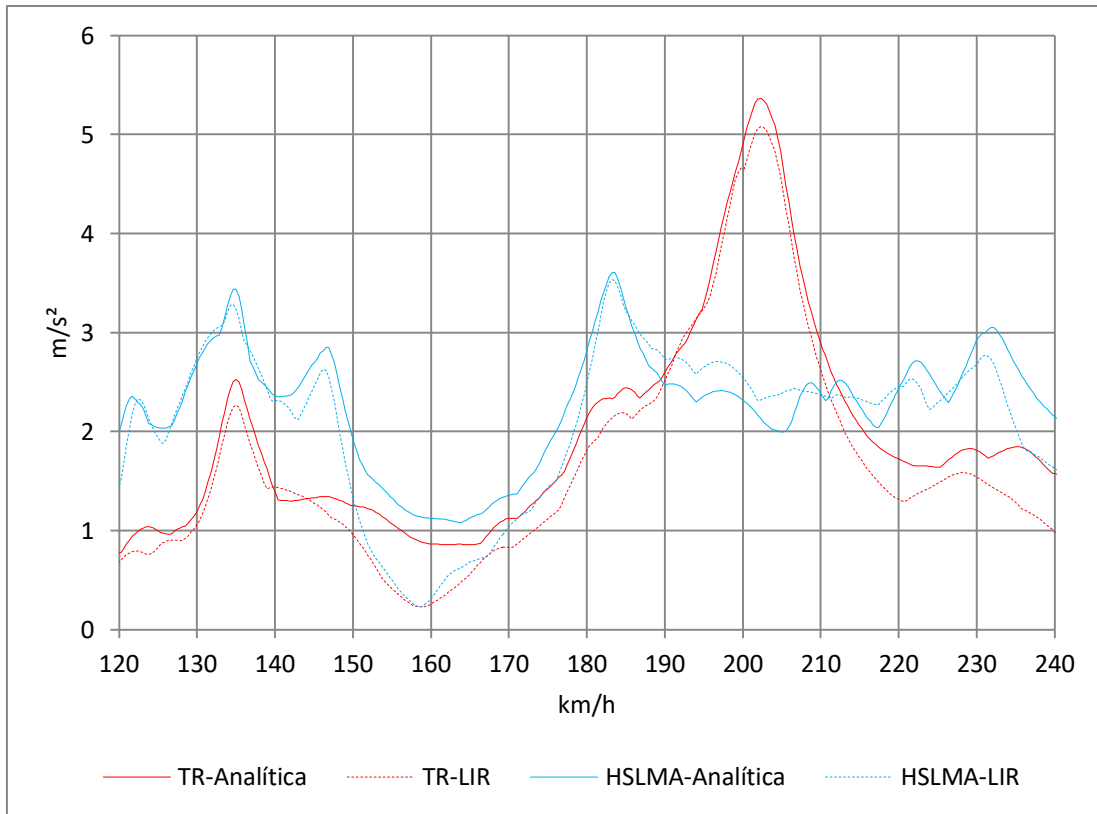


Figura 5.2. Puente crítico 2, tren regular con 10.5 m de longitud de coche

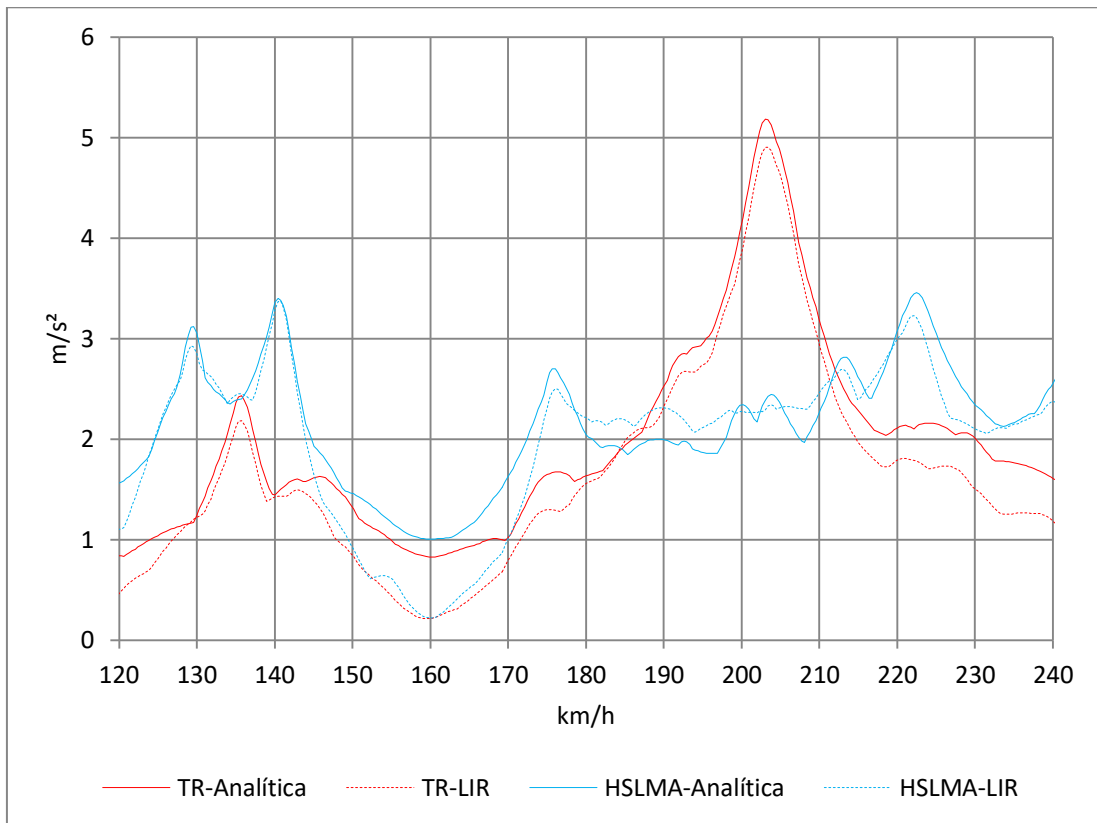


Figura 5.3. Puente crítico 3, tren regular con 11.0 m de longitud de coche

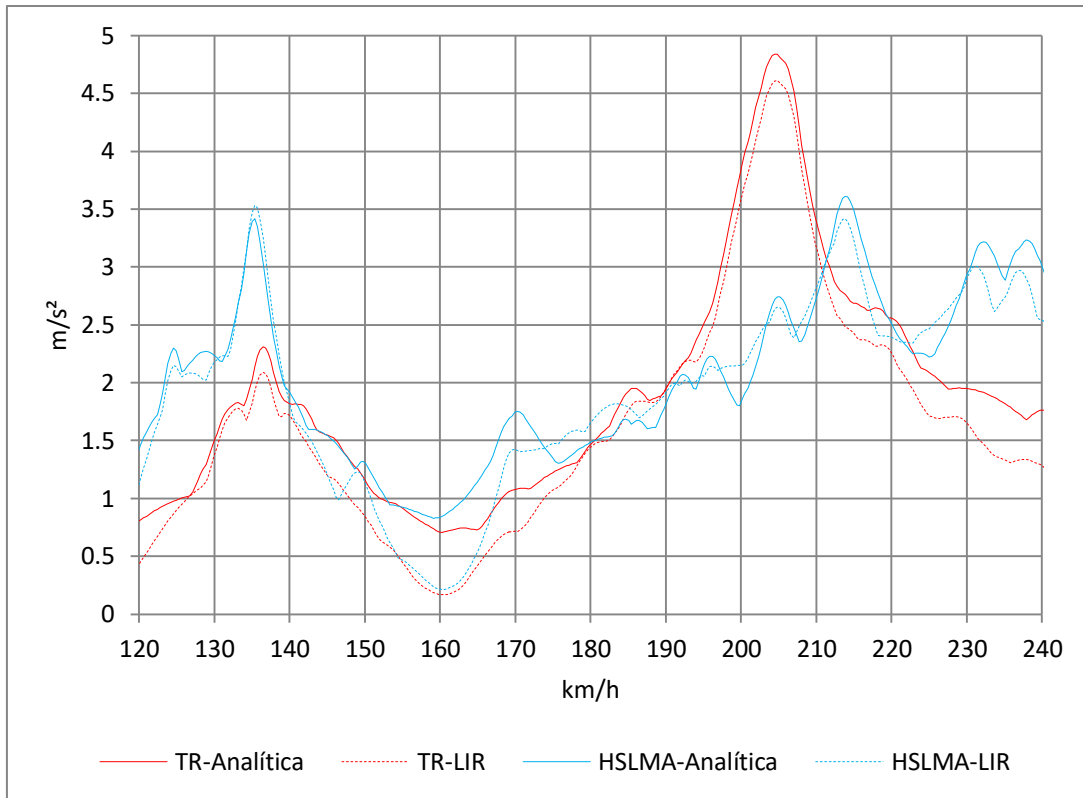


Figura 5.4. Puente crítico 4, tren regular con 11.5 m de longitud de coche

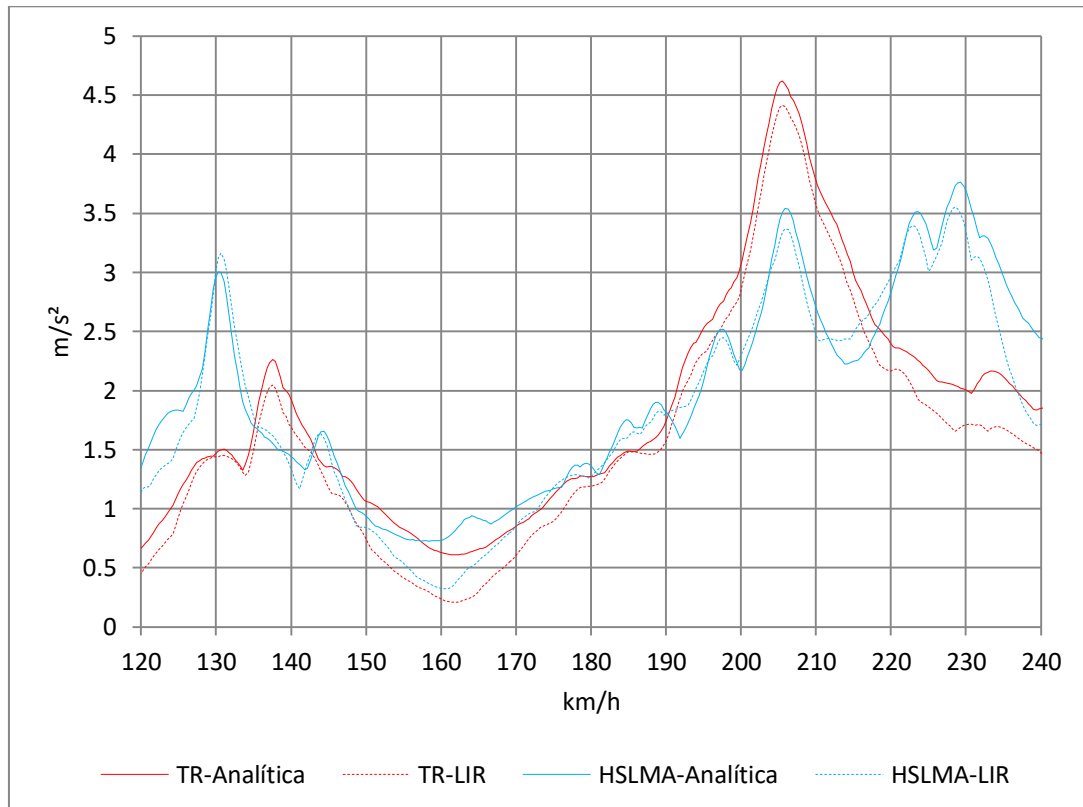


Figura 5.5. Puente crítico 5, tren regular con 12.0 m de longitud de coche

Resultados I: Análisis de la validez del método LIR.

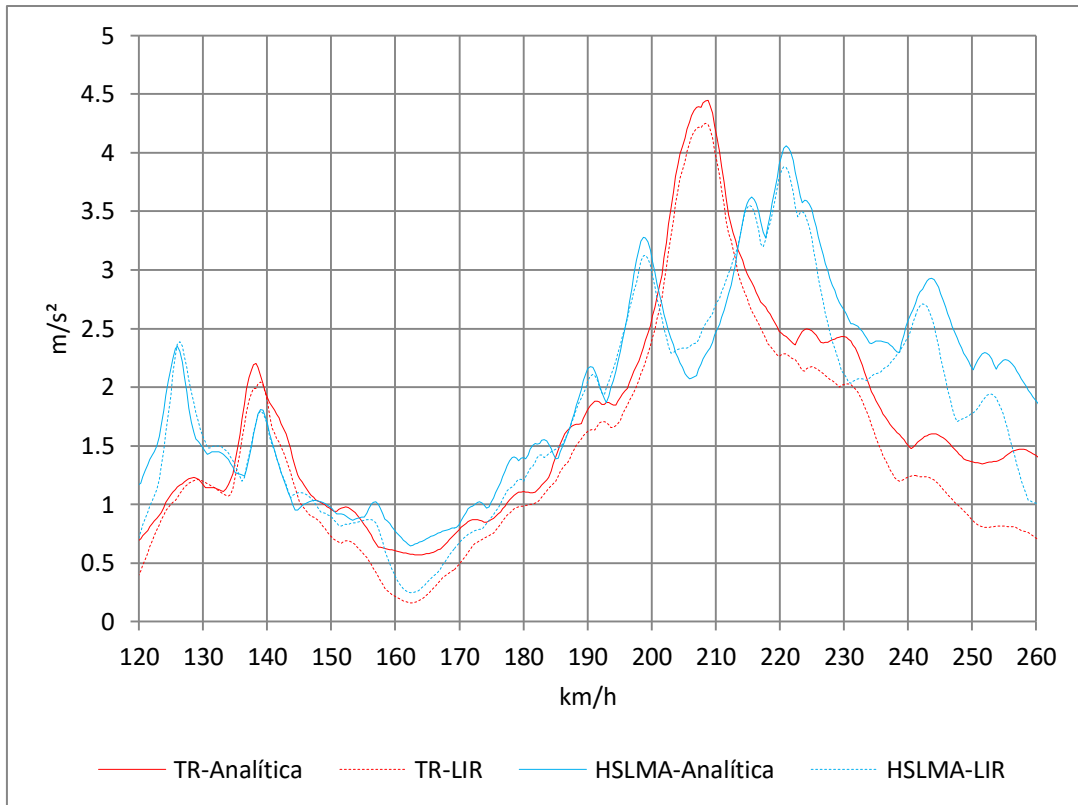


Figura 5.6. Puente crítico 6, tren regular con 12.5 m de longitud de coche

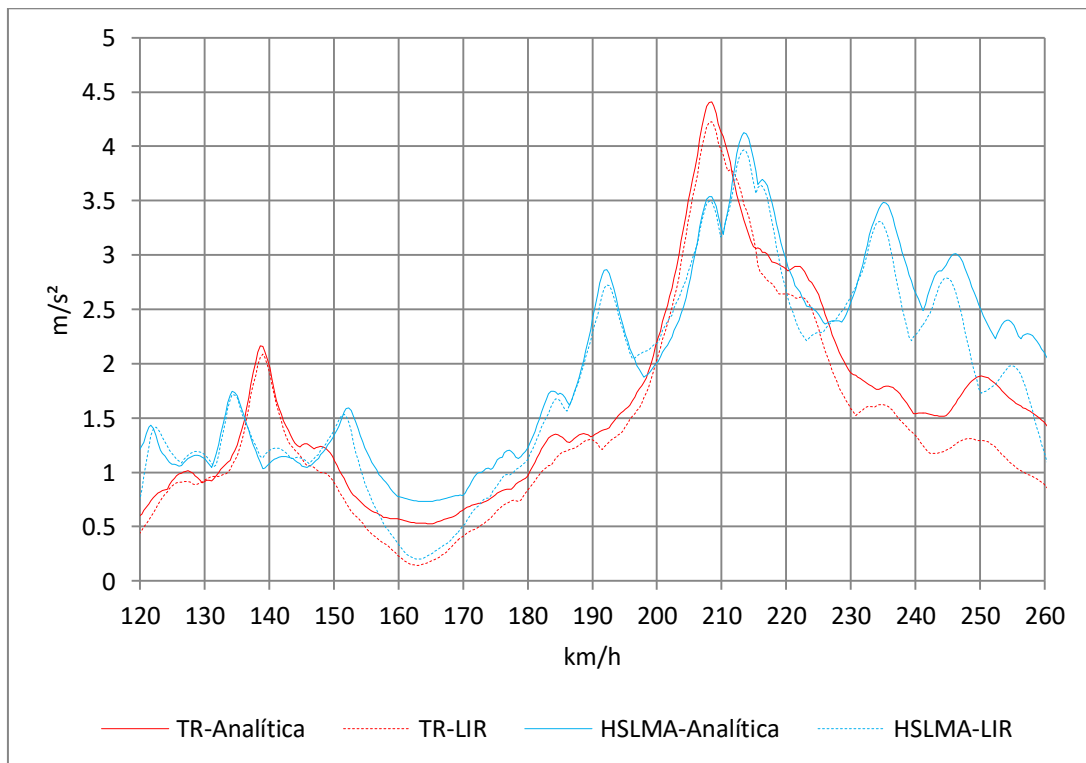


Figura 5.7. Puente crítico 7, tren regular con 13.0 m de longitud de coche

Resultados I: Análisis de la validez del método LIR.

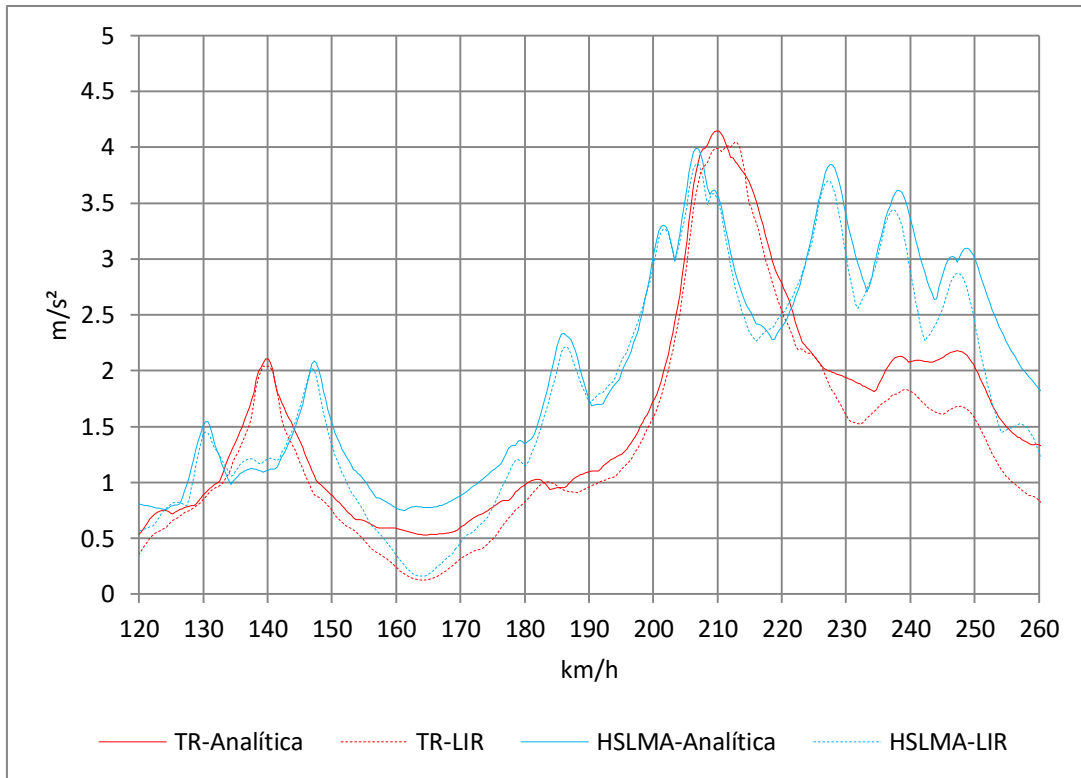


Figura 5.8. Puente crítico 8, tren regular con 13.5 m de longitud de coche

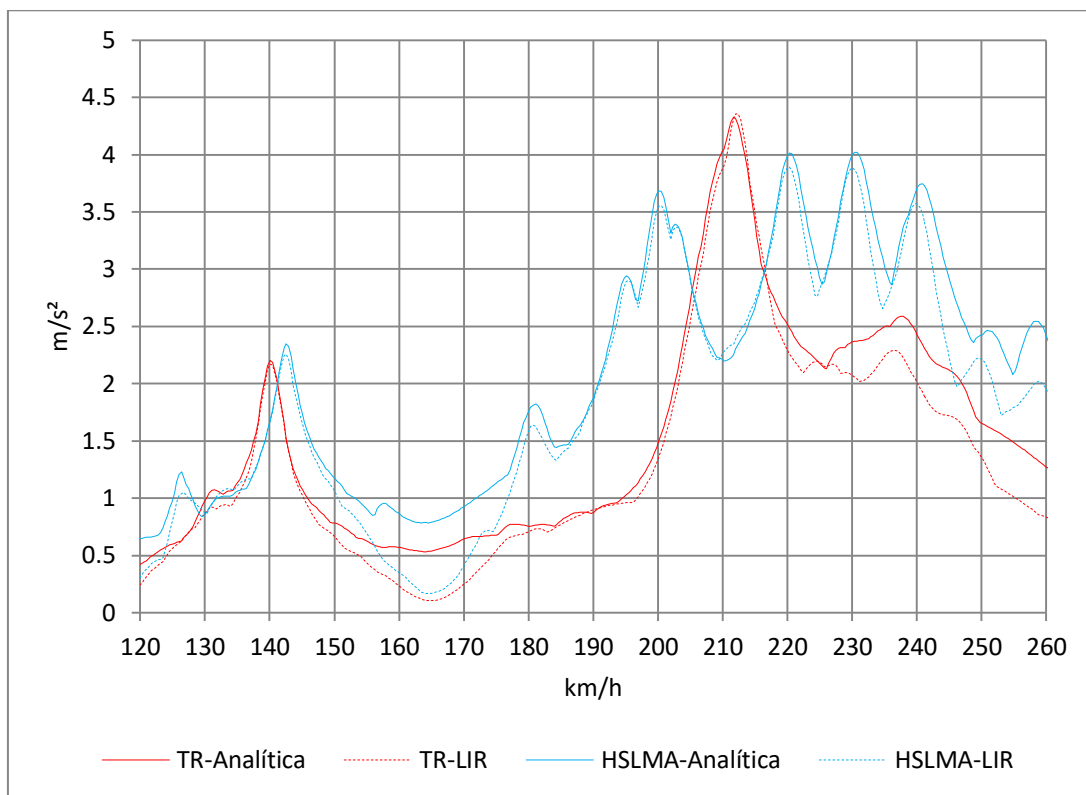


Figura 5.9. Puente crítico 9, tren regular con 14.0 m de longitud de coche

Las anteriores figuras demuestran que las aceleraciones máximas que proporciona el método LIR son una buena aproximación en el entorno de velocidades de resonancia, con desviaciones máximas alrededor del 5%.

Puentes Críticos	Aceleración máxima modelo TR (m/s ²)	Aceleración máxima modelo HSLM-A (m/s ²)	Porcentaje de exceso sobre HSLM-A
PC1	5.70	4.30	32.6 %
PC2	5.37	3.61	48.8 %
PC3	5.18	3.44	50.6 %
PC4	4.82	3.59	34.3 %
PC5	4.61	3.73	23.6 %
PC6	4.44	4.06	9.4 %
PC7	4.41	4.13	6.8 %
PC8	4.14	3.99	3.8 %
PC9	4.33	4.02	7.7 %

Tabla 5.1. Valores máximos de aceleración y porcentaje de exceso sobre HSLM-A

Además muestran que en cinco de los nueve puentes críticos los trenes regulares producirían aceleraciones entre un 23 y un 51% superiores a las que proporciona el modelo HSLM-A, en velocidades cercanas a los 200 km/h. Estas aceleraciones máximas son en algunos casos notablemente superiores al límite establecido para el servicio en la normativa vigente (3.43 m/s²) y por tanto representa un problema de interés práctico.

No obstante, para los trenes regulares entre 12.5 y 14 m las diferencias con el modelo HSLM-A son pequeñas y sin relevancia práctica.

Capítulo 6. Resultados II: Definición de nuevos trenes

Los resultados del capítulo 5 muestran que el método LIR es fiable para el análisis de puentes críticos y que el modelo HSLM-A podría no cubrir los efectos dinámicos de trenes regulares en velocidades cercanas a 200 km/h, que corresponden a resonancia de segundo orden de estos últimos.

Puesto que el método LIR reproduce el mismo suceso, éste debe ser visible en la impronta. Para eliminar la dependencia de los parámetros del puente, se expresa la impronta en función de la longitud de onda. El intervalo que corresponde a resonancia de segundo orden es [5, 7] metros, y la resolución es de 0.005 metros.

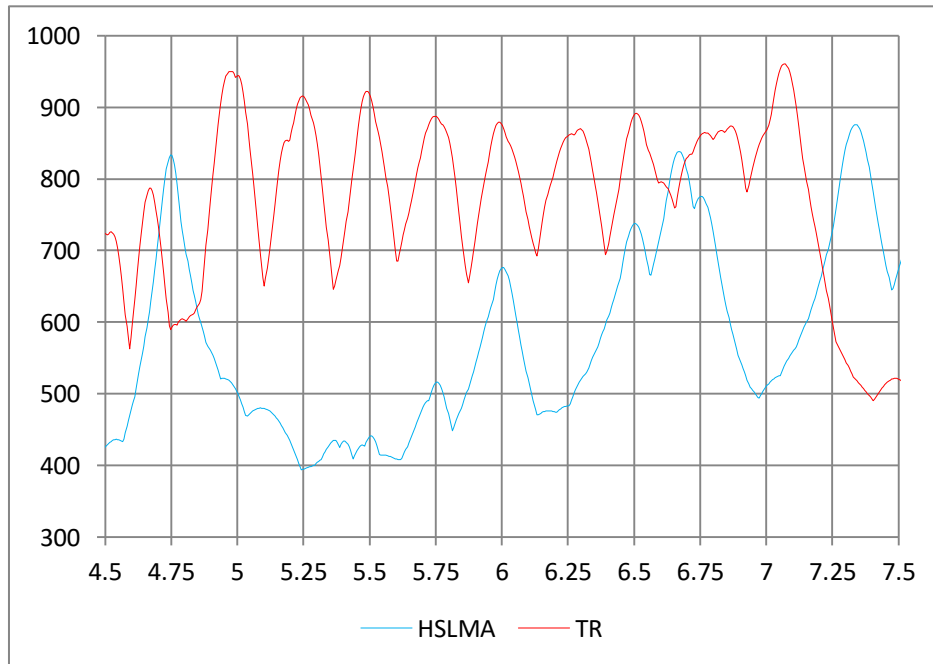


Figura 6.1. Fragmento de impronta (kN) de los modelos HSLM-A y TR, en función de la longitud de onda (m), $\zeta = 1.5 \%$

Puede verse que existe una depresión en la impronta del modelo HSLM-A en el intervalo de 4.75 a 6 m, que sin embargo se recupera a partir de ese punto. Esto explica por qué los trenes regulares a partir de 12.5 m de longitud de coche sí quedan cubiertos por el modelo HSLM-A según los resultados vistos en el capítulo 5.

La razón de que dos puntos con similar valor de impronta separados una cierta longitud de onda no proporcionen similares aceleraciones se encuentra en el efecto ponderador de la *línea de influencia*. Los puentes críticos se han elegido para producir máxima resonancia con sus trenes regulares asociados, condición que equivale a decir que dichos trenes tienen su velocidad de resonancia justo en un punto máximo de la línea de influencia, mientras que otro tren cuya resonancia se encuentre ligeramente desplazada se verá ponderado de forma inferior.

Por todo lo expuesto, es necesario encontrar un nuevo modelo que complemente al HSLM-A en el intervalo de longitudes de onda indicado en la figura 6.1, cuya impronta alcance la del modelo TR en cada pico de resonancia, evitando así que la línea de influencia actúe desfavorablemente en el cálculo de la aceleración en última instancia.

Modelo HSLM-C

El modelo HSLM-C es el nombre con el que se ha elegido llamar a un conjunto de trenes articulados derivados del HSLM-A con el propósito de ajustarse a la impronta de los trenes regulares tratando de minimizar las modificaciones sobre los trenes actuales de la normativa.

La razón de construir el nuevo modelo sobre la base del HSLM-A es, fundamentalmente, que se ha podido demostrar a través del factor de bogie que la depresión del modelo HSLM-A vista en la figura 6.1 se debe a la interferencia destructiva entre las ondas de los ejes de cada bogie. Por lo tanto se plantea que la solución más sencilla es plantear un modelo igual al HSLM-A excepto por los empates de bogie, que deben calcularse para ajustar la impronta al modelo TR utilizando el factor de bogie como principal herramienta.

En la tabla 6.1 se exponen los factores de bogie y longitudes de onda correspondientes a distintos órdenes de resonancia para los trenes del modelo HSLM-A.

Tren	λ_3 (m)	$f_{B,3}$	λ_4 (m)	$f_{B,4}$	λ_5 (m)	$f_{B,5}$
A1	6.00	0.985	4.50	0.343	3.60	0.342
A2	6.33	0.325	4.75	1.310	3.80	1.858
A3	6.67	1.159	5.00	0.608	4.00	0.046
A4	7.00	0.438	5.25	0.436	4.20	1.207
A5	7.33	1.293	5.50	0.817	4.40	0.282
A6	7.67	1.349	5.75	0.906	4.60	0.401
A7	8.00	1.398	6.00	0.985	4.80	0.509
A8	8.33	1.159	6.25	0.608	5.00	0.046
A9	8.67	1.481	6.50	1.120	5.20	0.697
A10	9.00	1.516	6.75	1.178	5.40	0.779

Tabla 6.1. Factores de bogie (HSLM-A) para resonancia de orden 3,4 y 5; $\zeta = 1.5\%$

Como puede verse en la tabla 6.1, además de la interferencia destructiva, los factores de bogie también permiten explicar por qué la impronta del modelo HSLM-A se incrementa de nuevo a partir de $\lambda > 6.25$ m.

Sobre esta base se ha definido el modelo HSLM-C estableciendo empates de bogie que potencien los órdenes de resonancia más adecuados para el objetivo propuesto.

Tren	Nº coches intermedios	Long. coche (m)	Empate de bogie (m)	Carga por eje (kN)
C1	18	18	1.5	170
C2	17	19	1.9	200
C3	16	20	1.8	180
C4	15	21	1.9	190
C5	14	22	2.0	170
C6	13	23	4.5	180
C7	13	24	4.2	190
C8	12	25	4.5	190
C9	11	26	4.3	210
C10	11	27	4.5	210

Tabla 6.2. Características del modelo HSLM-C

En concreto, en los trenes C1 a C4 se ha potenciado su resonancia de tercer orden, y en los trenes C6 a C10 se ha potenciado su resonancia de quinto orden, dejando el tren C5 sin modificar. En la tabla 6.3 se exponen los factores de bogie resultantes.

Tren	λ_3 (m)	$f_{B,3}$	λ_4 (m)	$f_{B,4}$	λ_5 (m)	$f_{B,5}$
C1	6.00	1.398	4.50	0.985	3.60	0.509
C2	6.33	1.159	4.75	0.608	3.80	0.046
C3	6.67	1.306	5.00	0.838	4.00	0.309
C4	7.00	1.299	5.25	0.827	4.20	0.295
C5	7.33	1.293	5.50	0.817	4.40	0.282
C6	7.67	0.528	5.75	1.497	4.60	1.907
C7	8.00	0.161	6.00	1.139	4.80	1.775
C8	8.33	0.249	6.25	1.234	5.00	1.825
C9	8.67	0.051	6.50	0.944	5.20	1.649
C10	9.00	0.046	6.75	0.971	5.40	1.667

Tabla 6.3. Factores de bogie (HSLM-C) para resonancia de orden 3,4 y 5; $\zeta = 1.5\%$

Los nuevos empates de bogie no son realistas en relación a trenes existentes, pero al tratarse de un modelo de cálculo no son más que una variable de ajuste. De hecho la disposición de empates de bogie en el actual modelo HSLM-A invita a pensar que ya se han utilizado de este modo para ajustar órdenes de resonancia más bajos.

La adecuación del modelo HSLM-C puede juzgarse a partir de la impronta de los tres modelos simultáneamente, con la misma resolución que la figura 6.1.

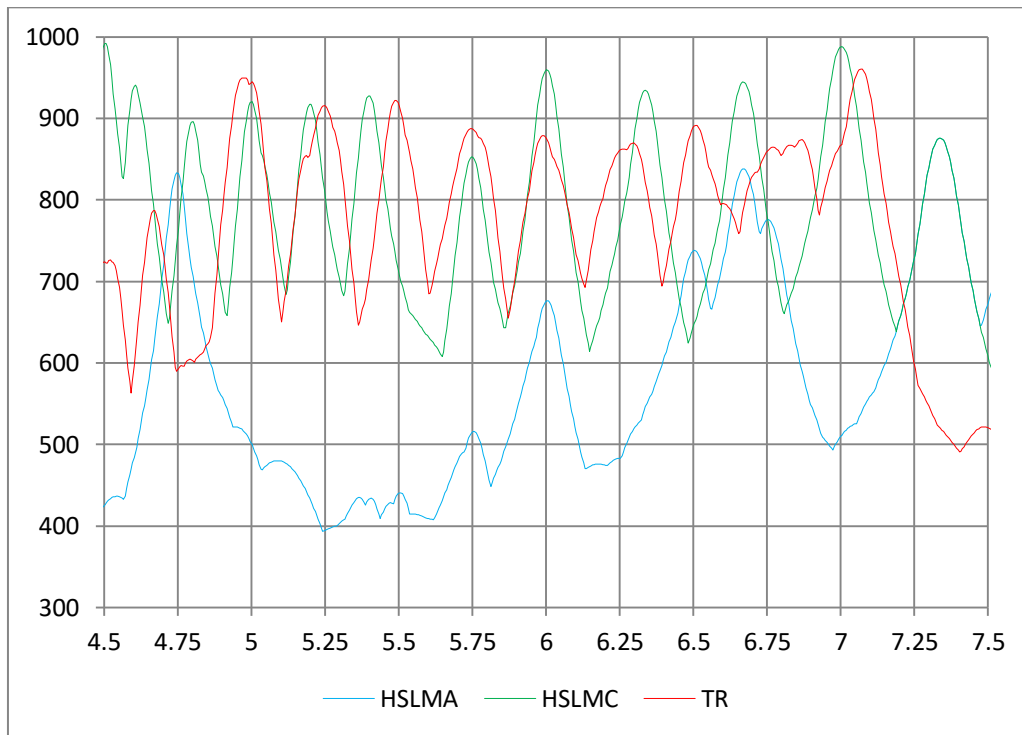


Figura 6.2. Fragmento de impronta (kN) de los modelos HSLM-A, HSLM-C y TR, función de la longitud de onda (m), $\zeta = 1.5 \%$

El valor de la impronta en los puntos de resonancia del nuevo modelo es del orden del que tiene el modelo de trenes regulares. Sin embargo no todos los puntos están exactamente en la misma longitud de onda que los trenes regulares a los que pretenden cubrir, y se puede plantear la duda sobre el efecto negativo que pueda tener la línea de influencia en esos casos.

Por ello se exponen a continuación dos gráficos tridimensionales que representan el producto de impronta y línea de influencia en función de la longitud de onda y la longitud de puente. En efecto la línea de influencia depende de las características del puente, y al utilizar la representación de longitud de onda se elimina la necesidad de conocer la frecuencia fundamental, pero sigue siendo necesario conocer la longitud del puente.

En estos gráficos se consideran ocho longitudes de puente, entre 8 y 15 metros; el intervalo de longitud de onda elegido es [3, 7.5] m, cuya ampliación por la izquierda se justifica para demostrar que las longitudes de onda tan bajas no son relevantes debido al efecto de la línea de influencia.

Pese a tratar de eliminar la frecuencia como variable, se ha considerado oportuno limitar el cálculo a velocidades reales entre 120 y 250 km/h, asumiendo una frecuencia fundamental un 33% por encima del límite inferior del huso establecido

en la norma EN 1991-2, igual que en los puentes críticos. Las velocidades fuera de estos límites quedan fuera de la aplicación práctica que se ha tomado como objetivo en este trabajo.

En cada gráfico se representa la curva producida por el modelo TR y la que produce el modelo HSLM-A o HSLM-C en cada caso, de manera que se pueda analizar la bondad del ajuste de manera cualitativa.

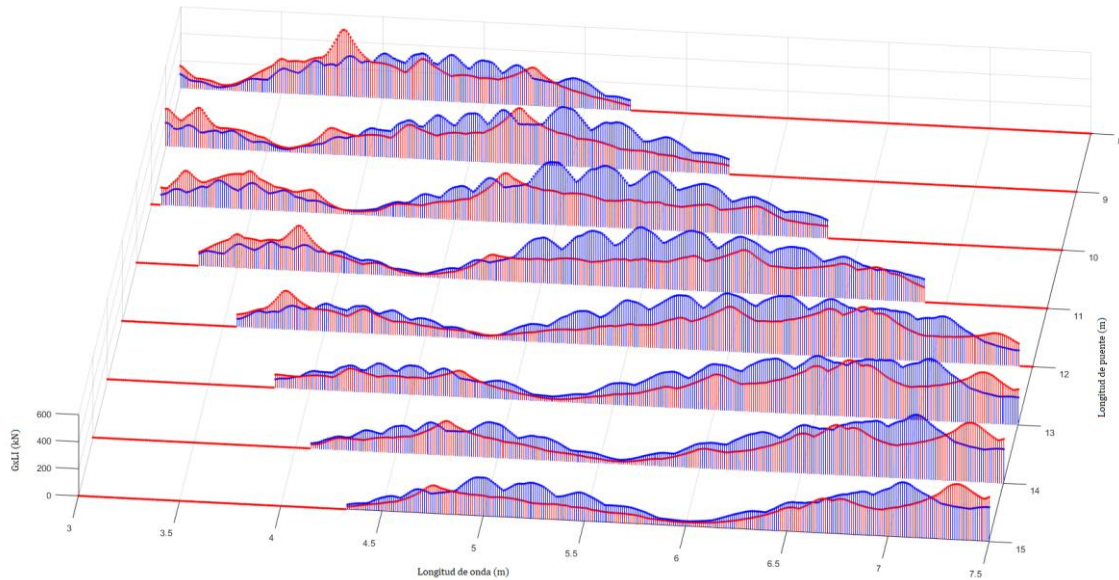


Figura 6.3. $G \cdot LI$ (kN), modelos TR (azul) y HSLM-A (rojo), $\zeta = 1.5\%$

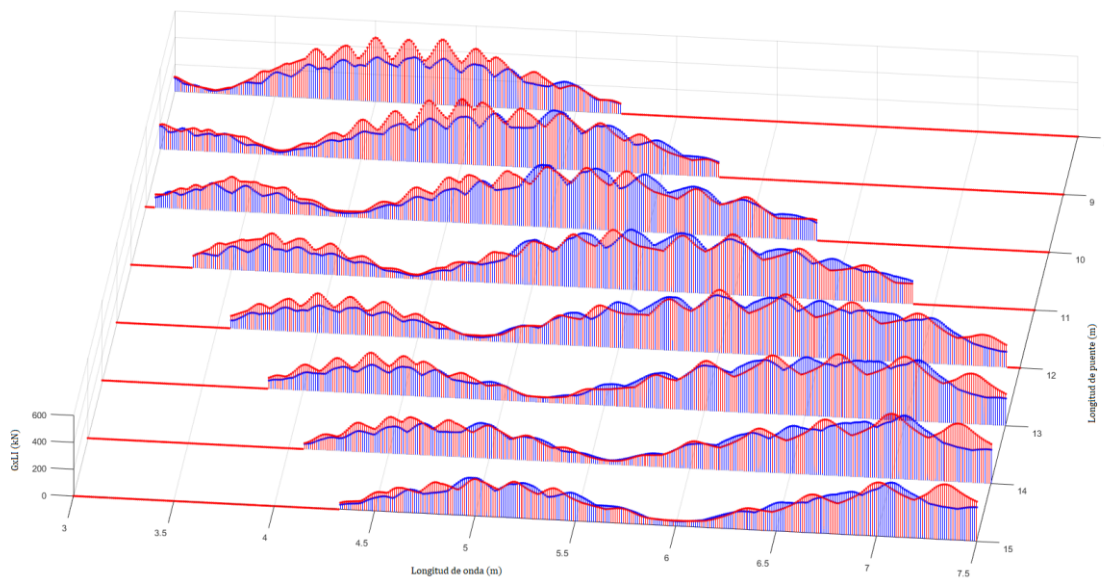


Figura 6.4. $G \cdot LI$ (kN), modelos TR (azul) y HSLM-C (rojo), $\zeta = 1.5\%$

El análisis cualitativo confirma que el ajuste del modelo HSLM-C es notablemente mejor, y que la separación de los picos de resonancia en la impronta es lo suficientemente pequeña para que la línea de influencia no perjudique al ajuste.

Puentes críticos

Con el modelo HSLM-C validado de forma teórica se recalculan los nueve puentes críticos bajo este nuevo modelo y se superponen junto a la envolvente de trenes regulares y de los trenes del HSLM-A. Se pretende confirmar que el nuevo modelo ofrece una estimación mejor de la aceleración máxima en los casos críticos.

En este caso sólo se ofrece la solución analítica exacta porque el método LIR ya ha quedado suficientemente validado. El rango de velocidades es el mismo pero la resolución es de 0.9 km/h.

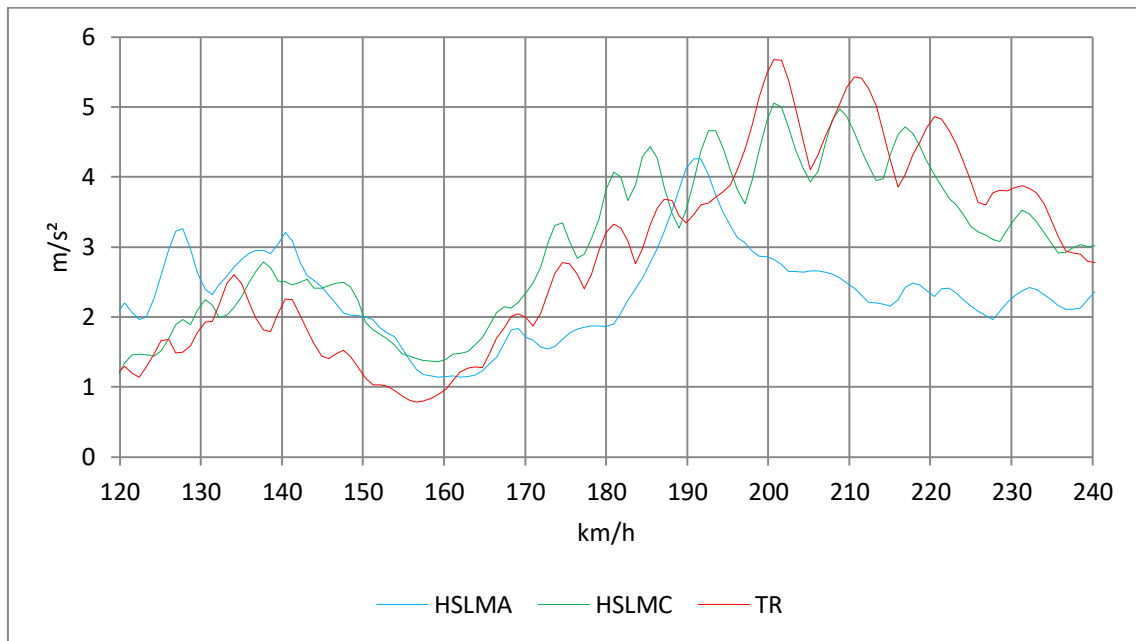


Figura 6.5. Puente crítico 1

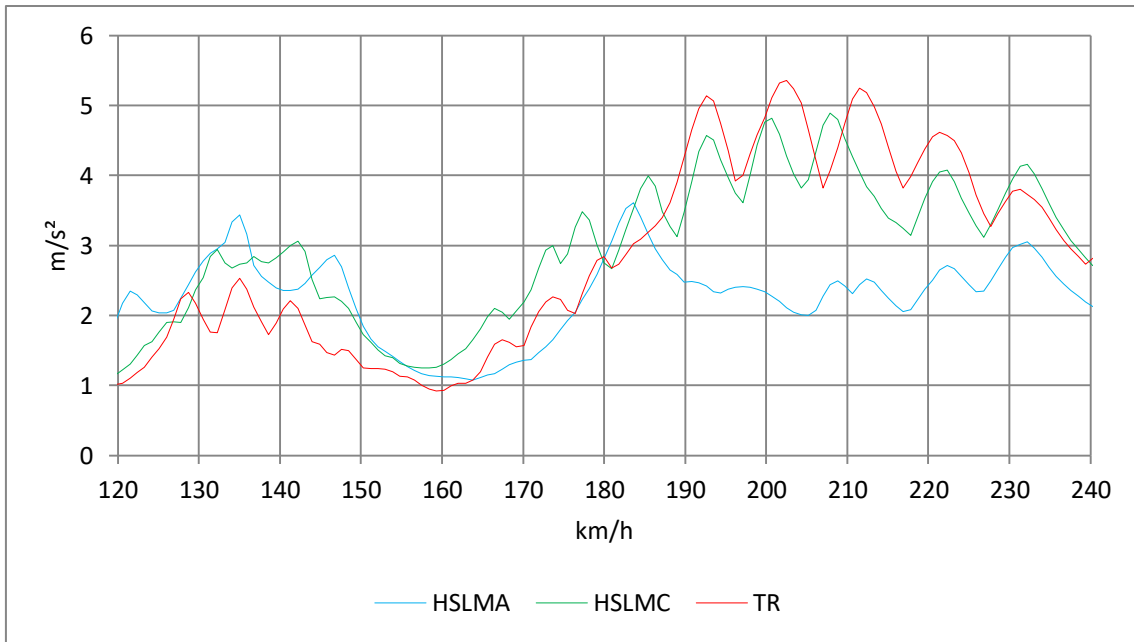


Figura 6.6. Puente crítico 2

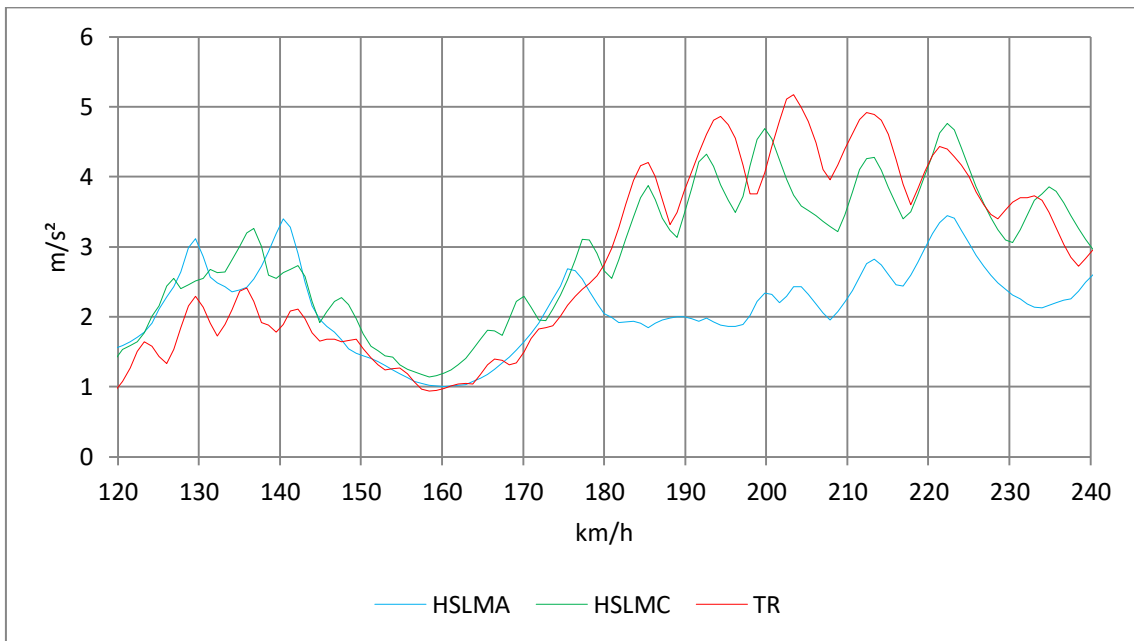


Figura 6.7. Puente crítico 3

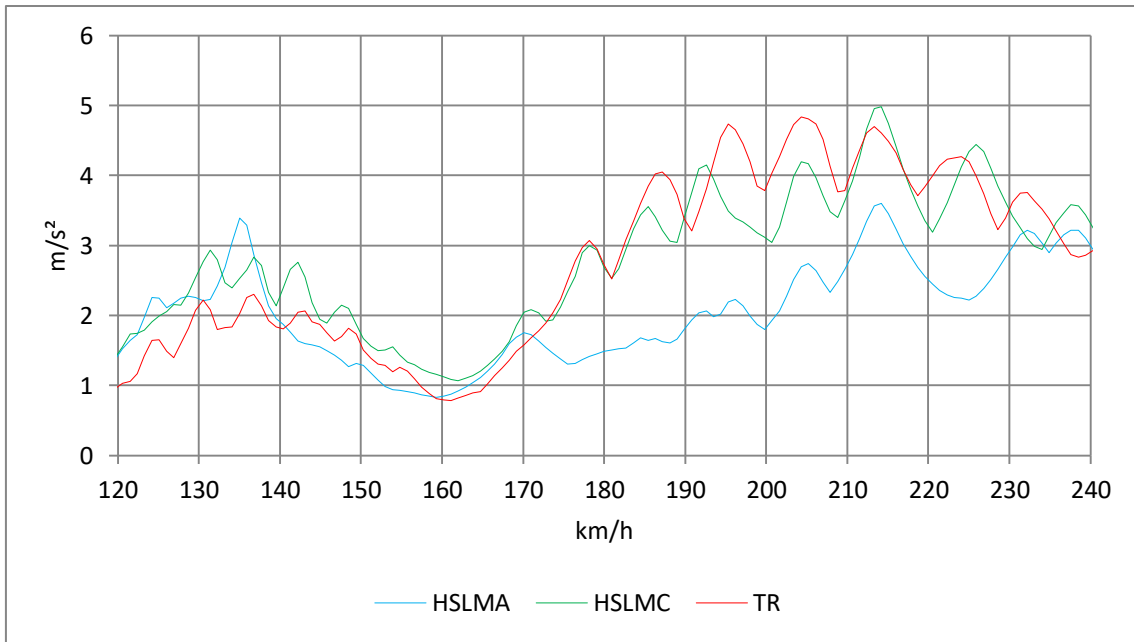


Figura 6.8. Puente crítico 4

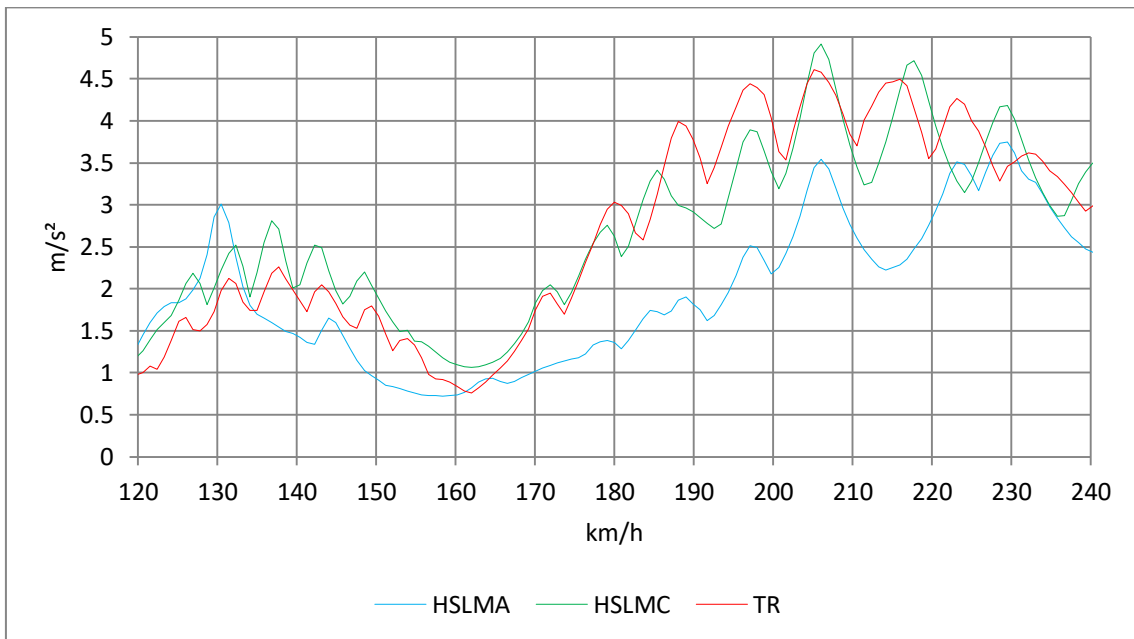


Figura 6.9. Puente crítico 5

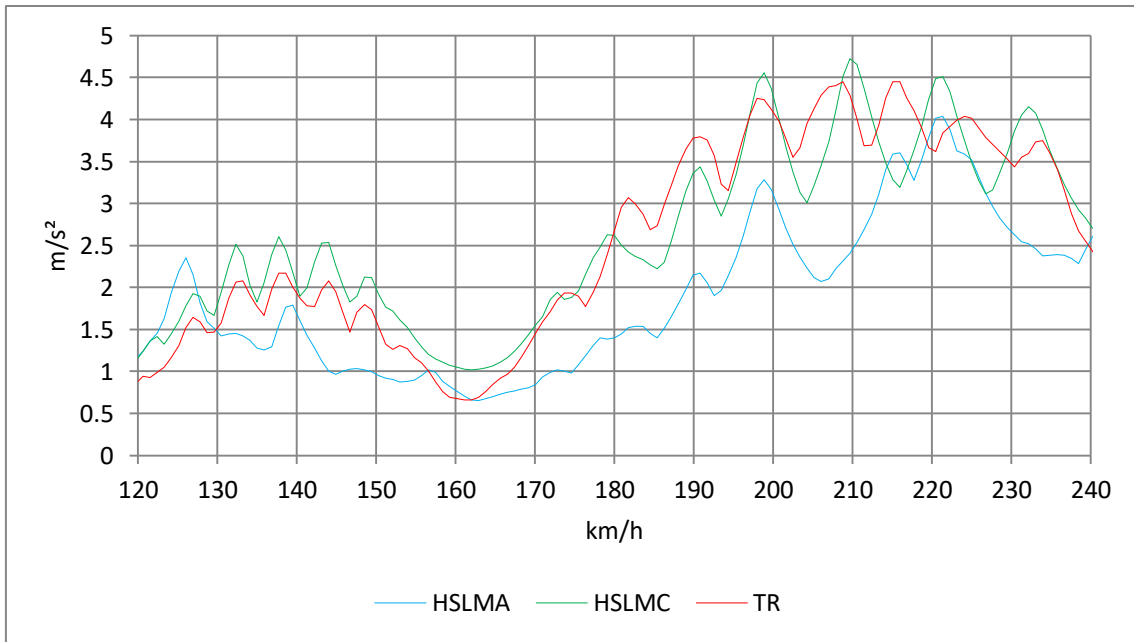


Figura 6.10. Puente crítico 6

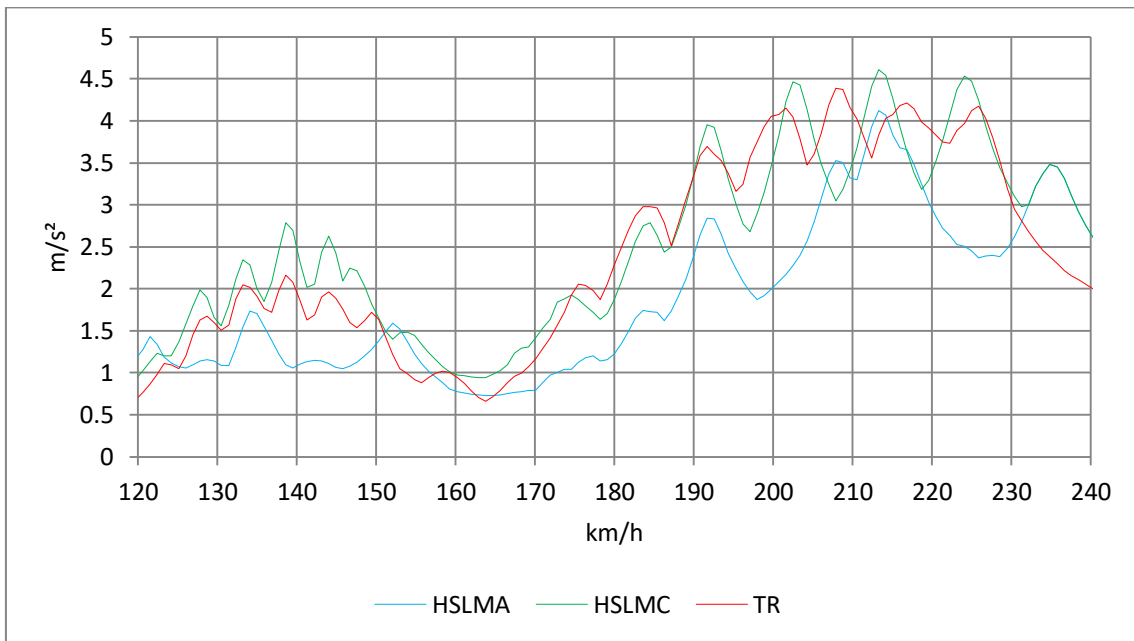


Figura 6.11. Puente crítico 7

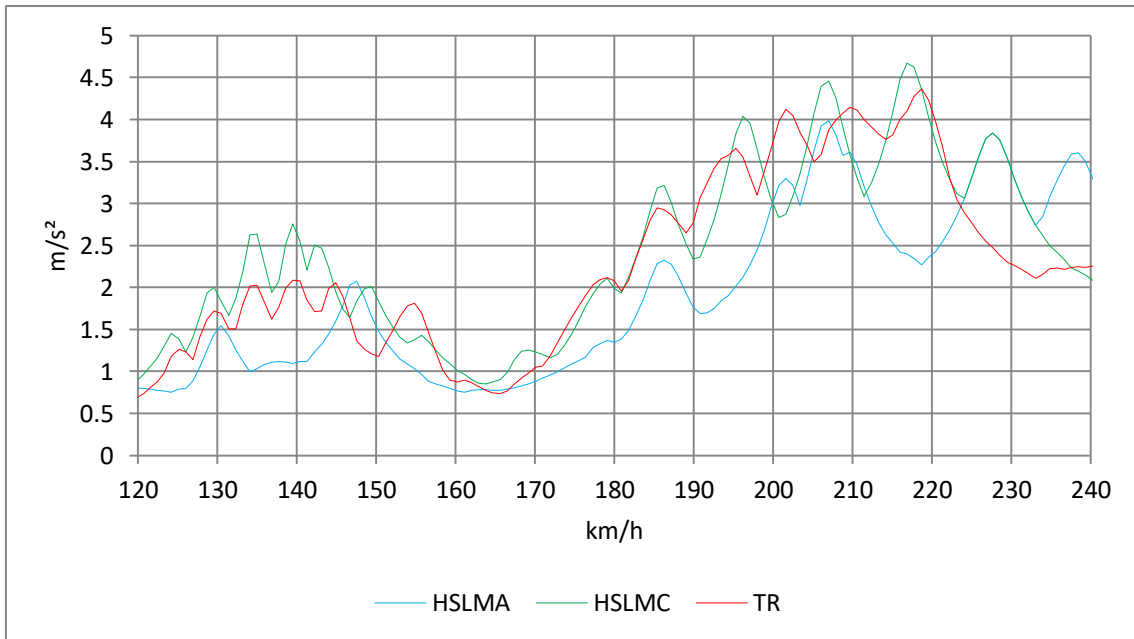


Figura 6.12. Puente crítico 8

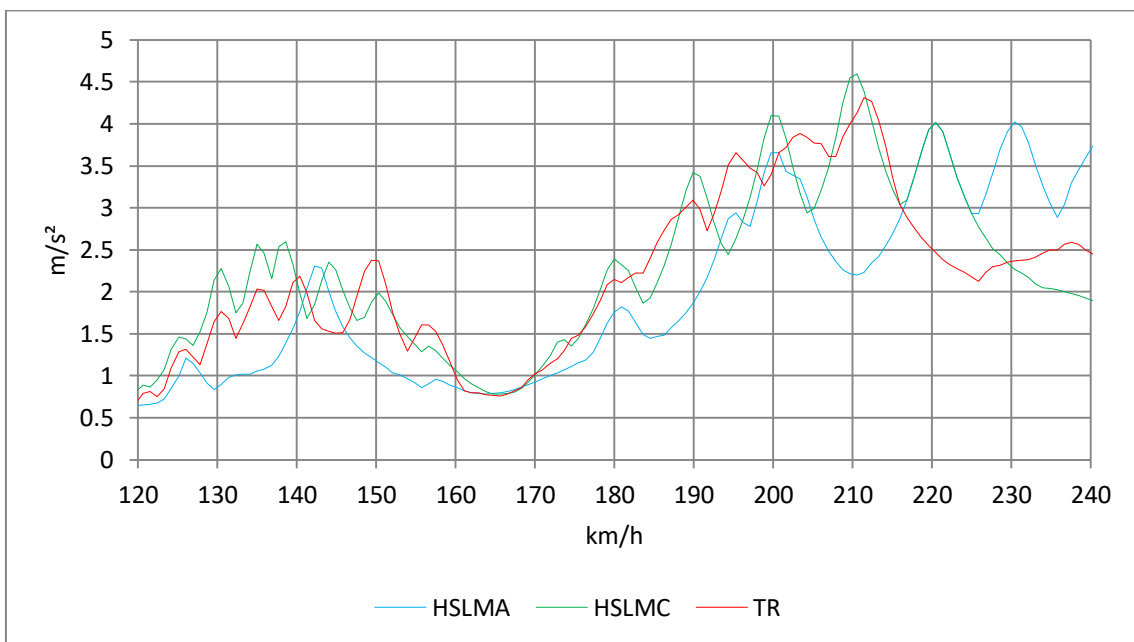


Figura 6.13. Puente crítico 9

El modelo HSLM-C produce aceleraciones que son equiparables a las del modelo de trenes regulares en general. En los casos más desfavorables, los puentes más cortos, la aceleración máxima de los trenes regulares es alrededor de un 10% mayor a la del modelo HSLM-C.

Capítulo 7. Aplicación al proyecto de puentes isostáticos

En este capítulo se desea constatar que los planteamientos teóricos presentados en este trabajo tienen repercusión en aplicaciones prácticas como el diseño, recálculo o refuerzo de puentes isostáticos de ferrocarril de luces cortas.

7.1. Puentes isostáticos de distintas luces

De los nueve puentes calculados con el modelo HSLM-C en el capítulo 6 ninguno cumple la exigencia de Estado Límite de Servicio de aceleración para puentes con vías de balasto: 3.43 m/s^2 .

Puentes Críticos	Masa lineal (kg/m)	Frecuencia fundamental (Hz)	Aceleración máxima modelo HSLM-C (m/s^2)	Porcentaje de exceso sobre E.L.S.
PC1	15 760	11.17	5.05	47.2 %
PC2	15 858	10.71	4.89	42.6 %
PC3	15 956	10.28	4.76	38.8 %
PC4	16 054	9.89	4.96	44.6 %
PC5	16 152	9.53	4.92	43.4 %
PC6	16 250	9.20	4.72	37.6 %
PC7	16 348	8.89	4.61	34.4 %
PC8	16 446	8.61	4.67	36.2 %
PC9	16 544	8.34	4.59	33.8 %

Tabla 7.1. Valores máximos de aceleración y porcentaje de exceso sobre E.L.S.

En general las posibilidades de actuación para resolver esta situación se basan en reducir la aceleración aumentando la masa del puente o incrementar la rigidez para que la resonancia que genera el problema salga del rango de velocidades de cálculo. El fundamento de estos procedimientos se encuentra en las ecuaciones de la dinámica y de forma muy clara en el método LIR.

$$(3.XIII) \quad \ddot{y}_{\text{máx}} = \frac{2}{m L} \cdot A(\lambda, L) \cdot G(\lambda)$$

Para un conjunto particular de trenes y un puente con una luz determinada, el producto de línea de influencia e impronta dinámica, representado en función de la longitud de onda, es invariable respecto a cambios en la masa o la rigidez.

Así, la influencia del cambio de masa se fundamenta en su proporcionalidad inversa con la aceleración. La rigidez influye a través de la frecuencia fundamental, que guarda una relación con la longitud de onda $\lambda = v/f_0$; de esta manera incrementando la rigidez se consigue que las longitudes de onda de resonancia más desfavorable representen velocidades mayores, llegando a superar la velocidad de cálculo.

Mediante ecuaciones de proporcionalidad se relaciona la nueva masa o frecuencia con las condiciones de aceleración o velocidad objetivo que se desean alcanzar.

$$(I) \quad m' = m \left(\frac{a_{\text{máx}}}{a_{\text{lím}}} \right)$$

$$(II) \quad f'_0 = f_0 \left(\frac{v_{\text{cálc}}}{v_{\text{obj}}} \right), \quad \xi = \left(\frac{v_{\text{cálc}}}{v_{\text{obj}}} \right)$$

Si se incrementa la rigidez mediante un aumento del canto se puede estimar la masa incrementada de esta forma asumiendo que existe proporción lineal entre el canto y la masa estructural. Si la relación entre la masa de la carga muerta y la masa de estructura es “ α ”, y la relación de incremento del canto es “ κ ” :

$$(III) \quad m'_\Delta = m \left(\frac{\alpha + \kappa}{\alpha + 1} \right)$$

El canto necesario para alcanzar la rigidez de la frecuencia fundamental f'_0 , teniendo en cuenta el incremento de masa m'_Δ , si se asume que la inercia es proporcional al canto al cubo, se puede obtener resolviendo la siguiente ecuación:

$$(IV) \quad \frac{\alpha + 1}{\xi^2} \kappa^3 - \kappa = \alpha, \quad \kappa = \frac{h'}{h}$$

En general el mecanismo más eficiente será el que minimice el incremento de masa necesario, en el sentido de economizar materiales. Es posible una solución mixta de ambos métodos. Un ejemplo de aplicación es el puente crítico nº 3 del capítulo 6.

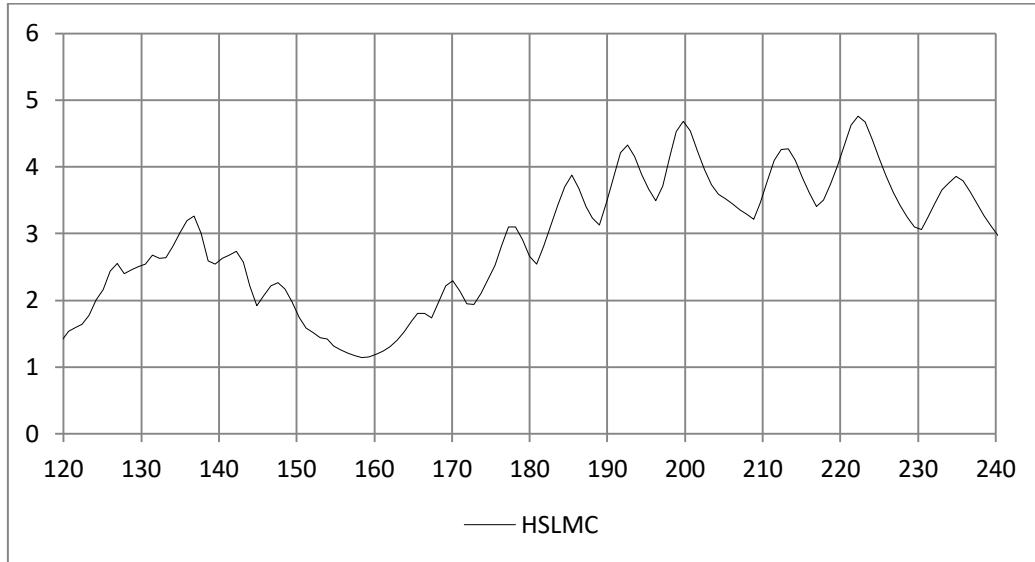


Figura 7.1. Puente crítico 3

En este caso el método más eficiente es llevar el punto (184.5 km/h, 3.7 m/s²) a la velocidad de cálculo (240 km/h) aumentando la rigidez, y aprovechar el aumento de masa para reducir la aceleración hasta debajo del límite. En estos puentes críticos se establece que α es igual a 1.

$$f'_0 = 1.301 f_0 = 13.37 \text{ Hz}, \quad m' = 1.118 m = 17\,846 \text{ kg/m}$$

Con esta modificación el cálculo dinámico cumple el límite de servicio de aceleración.

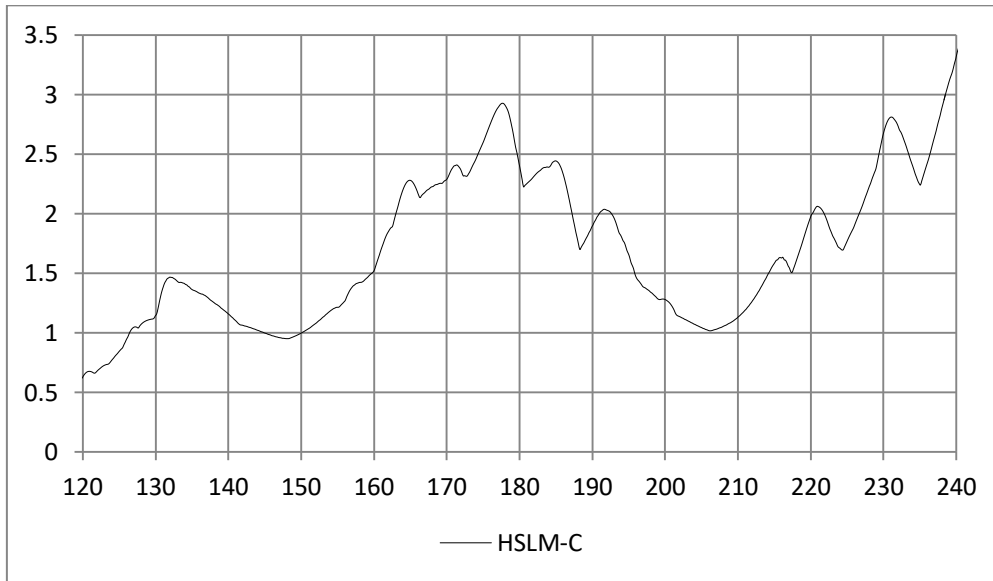


Figura 7.2. Ponte crítico 3 modificado

Con los demás puentes críticos se puede proceder análogamente.

Puentes Críticos	Masa lineal (kg/m)	Incremento de masa %	Frecuencia fundamental (Hz)	Incremento de frecuencia %
PC1	17 826	13.1 %	14.89	33.3 %
PC2	17 737	11.8 %	13.93	30.1 %
PC3	17 846	11.8 %	13.37	30.1 %
PC4	17 688	10.2 %	12.44	25.8 %
PC5	17 613	9.0 %	11.71	22.9 %
PC6	17 684	8.8 %	11.25	22.3 %
PC7	18 012	10.2 %	11.18	25.8 %
PC8	17 970	9.3 %	10.63	23.5 %
PC9	17 932	8.4 %	10.11	21.2 %

Tabla 7.2. Modificación de los puentes críticos para cumplir E.L.S.

7.2. Paso inferior P.K. 25+240 línea Málaga - Fuengirola

En este apartado se considera un ejemplo de aplicación consistente en el recálculo de un puente existente con características análogas a los puentes isostáticos sobre los que versa este trabajo. Para ello se considera una hipótesis en la que se desea aumentar la velocidad de una línea de ferrocarril convencional hasta 200 km/h, y por ello se plantea el recálculo para comprobar si el puente cumple los estándares de la normativa o si requiere un refuerzo.

Este puente está construido mediante vigas prefabricadas de hormigón pretensado simplemente apoyadas en dos estribos cubriendo una luz de 10.8 m con un esviaje de 13.64° y un ancho de 7 m. El cálculo de este puente permitirá contrastar los resultados de los distintos modelos de carga entre sí, la relación entre efectos dinámicos y estáticos, y la influencia sobre los estados límite.

Los cálculos se han realizado siguiendo los procedimientos de las normativas IAPF 07 y EN 1991-2 con un modelo viga. En primer lugar un cálculo estático con el que se obtienen esfuerzos y deformaciones para combinaciones de estados límite. En segundo lugar una serie de cálculos dinámicos con la solución analítica exacta, para los tres modelos de trenes definidos anteriormente: TR, HSLM-A y HSLM-C; obteniendo aceleraciones máximas, deformaciones y esfuerzos para distintas combinaciones de estados límite.

Debido al esviaje y la baja relación luz/ancho, se ha realizado en tercer lugar un cálculo estático utilizando un modelo tridimensional con elementos finitos tipo viga y tipo lámina unidos mediante nudos de dimensión finita. Con este cálculo se obtiene una estimación más precisa de las deformaciones y la frecuencia fundamental de vibración, permitiendo verificar que la estructura puede ser modelizada como viga con la suficiente aproximación, y por tanto que los cálculos realizados son fiables.

Los planos de definición geométrica y de materiales del puente pueden consultarse en el Anexo 3, y a continuación se resumen los valores empleados en el cálculo. Se ha decidido prescindir del peralte del balasto y de la excentricidad de las cargas muertas en el modelo viga, ya que el cálculo dinámico de torsión no forma parte de los objetivos de este trabajo y el cálculo estático a torsión no aporta ninguna información valiosa al respecto. Se ha mantenido sin embargo la excentricidad de las cargas muertas en el modelo tridimensional por ser una variable principal, a través de la masa, para la precisa estimación de la frecuencia fundamental de vibración.

Datos sobre materiales y otros elementos

Espesor de balasto bajo traviesa:	35 cm	
Densidad del balasto:	1800 kg/m ³	
Peso de traviesa:	310 kg cada 0.6 m	
Densidad de traviesa:	2500 kg/m ³	
Altura de traviesa:	24 cm	
Peso de carriles UIC60:	60 kg/m,	por carril
Muretes guardabalasto:	500 kg/m,	total
Aceras y canalizaciones:	2450 kg/m,	total
Barandilla e imposta:	900 kg/m,	total
Hormigón pretensado en vigas:	fck = 45 MPa,	Ec = 37 516 MPa
Hormigón armado en losa:	fck = 25 MPa,	Ec = 32 035 MPa

Características geométricas y mecánicas de la sección transversal

Área de una viga:	0.2091 m ²
Cota del cdg:	0.2732 m
Inercia eje horizontal:	0.0093 m ⁴
Número de vigas:	8
Área homogeneizada de la losa:	1.49 m ²
Inercia homogeneizada de la losa:	0.007784 m ⁴
Área del tablero:	3.163 m ²
Cota del cdg del tablero:	0.486 m
Inercia del tablero:	0.2433 m ⁴
Módulo de elasticidad:	37 516 MPa

Cargas permanentes

Peso propio	85.6 kN/m	8726 kg/m
Peso carriles	1.20 kN/m	122 kg/m
Peso muretes	4.90 kN/m	500 kg/m
Peso aceras y can.	24.0 kN/m	2446 kg/m
Peso barandillas e imp.	8.80 kN/m	897 kg/m
Peso traviesas	5.00 kN/m	510 kg/m
Detracción de balasto	3.67 kN/m	374 kg/m
Peso nominal balasto	39.9 kN/m	4067 kg/m
Peso balasto limpio	27.9 kN/m	2844 kg/m
Peso balasto sucio	51.9 kN/m	5291 kg/m

Tren de cargas ferroviarias para análisis estático de cargas verticales

- 4 cargas puntuales de 250 kN separadas 1.6 m, centradas sobre el puente
- Cargas repartidas de 80 kN/m en el resto, 0.8 m separadas de las puntuales
- Estas cargas se multiplican por el coeficiente de clasificación 1.21

Datos para el cálculo dinámico

Rigidez (EI)	9 127.6428 E+06 Pa	
Longitud	10.8 m	
Fracción de amortiguamiento crítico	1.644 %	
Masa lineal de la estructura		
Nominal	16 894 kg/m	
Mínima	15 671 kg/m	
Máxima	18 118 kg/m	
Frecuencia fundamental		
Nominal	62.2 rad/s	9.9 Hz
Máxima	64.6 rad/s	10.3 Hz
Mínima	60.1 rad/s	9.6 Hz

Condiciones para cumplir con el Estado Límite de Servicio

Aceleración máxima	3.43 m/s ²
Flecha total máxima	0.018 m
Giro vertical en apoyos	0.0065 rad
Flecha máxima por confort	0.00982 m

Resultados del cálculo estático – Estado Límite Último

Se han determinado tres combinaciones de acciones para la comprobación de estado límite último. La combinación ELU1 contiene las cargas permanentes más las cargas ferroviarias estáticas de la norma. La combinación ELU2 contiene las cargas permanentes más los efectos dinámicos de trenes de alta velocidad para máximos momentos positivos. La combinación ELU3 contiene las cargas permanentes como acción favorable más los efectos dinámicos de trenes de alta velocidad para máximos momentos negativos.

En este apartado se exponen los resultados de ELU1 y la parte estática de las combinaciones ELU2 y ELU3. A continuación se muestran los gráficos de momento flector (kNm) y cortante (kN) en función de la directriz de la viga (m), con el centro de la viga en $x = 0$.

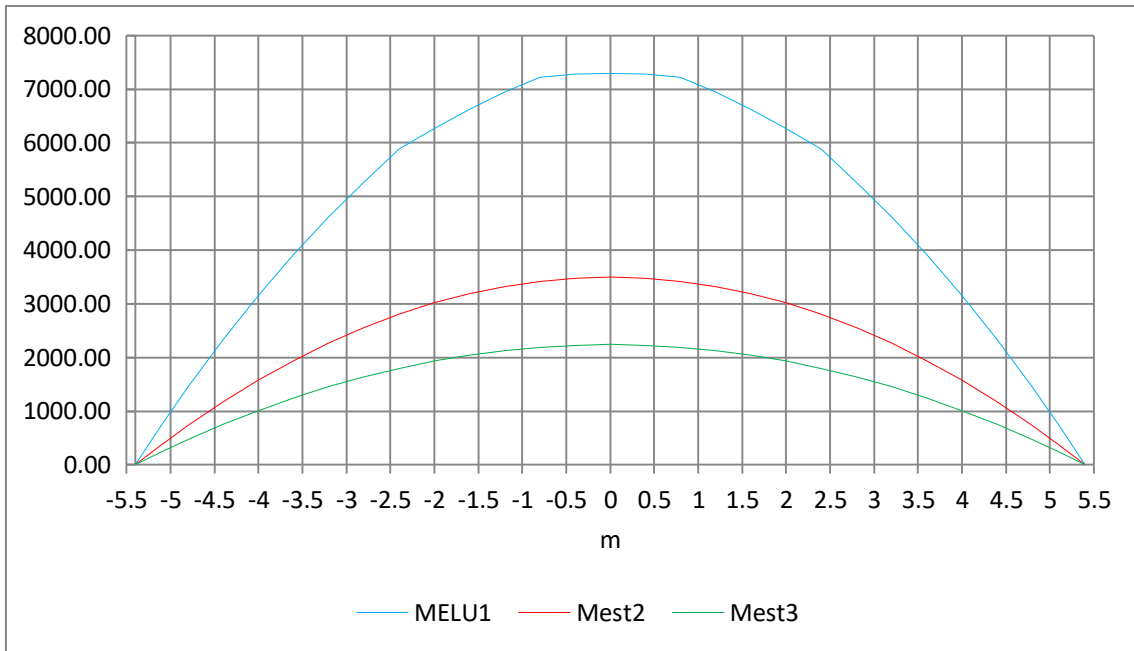


Figura 7.3. Momentos(kNm) de cálculo de cargas estáticas para ELU

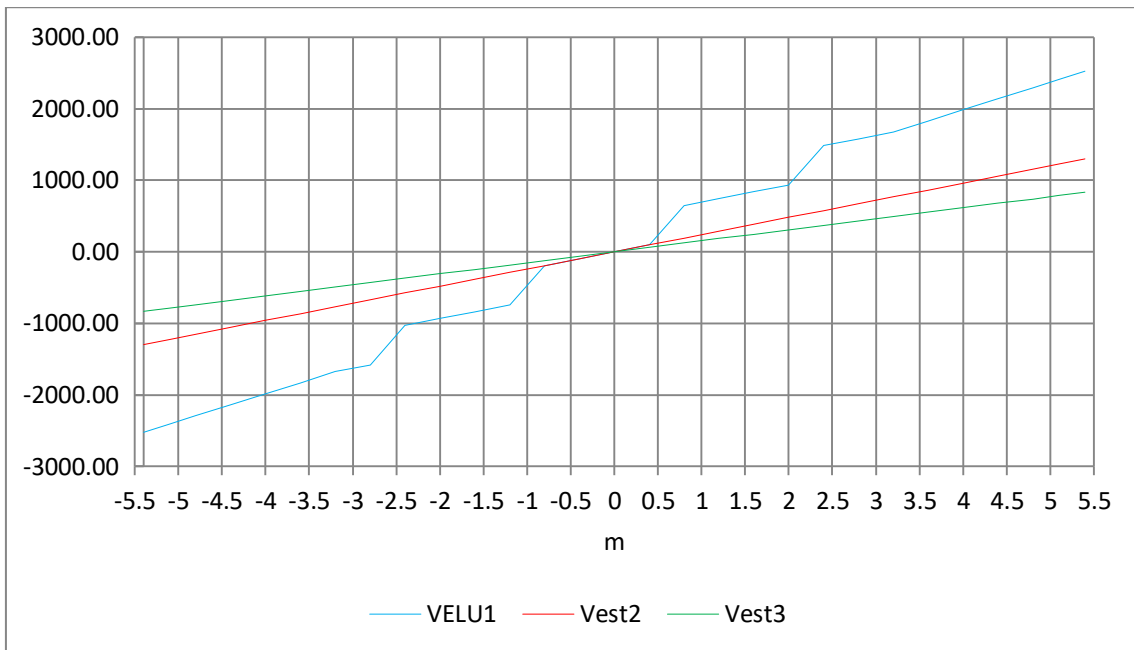


Figura 7.4. Cortantes(kN) de cálculo de cargas estáticas para ELU

Resultados del cálculo dinámico

En primer lugar se ha realizado un cálculo de aceleración (m/s^2) y desplazamiento (m) de la envolvente de trenes HSLM-A/C y TR, para un rango de velocidades entre 100 y 240 km/h. Con estos gráficos se pueden identificar los puntos donde se alcanzan los desplazamientos máximos y mínimos, y posteriormente obtener las funciones de desplazamiento del tablero de las que derivar giros y esfuerzos.

Los cálculos se han hecho para las tres hipótesis de masa lineal expuestas previamente. A continuación se muestra el gráfico de aceleración para la hipótesis de masa mínima, el caso más desfavorable; y los desplazamientos para la hipótesis de masa nominal, porque no hay diferencias sensibles en los desplazamientos extremos entre estas tres hipótesis.

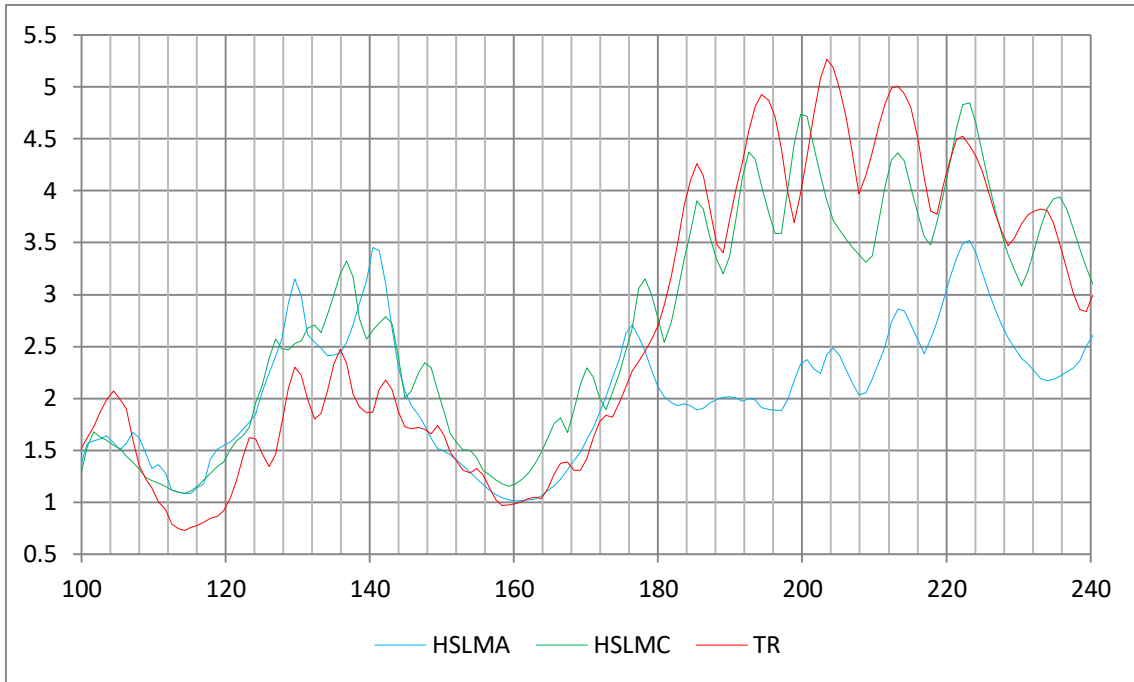


Figura 7.5. Aceleraciones(m/s²) envolventes según velocidad (km/h)

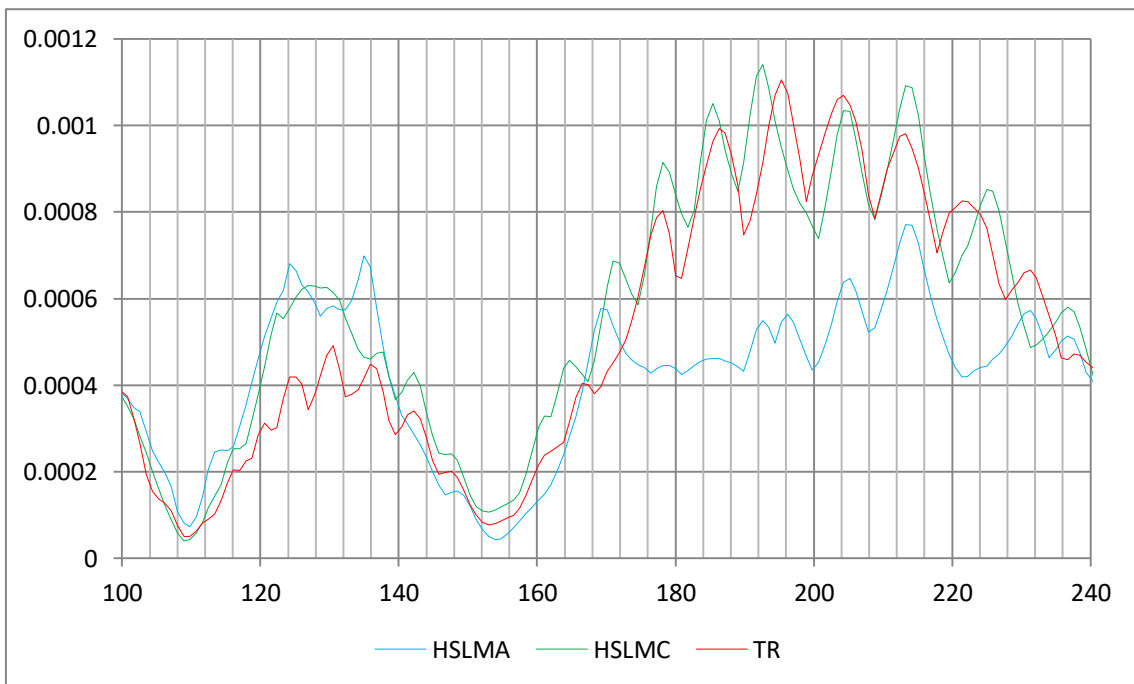


Figura 7.6. Desplazamientos(m) máximos envolventes según velocidad(km/h)

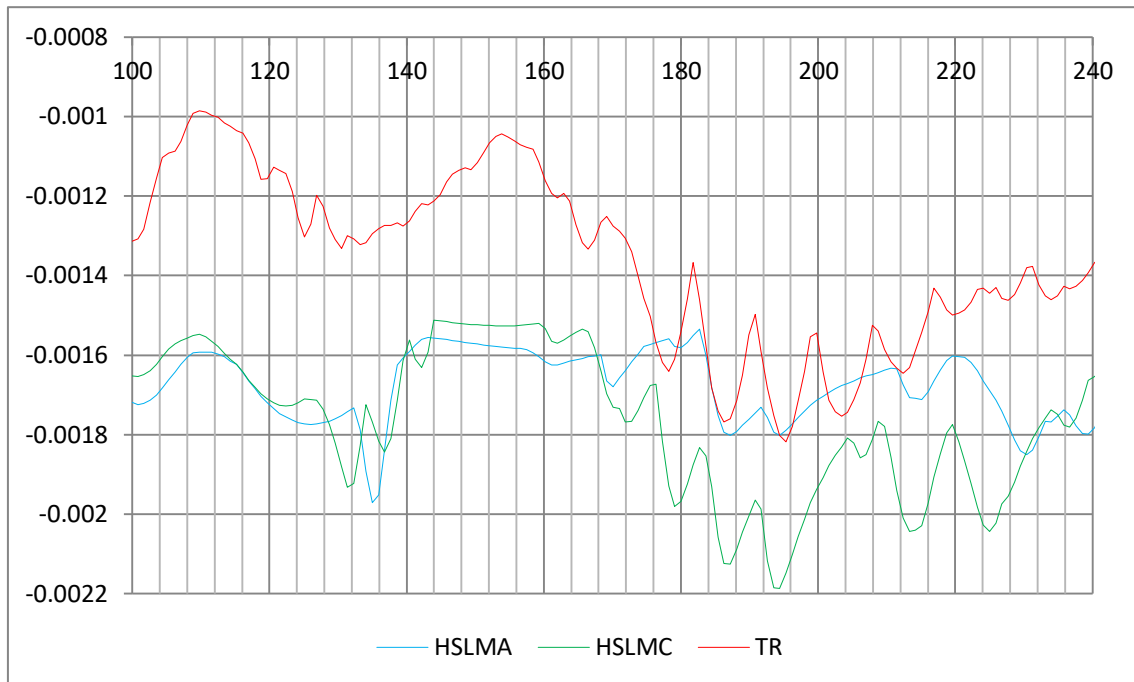


Figura 7.7. Desplazamientos(m) mínimos envolventes según velocidad(km/h)

Los puntos máximos elegidos para cada variable y el tren que los produce se muestran en la siguiente tabla.

	HSLM-A	HSLM-C	TR
Aceleración (m/s ²)	3.52 (A1)	4.85 (C1)	5.26 (R3)
Desp. máximo (m)	0.00077 (A1)	0.00114 (C10)	0.00111 (R3)
Desp. mínimo (m)	-0.00197 (A2)	-0.00219 (C10)	-0.00182 (R3)

Tabla 7.3. Valores máximos de la respuesta envolvente

Los esfuerzos se obtienen directamente de la ecuación de la viga elástica de Bernoulli, en concordancia con el modelo del que deriva la solución analítica empleada para el cálculo dinámico.

$$M(x) = EI \frac{d^2u(x)}{dx^2}$$

$$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$$

De la misma forma se pueden obtener los giros.

$$\theta(x) = \frac{du}{dx}$$

Estas funciones de desplazamientos dinámicos $u(x)$ representan la contribución de los modos de vibración a través del sumatorio:

$$\sum \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Los parámetros modales ξ_n se muestran en la tabla 7.4 para los distintos trenes y combinaciones dinámicas hasta el décimo modo.

ξ_n	-A1_din3	-A2_din2	-C10_din3	-C10_din2	R3_din3	R3_din2
1	7.712E-04	-1.972E-03	1.140E-03	-2.186E-03	1.106E-03	-1.818E-03
2	5.135E-06	4.014E-06	-3.632E-07	3.210E-06	-2.197E-05	-1.858E-05
3	1.229E-07	-1.434E-06	9.188E-08	-4.578E-06	-5.013E-06	3.096E-06
4	7.093E-08	1.497E-06	-1.553E-08	1.518E-06	-1.638E-06	3.245E-08
5	1.172E-08	-1.123E-07	4.756E-09	-6.990E-07	-7.985E-07	1.380E-07
6	1.174E-08	1.037E-06	-5.510E-09	1.123E-06	-3.513E-07	5.000E-07
7	-1.836E-09	-4.578E-07	-1.122E-09	9.810E-08	-1.638E-07	1.225E-07
8	-1.232E-09	-1.233E-07	4.719E-10	-2.096E-07	-6.918E-08	-1.946E-07
9	9.940E-11	-3.671E-08	1.162E-11	-7.216E-08	-2.208E-08	-1.082E-07
10	-1.193E-10	6.756E-08	1.742E-11	-2.859E-08	2.915E-10	2.927E-08

Tabla 7.4. Parámetros modales para los desplazamientos máximos

A continuación se representan los gráficos de desplazamientos y giros dinámicos.

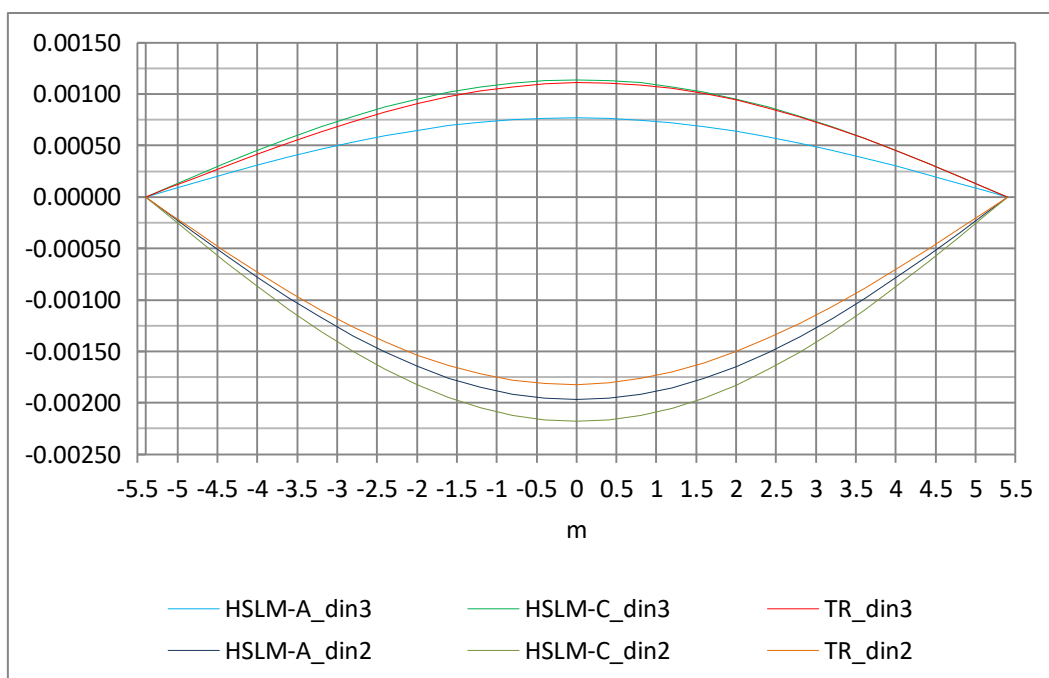


Figura 7.8. Desplazamientos(m) dinámicos para combinaciones ELS

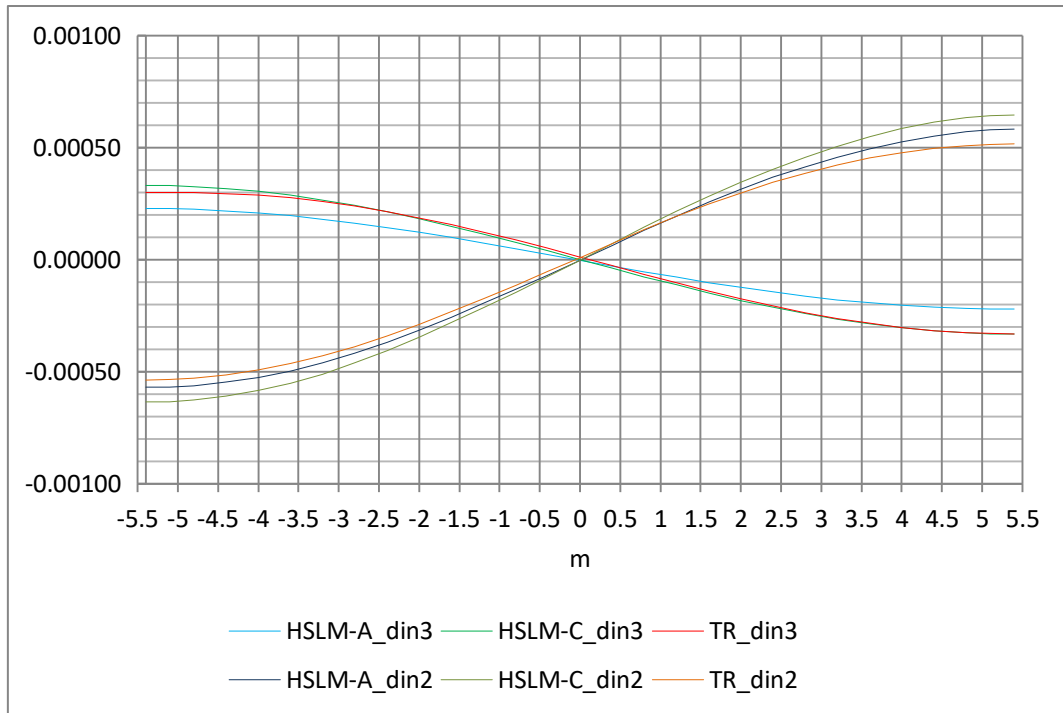


Figura 7.9. Giros(rad) dinámicos para combinaciones ELS

Y a continuación gráficos de cortantes y momentos.

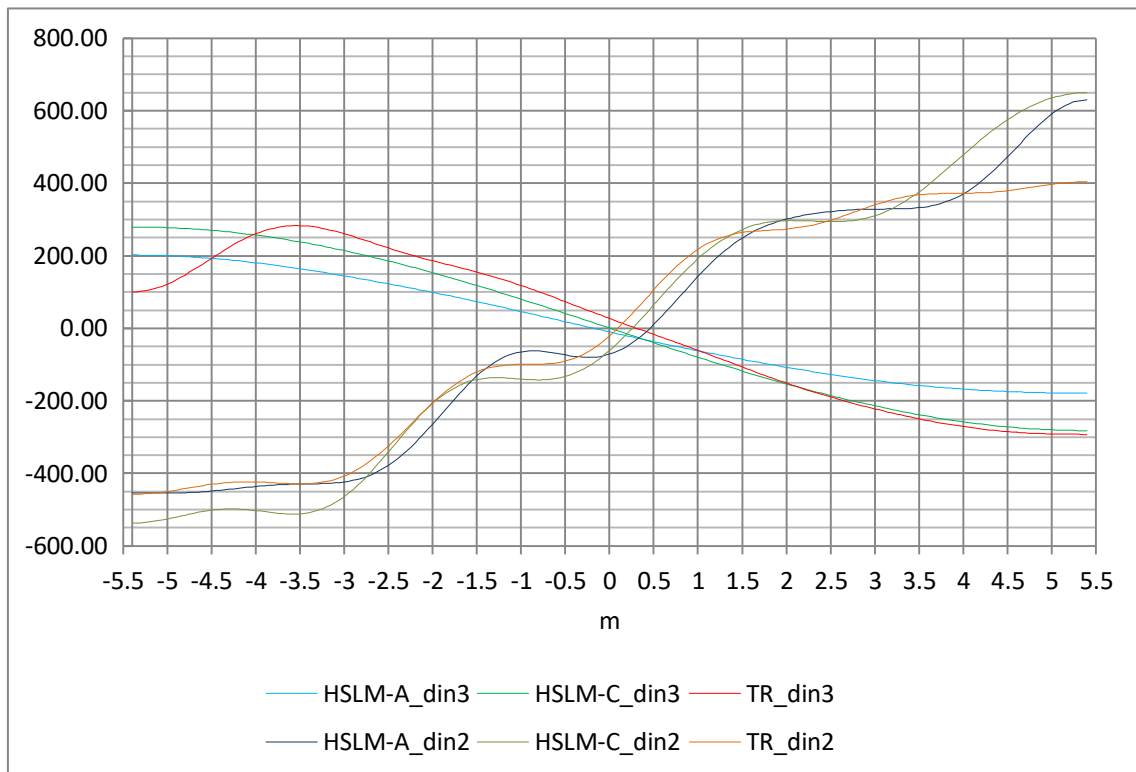


Figura 7.10. Cortantes(kN) dinámicos de cálculo para combinaciones ELU

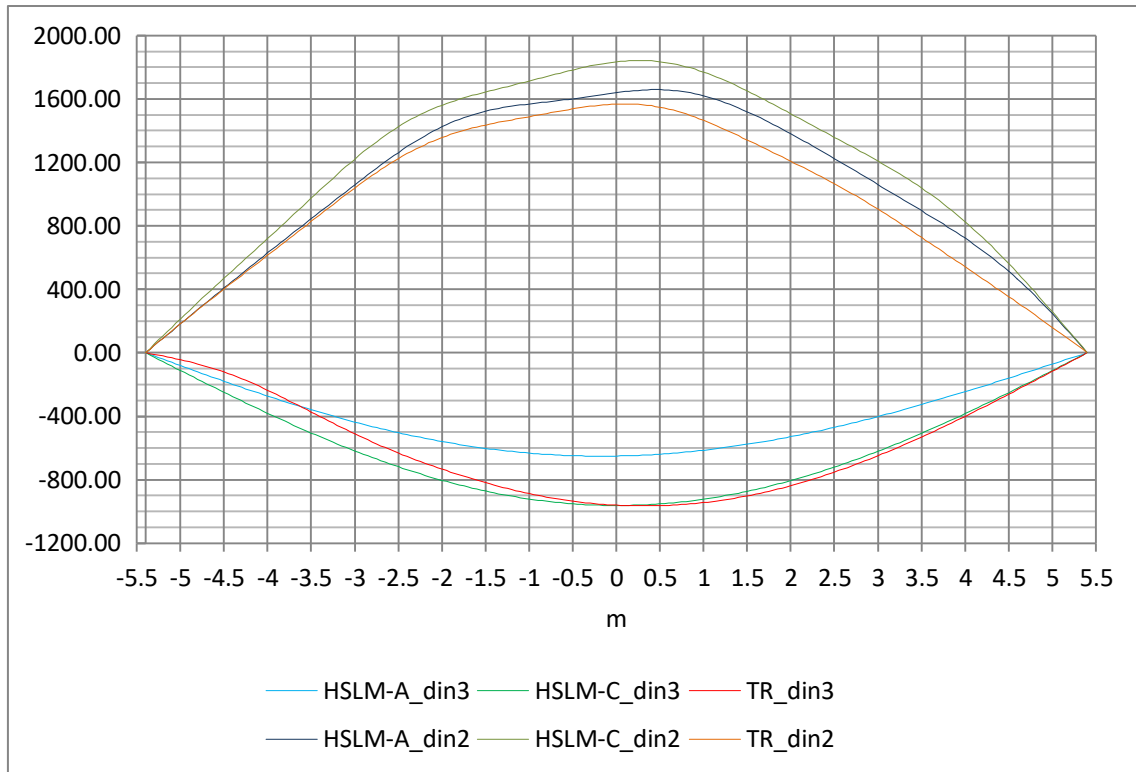


Figura 7.11. Momentos(kNm) dinámicos de cálculo para combinaciones ELU

Combinación de efectos estáticos y dinámicos

Para formar los estados límite ELU2 y ELU3, basta con sumar los gráficos correspondientes de las solicitaciones estáticas y dinámicas (est2+din2, est3+din3). En las tablas siguientes se muestran los valores críticos de todos los casos.

	$V_{ELU2}(kN)$	$M_{ELU2}(kNm)$	$V_{ELU3}(kN)$	$M_{ELU3}(kNm)$
HSLM-A	1925.24	5137.16	628.24	1591.37
HSLM-C	1945.03	5331.91	550.79	1279.67
TR	1699.52	5065.84	270.42	1281.26

Tabla 7.5. Combinaciones ELU(2 y 3) según trenes

	$V_{ELU1}(kN)$	$M_{ELU1}(kNm)$
Tren estático	2522.37	7297.55

Tabla 7.6. Combinación ELU1 (sólo estática)

Resultados del modelo detallado – valores nominales

Frecuencia fundamental: 9.86 Hz
Flecha estática máxima: -0.0077 m
Giro máximo en apoyos: 0.0023 rad

A pesar de tratarse de un puente de gran anchura respecto a su longitud y de estar esviado, los resultados del modelo detallado muestran una remarcable aproximación al modelo viga en cuanto al modo fundamental de vibración, y una buena aproximación en cuanto a la rigidez estática. Se concluye por tanto que el modelo viga es adecuado para el análisis estructural de este puente, y los resultados hallados son veraces.

Observaciones

Los resultados de aceleraciones y desplazamientos máximos dinámicos muestran la correspondencia esperada entre el modelo TR y el HSLM-C. Sin embargo en desplazamientos mínimos la diferencia es notable. La razón de la falta de aproximación en los desplazamientos mínimos es la diferente longitud de los coches en ambos modelos: los coches en los trenes articulados son el doble de largos y cuando un bogie pasa por el puente está imponiendo una carga doble a la que impone el eje del tren regular. Por eso para bajas velocidades donde los efectos dinámicos son pequeños el modelo HSLM-A produce prácticamente el mismo efecto que el HSLM-C en desplazamientos mínimos, y ambos superan al modelo TR.

En las combinaciones de estado límite último se observa que la parte estática es claramente dominante y la combinación más desfavorable es la del tren estático de la normativa.

Todos los estados límite de servicio se cumplen excepto la aceleración máxima. De hecho ninguno de los modelos cumple con los límites de aceleración de la norma. El modelo HSLM-A se encuentra muy cerca del límite sin embargo, y muy lejos del resto de modelos. Concretamente el modelo TR genera una aceleración máxima un 49% superior al modelo HSLM-A, mientras que sólo es un 8% superior al modelo HSLM-C.

Rediseño de la sección transversal

El nuevo diseño de la sección se orienta hacia el aumento de rigidez para que el cálculo dinámico en hipótesis de masa mínima proporcione un valor máximo de aceleración inferior al límite de servicio con el modelo HSLM-C.

Para orientar estos cambios se pueden utilizar las ecuaciones de proporcionalidad (I) a (IV), obteniendo la frecuencia y masa requeridas en la nueva sección. En este caso, en base a la figura 7.5, el punto de resonancia en 185.4 km/h debe representar una velocidad superior a 240 km/h en el nuevo puente, para lo que se requiere una frecuencia mínima:

$$f'_{0,min} = 1.294 f_0 = 13.33 \text{ Hz}$$

La definición geométrica de la nueva sección se encuentra en los planos del Anexo 3. A continuación se resumen las características dinámicas definitivas y el resultado del nuevo cálculo dinámico de aceleración.

Área homog. (m ²)	Inercia homog. (m ⁴)	Cota del cdg (m)	Masa (kg/m)	Frecuencia (Hz)
3.86	0.49782	0.582	17 431	13.94

Tabla 7.7. Propiedades dinámicas del puente rediseñado

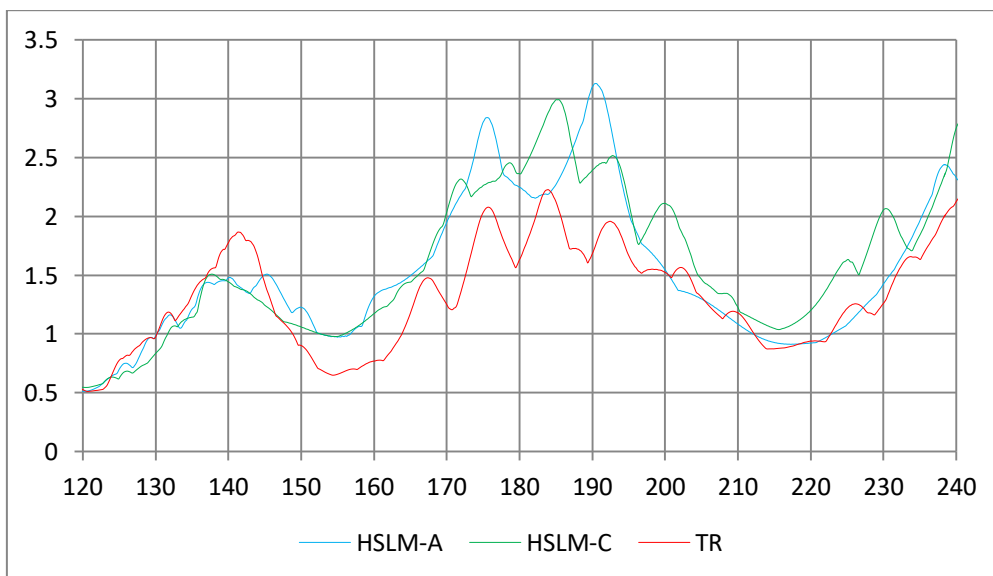


Figura 7.12. Aceleraciones(m/s²) envolventes según velocidad (km/h)

Capítulo 8. Análisis de trenes convencionales

Al término del estudio realizado con trenes regulares se tuvo conocimiento de que algún tren convencional existente podría estar generando una situación similar. Este hecho era completamente inesperado porque el modelo HSLM-A se diseñó fundamentalmente en base a trenes articulados y convencionales reales. Por esa razón se justifica el interés de determinar si existen otros trenes no regulares que excedan a la envolvente del modelo HSLM-A en condiciones similares de longitud de puente y velocidad. Tales trenes deben cumplir los límites establecidos en el anexo E de la norma EN 1991-2.

Límites de validez del modelo de carga HSLM – EN 1991-2 Anexo E

- (a)· Carga por eje, $P \leq 170$ kN
- (b)· Longitud de coche, $18 \leq D \leq 27$ m
- (c)· Empate de bogie, $2.5 \leq d_{BA} \leq 3.5$ m
- (d)· Peso total del tren, $W_T \leq 10\ 000$ kN
- (e)· Longitud total del tren, $L_T \leq 400$ m
- (f)· Para trenes convencionales, espaciamento entre bogies d_{BS} tal que:

$$(E.2) \quad 4 P \cos\left(\frac{\pi d_{BS}}{D}\right) \cos\left(\frac{\pi d_{BA}}{D}\right) \leq 2 P_{HSLMA} \cos\left(\frac{\pi d_{HSLMA}}{D_{HSLMA}}\right)$$

- (g)· Evitar relaciones D/d_{BA} y $(d_{BS} - d_{BA})/d_{BA}$ próximas a un valor entero

De la simple observación de estos límites pueden descartarse directamente los trenes articulados, pues los empates de bogie están dentro del mismo rango de interferencia entre ondas que experimenta el modelo HSLM-A, añadiendo el límite a la carga por eje, peso total del tren, y relación entre longitud de coche y empate de bogie.

En cuanto a los trenes convencionales, si bien es cierto que tienen las mismas limitaciones al empate de bogie que causarían interferencia entre ondas, existe la posibilidad de que una adecuada separación entre bogies pueda resultar en un acoplamiento entre ondas que compense esa situación. Es necesario sin embargo profundizar en la ecuación E.2 para comprobar si tal cosa es posible.

La ecuación (XVI) del capítulo 3 presentaba el factor de bogie simplificado para un bogie de dos ejes sin amortiguamiento:

$$(3.XVI) \quad f_B(j, d, D) = 2 \left| \cos\left(j \frac{\pi d}{D}\right) \right|$$

Comparando con la ecuación (E.2) se puede advertir la similitud. En efecto la parte derecha de la ecuación (E.2) representa la carga por el factor de bogie de un tren del modelo HSLM-A para resonancia de primer orden; mientras que la parte izquierda representa la carga por el factor de dos bogies de un tren convencional,

como el producto del factor de bogie y el factor del espacio entre bogies, para resonancia de primer orden.

De esta observación se deduce que la ecuación (E.2) representa la condición de que ningún tren convencional pueda superar el efecto dinámico de los trenes HSLM-A en resonancia de primer orden. Pero al mismo tiempo implica que otros órdenes de resonancia mayores no están siendo restringidos por ninguna condición, y por tanto cabe la posibilidad de encontrar espaciamientos entre bogies que cumplan la ecuación (E.2) y sin embargo produzcan un acoplamiento fuerte entre ondas. Existe por tanto margen para buscar trenes convencionales que produzcan efectos pésimos.

Determinación de trenes convencionales pésimos

Previo a la determinación de las características de trenes convencionales pésimos, es necesario añadir un límite adicional a los anteriores para el espaciamiento entre bogies d_{BS} . Aunque el eurocódigo sólo especifique la ecuación (E.2), lo cierto es que no cualquier número real es admisible, es necesario establecer un rango de valores habitual entre los fabricantes. En la tesis [9] se refiere que los trenes convencionales existentes cumplen generalmente la relación: $0.27 \leq d_{BS}/D \leq 0.32$.

El objetivo de cada tren convencional pésimo es maximizar su impronta dinámica en el mismo intervalo de longitudes de onda que se ha tratado en los trenes regulares: [4.5, 7.5]. Este intervalo contiene los puntos de resonancia de tercer y cuarto orden para las longitudes de coche de estos trenes. Por esa razón se plantean dos conjuntos de diez trenes cada uno, que tratarán de maximizar su acción dinámica en tercer y cuarto orden de resonancia respectivamente; pues a priori no puede saberse cuál de los dos será peor debido al alto número de variables involucradas. La acción dinámica se estima mediante el factor de bogie.

Para cada tren se debe maximizar la función (I) según el orden de resonancia j asociado al conjunto al que pertenezca y su longitud de coche D .

$$(I) \quad P \cos\left(j \frac{\pi d_{BA}}{D}\right) \cos\left(j \frac{\pi d_{BS}}{D}\right)$$

Como d_{BA} está estrechamente acotado puede determinarse de forma sencilla para cada tren de forma que maximice la ec. (II) sin interacción con otros parámetros.

$$(II) \quad \cos\left(j \frac{\pi d_{BA}}{D}\right)$$

Conociendo los empates de bogie, la función a maximizar definitivamente es la ec. (III), dando como resultado un valor de carga por eje P y una separación entre bogies d_{BS} para cada tren.

$$(III) \quad P \cos\left(j \frac{\pi d_{BS}}{D}\right)$$

La maximización de esta función se ha realizado mediante un algoritmo de optimización no lineal, teniendo en cuenta todas las limitaciones de la norma y el límite habitual de fabricación, expuestos anteriormente. Particularmente, la condición (g) se ha cumplido estableciendo que la diferencia respecto al número entero más próximo debe ser mayor a 0.15.

Con este proceso se determinan veinte trenes. Los diez primeros, CV1 a CV10, son la optimización para resonancia de cuarto orden. El resto, CV11 a CV20, para resonancia de tercer orden. Las locomotoras utilizadas son las mismas que en el modelo articulado HSLM-A.

Tren Convencional	Nº coches intermedios	Long. coche (m)	Empate de bogie (m)	Empate entre bogies (m)	Carga por eje (kN)
CV1	14	18	3.45	4.95	149
CV2	14	19	3.50	5.20	152
CV3	14	20	3.50	5.45	153
CV4	14	21	3.40	5.75	149
CV5	15	22	3.50	6.05	143
CV6	14	23	3.50	6.30	149
CV7	14	24	2.50	6.55	148
CV8	14	25	2.55	6.85	145
CV9	13	26	2.50	7.10	163
CV10	12	27	2.50	7.90	170
CV11	13	18	2.50	5.75	164
CV12	12	19	2.50	6.05	169
CV13	12	20	2.55	6.40	170
CV14	12	21	2.50	6.70	170
CV15	13	22	2.50	7.00	161
CV16	13	23	2.50	7.10	162
CV17	13	24	2.50	7.10	161
CV18	14	25	2.55	7.25	155
CV19	12	26	2.50	8.30	170
CV20	12	27	2.50	8.60	170

Tabla 8.1. Características de los trenes convencionales pésimos

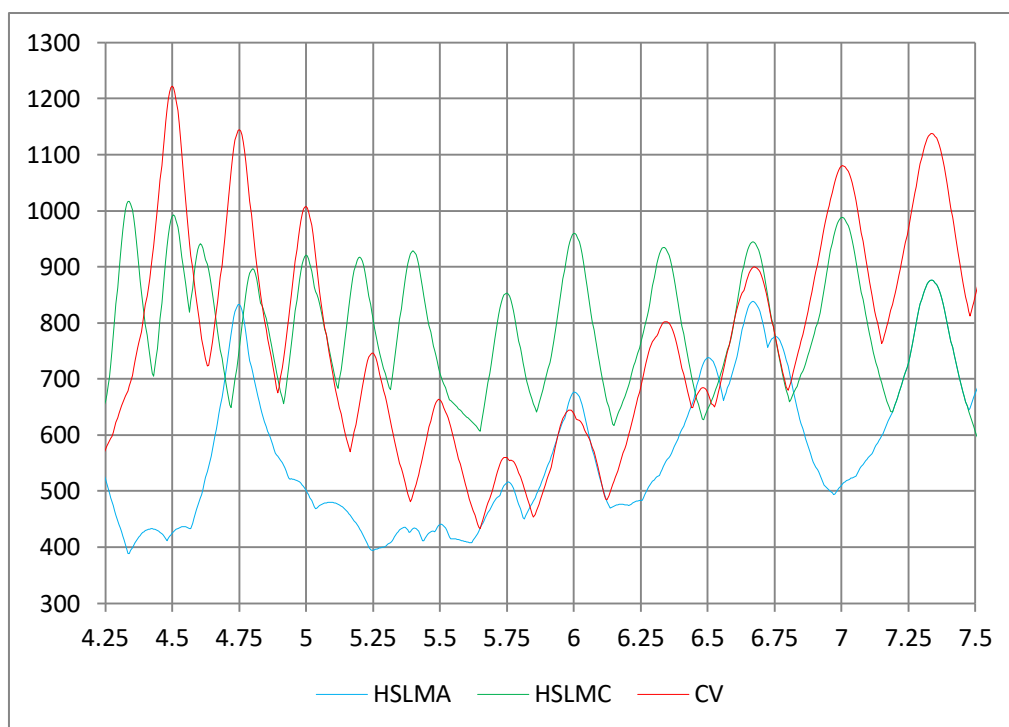


Figura 8.1. Fragmento de impronta (kN) de los modelos HSLM-A, HSLM-C y CV, en función de la longitud de onda (m), $\zeta = 1.5\%$

Se ha logrado el objetivo de encontrar trenes convencionales cuya impronta exceda la envolvente del modelo HSLM-A. Para completar el análisis se debe comprobar que las aceleraciones producidas sobre puentes críticos superen las que produce el modelo HSLM-A en proporción suficiente para que sea relevante.

Puentes críticos para trenes convencionales

Se han seleccionado cinco trenes convencionales para este análisis, los cinco más desfavorables a juicio de la impronta: CV1, CV2, CV3, CV4, CV14.

Para los trenes CV1 y CV2 se han definido dos nuevos puentes críticos mediante el mismo procedimiento empleado en el capítulo 4. Los otros tres trenes utilizan puentes críticos ya utilizados en el análisis de trenes regulares.

Puentes Críticos conv.	Tren crítico asociado	Longitud (m)	Masa lineal (kg)	Frec. fundamental (Hz)	Amortiguamiento (%)
PC1'	CV1	8.82	15 564	12.25	1.7826
PC2'	CV2	9.31	15 662	11.68	1.7483
PC3'	CV3	9.80	15 760	11.17	1.7140
PC4'	CV4	10.29	15 858	10.71	1.6797
PC5'	CV14	13.72	16 544	8.34	1.4396

Tabla 8.2. Características de puentes críticos de trenes convencionales

A continuación se presentan los resultados en gráficos de aceleración (m/s^2) según velocidad (km/h), obtenidos con la solución analítica exacta y una resolución de 0.36 km/h.

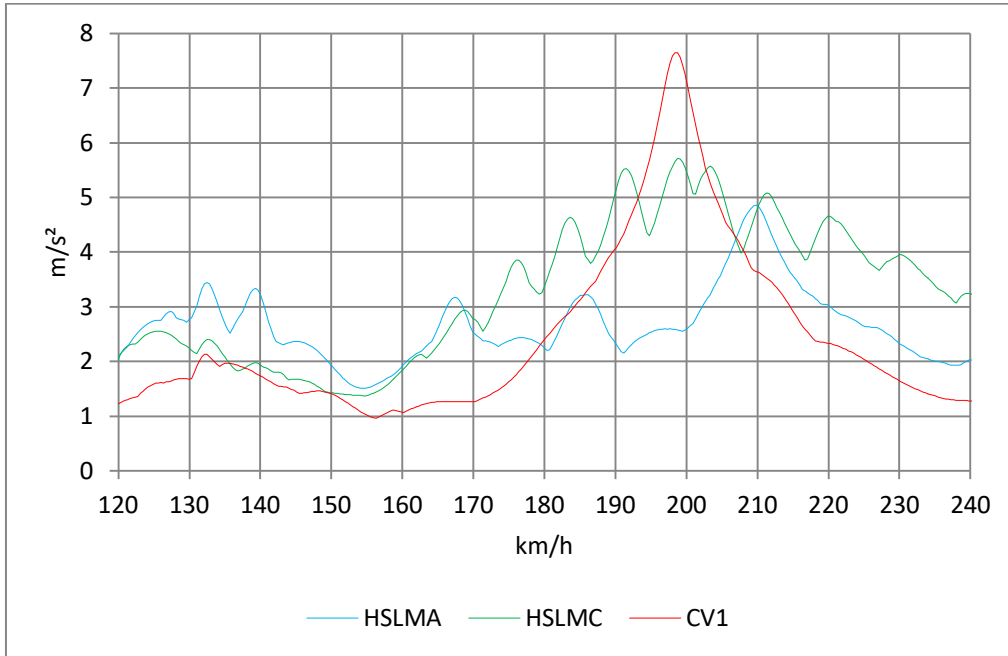


Figura 8.2. Puente crítico 1', tren convencional CV1

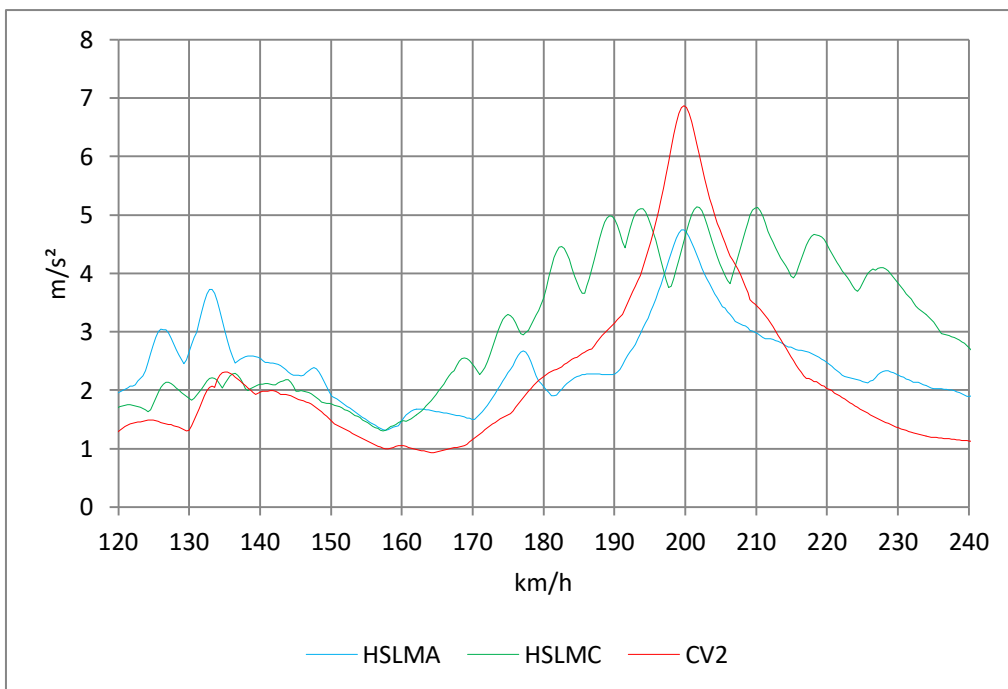


Figura 8.3. Puente crítico 2', tren convencional CV2

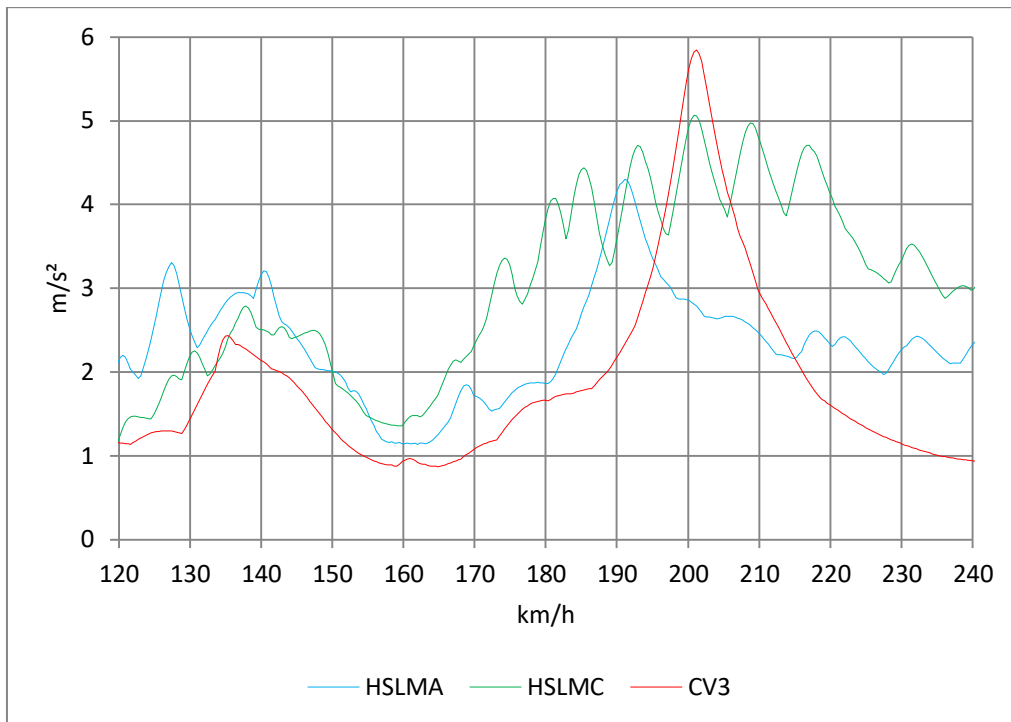


Figura 8.4. Puente crítico 3', tren convencional CV3

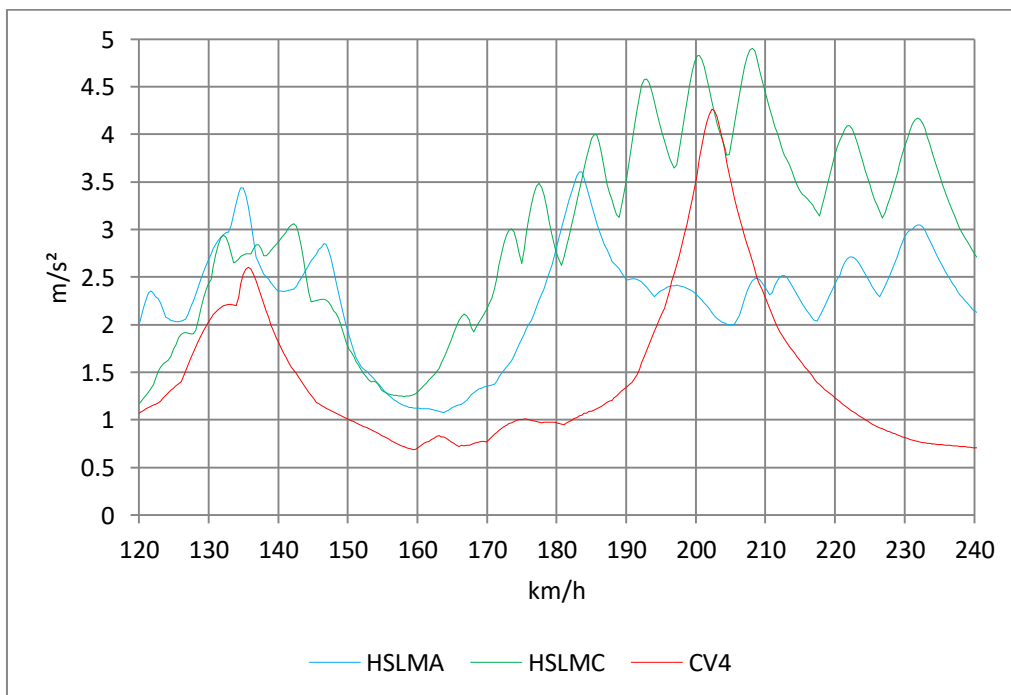


Figura 8.5. Puente crítico 4', tren convencional CV4

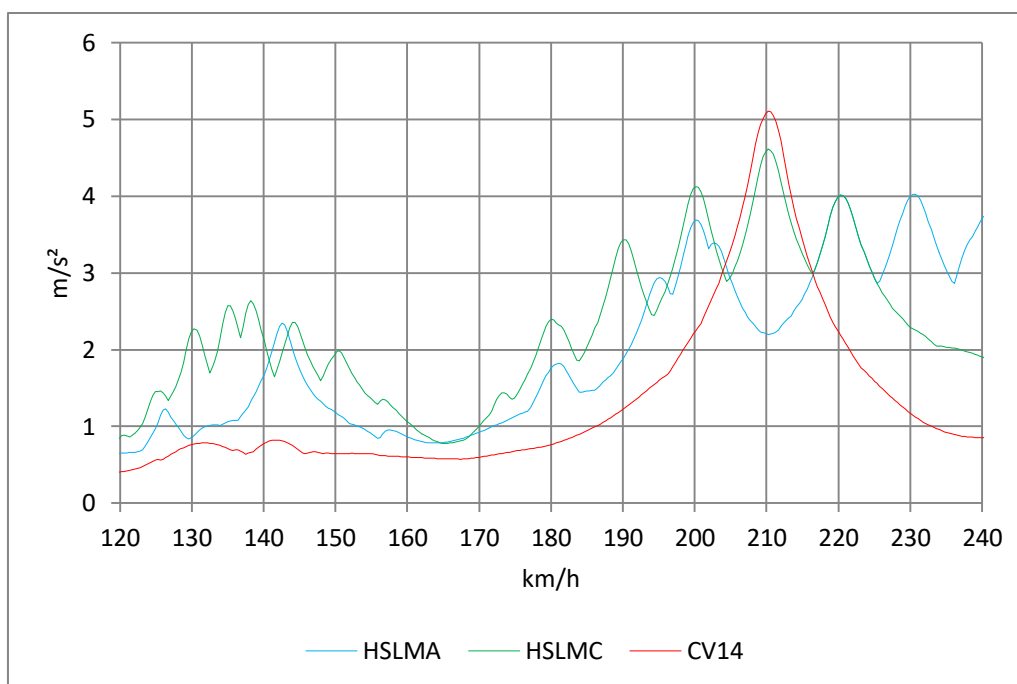


Figura 8.6. Puente crítico 5', tren convencional CV14

Puentes Críticos conv.	Aceleración máxima modelo CV (m/s ²)	Aceleración máxima modelo HSLM-A (m/s ²)	Porcentaje de exceso sobre HSLM-A
PC1'	7.64	4.85	57.5 %
PC2'	6.87	4.74	44.9 %
PC3'	5.82	4.30	35.3 %
PC4'	4.26	3.61	18.0 %
PC5'	5.11	4.02	27.1 %

Tabla 8.3. Valores máximos de aceleración y exceso sobre HSLM-A

Puentes Críticos conv.	Aceleración máxima modelo CV (m/s ²)	Aceleración máxima modelo HSLM-C (m/s ²)	Porcentaje de exceso sobre HSLM-C
PC1'	7.64	5.71	33.8 %
PC2'	6.87	5.13	33.9 %
PC3'	5.82	5.02	15.9 %
PC4'	4.26	4.88	-12.7 %
PC5'	5.11	4.61	10.8 %

Tabla 8.4. Valores máximos de aceleración y exceso sobre HSLM-C

Los resultados son similares a los obtenidos en el capítulo 5 para el modelo de trenes regulares, si bien estos trenes convencionales producen en algunos casos aceleraciones sensiblemente mayores, muy por encima del límite de servicio impuesto por la normativa (3.43 m/s²).

Modelo HSLM-C'

El modelo HSLM-C, que se ha diseñado para adaptar los trenes regulares, no puede admitirse como solución general de estos trenes convencionales; sólo en algunos casos su aproximación es suficiente. La capacidad para adaptar el empuje de bogie en el modelo HSLM-C con la intención de cubrir a los trenes convencionales más desfavorables es muy limitada, y resulta imposible hacerlo para todos los casos sólo con esa modificación.

El problema de conseguir un modelo articulado que sea tanto envolvente de los trenes regulares como de los convencionales más desfavorables, puede resolverse modificando las cargas por eje. De esta manera se define un modelo HSLM-C' cuyo objetivo es que su impronta alcance los valores pico producidos por los trenes convencionales no cubiertos actualmente. La nueva carga necesaria para cumplir ese objetivo se puede obtener fácilmente a partir del valor de las improntas en los puntos de interés.

$$P' = \frac{P_{\text{HSLMC}} \cdot G_{\text{CV}}}{G_{\text{HSLMC}}}$$

Tren conv. no cubierto	Tren HSLM-C asociado	Longitud onda (m)	G _{CV} (kN)	G _{HSLMC} (kN)	P' (kN)
CV1	C10	4.50	1222	991	260
CV2	C7	4.75	1142	904	240
CV3	C8	5.00	1004	918	210
CV14	C4	7.00	1079	988	210
CV15	C5	7.33	1137	876	220

Tabla 8.5. Nuevas cargas para modelo HSLM-C'

La carga P' se ha redondeado a decenas en armonía con las cargas del modelo HSLM-A y HSLM-C.

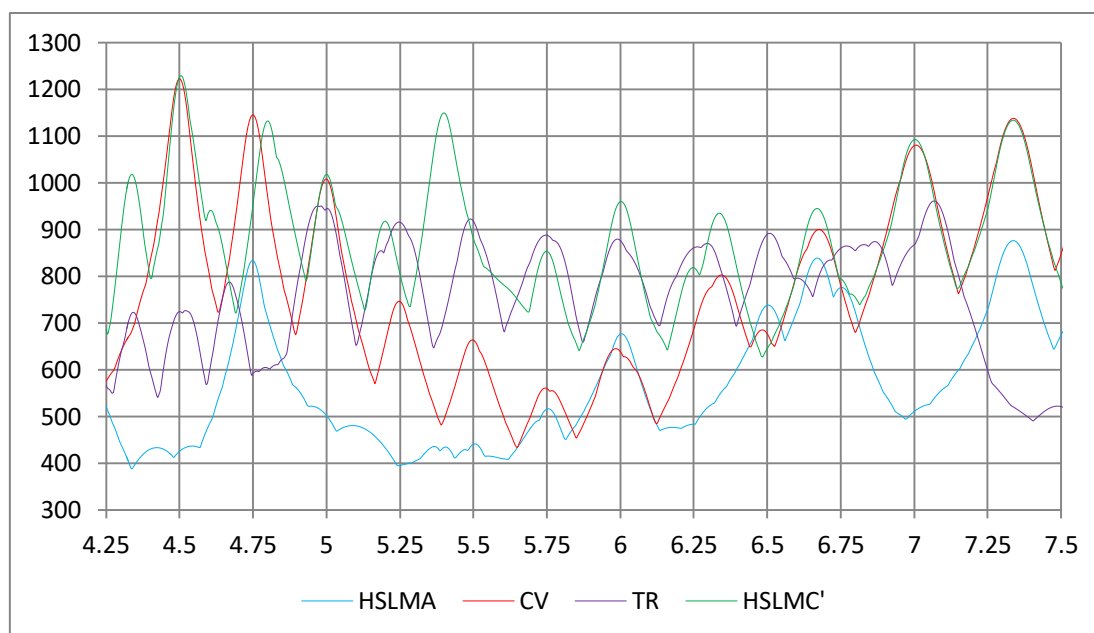


Figura 8.7. Fragmento de impronta (kN) de los modelos HSLM-A, HSLM-C', CV y TR, en función de la longitud de onda (m), $\zeta = 1.5 \%$

La nueva impronta de la figura 8.7 es presumiblemente un buen ajuste tanto de los trenes convencionales como de los regulares en el intervalo [4.5, 7.5], con la excepción de un punto en la longitud de onda 5.4 m producido por el tren C10'.

El tren C10 sólo es determinante en los picos de impronta de longitud de onda 4.5 y 5.4 m, así que puede plantearse una modificación particular que corrija el problema sin alterar el resto de la impronta. La resonancia de orden 6 del tren C10, que es la que genera el valor pico en 4.5 m, representa un máximo del factor de bogie; aprovechando la no linealidad del factor de bogie respecto al empate de bogie, puede plantearse una modificación del empate que cause interferencia en la resonancia de orden 5 en mayor medida que en la resonancia de orden 6. Eventualmente se requiere un ajuste adicional de la carga por eje.

Modelo HSLM-C'	Nº coches intermedios	Long. coche (m)	Empate de bogie (m)	Carga por eje (kN)
C1'	18	18	1.5	170
C2'	17	19	1.9	200
C3'	16	20	1.8	180
C4'	15	21	1.9	210
C5'	14	22	2.0	220
C6'	13	23	4.5	180
C7'	13	24	4.2	240
C8'	12	25	4.5	210
C9'	11	26	4.3	210
C10'	11	27	3.8	300

Tabla 8.6. Características del modelo HSLM-C'

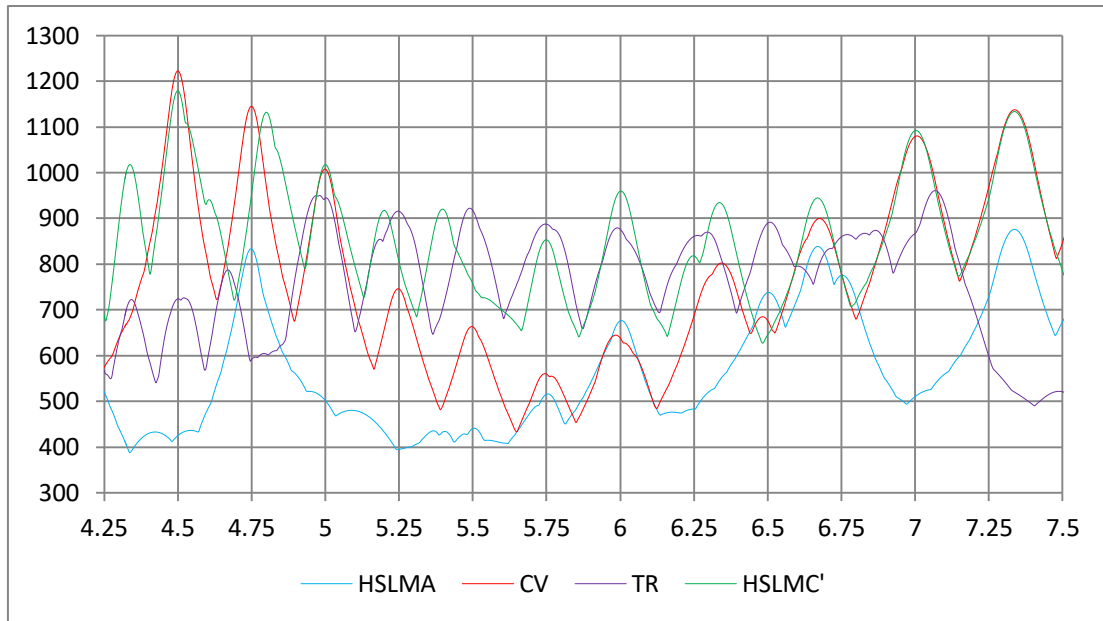


Figura 8.8. Fragmento de impronta (kN) de los modelos HSLM-A, HSLM-C', CV y TR, en función de la longitud de onda (m), $\zeta = 1.5\%$

La modificación del tren C10' sólo ha alterado los puntos que se pretendían alterar y ahora el modelo HSLM-C' resulta una envolvente mejor ajustada de los trenes convencionales y regulares.

Puente crítico PC1' – Solución analítica exacta

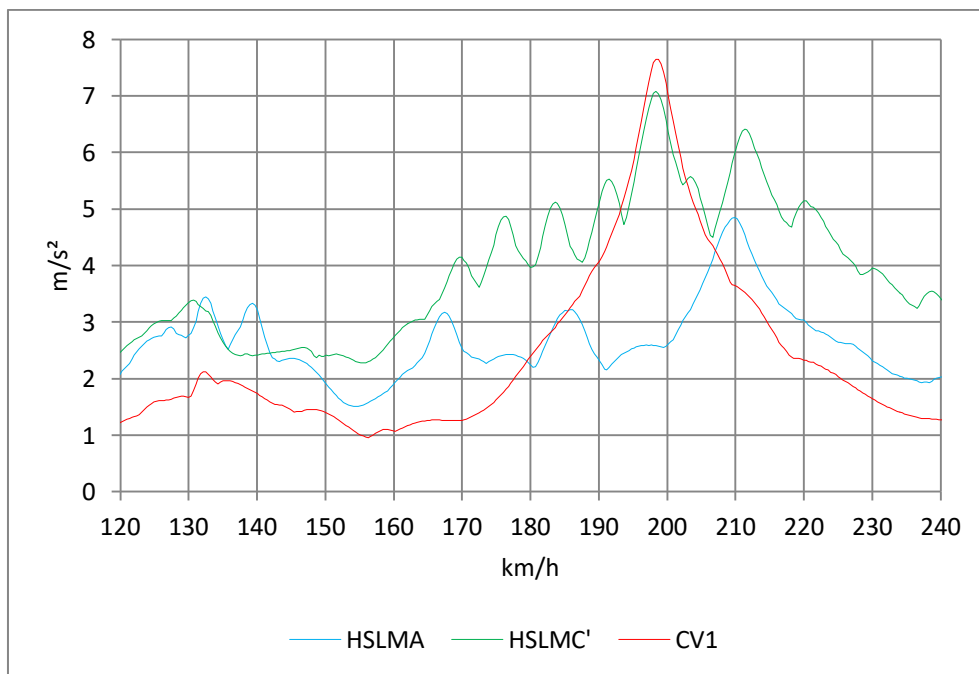


Figura 8.9. Puente crítico 1', tren convencional CV1

Con el modelo HSLM-C' el exceso es de sólo el 8% frente al 34.8% del modelo HSLM-C y el 57.5% del modelo HSLM-A.

Capítulo 9. Conclusiones

A tenor de los resultados presentados en este trabajo se extraen las siguientes conclusiones:

- ❖ Sobre puentes isostáticos entre 8.5 y 14 m de longitud se pueden producir aceleraciones muy superiores al límite máximo en servicio, al paso de ciertos trenes circulando a velocidades en el intervalo de 190 a 220 km/h. Las características de dichos trenes quedan comprendidas dentro de las especificadas en el Anexo informativo E de la norma EN 1991-2.
- ❖ En tales condiciones, los trenes del modelo HSLM-A sufren una interferencia destructiva entre los ejes de sus bogies que reduce en extremo su acción dinámica en resonancia sobre los puentes mencionados.
- ❖ Por esa razón los resultados obtenidos muestran que, en lo relativo a la impronta y al cálculo dinámico realizado con modelos de cargas concentradas, no queda garantizado que el modelo HSLM-A cubra en todos los casos a trenes regulares y convencionales cuyas características cumplen los límites de validez expuestos en el Anexo E del EN 1991-2.
- ❖ La magnitud de la discrepancia con el modelo HSLM-A puede llegar a suponer que se produzcan aceleraciones hasta un 57% mayores, como se ha obtenido con un tren convencional a 198 km/h, con modelos de cargas puntuales.
- ❖ A tenor de los resultados se puede afirmar que el modelo HSLM-A sí garantiza que los trenes regulares con longitud de coche superior a 12.5 m quedan cubiertos por él. Este hecho es coherente con el buen comportamiento mostrado en la práctica por los actuales trenes regulares *Talgo AV*, con coches de 13.14 m de longitud.
- ❖ El método LIR, cuya expresión se ha validado en este trabajo, presenta una estimación razonablemente buena de la respuesta de la estructura en las

proximidades de la resonancia. El error que se comete es generalmente inferior al 5%.

- ❖ Como consecuencia de lo anterior, la impronta dinámica del método LIR es una representación fiable y útil del comportamiento dinámico de un tren independientemente del puente sobre el que circule. En la impronta se representan fenómenos de importancia como la magnitud de la resonancia, donde puede apreciarse la existencia de interferencia destructiva entre ejes si dicha magnitud es extraordinariamente baja.
- ❖ El factor de bogie, que es una medida del acoplamiento entre ondas de un bogie, es un parámetro de mucha utilidad en el análisis de trenes con bogies para predecir la magnitud de sus resonancias y la posible interferencia destructiva.
- ❖ Como complemento a la impronta dinámica, los gráficos tridimensionales del producto de la impronta por la línea de influencia del puente permiten analizar conjuntamente la magnitud de la resonancia y el efecto ponderador de la línea de influencia entre los ciclos de cancelación y máxima respuesta libre.
- ❖ Utilizando como referencia la impronta dinámica y el factor de bogie se pueden manipular los empates de bogie de un tren articulado o convencional para modificar su acción dinámica en distintas longitudes de onda, permitiendo de esta manera aumentar o disminuir las resonancias deseadas mediante el acoplamiento o interferencia de ondas.
- ❖ La demostración de que el procedimiento anterior es posible es el modelo HSLM-C que se ha generado en este trabajo para ajustarse a la acción dinámica de los trenes regulares. De esta manera la discrepancia con la aceleración que producen los trenes regulares es inferior al 10%.

- ❖ De la misma manera, ese procedimiento ha sido exitoso para determinar trenes convencionales de máxima agresividad dinámica mediante un algoritmo de optimización no lineal. Así mismo, alterando empates y cargas por eje se pueden realizar ajustes muy precisos en puntos concretos de la impronta, como se ha demostrado en el modelo HSLM-C'.
- ❖ En relación al cálculo del paso inferior P.K. 25+240 de la línea Málaga-Fuengirola, se ha encontrado que el cálculo dinámico no es determinante para la obtención de esfuerzos y deformaciones en este caso.

Sin embargo en el cálculo de la aceleración se ha encontrado que mientras el modelo HSLM-A predice una aceleración apenas superior al límite de servicio, los trenes regulares lo superan notablemente y producen una aceleración máxima un 49% superior.

- ❖ Del hecho anterior se deduce que el uso del modelo HSLM-A para el cálculo de este tipo de puentes podría conducir a un dimensionamiento incorrecto en relación al estado límite de servicio de aceleración, en caso de que circularan sobre la estructura ciertos trenes regulares y convencionales cuyas características quedarían a priori cubiertas por el HSLM-A, según el Anexo informativo E del EN 1991-2.
- ❖ Por las razones expuestas, el conocimiento obtenido en este trabajo es relevante para el proyecto, refuerzo o recálculo de puentes isostáticos en líneas nuevas o mejora de líneas existentes cuya velocidad de circulación esté en el rango de 180 a 220 km/h, con influencia directa sobre la seguridad del tráfico y los costes de mantenimiento.

Capítulo 10. Referencias bibliográficas

- [1] J. Humar, *Dynamics of Structures. Third Edition*. CRC Press, 2012.
- [2] P. Museros, *Interacción vehículo-estructura y efectos de resonancia en puentes isostáticos de ferrocarril para líneas de alta velocidad*. Tesis doctoral, ETSII-UPM, 2002.
- [3] P. Museros, E. Moliner, *Comments on "Vibration of simply supported beams under a single moving load: A detailed study of cancellation phenomenon"*. International Journal of Mechanical Sciences, 128-129 (2017), pp 709-713.
- [4] P. Museros, E. Moliner, M.D. Martínez-Rodrigo, *Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration*. Journal of Sound and Vibration, 332 (2013), pp 326-345.
- [5] E. Moliner, *Comportamiento dinámico de puentes de ferrocarril para tráfico de alta velocidad y reacondicionamiento mediante disipadores viscoelásticos pasivos*. Tesis doctoral, ETSICCP-UPV, 2012.
- [6] J. Domínguez, *Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia*. Tesis doctoral, ETSICCP-UPM, 2001.
- [7] European Committee for Standardisation (CEN), EN 1991-2, *Eurocode 1: Actions on structures. Part 2: Traffic loads on bridges*, 2003.
- [8] Ministerio de Fomento, IAPF-07, *Instrucción de acciones a considerar en puentes de ferrocarril*, 2010.
- [9] A. Doménech, *Influencia del modelo de vehículo en la predicción del comportamiento a flexión de puentes isostáticos de ferrocarril para tráfico de alta velocidad*. Tesis doctoral, ETSICCP-UPV, 2014.

Anexo 1. Estudio de la cancelación por superposición

Durante la realización de este trabajo se han realizado pruebas sobre fenómenos dinámicos generales utilizando trenes elementales, llamados así por ser una sucesión de cargas iguales y equidistantes. Con estos trenes se han encontrado velocidades en las que la vibración libre resulta cancelada y sin embargo no son velocidades de cancelación previstas por la ecuación (I), que puede ser encontrada en las referencias [3], [4] y [5].

$$(I) \quad K_{ni}^c = \frac{n}{n \pm 2i} > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Donde K representa la velocidad adimensional ($K_n = \frac{n\pi v}{\omega_n L}$), n el modo de vibración, e i el orden de cancelación. Es conocido que todas las velocidades de cancelación del modo fundamental de vibración son velocidades de cancelación del resto de modos, llamando a esto cancelación total. Las cancelaciones previstas en la ec. (I) anulan la vibración libre que produce cada carga individualmente, siempre que se considere el amortiguamiento nulo.

La clase de cancelación que se ha encontrado sin embargo anula la vibración libre que produce un conjunto de cargas sucesivas, pero no cada carga individualmente. A esto se ha convenido en llamar cancelación por superposición de ondas.

Al no haber encontrado ninguna fuente publicada donde se dé una expresión matemática para las velocidades que producen este tipo de cancelación, en este anexo se desarrolla matemáticamente la condición que se debe cumplir para dicho fenómeno y proporciona una ecuación similar a la ec. (I) que permita predecir tales velocidades.

Desarrollo matemático

Para que se produzca la cancelación debe anularse la ecuación de amplitud modal en vibración libre para un grupo de cargas, en ausencia de amortiguamiento. La amplitud modal de vibración libre sin amortiguamiento puede obtenerse fácilmente a partir de la amortiguada, ec. (III) del capítulo 4.

$$(II) \quad \xi_n(t) = \frac{\xi_{n,st}}{(1 - K_n^2)^2} K_n (C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t))$$

$$C_n = (K_n^2 - 1) \sin\left(\frac{n\pi}{K_n}\right)$$

$$D_n = (K_n^2 - 1) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{K_n}\right) - \cos(n\pi) \right)$$

Agrupando las constantes, puede reescribirse más claramente.

$$(II) \quad \xi_n(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

$$A = \frac{q_{n,st}}{(1 - K_n^2)^2} K_n (K_n^2 - 1) \sin\left(\frac{n\pi}{K_n}\right)$$

$$B = \frac{q_{n,st}}{(1 - K_n^2)^2} K_n (K_n^2 - 1) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{K_n}\right) - \cos(n\pi) \right)$$

La amplitud modal de una carga i que forma parte de un conjunto de N cargas, separadas una distancia d , moviéndose a velocidad v , es:

$$(III) \quad \xi_{n,i}(t) = A \cos\left(\omega_n \left(t - \frac{id}{v}\right)\right) + B \sin\left(\omega_n \left(t - \frac{id}{v}\right)\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$$

La cancelación se producirá bajo la condición:

$$(IV) \quad \sum_{i=0}^{N-1} \xi_{n,i}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Para una sola carga ($N = 1$) la cancelación sólo puede producirse si A y B son cero, y tal desarrollo lleva a que la solución es la ec. (I). Sin embargo lo que se busca ahora es la solución de (IV) para valores de A y B no necesariamente cero. Así que la ec. (IV) bajo estas condiciones se desarrolla como el sistema:

$$(V.I) \quad \sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\omega_n t - \omega_n \frac{id}{v}\right) = 0$$

$$(V.II) \quad \sum_{i=0}^{N-1} \sin\left(\omega_n t - \omega_n \frac{id}{v}\right) = 0$$

Mediante las relaciones trigonométricas del ángulo resta e introduciendo por claridad las variables: $\alpha = \omega_n t$, $\beta = \omega_n d/v$:

$$(V.I) \quad \sum_{i=0}^{N-1} (\cos \alpha \cos i\beta + \sin \alpha \sin i\beta) = 0$$

$$(V.II) \quad \sum_{i=0}^{N-1} (\sin \alpha \cos i\beta - \cos \alpha \sin i\beta) = 0$$

La variable α depende del tiempo pero no de la carga i , por tanto puede salir del sumatorio como factor común, y entonces las condiciones que deben satisfacerse son:

$$(VI.I) \quad \sum_{i=0}^{N-1} \cos i\beta = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} \cos i\beta = 0, \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N-1} \cos i\beta = -1$$

$$(VI. II) \quad \sum_{i=0}^{N-1} \sin i\beta = \sum_{i=1}^{N-1} \sin i\beta = 0$$

La solución del sistema (VI) hasta $N = 4$ es:

$$(VII) \quad \beta_N = \pi \left(2j \pm \frac{2}{N} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad 1 < N < 5$$

Que deshaciendo el cambio puede expresarse en términos de velocidad adimensional, análogamente a la ec. (I).

$$(VII) \quad K_{n,N}^{cs} = \frac{d}{L} \frac{n}{2j \pm \frac{2}{N}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad 1 < N < 5$$

Para grupos de más de cuatro cargas la solución se complica y no se ha encontrado una ecuación general. Como ejemplo se muestra la solución para $N = 5$.

$$(VIII) \quad K_{n,N}^{cs} = \frac{d}{L} \frac{n}{j \pm \frac{3 + (-1)^j}{10}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad N = 5$$

Puede ser que una velocidad de cancelación de la ec. (VII) sea también solución de la ec. (I), basta con cumplir la siguiente condición:

$$\frac{2j \pm \frac{2}{N}}{n \pm 2i} = \frac{d}{L}$$

Con la solución (VII) ya se dispone de una expresión que predice la cancelación por superposición de ondas. El interés de esta solución es el de poder comprender mejor los fenómenos dinámicos que aparecen en los puentes de ferrocarril.

Por ejemplo, aunque este tipo de cancelación no se presente en la práctica de forma pura, puede haber situaciones en las que un tren complejo posea secuencias de cargas equidistantes formando un patrón, y en ese caso se podría apreciar una caída de la acción dinámica del tren debido a este efecto. Así, el conocimiento de esta solución permite encontrar la explicación a ese tipo de situaciones que de otra manera podrían pasar inadvertidas.

Anexo 2. Simplificación de la impronta para trenes elementales

Al igual que en el anexo 1, el estudio de trenes elementales realizado durante este trabajo ha llevado a desarrollar métodos simplificados para determinar su impronta. Son trenes elementales aquellos que están formados por una secuencia de cargas iguales y equidistantes.

El interés práctico de estas ecuaciones puede ser simplificar el cálculo de puentes que deban ser calculados según el modelo HSLM-B de la norma EN 1991-2, o utilizarlas para tratar de determinar trenes elementales cuya resonancia sea equivalente a la de un tren más complejo.

Impronta simplificada en resonancia

La ecuación de la impronta dinámica se ha deducido en el capítulo 3.

$$(I) \quad G(\lambda) = \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k F_i e^{-\zeta 2\pi \delta_i} \sin(2\pi \delta_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^k F_i e^{-\zeta 2\pi \delta_i} \cos(2\pi \delta_i) \right)^2} \right\}$$

$$\delta_i = \frac{(x_k - x_i)}{\lambda}$$

Para un tren elemental se realizan las siguientes simplificaciones basadas en la separación entre cargas d .

$$F_i = F, \quad x_i = d(i - 1) \rightarrow \delta_i = \frac{d}{\lambda}(k - i)$$

La definición de resonancia para un tren elemental es $\lambda = d/j$, y en ese caso $\delta_i = j(k - i)$, lo cual implica que $\cos(2\pi \delta_i) = 1$. Por tanto en resonancia se puede prescindir del primer sumatorio de la raíz y la impronta en resonancia se simplifica de la siguiente forma:

$$(II) \quad G_k^R(\lambda) = \sum_{i=1}^k F e^{-\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(k-i)} = F e^{-\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}k} \sum_{i=1}^k e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}i} = F e^{-\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}k} \sum_{i=1}^k \left(e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} \right)^i$$

Aplicando la solución de la progresión geométrica se resuelve el sumatorio.

$$\sum_{i=1}^k a^i = \sum_{i=0}^k (a^i) - 1 = \frac{a(a^k - 1)}{a - 1}$$

$$a^{-k} \frac{a(a^k - 1)}{a - 1} = \frac{a - a^{1-k}}{a - 1}$$

$$(III. I) \quad G_k^R(\lambda) = F \left(\frac{e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(1-k)}}{e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - 1} \right), \quad \zeta > 0$$

$$(III. II) \quad G_k^R(\lambda) = N F, \quad \zeta = 0$$

Como la ecuación (III) sólo es válida para los λ de resonancia de orden j , conviene sustituir directamente dicha condición en la ecuación.

$$(IV. I) \quad G_{k,j}^R = F \left(\frac{e^{\zeta 2\pi j} - e^{\zeta 2\pi j (1-k)}}{e^{\zeta 2\pi j} - 1} \right), \quad \zeta > 0$$

$$(IV. II) \quad G_{k,j}^R = N F, \quad \zeta = 0$$

La ecuación (IV) representa el valor de la impronta en los puntos de resonancia de orden j de un tren elemental de k cargas.

Impronta simplificada general

El punto de partida es la ec. (I) con las simplificaciones basadas en la equidistancia entre cargas utilizadas en el apartado anterior. En este caso la impronta debe ser válida para cualquier valor de longitud de onda. Para operar con los sumatorios de senos y cosenos se recurre a números complejos, y en este caso j es la unidad imaginaria.

$$\begin{aligned} F \sum_{i=1}^k e^{-\zeta 2\pi \delta_i} \cdot e^{j 2\pi \delta_i} &= F \sum_{i=1}^k e^{2\pi \delta_i (j-\zeta)} = F \sum_{i=1}^k e^{2\pi (j-\zeta) \frac{d}{\lambda} (k-i)} = \\ &= F \sum_{i=1}^k e^{2\pi (j-\zeta) \frac{d}{\lambda} k} \cdot e^{-2\pi (j-\zeta) \frac{d}{\lambda} i} = F e^{2\pi (j-\zeta) \frac{d}{\lambda} k} \sum_{i=1}^k \left(e^{-2\pi (j-\zeta) \frac{d}{\lambda}} \right)^i = \sum_{i=1}^k z_i \end{aligned}$$

De nuevo se utiliza la misma solución para la progresión geométrica.

$$(V) \quad \sum_{i=1}^k z_i = F \left(\frac{e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda} (1-k)} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda} (1-k)}}{e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - 1} \right)$$

Operando con números complejos se puede hallar una expresión equivalente a (V) siendo el denominador un número real.

$$\left(e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - 1 \right) \cdot \left(e^{j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - 1 \right) = e^{\zeta 4\pi \frac{d}{\lambda}} - 2 e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cos \left(2\pi \frac{d}{\lambda} \right) + 1$$

$$\left(e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} \right) \cdot \left(e^{j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - 1 \right) = e^{\zeta 4\pi \frac{d}{\lambda}} - e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}}$$

$$\left(e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda} (1-k)} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda} (1-k)} \right) \cdot \left(e^{j 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - 1 \right) =$$

$$= e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda} (2-k)} e^{j 2\pi \frac{d}{\lambda} k} - e^{-j 2\pi \frac{d}{\lambda} (1-k)} \cdot e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda} (1-k)}$$

$$(VI) \quad \sum_{i=1}^k z_i = F \left(\frac{e^{\zeta 4\pi \frac{d}{\lambda}} - e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda}} e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(2-k)} e^{j2\pi \frac{d}{\lambda}k} + e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda}(1-k)} e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(1-k)}}{e^{\zeta 4\pi \frac{d}{\lambda}} - 2e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right) + 1} \right)$$

Utilizando los operadores parte real e imaginaria de la exponencial compleja, la impronta dinámica se puede expresar de la siguiente manera:

$$(VII) \quad G(\lambda) = \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \sqrt{\left(\operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^k z_i \right\} \right)^2 + \left(\operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^k z_i \right\} \right)^2} \right\}$$

$$\operatorname{Im}\left\{\sum_{i=1}^k z_i\right\} = F \left(\frac{\sin\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right) e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(2-k)} \sin\left(2\pi k \frac{d}{\lambda}\right) - \sin\left(2\pi(1-k) \frac{d}{\lambda}\right) e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(1-k)}}{e^{\zeta 4\pi \frac{d}{\lambda}} - 2e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right) + 1} \right)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{i=1}^k z_i\right\} = F \left(\frac{e^{\zeta 4\pi \frac{d}{\lambda}} - \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right) e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} - e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(2-k)} \cos\left(2\pi k \frac{d}{\lambda}\right) + \cos\left(2\pi(1-k) \frac{d}{\lambda}\right) e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}(1-k)}}{e^{\zeta 4\pi \frac{d}{\lambda}} - 2e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}} \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right) + 1} \right)$$

Para facilitar la lectura se introducen los siguientes cambios:

$$\varepsilon = e^{\zeta 2\pi \frac{d}{\lambda}}$$

$$\alpha = 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^k z_i \right\} = F \left(\frac{\varepsilon \sin(\alpha) - \varepsilon^{2-k} \sin(k\alpha) - \varepsilon^{1-k} \sin((1-k)\alpha)}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos(\alpha) + 1} \right)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^k z_i \right\} = F \left(\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \cos(\alpha) - \varepsilon^{2-k} \cos(k\alpha) + \varepsilon^{1-k} \cos((1-k)\alpha)}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos(\alpha) + 1} \right)$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando se llega definitivamente a la ecuación simplificada general para la impronta dinámica de un tren elemental de k cargas.

$$(VIII. I) \quad G_k(\lambda) = \frac{F\varepsilon \sqrt{\varepsilon^{-2k}(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \alpha)(1 + \varepsilon^{2k} - 2\varepsilon^k \cos k\alpha)}}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \alpha + 1}$$

$$(VIII. II) \quad G_k(\lambda) = kF, \quad \zeta = 0 \text{ y } \lambda = d/m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicación: igualar resonancia de trenes con coches de distinta longitud

Consideremos un tren regular y un tren articulado formados únicamente por las cargas correspondientes a coches intermedios, con las siguientes características.

Tren regular → carga por eje F_R , longitud de coche d , número de ejes N_R .

Tren articulado → carga por eje F_A , longitud de coche d' , número de ejes N_A .

En este ejemplo el tren articulado tiene coches con longitud doble al del tren regular $d' = 2d$. El tren articulado puede convertirse en tren elemental agrupando los pares de cargas de cada bogie mediante el factor de bogie definido en el capítulo 3. De esta manera los dos trenes son elementales y pueden aplicarse las ecuaciones simplificadas desarrolladas en este anejo.

$$\text{Factor de bogie } f_B(m) = \sqrt{1 + e^{-\zeta 4\pi m \frac{b}{d}} + 2e^{-\zeta 2\pi m \frac{b}{d}} \cos\left(\frac{2\pi m b}{d}\right)}$$

El valor de la impronta de un tren con N cargas en resonancia de orden m es la ec. (IV.I). Debido a la distinta longitud de coche, la longitud de onda a la que el tren regular experimenta resonancia de orden m es la misma a la que el tren articulado experimenta resonancia de orden $2m$.

El problema consiste en encontrar la carga por eje del tren articulado que genere la misma impronta que el tren regular en el punto de resonancia de orden m del tren regular. Igualando la expresión (IV.I) para los dos trenes se llega a la solución.

$$(IX) \quad F_A = \frac{F_R}{f_B(m)} \frac{(e^{\zeta 2\pi m} - e^{\zeta 2\pi m (1-N_R)})(e^{\zeta 2\pi m} + 1)}{e^{\zeta 4\pi m} - e^{\zeta 4\pi m (1-N_A)}}$$

En el caso de que el número de ejes de los dos trenes sea el mismo, N :

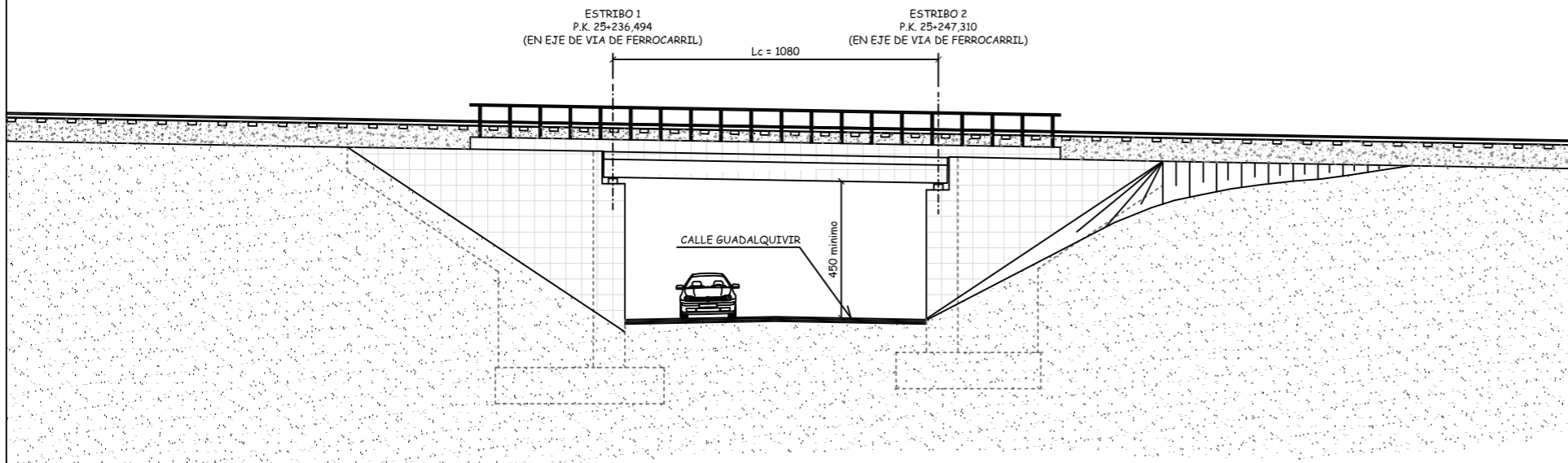
$$(X) \quad F_A = \frac{F_R}{f_B(m)} \left(\frac{e^{\zeta 2\pi m} + 1}{e^{\zeta 2\pi m} + e^{\zeta 2\pi m (1-N)}} \right)$$

Este sencillo ejemplo muestra una de las posibilidades que aporta el análisis de trenes elementales mediante las ecuaciones simplificadas desarrolladas en este anexo.

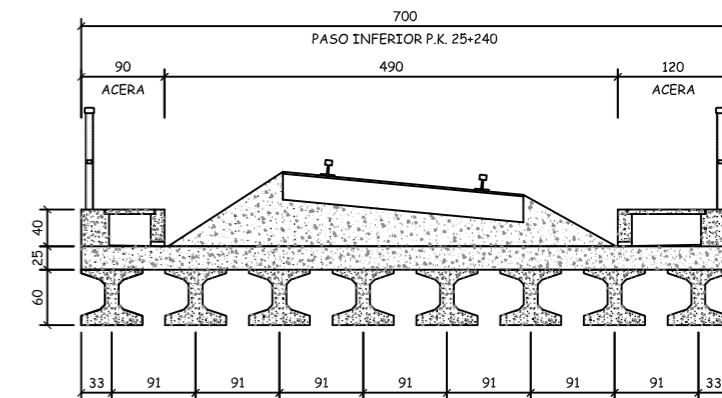
Anexo 3. Planos del paso inferior P.K. 25 + 240 Benalmádena

El plano nº 1, que consta de dos hojas, ha sido realizado por *UTE BENALMADENA DRAGADOS - TECSA*. No soy autor de ese plano.

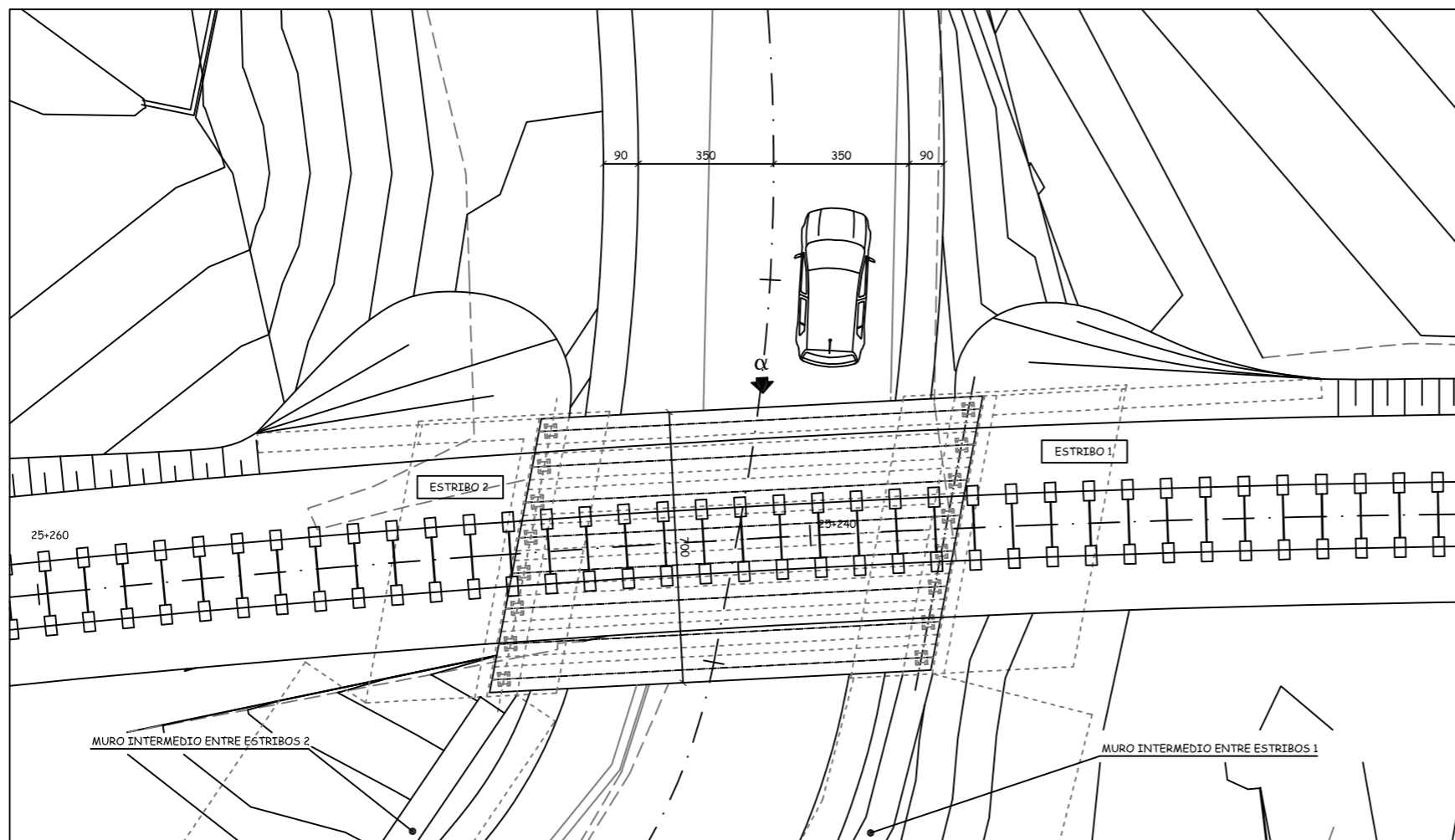
El plano nº 2 es un documento original del cual soy autor.



VISTA POR "α"
Escala 1:100
Cotas en cm



SECCION TRANSVERSAL
Escala 1:40
Cotas en cm

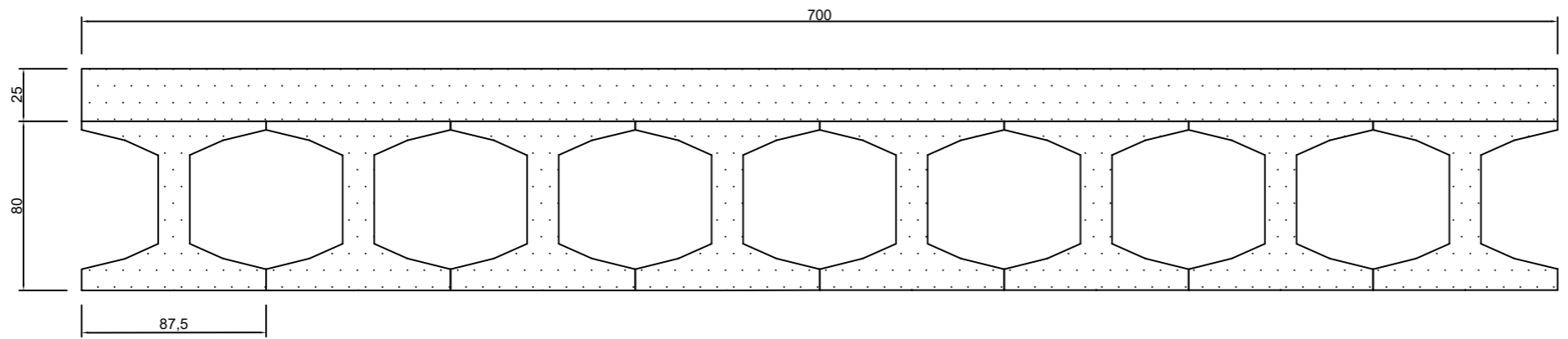


PLANTA
Escala 1:80
Cotas en cm

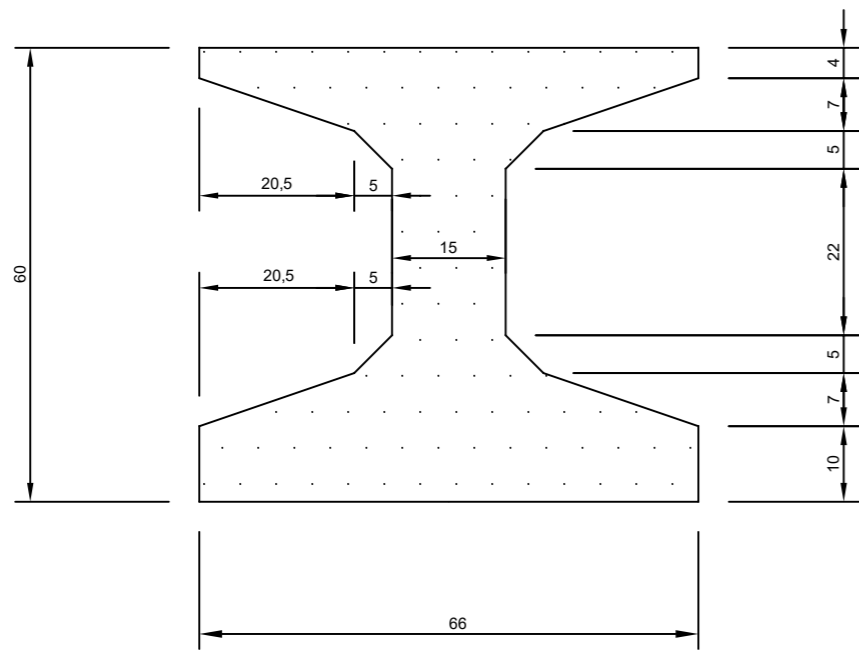
CUADRO DE MATERIALES EHE

MATERIALES	CALIDAD	NIVEL DE CONTROL	COEFICIENTES
HORMIGON DE LIMPIEZA	HM-12.5	NO ESTRUCTURAL	
HORMIGON EN VIGAS PREFABRICADAS	HP-45/B/20/IIIa	ESTADISTICO	$\gamma_c = 1.50$
HORMIGON EN ALZADOS	HA-25/B/20/IIIa	ESTADISTICO	$\gamma_c = 1.50$
HORMIGON EN LOSA DE TABLERO	HA-25/B/20/IIIa	ESTADISTICO	$\gamma_c = 1.50$
HORMIGON EN CIMIENTOS	HA-25/B/20/IIa	ESTADISTICO	$\gamma_c = 1.50$
ACERO PASIVO	B 500 S	NORMAL	$\gamma_s = 1.15$
ACERO ACTIVO	Y 1860 S7	NORMAL	$\gamma_s = 1.15$
EJECUCION		INTENSO	$\gamma_G = 1.35$ $\gamma_G^* = 1.50$ $\gamma_Q = 1.50$

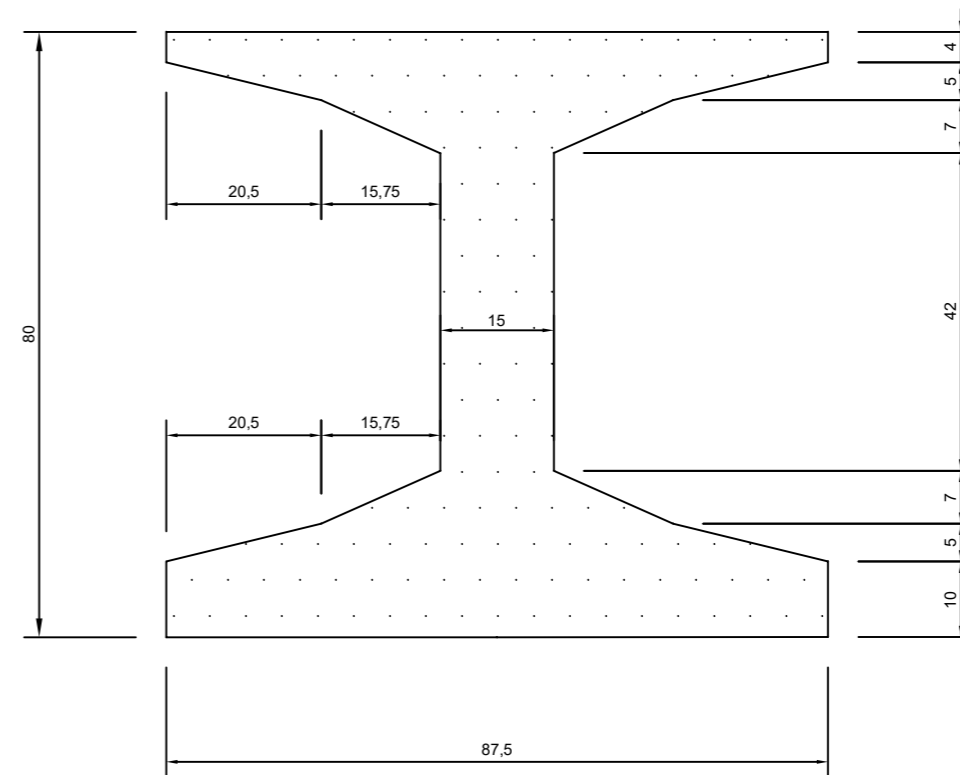
MATERIALES	RECUBRIMIENTO (mm)	RELACION a/c MÁXIMA	CONTENIDO MÍNIMO CEMENTO (kg/m ³)
HORMIGON EN VIGAS PREFABRICADAS	25	0.50	300
HORMIGON EN ALZADOS	40	0.50	300
HORMIGON EN LOSA DE TABLERO	40	0.50	300
HORMIGON EN CIMIENTOS	40	0.60	275



Sección A-A Rediseñada
Escala 1:30
Cotas en cm



Sección Viga original
Escala 1:10
Cotas en cm



Sección Viga rediseñada
Escala 1:10
Cotas en cm