

Modelo analítico para el cálculo de distribuciones de velocidad laterales en secciones tipo potencial-ley

Francisco-Javier Sánchez-Romero, Modesto Pérez-Sánchez & P. Amparo López-Jiménez

To cite this article: Francisco-Javier Sánchez-Romero, Modesto Pérez-Sánchez & P. Amparo López-Jiménez (2018): Modelo analítico para el cálculo de distribuciones de velocidad laterales en secciones tipo potencial-ley, Ribagua, DOI: [10.1080/23863781.2018.1442189](https://doi.org/10.1080/23863781.2018.1442189)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/23863781.2018.1442189>



© 2018 The Author(s). Published by Informa UK Limited, trading as Taylor & Francis Group.



Published online: 27 Mar 2018.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 45



View related articles [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)

Modelo analítico para el cálculo de distribuciones de velocidad laterales en secciones tipo potencial-ley

Francisco-Javier Sánchez-Romero^a, Modesto Pérez-Sánchez^b and P. Amparo López-Jiménez^b

^aDepto. Ingeniería Rural y Agroalimentaria, Universitat Politècnica de València, España.; ^bDepto. Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente, Universitat Politècnica de València, España.

RESUMEN

La modelización hidráulica de calados y velocidades de flujo, en cauces con secciones que admiten una representación de tipo potencial, se destaca por su versatilidad, permitiendo su utilización en numerosas aplicaciones prácticas tanto en canales naturales como artificiales. El cálculo de las variables hidráulicas (calado y velocidad media) ha sido ampliamente estudiado para este tipo de secciones. Sin embargo, en la literatura técnica no se han encontrado estudios que muestren la variación de estas magnitudes a lo largo de la sección transversal. El conocimiento de esta variación permite desarrollar estudios (ejemplo: conocer de manera aproximada los daños en diferentes zonas de la sección, analizar el transporte de sedimentos, estudiar los procesos de erosión u otras aplicaciones en hidráulica fluvial). Presentamos una metodología que permite el cálculo de las variables hidráulicas en cualquier zona de una sección tipo potencial. La metodología es aplicada a secciones simétricas, comparando los resultados generados con los obtenidos por diferentes códigos hidráulicos computacionales ampliamente aceptados por la comunidad científica (p.e. CES, HEC-RAS e IBER). Las predicciones de los parámetros hidráulicos obtenidas (usando la formulación explícita descrita en este artículo) presentan errores muy bajos, en comparación con otros modelos con mayor costo computacional. Estos errores alcanzan un valor promedio para la raíz del error cuadrático medio (RMSE) en el cálculo de la distribución lateral de velocidades de 0.13 y de 0.05, en el cálculo de la relación de velocidades respecto a la velocidad media. Estos valores indican una validación muy satisfactoria para las secciones simétricas analizadas.

PALABRAS CLAVE

Distribución de velocidad; formulación; geometría; hidráulica fluvial; poder-ley; potencial

KEYWORDS

Geometry; hydraulic flow; formulas; power-law cross-section; river flow; velocity

Analytical model for the calculation of lateral velocity distributions in potential cross-sections

ABSTRACT

The hydraulic modeling of water depth and flow velocities in open channel flows that were fitted by power-law cross-section stand out for their versatility, allowing their use in numerous practical applications, both in natural and artificial channels. The determination of the hydraulic variables of depth and average velocity has been widely studied in potential cross-sections; however, the variation seen in these variables along the cross-section was not found in the literature. Knowledge of this variation allows the development of studies (e.g. to know the approximate damage in different areas of the cross-section, to analyse sediment transport, or other applications in river hydraulics). This paper presents a methodology which allows calculation of the hydraulic variables in any area of a power-law cross-section. The methodology is applied to symmetrical cross-sections, comparing its generated results with the obtained values by different computational hydraulic codes, which are thoroughly accepted by scientific community, such as CES, HEC-RAS and IBER. The obtained predictions of hydraulic parameters (using the explicit formulation described in this research) present very low errors when compared with results of other models, with great computational cost. These errors reach a root mean square error (RMSE) of 0.13 and 0.05 in the determination of velocities' lateral distribution and the ratio between velocity and average velocity. These values indicate a very successful validation for the analysed symmetrical sections.

Introducción

Para el análisis de diferentes problemas en hidráulica fluvial (p.e. cálculo de daños por inundación [1], transporte de sedimentos y contaminantes [2], procesos de

erosión [3] y estudios medioambientales) es necesario conocer la distribución lateral de velocidades a través de la sección transversal considerada. El conocimiento de la geometría es fundamental para una evaluación correcta de estas velocidades. La representación

geométrica, tanto de canales artificiales como naturales [4] mediante una sección potencial, permite modelizar diferentes formas (p.e. rectangulares, triangulares e incluso parabólicas) de una manera fácil, rápida y con un número pequeño de parámetros. La simplificación facilita el estudio del flujo, alcanzando un compromiso aceptable entre la simplicidad y la representación precisa de la geometría real [5]. La aplicación de la sección potencial proporciona una metodología con un número elevado de aplicaciones finales en el campo de la ingeniería hidráulica [6–8], siendo de gran utilidad para el estudio de cualquier tipo de sección [4]. Esta representación geométrica ha sido utilizada para analizar el problema de roturas totales y parciales de presas ([9–13]), la caracterización de los procesos de infiltración y flujo en surcos de riego [14], así como para el estudio de la función de respuesta instantánea y su relación con la geomorfología del río [15].

Diversos autores han propuesto diferentes expresiones para el cálculo analítico de la distribución de velocidades laterales en secciones hidráulicas. Sooky [16] desarrolla una expresión como combinación de perfiles logarítmico y lineal, aplicada a secciones triangulares. Bogle [17] propone una expresión empírica basada en un polinomio de cuarto grado. Seo y Gadalarab [18] presentan una ecuación en combinación de un polinomio de cuarto grado y una exponencial. Deng et al. [19] desarrollan una fórmula simplificada para el cálculo del coeficiente longitudinal de dispersión, resolviendo de forma aproximada la integral que lo define. En este estudio, se utilizan secciones hidráulicas representadas geoméricamente mediante una función de tipo potencial, proponiendo para la distribución lateral de velocidades una expresión dependiente de un término α . Este parámetro α se ajusta por integración numérica sin desarrollarlo explícitamente. Seo y Baek [20] desarrollaron una expresión basada en la función de densidad de probabilidad de la distribución Beta. Estas formulaciones están basadas en aproximaciones matemáticas, las cuales se obtienen mediante coeficientes de ajuste. La distribución de velocidades se estima aproximadamente, sin tener en cuenta la componente hidráulica y física de estas variables, a diferencia de lo que se propone en el presente artículo.

En la actualidad existen diferentes modelos numéricos unidimensionales (1D) como bidimensionales (2D) de amplia aceptación en la comunidad técnico-científica, implementados en códigos informáticos. Estos modelos permiten la estimación del perfil de velocidades [21]. Entre los modelos unidimensionales más utilizados se encuentran el Método del Canal Dividido [Divided Canal Method] (DCM)

[22, 23], y a través de su implementación en el programa HEC-RAS [24] y el Método de la Distribución Lateral [Lateral Distribution Method] (LDM) [25], a través de la solución analítica propuesta por Shiono y Knight [26] [27] [28]. El LDM está implementado en el software Conveyance Estimation System (CES) [29, 30]. Los modelos teóricos bidimensionales se aceptan para resolver las distribuciones laterales de velocidades [31]. En la validación de esta metodología como modelo bidimensional, se ha utilizado el modelo de dominio público IBER [32,33] para contrastar las soluciones obtenidas con la formulación explícita propuesta en el cálculo de distribuciones laterales de velocidades.

El presente artículo persigue dos objetivos. El primer objetivo es el de proponer una metodología de análisis para la distribución del calado, y de la velocidad para cualquier zona de una sección potencial. Esta metodología está basada en expresiones que permiten su cálculo de manera explícita (de forma discreta y continua). El segundo objetivo es el de aplicar esta metodología a diferentes tipos de secciones simétricas, y de comparar los resultados con los resultados producidos por los modelos numéricos computacionales citados anteriormente.

Materiales y Métodos

En el presente apartado, se describen los diferentes modelos numéricos utilizados para calcular los perfiles de velocidades. Posteriormente, se proponen las expresiones que permiten este cálculo tanto de forma discreta como continua.

Método del Canal Dividido (DCM-HECRAS)

El Método del Canal Dividido (DCM), desarrollado por Lotter [22] y posteriormente por Einstein y Banks [23], está basado en la hipótesis que el caudal total en la sección es igual a la suma de los caudales parciales en cada subsección en que ésta puede ser dividida. Esta metodología asume que la pendiente de la línea de energía es constante para todas las subsecciones, y que los perímetros mojados parciales son dados por el contorno fijo de cada una de las subsecciones. Esto implica que no existe difusión lateral de cantidad de movimiento, considerando únicamente las pérdidas de energía debidas a la fricción. La consideración de esta hipótesis (la no existencia de difusión lateral) es una de las principales limitaciones del modelo DCM [21].

El caudal parcial (Q_i) de cada subsección es definido como:

$$Q_i = K_i \cdot S^{1/2} \quad (1)$$

donde S es la pendiente longitudinal y K_i es el factor de transporte de cada subsección, dado por:

$$K_i = \frac{A_i \cdot R_i^{2/3}}{n_i} \quad (2)$$

donde A_i es el área de la subsección i , R_i es el radio hidráulico de la subsección i , y n_i es el coeficiente de rugosidad de Manning de la subsección i .

Este modelo está implementado en el software HEC-RAS, siguiendo los siguientes pasos [34]:

- (1) Se divide el área de flujo en la cantidad de partes definida por el usuario, y luego se calcula para cada parte el área, perímetro mojado, radio hidráulico y calado;
- (2) Con el valor del coeficiente de Manning (n_i) para cada parte, se calcula K_i , según la ecuación 2, y Q_i según ecuación 1 para cada parte;
- (3) Se realiza el sumatorio de los factores de transporte de cada parte, $\sum K_i$. Esta suma es distinta al factor de transporte de la sección completa ($K \neq \sum K_i$). Para corregir esta diferencia, se calcula el coeficiente de corrección global (C_{corr}) para toda la sección:

$$C_{corr} = K / \sum K_i \quad (3)$$

- (4) Se calcula un nuevo caudal para cada subsección;

$$Q_i^{Corr} = C_{corr} \cdot Q_i \quad (4)$$

- (5) Por último, se calcula la velocidad media de cada subsección:

$$v_i = Q_i^{Corr} / A_i \quad (5)$$

Modelo LDM (CES)

A pesar de la conveniencia de uso del modelo DCM, el modelo LDM nace para salvar las limitaciones anteriormente descritas. Para poder incluir las pérdidas por difusión lateral, es necesario plantear un modelo completo basado en la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación Navier-Stokes) [35] y de continuidad, con las simplificaciones correspondientes. Este modelo asume unas condiciones de flujo tanto permanente y uniforme, y como modelo de turbulencia utiliza el de la viscosidad de torbellino o de Boussinesq, dando lugar a la ecuación diferencial del método LDM [25]. La resolución de esta

ecuación permite estimar la distribución lateral de velocidades. Esta expresión (6) se describe a continuación:

$$\begin{aligned} \rho g S Y - \frac{f}{8} \rho V^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{d}{dx} \left[\rho \gamma \sqrt{\frac{f}{8}} Y^2 V \frac{\partial V}{\partial x} \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x} [Y(\rho \bar{U} \bar{V})_d] \end{aligned} \quad (6)$$

donde ρ es la densidad del agua; g es la aceleración de la gravedad; Y es la profundidad del flujo; V es la velocidad del flujo; x es la coordenada horizontal medida transversalmente a la corriente; s es el talud lateral; f es el coeficiente de fricción de Darcy; es la viscosidad adimensional de torbellino de Boussinesq, y $(\rho \bar{U} \bar{V})_d$ es la tensión de Reynolds debido a las corrientes secundarias. Su resolución fue propuesta inicialmente por Wark et al. [25] y por Shiono y Knight [26, 27]. En la actualidad, el método propuesto por Shiono y Knight (SKM) está ampliamente extendido, y es la base para el desarrollo de modelos que son capaces de representar condiciones de flujo complejas [36-39].

El código numérico Conveyance Estimation System (CES) [40] resuelve (6), mediante el método SKM [27], utilizando la técnica de los elementos finitos. El código CES también incluye los efectos de cauces meandriformes [38]. El modelo divide el área mojada en una cantidad de partes definida por el usuario, resolviendo un sistema de ecuaciones linealizadas mediante métodos iterativos.

Modelo 2-D

El modelo bidimensional utilizado (IBER) resuelve las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, o también las que son denominadas de aguas bajas, los 2D Shallow Water Equations (2D-SWE). Estas ecuaciones [33] asumen una distribución de presión hidrostática y una distribución uniforme de la velocidad en la profundidad, definidas a continuación:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h U_x}{\partial x} + \frac{\partial h U_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h U_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h U_x^2 + g \frac{h^3}{2})}{\partial x} + \frac{\partial(h U_x U_y)}{\partial y} \\ = -g h \frac{\partial Z_b}{\partial x} + \frac{\tau_{s,x}}{\rho} - \frac{\tau_{b,x}}{\rho} + \frac{\partial(v_t h \frac{\partial U_x}{\partial x})}{\partial x} \\ + \frac{\partial(v_t h \frac{\partial U_x}{\partial y})}{\partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hU_y)}{\partial t} + \frac{\partial(hU_x U_y)}{\partial x} + \frac{\partial(hU_y^2 + g\frac{h^2}{2})}{\partial y} \\ = -gh \frac{\partial Z_b}{\partial y} + \frac{\tau_{s,y}}{\rho} - \frac{\tau_{b,y}}{\rho} + \frac{\partial(v_t h \frac{\partial U_x}{\partial x})}{\partial x} \\ + \frac{\partial(v_t h \frac{\partial U_y}{\partial y})}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

donde h es el calado; U_x, U_y son las velocidades horizontales promediadas en profundidad; ρ es la densidad del agua; Z_b es la elevación de la lámina libre por encima de la superficie del lecho; $\tau_{s,x}$ y $\tau_{s,y}$ es la fricción en la superficie libre debida al rozamiento producido por el viento en la dirección x e y respectivamente; $\tau_{b,x}$ y $\tau_{b,y}$ es la fricción del lecho debido al rozamiento en la dirección x e y respectivamente, y v_t es la viscosidad turbulenta.

El modelo bidimensional IBER resuelve las ecuaciones de Saint-Venant mediante el método de los volúmenes finitos.

Sección Potencial. Propiedades geométricas e hidráulicas

Una sección transversal modelizada según la sección potencial, queda definida por

$$B = \beta \cdot y^m \quad (10)$$

donde B es el ancho de la sección transversal a una altura y con respecto al fondo; y los símbolos β y m representan los parámetros que permiten describir diferentes geometrías de secciones simétricas hidráulicas, siendo $\beta > 0$ y el $m > 0$ los exponentes que controlan la forma de la sección. Por ejemplo, un valor de $m \approx 0$, representa una sección rectangular; $m = 1$, una sección triangular y $m = 0.5$, una sección

parabólica. Para $m > 1$, se representan secciones con forma de V. El rango de mayor aplicación práctica tanto a nivel de laboratorio como para secciones naturales y artificiales es $m \leq 1$ [4, 19, 41, 42]. Una sección rigurosamente rectangular ($m = 0$) produce indeterminaciones matemáticas, las cuales se pueden obviar con valores mínimos para el exponente m (por ejemplo, $m = 0.00001$).

Un sistema de ejes se puede representar según sus coordenadas como en la Figura 1,

$$x = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot y^m \quad (11)$$

$$y = \left(\frac{2 \cdot x}{\beta} \right)^{1/m} \quad (12)$$

donde y es la ordenada y x es la abscisa.

Para una sección transversal se definen dos calados: calado máximo (h_{max}) y calado de estudio (h_a). h_{max} hace referencia a la máxima altura que se ha considerado para modelizar la sección y ajustarla a la función de tipo potencial (calado máximo para la sección transversal); h_a establece el calado objeto del análisis, siendo menor o igual que h_{max} . Estas variables son definidas de acuerdo a la Figura 2.

La distancia x_a queda definida como la mitad de B_a , y por lo tanto, para un calado h_a , la x_a es determinada según:

$$x_a = \frac{B_a}{2} = \frac{\beta \cdot h_a^m}{2} \quad (13)$$

El área mojada de la sección transversal (A_a) viene definida por

$$A_a = \int_0^{h_a} \beta \cdot y^m = \frac{\beta \cdot h_a^{m+1}}{m+1} \quad (14)$$

El calado medio se define por

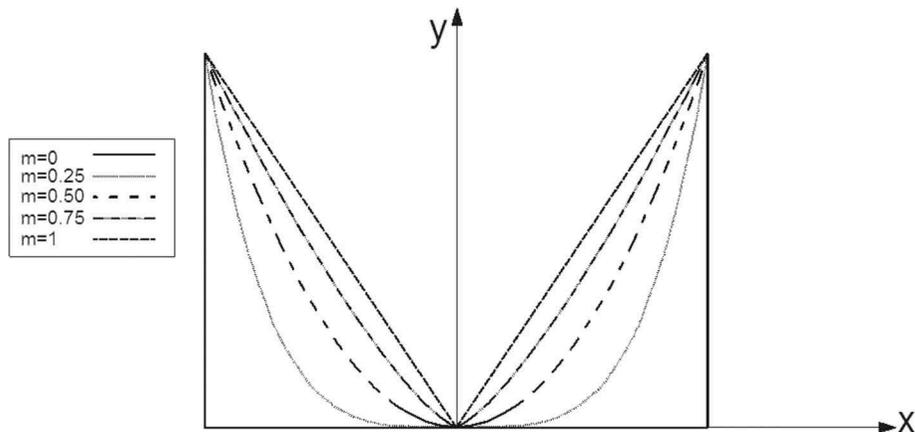


Figura 1. Secciones transversales genéricas para diferentes valores de m .

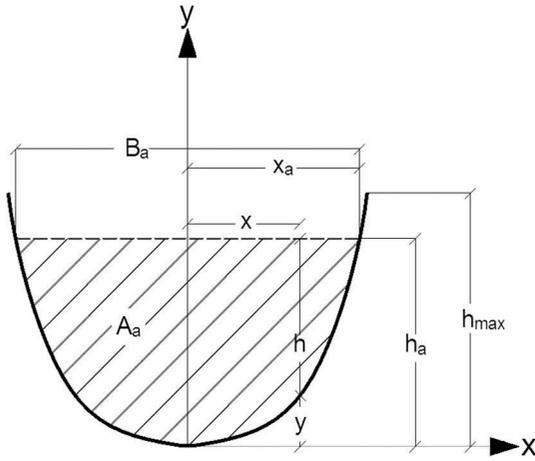


Figura 2. Geometría genérica para una sección potencial.

$$H = \frac{A_a}{B_a} = \frac{h_a}{m+1} \quad (15)$$

Strelkoff y Clemmens [14] y Sánchez-Romero [43], estudiaron la relación entre el perímetro mojado (P_a) y el ancho de la superficie de agua (B_a), en secciones que admiten una representación de tipo potencial, determinando que para relaciones $h_a/B_a < 0.1$, se verá para cualquier valor del exponente m que la relación es aproximadamente igual a 1 ($P_a/B_a \approx 1$). La Figura 3 muestra la variación de P_a/B_a para diferentes valores de m y h_a/B_a .

Por lo tanto, para secciones donde se cumpla $h_a/B_a < 0.1$, se puede asumir $P_a \approx B_a$, pudiendo expresar el radio hidráulico R_a como:

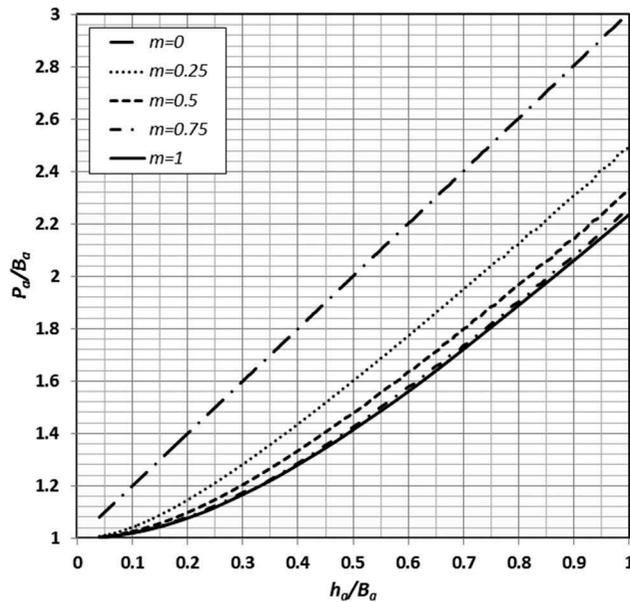


Figura 3. La relación entre el perímetro mojado (P_a) y la anchura para un calado h_a (B_a), para diferentes valores del exponente m y de la relación h_a/B_a [43].

$$R_a = \frac{A_a}{P_a} \approx \frac{A_a}{B_a} = \frac{h_a}{m+1} \quad (16)$$

Siendo iguales el radio hidráulico y el calado medio en aquellas secciones que cumplen con la relación $h_a/B_a < 0.1$.

El caudal total circulante por la sección transversal (Q_a) puede determinarse mediante la aplicación de la fórmula de Manning, asumiendo un coeficiente de rugosidad n_a y una pendiente longitudinal S constantes para toda la sección. Q_a viene definido por

$$Q_a = K_a \cdot S^{1/2} \quad (17)$$

$$K_a = \frac{A_a \cdot R_a^{2/3}}{n_a} = \frac{\beta \cdot h_a^{3 \cdot \frac{m+5}{3}}}{n_a \cdot (m+1)^{5/3}} \quad (18)$$

donde K_a es el factor de transporte total de toda la sección.

El caudal también puede expresarse como

$$Q_a = d \cdot h_a^{1/b} \quad (19)$$

quedando definidos los coeficientes d y b , mediante las expresiones

$$d = \frac{S^{1/2} \cdot \beta}{n_a \cdot (m+1)^{5/3}} \quad (20)$$

$$b = \frac{3}{3 \cdot m + 5} \quad (21)$$

La velocidad media de la sección v_a queda definida según la formula:

$$v_a = \frac{Q_a}{A_a} = \frac{S^{1/2}}{n_a} \cdot \left(\frac{h_a}{m+1} \right)^{2/3} \quad (22)$$

Sección Potencial. Formulación explícita discreta

Para el análisis de la velocidad y la altura de agua en diferentes zonas de la sección simétrica, se divide la mitad de la sección en k partes, identificadas mediante el subíndice i ($i = 1..k$), siendo la anchura para cada parte igual a x_a/k .

La Figura 4 se muestra la subdivisión de la mitad de la sección transversal en k partes, así como las diferentes variables que definen geoméricamente a la subdivisión.

Según (12), y_i puede ser definida como

$$y_i = \left(\frac{2 \cdot (i-1) \cdot x_a/k}{\beta} \right)^{1/m} \quad (23)$$

Combinando (13) y (23), puede obtenerse h_i , según la expresión

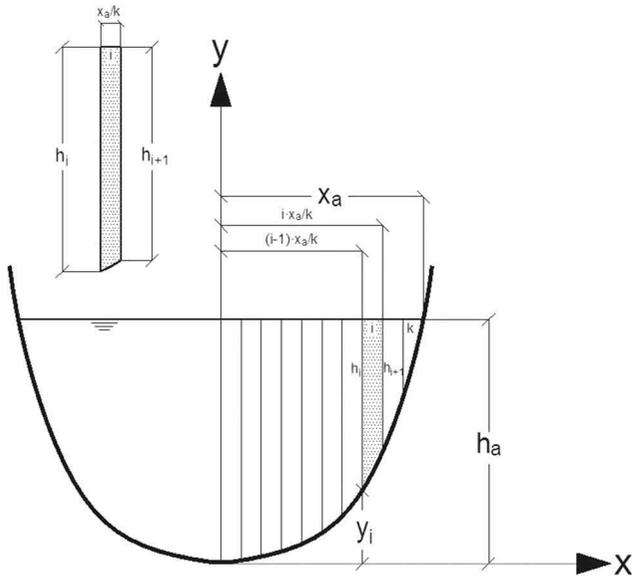


Figura 4. Subdivisión de la mitad de la sección potencial en k partes, identificadas según $i=1..k$.

$$h_i = h_a - y_i = h_a - \left(\frac{2 \cdot x_a}{\beta}\right)^{1/m} \left(\frac{i-1}{k}\right)^{1/m} \quad (24)$$

Finalmente, la relación entre h_i/h_a es definida por

$$\frac{h_i}{h_a} = 1 - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{1/m} \quad (25)$$

Aplicando la ecuación (25), otras relaciones entre los calados pueden determinarse:

$$y_i = h_a - h_i = h_a \cdot \left(\frac{i-1}{k}\right)^{1/m} \quad (26)$$

$$y_{i+1} = h_a - h_{i+1} = h_a \cdot \left(\frac{i}{k}\right)^{1/m} \quad (27)$$

$$h_i - h_{i+1} = h_a \cdot \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{1/m} - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{1/m} \right) \quad (28)$$

El esquema de cálculo del área de la subdivisión (A_i) está mostrado en la Figura 5.

Cada área auxiliar está definida en la Figura 5, determinada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} A_i' &= \frac{x_a}{k} \cdot (i-1) \cdot (h_i - h_{i+1}) \\ &= \frac{(i-1)}{2 \cdot k} \cdot \beta \cdot h_a^{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{1/m} - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{1/m} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$A_i''' = \frac{x_a}{k} \cdot h_{i+1} = \frac{\beta}{2 \cdot k} \cdot h_a^{m+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{i}{k}\right)^{1/m} \right) \quad (30)$$

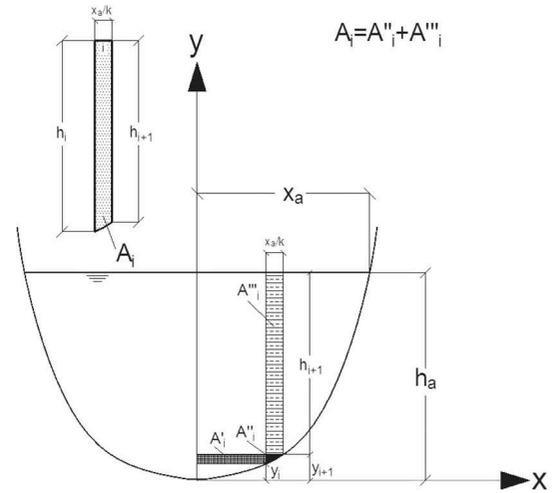


Figura 5. Esquema para el cálculo del área para cada subdivisión (A_i).

$$\begin{aligned} A_i'' &= \int_{h_a-h_i}^{h_a-h_{i+1}} \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot y^m \cdot dy - A_i' \\ &= \frac{\beta}{2} \cdot \frac{h_a^{m+1}}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right) - A_i' \end{aligned} \quad (31)$$

Si los términos de (29) a (31) son desarrollados, A_i puede determinarse para cada subdivisión, de acuerdo a

$$\begin{aligned} A_i &= A_i'' + A_i''' \\ &= \frac{\beta \cdot h_a^{m+1}}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{m}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

La relación inversa entre áreas es definida por:

$$\frac{A_a}{A_i} = \frac{2}{m+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{k} - \frac{m}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right) \right)} \quad (33)$$

El radio hidráulico de la subdivisión (R_i) viene dado por

$$\begin{aligned} R_i &\approx \frac{A_i}{B_i} \\ &= k \cdot h_a \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{m}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

El factor de transporte K_i de la subdivisión (suponiendo un coeficiente de rugosidad de Manning igual a n_i) viene establecido según

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{A_i \cdot R_i^{2/3}}{n_i} \\ &= \frac{\beta \cdot h_a^{\frac{3-m+5}{3}} \cdot k^{2/3}}{2 \cdot n_i} \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{m}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right) \right)^{5/3} \end{aligned} \quad (35)$$

La condición de continuidad obliga a la igualdad entre el caudal total circulante en la sección (Q_a) y la suma de todos los caudales circulantes por cada una de las subdivisiones. Para que se cumpla dicha igualdad, un coeficiente de corrección constante (C_{corr}) debe aplicarse a cada uno de los caudales de las subdivisiones, cumpliéndose

$$Q_i^{Corr} = C_{corr} \cdot Q_i = C_{corr} \cdot K_i \cdot S^{1/2} \quad (36)$$

$$Q_a = \sum_{i=1}^{i=k} (2 \cdot Q_i^{Corr}) = C_{corr} \cdot \sum_{i=1}^{i=k} (2 \cdot K_i) \quad (37)$$

Asumiendo para cada subdivisión, la misma rugosidad que para la sección total ($n_i = n_a$) y la misma pendiente longitudinal (S), encontramos que C_{corr} es igual a la relación entre el factor de transporte total de la sección (K_a) y el sumatorio de los factores de transporte de cada una de las subdivisiones ($\sum_{i=1}^{i=k} (2 \cdot K_i)$). Así, C_{corr} puede expresarse como:

$$C_{corr} = \frac{K_a}{\sum_{i=1}^{i=k} (2 \cdot K_i)} \quad (38)$$

Combinando (18), (35) y (38), C_{corr} es igual a

$$C_{corr} = \frac{1}{(m+1)^{5/3} \cdot k^{2/3} \cdot \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{1}{k} - \frac{m}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k} \right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right) \right)^{5/3}} \quad (39)$$

Conocido C_{corr} , la relación entre caudales (Q_i^{Corr}/Q_a) es

$$\begin{aligned} \frac{Q_i^{Corr}}{Q_a} &= \frac{C_{corr} \cdot K_i \cdot S^{1/2}}{K_a \cdot S^{1/2}} = C_{corr} \cdot \frac{K_i}{K_a} \\ &= C_{corr} \cdot \frac{(m+1)^{5/3} \cdot k^{2/3}}{2} \\ &\cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{m}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k} \right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right) \right)^{5/3} \end{aligned} \quad (40)$$

siendo la relación entre velocidades (v_i/v_a) (combinando (33) y (40))

$$\frac{v_i}{v_a} = \frac{Q_i^{Corr}}{Q_a} \cdot \frac{A_a}{A_i} = C_{corr} \cdot \left((m+1) \cdot k \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{m}{m+1} \cdot \left(\left(\frac{i}{k} \right)^{\frac{m+1}{m}} - \left(\frac{i-1}{k} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right) \right) \right)^{2/3} \quad (41)$$

Conocidos los parámetros β y m de una sección, y eligiendo k e i , las ecuaciones anteriores permiten el cálculo del calado, caudal y velocidad para cada subdivisión, determinando previamente el coeficiente C_{corr} según la expresión (39).

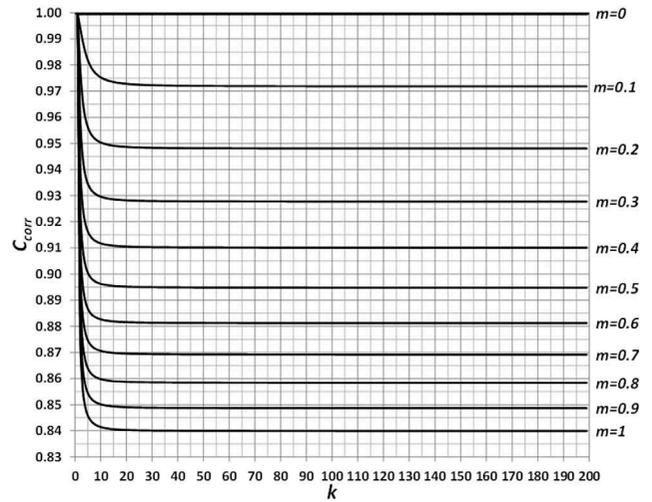


Figura 6. Valores de C_{corr} , para diferentes valores de k y m .

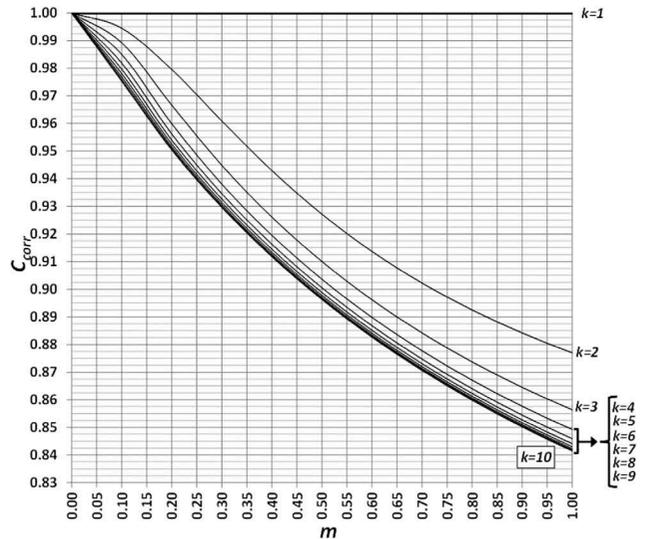


Figura 7. Valores de C_{corr} , para valores de $k \leq 10$ y exponente m .

La Figura 6 muestra los valores obtenidos de C_{corr} , a partir de (39), para diferentes valores de k y m .

En la Figura 6 se observa como a partir de un determinado valor (cuando k es aproximadamente 10), se mantiene prácticamente constante el valor de C_{corr} .

En la práctica es habitual trabajar con valores de $k \leq 10$. La Figura 7 muestra para diferentes valores m , los valores de C_{corr} cuando k es menor que 10.

Como (39) presenta cierta complejidad de uso, incluso para valores pequeños de k , se ha obtenido una relación aproximada entre C_{corr} , k y m . Esta relación ha sido determinada mediante técnicas de regresión no-lineal, obteniendo un coeficiente de correlación $R^2 = 0.997$, que permite el cálculo de C_{corr} mediante la expresión (42):

$$C_{corr} = 0.752 + \frac{0.144}{k^2} + 0.241 \cdot e^{-m} \quad (42)$$

Sección Potencial. Formulación explícita continua

Con el uso de las expresiones anteriores, es posible obtener las ecuaciones que permitan el cálculo de las variables hidráulicas para cualquier valor de x de la sección.

Operando con (12) y (13), se obtiene el valor del calado en cualquier punto de la sección ($h(x)$).

$$h(x) = h_a - y(x) = h_a \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{x_a}\right)^{1/m}\right) \quad (43)$$

Por lo tanto, la expresión para el cálculo de la velocidad para cualquier posición x , suponiendo un coeficiente de rugosidad de Manning constante (n_a) y pendiente longitudinal (S) constante para toda la sección transversal, viene definido por:

$$v(x) = C_{corr} \cdot \frac{h(x)^{2/3}}{n_a} \cdot S^{1/2} \quad (44)$$

Combinando (43) y (44), la relación entre velocidades ($v(x)/v_a$) puede definirse como

$$\frac{v(x)}{v_a} = C_{corr} \cdot (m+1)^{2/3} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{x_a}\right)^{1/m}\right)^{2/3} \quad (45)$$

C_{corr} según (39), se mantiene constante y sólo depende del valor de m para valores de k suficientemente grandes, según se observa en la Figura 6. Por tanto, es posible aproximar el valor de $(C_{corr})_{k \rightarrow \infty}$ a una función dependiente de $(m+1)$. La expresión $(C_{corr})_{k \rightarrow \infty}$ viene definida por

$$(C_{corr})_{k \rightarrow \infty} = \frac{0.994}{(m+1)^{0.25}} \quad (46)$$

Esta expresión ha sido alcanzada mediante técnicas de regresión lineal, obteniendo un coeficiente de correlación R^2 igual a 0.996.

La Figura 8 presenta los resultados de aplicar (39) y (46). Como (39) se define para un número finito de particiones en la sección, con objeto de comparar esta expresión con la que define la función continua (46), se considera esta función con un número muy grande de divisiones (en este caso se ha utilizado un valor de $k = 10000$).

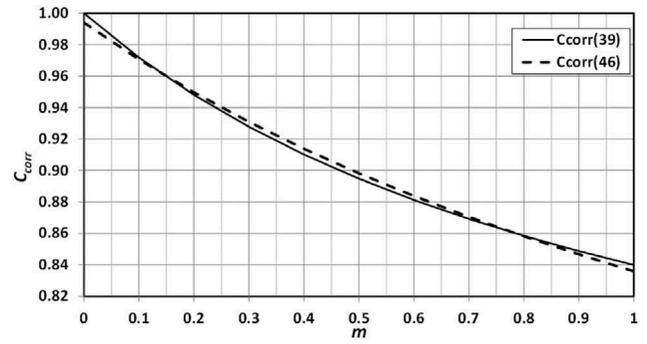


Figura 8. Valores de $(C_{corr})_{k \rightarrow \infty}$ según (39) y (46) según el exponente m .

Cuando (45) y (46) son combinadas, el cálculo explícito de $v(x)$ puede abordarse según:

$$\frac{v(x)}{v_a} = 0.994 \cdot (m+1)^{5/12} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{x_a}\right)^{1/m}\right)^{2/3} \quad (47)$$

Una aplicación inmediata de (47), es el cálculo de la velocidad máxima (v_{max}), cuando $x = 0$. Así se obtiene

$$\frac{v_{max}}{v_a} = 0.994 \cdot (m+1)^{5/12} \quad (48)$$

La determinación de la relación de velocidades ($v(x)/v_a$) es independiente del coeficiente de rugosidad de Manning (n_a) y la pendiente (S), tal y como se muestra en (48), dependiendo esta ratio exclusivamente de x y m . S y n_a , los cuales se han mantenido constantes a lo largo de toda la sección transversal, influyen en la determinación de la velocidad (v_a o $v(x)$).

Comparación entre formulaciones explícitas

A continuación, (39) y (41) son aplicadas para calcular la relación entre velocidades (v_i/v_a), dados diferentes valores de m (0.25, 0.5, 0.75 y 1) y de k (3, 5, 7, 10, 50 y 10000). No se muestran los resultados para $m = 0$, ya que para cualquier valor de k el resultado siempre es igual a 1. Figura 9 muestra las diferentes curvas obtenidas en función de la variable adimensional x/x_a . En Figura 9 se aprecia que a medida que aumenta el valor de k , las curvas van convergiendo, siendo ya prácticamente similares para valores de k mayores a 10. Las curvas han sido representadas en los puntos intermedios de las subsecciones.

La Figura 10 muestra los resultados de las curvas obtenidas para $k = 10$, y diferentes valores de m .

Si se compara la formulación explícita discreta ($k = 10$) de (39) y (41) con la continua (47), se obtienen resultados prácticamente iguales (coeficiente de correlación $R^2 = 0.999$). Por lo tanto, se pueden utilizar indistintamente, siendo más práctica y rápida la utilización de (47).

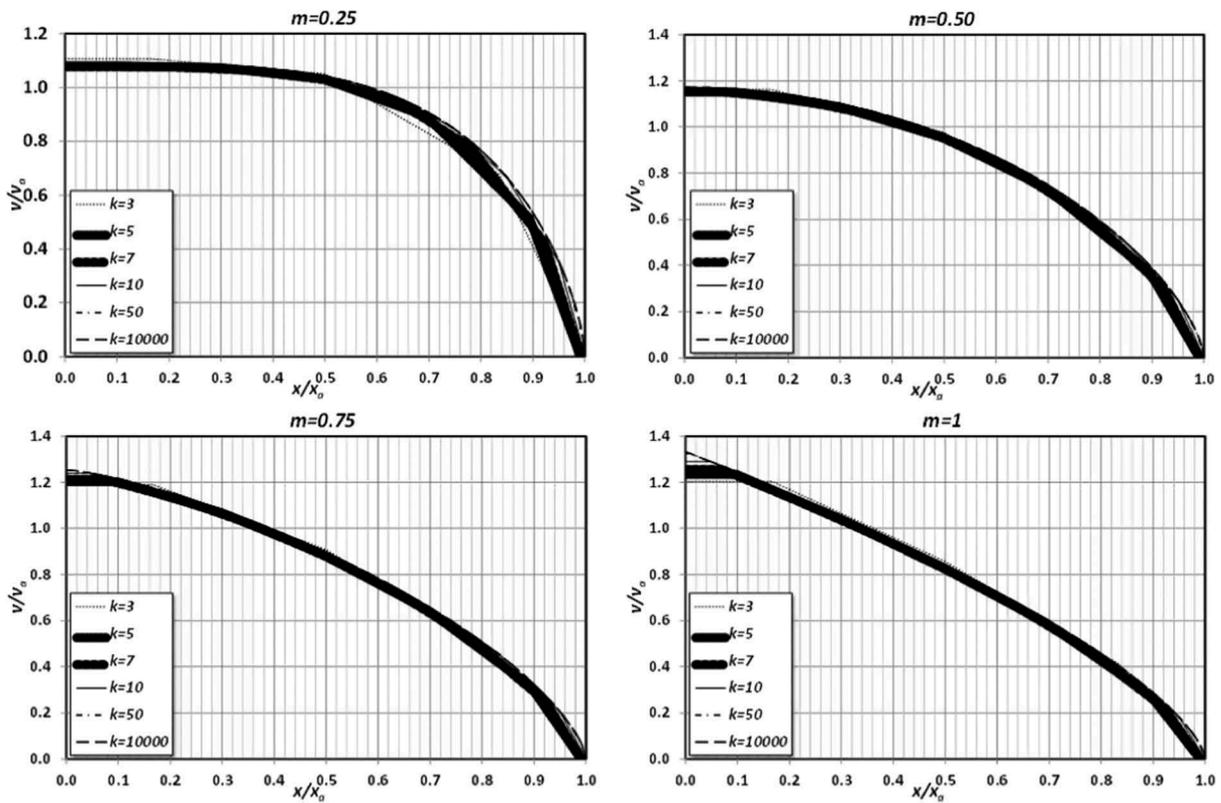


Figura 9. Resultados para (39) y (41) para diferentes valores de k y exponente m .

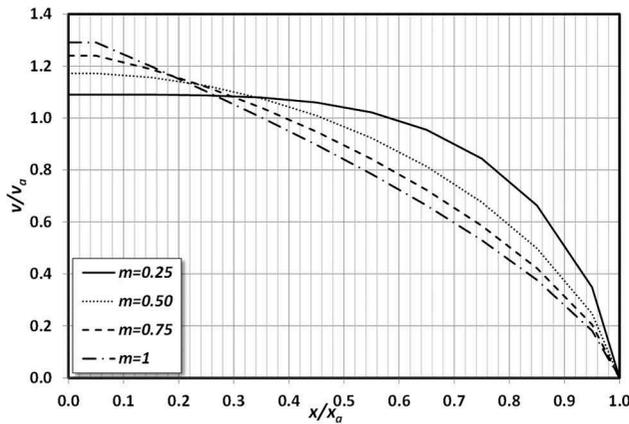


Figura 10. Resultados para (39) y (41), y $k = 10$.

Análisis de validación

En la comparación frente a los modelos numéricos, se han obtenido diferentes índices para determinar la validez de la formulación explícita propuesta. En primer lugar, se ha calculado el error absoluto entre los valores previstos (mediante la formulación propuesta) y cada uno de los modelos numéricos utilizados. Este error ha sido determinado para los diferentes valores de la variable adimensional x/x_a , según

$$E(\%) = \frac{(v_{SP} - v_{modelo})}{v_{modelo}} \cdot 100 \quad (49)$$

donde $E(\%)$ es el error absoluto cometido en un porcentaje; v_{SP} es el valor de la velocidad para la formulación propuesta (SP) y v_{modelo} es el valor de la velocidad para el modelo numérico comparado (HEC-RAS, CES o IBER).

En segundo lugar, se ha calculado, para las velocidades y para la ratio de las velocidades con la velocidad media, la raíz del error cuadrático medio ($RMSE$) y su relación con la desviación estándar, obteniéndose el índice relación de la raíz del error cuadrático medio con la desviación estándar (RSR), según las ecuaciones 50 y 51:

$$RMSE_{modelo} = \sqrt{\left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (Valor_{SP} - Valor_{modelo})^2\right)} \quad (50)$$

$$RSR_{modelo} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^p (Valor_{SP} - Valor_{modelo})^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^p (Valor_{medio_modelo} - Valor_{modelo})^2}} \quad (51)$$

donde $RMSE_{modelo}$ y RSR_{modelo} son el valor obtenido para cada modelo comparado con la formulación propuesta; $Valor_{SP}$ es el valor de la velocidad o ratio de velocidades para la formulación propuesta; $Valor_{modelo}$ es el valor de la velocidad o ratio de velocidades para

Tabla 1. Valoración de RSR, adaptado de [46].

RSR	Valoración
$0 < RSR \leq 0.5$	Muybueno
$0.5 < RSR \leq 0.6$	Bueno
$0.6 < RSR \leq 0.7$	Satisfactorio
$RSR > 0.7$	Insatisfactorio

RSR: Relación de la raíz del error cuadrático medio con la desviación estándar.

los modelos numéricos y $Valor_{medio_modelo}$ es el valor medio de la velocidad o ratio de velocidades para los modelos numéricos.

RSR estandariza el valor de $RMSE$ y permite interpretarlo como un índice de error [44], [45]. RSR varía desde el 0 (un valor óptimo), ligado a los valores para $RMSE \approx 0$, hasta valores positivos elevados. La **Tabla 1** clasifica los valores de RSR atendiendo a su valoración [46].

Validación en secciones simétricas. Resultados y discusión

Para la validación de la formulación propuesta, se aplicó sobre cinco secciones potenciales diferentes ($= 40$ y $m = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$). Se consideró un valor de h_{max} igual a 2.5 m y se desarrolló un análisis de sensibilidad para tres coeficientes de rugosidad de Manning diferentes (0.015, 0.030 y 0.045). Nuestro objetivo fue de comparar la distribución lateral de velocidades que se puede calcular con las expresiones explícitas propuestas con códigos basados en métodos numéricos contrastados.

Para todos los casos, la rugosidad se introdujo mediante el coeficiente de rugosidad de Manning (n_a). Las expresiones propuestas y el modelo HEC-RAS utilizan directamente este valor para el cálculo de la fricción de fondo, mediante la fórmula de Manning. El modelo IBER calcula la tensión la fricción del lecho debido al rozamiento ($\tau_{b,x}, \tau_{b,y}$) como [33]

$$\tau_{b,x} = \rho C_f U_x |U|^2; \tau_{b,y} = \rho C_f U_y |U|^2 \quad (52)$$

siendo C_f un coeficiente de fricción de fondo. La distribución de este coeficiente se calcula según la fórmula de Manning como

$$C_f = g \frac{n_a^2}{Y^{1/3}} \quad (53)$$

siendo Y la profundidad del flujo para el punto de la sección analizado.

El modelo CES convierte internamente el coeficiente de rugosidad de Manning a una distribución del factor de fricción f equivalente, según la ecuación de White-Colebrook [47] [48], siguiendo el siguiente proceso:

- (1) Se convierte el valor del coeficiente de Manning (n_a) a una rugosidad equivalente k_s , según

$$k_s = 12.27 \cdot 10^{\left[\frac{1}{\sqrt{8 \cdot g n_a^{(-2.03)}}} \right]} \quad (54)$$

- (2) Se calcula la distribución del factor de fricción f , en función de k_s/Y , según el siguiente criterio:

$$k_s/Y < 1.66 \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.03 \cdot \log \left[\frac{k_s}{12.27 \cdot Y} \right] \quad (55)$$

$$1.66 \leq k_s/Y \leq 10 \quad f = \frac{8}{41.3015} \cdot \frac{k_s}{Y} \quad (56)$$

$$k_s/Y > 10 \quad f = 1.94 \quad (57)$$

Mostramos en la **Tabla 2** los valores utilizados en cada uno de los modelos utilizados. Para el modelo IBER y CES, hemos estimado un valor máximo Y_{max} de 2 m, y un valor mínimo Y_{min} de 0.1 m (calado medio, última subdivisión).

Para el resto de las opciones, se han utilizado las que proporcionan por defecto los códigos hidráulicos computacionales.

Para los modelos HEC-RAS, CES y SP (Sección Potencial), se han determinado las curvas $Q-h$. Estas curvas proporcionan los calados normales para cualquier caudal dado, las cuales son mostradas en la **Figura 11**.

En la **Figura 11** se observa la gran similitud de las curvas $Q-h$ entre la modelización según SP y el modelo numérico HEC-RAS para $m > 0$. Para un mismo calado, los caudales normales asociados son diferentes entre modelos.

Tabla 2. Valores según los modelos. [Nota: Entre paréntesis ha sido indicada el número la fórmula utilizada.]

SP	HEC-RAS	IBER		CES			Darcy-Weisbach		
Manning									
n_a	n_a	$C_f(Y_{max})$	$C_f(Y_{min})$	k_s	k_s/Y_{max}	k_s/Y_{min}	$f(Y_{max})$	$f(Y_{min})$	
0.015	0.015	0.002	0.005	0.002	0.001 (55)	0.024 (55)	0.015	0.033	
0.030	0.030	0.007	0.019	0.172	0.086 (55)	1.719 (56)	0.052	0.333	
0.045	0.045	0.016	0.043	0.713	0.357 (56)	7.131 (56)	0.103	1.381	

CES: Conveyance Estimation System; HEC-RAS: Hydrologic Engineering Corps. River Analysis System; SP: Sección tipo Potencial-ley; n : Coeficiente de Manning.

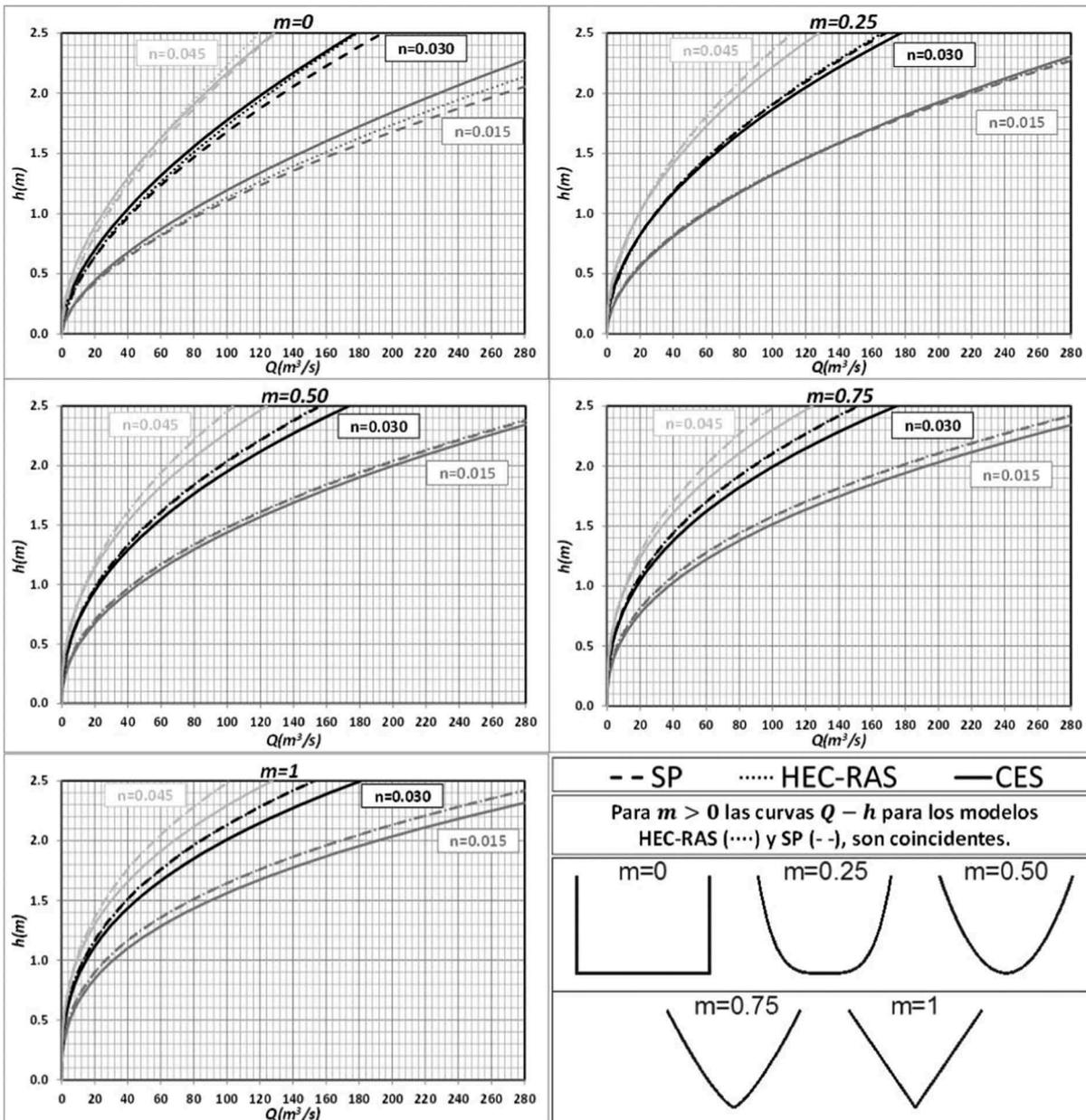


Figura 11. Curvas $Q - h$ para las secciones de validación.

Para realizar la validación y comparación de las distribuciones lateral de velocidades, se ha determinado el mismo caudal para todos los modelos y coeficientes de rugosidad. Este caudal es aquel que proporciona un calado máximo normal de 2 metros, según el modelo numérico HEC-RAS. Los calados normales y velocidades medias obtenidos para cada modelo se muestran en la [Tabla 2](#).

Para la comparación de la distribución lateral de velocidades, tanto para el modelo CES y el HEC-RAS, la sección ha sido subdividida en 20 partes ($k = 10$ según metodología propuesta). En el modelo IBER, fueron creados modelos bidimensionales con un tamaño de malla igual a 1 m. Los resultados se obtuvieron en zonas alejadas de las condiciones de contorno,

para considerar condiciones de flujo uniforme. Para la formulación propuesta (SP), se calcularon los valores tanto para las expresiones discretas como continuas, aunque sólo se ha graficado la continua (47), por ser equivalentes los resultados. Tanto para el modelo numérico HEC-RAS como para la formulación propuesta, las gráficas de distribución lateral de velocidades han sido graficado en los puntos intermedios de las subsecciones. Para los modelos numéricos CES e IBER, se representaron directamente según la salida de resultados. Se han comparado tanto las velocidades, como la relación v/v_a , siendo v_a la indicada en la [Tabla 3](#):

Los resultados obtenidos para las velocidades se muestran en [Figura 12](#).

Tabla 3. Calados y velocidades medias obtenidas según los diferentes modelos, para el caudal indicado.

m	$n=0.015$					$n=0.030$					$n=0.045$				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Caudal (m^3/s)	251	218	191	176	169	126	109	96	88	84	84	73	64	59	56
	Calados(m)					Calados(m)					Calados(m)				
CES	2.12	2.02	1.95	1.92	1.91	2.04	1.95	1.92	1.89	1.88	1.96	1.90	1.88	1.87	1.86
HEC-RAS	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
SP	1.92	1.99	1.99	1.99	2.00	1.93	1.99	2.00	1.99	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
IBER	1.99	1.89	1.89	1.85	1.83	1.93	1.93	1.89	1.85	1.83	1.95	1.93	1.89	1.85	1.83
	Velocidades medias (v_a) (m/s)					Velocidades medias (v_a) (m/s)					Velocidades medias (v_a) (m/s)				
CES	3.11	2.86	2.63	2.46	2.32	1.63	1.49	1.37	1.26	1.18	1.13	1.03	0.94	0.83	0.80
HEC-RAS	3.13	2.87	2.54	2.30	2.11	1.63	1.44	1.27	1.15	1.05	1.04	0.96	0.85	0.77	0.70
SP	3.26	2.88	2.55	2.30	2.11	1.63	1.44	1.27	1.15	1.05	1.09	0.96	0.85	0.77	0.70
IBER	3.16	3.08	2.75	2.61	2.52	1.64	1.51	1.38	1.28	1.20	1.08	1.00	0.92	0.88	0.84

CES: Conveyance Estimation System; HEC-RAS: Hydrologic Engineering Corps. River Analysis System; SP: Sección tipo Potencial-ley; n : Coeficiente de Manning.

Las distribuciones laterales de velocidades presentan formas muy similares para todos los modelos utilizados (Figura 12). Los valores obtenidos para la formulación propuesta (SP) y el modelo HEC-RAS presentan una gran similitud, una consecuencia de que los dos modelos son conceptualmente equivalentes y no tienen en cuenta la difusión lateral de cantidad de movimiento. Los resultados obtenidos por los modelos CES e IBER son también muy similares entre ellos, presentando en general mayores valores que los obtenidos en los otros modelos (SP y HEC-RAS).

La relación de velocidades (v/v_a) se ha representado en función de la variable adimensional (x/x_a) para tener en cuenta que los valores obtenidos por los diferentes modelos se distribuyen en rangos diferentes de x . El valor de x_a ha sido calculado para cada sección, coeficiente de rugosidad y modelo (Tabla 4).

La Figura 13 muestra los resultados obtenidos para la relación entre velocidades y coeficiente de rugosidad de Manning $n_a = 0.030 s/m^{1/3}$.

En la Figura 13 se observa que la relación de velocidades es muy similar en todos los modelos utilizados. Es de destacar que la gran similitud que presentan los resultados obtenidos de la SP frente a los conseguidos con el modelo CES e IBER, siendo menores si son comparados con los del modelo HEC-RAS. Para el resto de coeficientes de rugosidad de Manning, los resultados obtenidos son similares.

La Figura 14 muestra los errores obtenidos para las velocidades, según la ecuación 49:

Para el resto de coeficientes de rugosidad de Manning, los resultados obtenidos son similares, pudiéndose extraer las siguientes consideraciones:

En los límites de las secciones ($x/x_a \approx \pm 1$), los errores absolutos en velocidades (49) son considerables. Esto es debido a que los modelos numéricos utilizados tienen en cuenta el perímetro mojado exacto y la formulación propuesta aproxima este

parámetro, infravalorándolo en las subdivisiones finales. Las velocidades obtenidas para estas zonas son, por lo tanto, mayores. Este hecho provoca que el error en velocidad cometido en la predicción de la velocidad sea positivo y de valor significativamente mayor en las subdivisiones finales que en el obtenido en otras zonas de la sección.

Para zonas intermedias de la sección, los errores disminuyen rápidamente. En el modelo HEC-RAS, para cualquier valor de m y coeficiente de rugosidad de Manning, el error cometido está siempre por debajo de 0.5%. Para los modelos CES e IBER, el error en $x/x_a = 0$ y crece a medida que va aumentando el valor de m , siendo para un $n_a = 0.015$ de -4.99% y de -12.46%, para $n_a = 0.030$ de -10.99% y -13.33%, y para $n_a = 0.045$, de -15.62% y -13.01%, respectivamente.

Con respecto al índice $RMSE$, los valores máximos se obtienen para $m = 0$, siendo 0.52 ($n_a = 0.015$) para las velocidades y 0.17 ($n_a = 0.045$) para la relación entre velocidades (ambas respecto al modelo CES). Para el resto de las secciones ($m > 0$), los valores máximos disminuyen, obteniéndose 0.27 para las velocidades ($m = 1$, $n_a = 0.015$ y modelo IBER), y 0.07 para la relación de velocidades ($m = 0.25$, $n_a = 0.015$ y modelo HEC-RAS). El valor promedio (para todos los modelos, coeficientes de rugosidad de Manning y secciones consideradas) es de 0.13 para velocidades y 0.05 para la relación entre velocidades, lo cual indica una elevada correlación entre la formulación propuesta y los modelos numéricos utilizados.

Los valores obtenidos para el índice RSR para cada uno de los modelos, coeficientes de rugosidad de Manning y secciones considerados se muestran en la Figura 15.

Como se observa en la Figura 15, en todos los casos se obtiene en la comparación de resultados una clasificación de **Muy bueno**, excepto para la sección

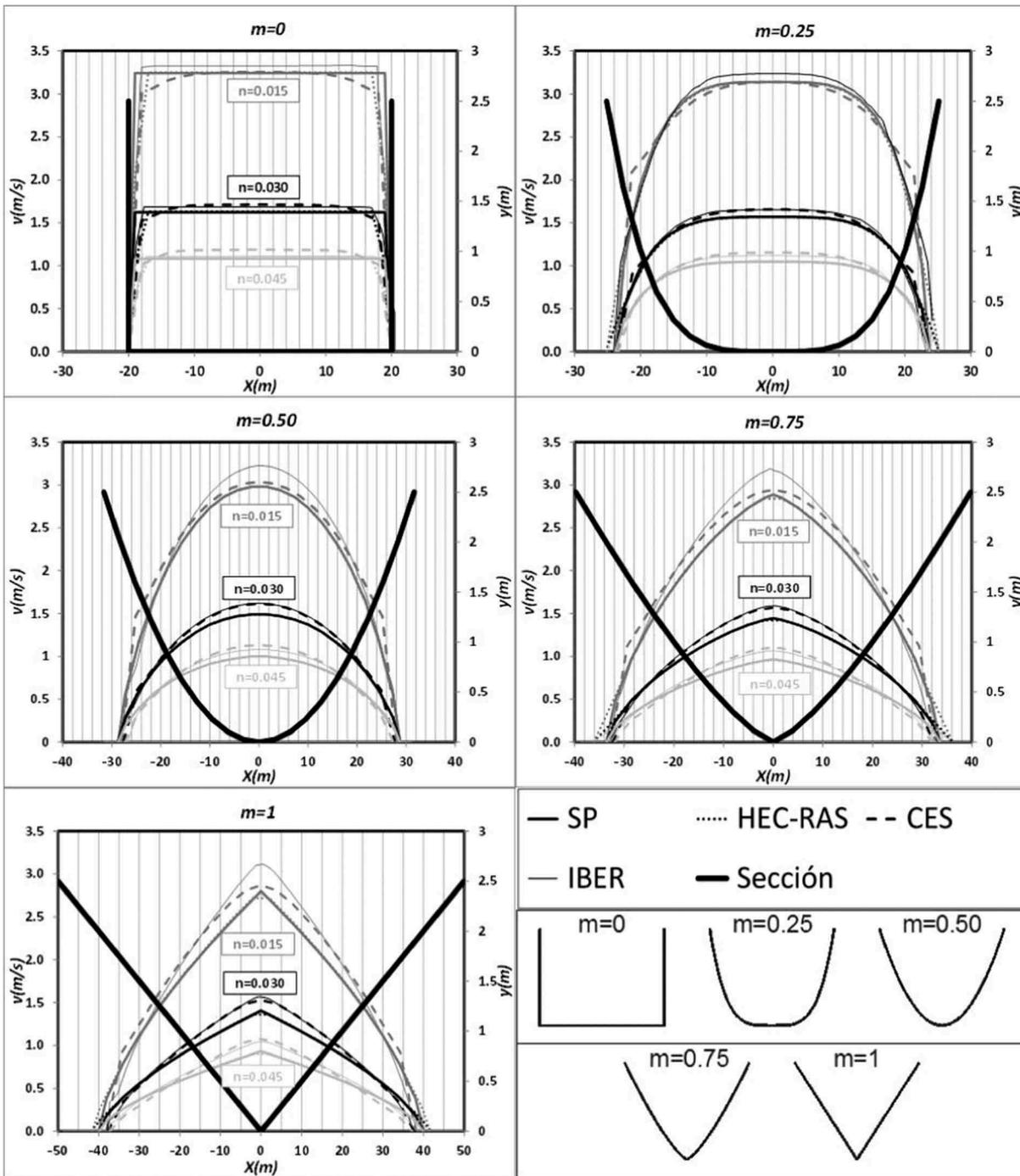


Figura 12. Distribución de velocidades para las secciones, coeficientes de rugosidad y modelos considerados.

Tabla 4. Valores de x_d para cada uno de los modelos y secciones consideradas.

	$n=0.015$					$n=0.030$					$n=0.045$				
	m	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75
SP	20.00	23.76	28.23	33.57	40.03	20.00	23.76	28.26	33.57	39.94	20.00	23.78	28.26	33.63	39.94
HEC-RAS	20.00	25.15	28.75	36.15	41.67	20.00	25.15	28.75	36.15	41.67	20.00	25.15	28.75	36.15	41.67
CES	20.00	23.73	27.93	32.65	38.13	20.00	23.54	27.64	32.28	37.68	20.00	23.40	27.35	31.99	37.30
IBER	20.00	23.88	27.52	31.78	36.64	20.00	23.76	28.56	32.23	38.25	20.00	23.58	27.50	31.78	36.51

CES: Conveyance Estimation System; HEC-RAS: Hydrologic Engineering Corps. River Analysis System; SP: Sección tipo Potencial-ley; n : Coeficiente de Manning.

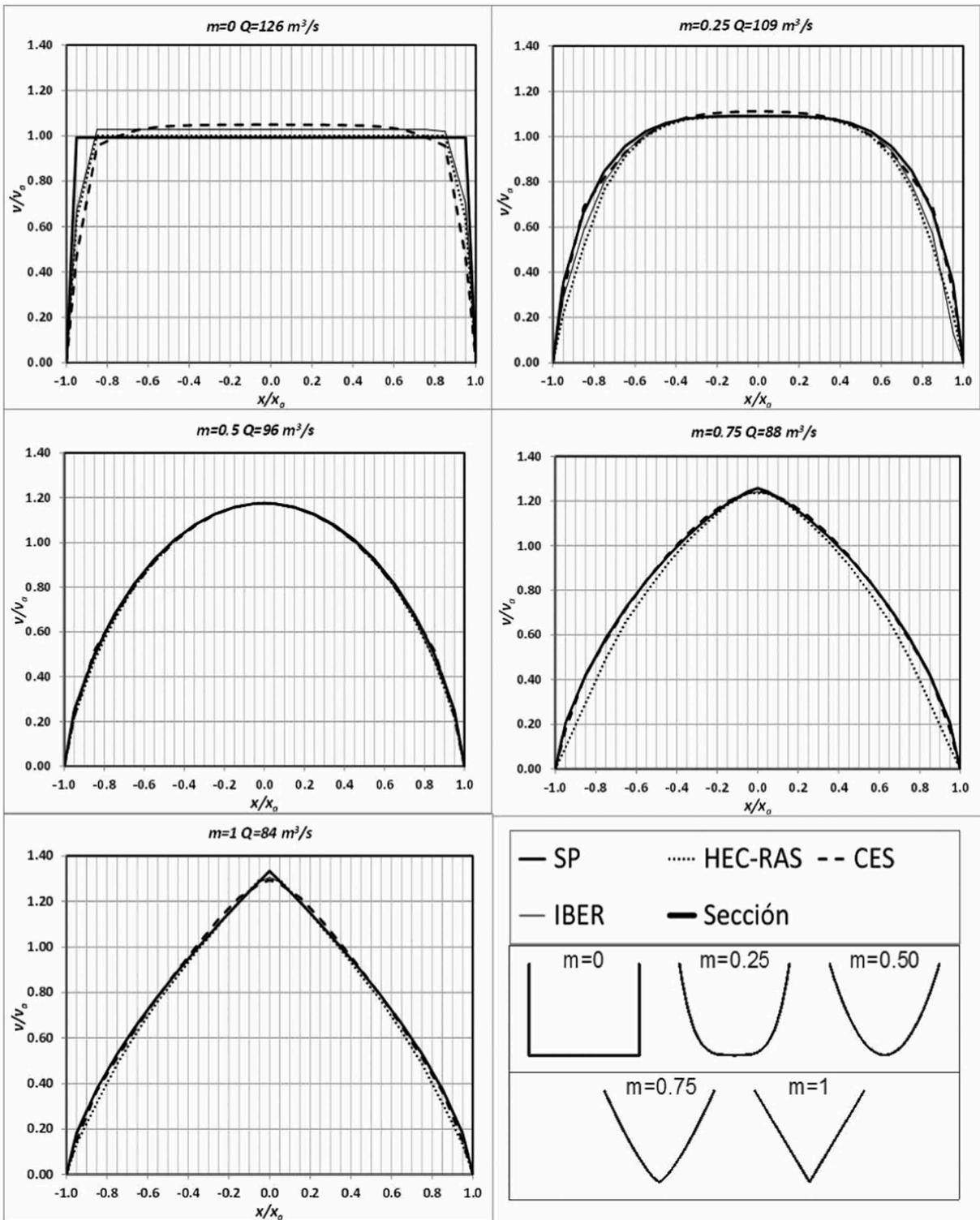


Figura 13. Distribución de la relación entre velocidades para las secciones y modelos considerados. Resultados para $n_a = 0.030 \text{ s/m}^{1/3}$.

rectangular ($m = 0$), y en el modelo CES, que obtiene **Bueno**. En el modelo HEC-RAS, los valores obtenidos para cada valor de m son prácticamente idénticos debido a la similitud entre los modelos comparados, no influyendo el coeficiente de rugosidad de Manning

en el cálculo del RSR. Para los modelos CES e IBER sí existen diferencias, ya que tanto los calados como las velocidades medias no mantienen la misma proporción que la variación del coeficiente de rugosidad de Manning. Estas diferencias no suponen un

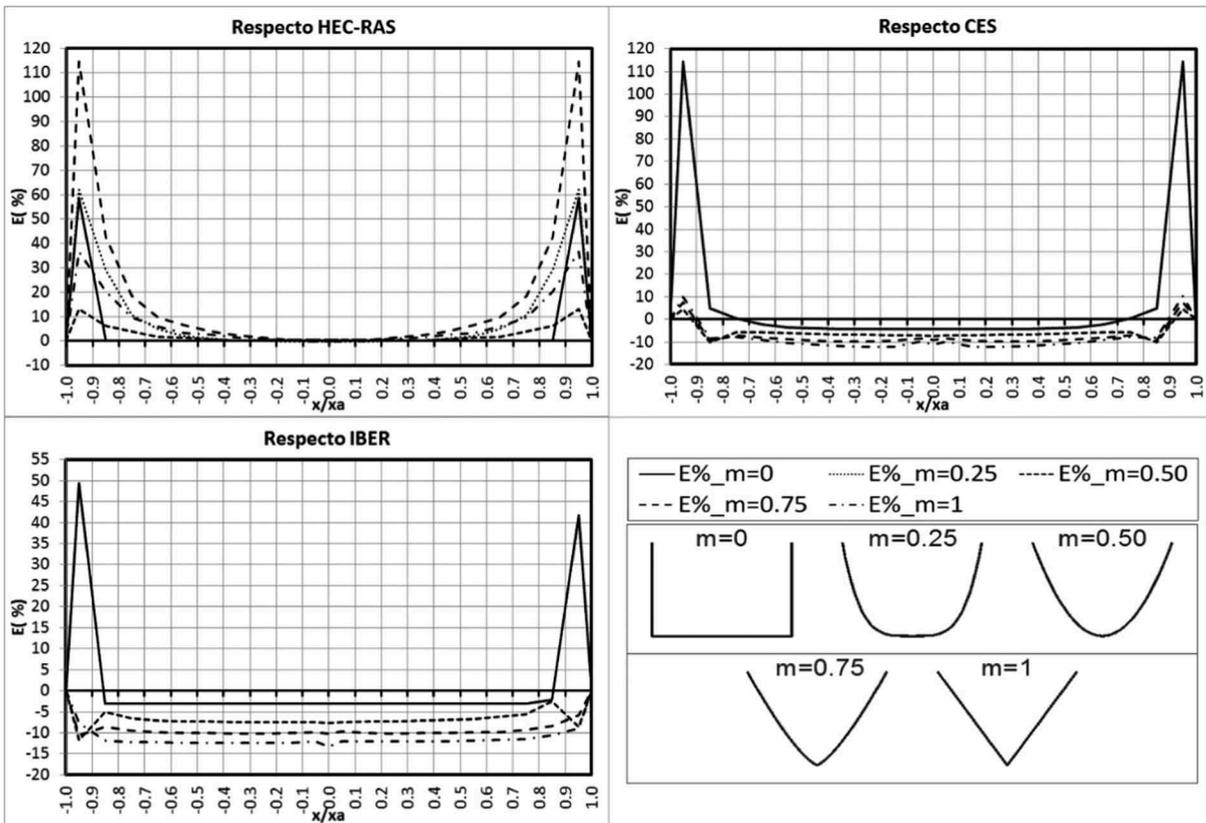


Figura 14. Distribución de errores para la velocidad de la formulación propuesta respecto de los modelos utilizados, en función de x/x_a . Resultados para $n_a = 0.030 \text{ s}/m^{1/3}$.

cambio de clasificación, ya que los valores obtenidos están muy por debajo del valor límite de cambio ($RSR = 0.5$). Los valores obtenidos para el índice RSR indican que la formulación propuesta representa (tanto cuantitativamente como cualitativamente) la distribución lateral de velocidades para cualquier valor de m y el coeficiente de rugosidad de Manning, proporcionando unas curvas de distribución de velocidades análogas a las obtenidas por modelos numéricos más complejos, de mayor dificultad de uso y mayor coste computacional.

Conclusiones

El presente artículo describe la propuesta de expresiones explícitas para el cálculo de la velocidad y el calado cuando el caudal que circula por las secciones que admiten una representación de tipo potencial es conocido, con aproximaciones tanto continuas como discretas.

El estudio del coeficiente C_{corr} para diferentes valores k y m ha demostrado que su valor varía considerablemente para los valores de $k < 10$, manteniéndose prácticamente constante para los

valores mayores que k . Los valores obtenidos dependen directamente del exponente m de la sección.

Tras el análisis bibliográfico previo realizado, no se han encontrado expresiones ni desarrollos para este coeficiente en la literatura técnica, siendo estimado indirectamente en expresiones generales o como coeficientes sin determinar. La formulación explícita aquí propuesta para determinar C_{corr} ((39), (42) y (46)), permite su inclusión directa en desarrollos y estudios hidráulicos. Esta formulación proporciona expresiones que permiten tratar explícitamente con este parámetro, acotando su rango de valor, y facilitando la interpretación de otras variables.

Tradicionalmente, la determinación de la distribución lateral de velocidades mediante expresiones analíticas explícitas ha sido abordada con ecuaciones empíricas, ajustando sus coeficientes mediante regresiones y aproximaciones matemáticas. La formulación explícita desarrollada en el presente artículo, y basada en el desarrollo hidráulico de secciones que admiten una representación de tipo potencial, permite estimar tanto cuantitativamente como cualitativamente el perfil de velocidades, de una manera simple y con sólo dos parámetros para representar geoméricamente la sección (β y m).

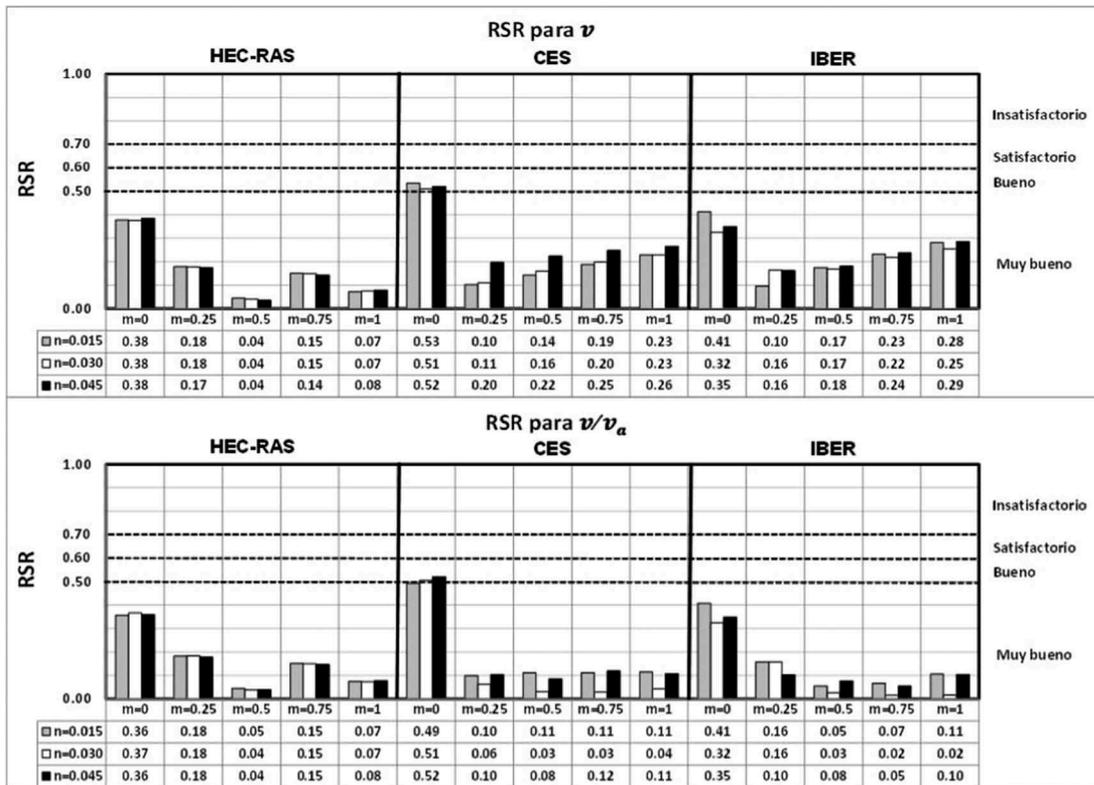


Figura 15. Valores de RSR y aplicación al criterio establecido.

La sencillez de las expresiones obtenidas permite su utilización en desarrollos más complejos, pudiendo mejorar la interpretación y cálculo de otras variables hidráulicas. Estas variables pueden ser: el coeficiente de dispersión longitudinal y la optimización de la forma de las secciones transversales para el diseño de canales eficientes. Asimismo, la metodología presentada puede ser aplicada en otras situaciones que requieran un conocimiento tanto del perfil de velocidades como de otras variables asociadas. El análisis de validación desarrollado muestra que las predicciones realizadas por las fórmulas propuestas, cuando son comparadas con modelos ampliamente aceptados por la comunidad científico-técnica, proponen un RMSE de 0.13, en el cálculo de la distribución lateral de velocidades, y de 0.05 en el cálculo de la relación de velocidades respecto a la velocidad media. Estos errores dan valoraciones buenas o muy buenas para todo el rango de ajustes analizado.

Aunque la formulación propuesta está obtenida para secciones simétricas, las expresiones obtenidas pueden ser la base para un desarrollo futuro de expresiones que permitan la estimación del perfil de velocidades para secciones no simétricas y que sean capaces de representar todo tipo de secciones reales. Estas estimaciones podrían tener en cuenta procesos como la difusión lateral de cantidad de movimiento, obteniendo así

representaciones más veraces de la distribución de velocidades.

Símbolos

A continuación, se muestran los símbolos utilizados en este artículo junto a sus respectivas unidades:

- A_a : Área mojada de la sección transversal para un calado h_a (m^2);
- A_i : Área de la subsección i (m^2);
- B : Ancho de la sección (m);
- B_a : Anchura de la sección transversal para un calado h_a (m);
- B_i : Anchura para la subsección i (m);
- b : Coeficiente de cálculo para el caudal Q_a ;
- β : Parámetro de definición de la sección;
- C_{corr} : Coeficiente de corrección de la sección;
- $(C_{corr})_{k \rightarrow \infty}$: Coeficiente de corrección de la sección para $k \rightarrow \infty$;
- d : Coeficiente de cálculo para el caudal Q_a ;
- $E(\%)$: Error absoluto en velocidades;
- f : Coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach;
- g : Aceleración de la gravedad (m/s^2);
- H : Calado medio (m);
- h : Calado (m);
- h_a : Calado de estudio (m);
- h_i : Calado para la subsección i (m);
- h_{max} : Calado máximo (m);

$h(x)$:	Función explícita de cálculo del calado para cualquier valor de x (m);
i :	Identificador de la subsección;
K_a :	Factor de transporte total de toda la sección (m^3/s);
K_i :	Factor de transporte de cada subsección (m^3/s);
k :	Número total de subdivisiones;
m :	Exponente de forma de la sección;
n_a :	Coefficiente de rugosidad de Manning total para la sección ($sm^{-1/3}$);
n_i :	Coefficiente de rugosidad de Manning de la subsección i ($sm^{-1/3}$);
ρ :	Densidad del agua (kg/m^3);
Q_a :	Caudal total circulante por la sección para un calado h_a (m^3/s);
Q_i :	Caudal circulante por la subsección i (m^3/s);
Q_i^{Corr} :	Caudal circulante por la subsección i , corregido por el coeficiente C_{corr} (m^3/s);
R_a :	Radio hidráulico total de la sección para un calado h_a (m);
R_i :	Radio hidráulico de la subsección i (m);
$RMSE$:	Raíz del error cuadrático medio;
RSR :	Relación de la raíz del error cuadrático medio con la desviación estándar;
S :	Pendiente longitudinal (m/m);
s :	Talud lateral;
$\tau_{s,x}$:	Fricción en la superficie libre debida al rozamiento producido por el viento según eje x ;
$\tau_{s,y}$:	Fricción en la superficie libre debida al rozamiento producido por el viento según eje y ;
$\tau_{b,x}$:	Fricción del lecho debido al rozamiento según eje x ;
$\tau_{b,y}$:	Fricción del lecho debido al rozamiento según eje y ;
U_x, U_y :	Velocidades horizontales promediadas en profundidad (m/s);
V :	Velocidad del flujo (m/s);
v_a :	Velocidad media de la sección (m/s);
v_i :	Velocidad media en la subsección i (m/s);
v_{max} :	Velocidad máxima en la sección (m/s);
ν_t :	Viscosidad turbulenta;
$v(x)$:	Función explícita de cálculo de la velocidad para cualquier x (m/s);
Y :	Profundidad del flujo (m);
y :	Eje de ordenadas (m);
y_i :	Ordenada para la subsección i (m);
x :	Eje de abscisas (m);
x_a :	Mitad de la anchura del cauce mojado para calado h_a (m);
Z_b :	Elevación de la lámina libre por encima de un datum (m);
λ :	Viscosidad adimensional de torbellino de Boussinesq; y
$(\rho \bar{U} \bar{V})_d$:	Tensión de Reynolds debido a las corrientes secundarias.

Bibliografía

1. Kreibich H, Piroth K, Seifert I, et al. Is flow velocity a significant parameter in flood damage modelling? [Es la

- velocidad de corriente un parámetro significativo en el modelaje de daños de inundación?]. *Nat Hazards Earth Syst Sci.* 2009;9:1679–1692.
2. Lozada JMD, García CM, Herrero H, et al. Estimación del coeficiente de dispersión longitudinal en ríos de la región central de Argentina utilizando ADCP. *Rev Iberoam Agua.* 2015;2:26–37.
3. García P, Rodríguez J, Menéndez AN, et al. Modelo integrado para calcular la evolución morfológica de canales, incluyendo erosión en márgenes cohesivos. In: Tercer Simposio Regional sobre Hidráulica de Ríos. RIOS; 2007;Cordoba.
4. Vatankhah AR. Normal depth in power-law channels [Profundidad normal de canales “Power-Law”]. *J Hydrol Eng.* 2015;20:6014008.
5. Valiani A, Caleffi V. Analytical findings for power law cross-sections: uniform flow depth [Resultados analíticos para secciones laterales estilo poder-ley: profundidad de flujo uniforme]. *Adv Water Resour.* 2009;32:1404–1412.
6. Henderson FM. *Open channel flow* [Flujo en el canal abierto]. New York (NY): Macmillan; 1996.
7. Fread DL, Lewis JM. Parameter optimization for dynamic flood-routing applications with minimal cross-sectional data [Optimización de parámetros para aplicación dinámica de dirección de aguas de inundación con datos mínimos]. *ASCE Water Forum '86 World Water Issues Evol. Am. Soc. Civ. Eng. Long Beach, CA.* 1986.
8. Garbrecht J. Analytical representation of cross-section hydraulic properties [Representación analítica de propiedades hidráulicas en el corte]. *J Hydrol.* 1990;119:43–56.
9. Sakkas JG, Strelkoff T. Dam-break flood in a prismatic dry channel [Inundación en un canal prismático seco por rotura de presa]. *ASCE J Hydraul Div.* 1973;99 (HY12):195–2216.
10. Sakkas JG, Strelkoff T. Dimensionless solution of Dam-break flood waves [Solución sin dimensiones para olas de inundación por rotura de presa]. *ASCE J Hydraul Div.* 1976;102:171–184.
11. Fread DL, Lewis JM. FLDWAV: A generalized flood routing model [Un modelo de dirección de aguas de inundación generalizado]. en *Proceed. National Conf. Hydraul. Eng., ASCE, Colorado Springs, CO;* 1988. p. 668–673.
12. Katopodes ND, Schamber DR. Applicability of dam-break flood wave models [Aplicabilidad de Modelos de Inundación por Rotura de Represa]. *J Hydraul Eng.* 1983;109:702–721.
13. Zanuttigh B, Lamberti A. Dam-break waves in power-law channel section [Olas por Rotura de Represa en la Sección de Canal en Forma Power-Law]. *J Hydraul Eng.* 2001;127:322–326.
14. Strelkoff TS, Clemmens AJ. Approximating wetted perimeter in power-law cross section [Aproximando el perímetro mojado en una sección Power-Law]. *J Irrig Drain Eng.* 2000;126:98–109.
15. Mejia AI, Reed SM. Role of channel and floodplain cross-section geometry in the basin response [Función de la geometría de las secciones de canal y tierra mojada por inundación]. *Water Resour Res.* 2011;47:1–15.

16. Sooky AA. Longitudinal dispersion in open channels [dispersión longitudinal en canales abiertos]. *J Hydr Div.* 1969;95:1327–1346.
17. Bogle GV. Stream velocity profiles and longitudinal dispersion [Perfiles de velocidad del agua y dispersión longitudinal]. *J Hydraul Eng.* 1997;123:816–820.
18. Seo IW, Gadalrab MS. Estimation of dispersion coefficient using different forms of lateral velocity distribution [Estimación del coeficiente de dispersión usando diferentes formas de velocidad lateral]. *Proc. WEESHE-99 Conf., Seoul;* 1999. p. 217–226.
19. Deng Z-Q, Singh VP, Bengtsson L. Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers [Coeficiente de dispersión longitudinal en ríos rectos]. *J Hydraul Eng.* 2001;127:919–927.
20. Seo IW, Baek KO. Estimation of the longitudinal dispersion coefficient using the velocity profile in natural streams [Estimación del coeficiente de dispersión usando el perfil de velocidad de ríos naturales]. *J Hydraul Eng.* 2004;130:227–236.
21. Weber JF, Tarrab L, La Suela D, et al. Distribucion lateral de velocidades en cauces naturales. *Ing Agua.* 2005;12:1–14.
22. Lotter GK. Soobrazheniia k gidravlicheskomu raschetu rusel s razlichnoi sherokhovostiiu stenok [Considerations on hydraulic design of channels with different roughness of walls]. *Izv. Vsesoiuznogo NuachnoIssledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki* [Transactions, All-Union Sci. Res. Inst. Hydraul.]. 1933;9:238–241.
23. Einstein HA, Banks RB. Fluid resistance of composite roughness [Resistencia del fluido en asperezas de compuestos] *Trans. Am Geophys Union.* 1950;31:603.
24. US Corps of Engineers Army. HEC-RAS River Analysis System, user's manual version 4.1 [Sistema de Análisis de Rios, HEC-RAS: manual del usuario versión 4.1.]. US Army Corps Eng. Hydrol. Eng. Center; Jan 1–790; Davis CA; 2010.
25. Wark JB, Samuels PG, Ervine DA. A practical method of estimating velocity and discharge in compound channels [Un método práctico de estimar la velocidad y descarga en canales compuestos]. En: *River Flood Hydraul., Wallingford;* 1990. p. 163–172.
26. Shiono K, Knight DW. Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel [Flujos de canal abierto turbulentos con profundidad variable al otro lado del canal]. *J Fluid Mech.* 1991;222:617.
27. Shiono K, Knight DW. Two-dimensional analytical solution for a compound channel [Una solución analítica en dos dimensiones para un canal compuesto]. En: *Proc., 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modeling and Turbulence Measurements, Tokyo;* 1988. p. 503–510.
28. Knight DW, Shiono K, Pirt J. Prediction of depth mean velocity and discharge in natural rivers with overbank flow [Predicción de velocidad media de profundidad y descarga a rios naturales con desborde ribereña]. En: *Proceedings of the International Conference on Hydraulic and Environmental Modelling of Coastal, Estuarine and River Waters, Bradford;* 1989. p. 419–428.
29. Bramley M, Fiwem CF. New tools for flood level estimation-conveyance and afflux estimation systems [Nuevas herramientas para estimar niveles de inundación y sistemas de entrada y salida de agua]. En: *Defra Flood and Coastal Management Conference, York;* 2004. p. 09/10/1–4.
30. Samuels PG. A new conveyance estimation system [Un sistema nuevo de estimar transporte]. en *37th Annual Conference of River and Coastal Engineer; UK: University of Keele;* 2002.
31. Wilson CAME, Bates PD, Hervouet JM. Comparison of turbulence models for stage-discharge rating curve prediction in reach-scale compound channel flows using two-dimensional finite element methods [Comparación de modelos de turbulencia para predecir la curva de descarga a pasos en flujos de canal compuesto alcance-escala usando métodos con elemento finito en dos dimensiones]. *J Hydrol.* 2002;257:42–58.
32. Bladé Castellet E. Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado con esquemas en volúmenes finitos en una y dos dimensiones. In: *Tesis de Doctorado en Xarxa.* 2006.
33. Bladé E, et al. Iber: herramienta de simulación numérica del flujo en ríos. *Rev Int Mét Numér Cálculo Diseño Ing.* 2014;30:1–10.
34. Weber JF, Menéndez ÁN, Elaskar SA. Modelación numérica de la distribución del flujo a superficie libre en secciones compuestas. *Mecán Comput.* 2002;21:476–494.
35. Streeter VL, Wylie EB. Fluid mechanics [Mecánica de fluidos]. New York, NY: WCB McGraw-Hill; 1975.
36. Abril JB, Knight DW. Stage-discharge prediction for rivers in flood applying a depth-averaged model [Predicción de descargas por etapa de río bajo inundación aplicando un modelo de profundidad promediada]. *J Hydraul Res.* 2004;42:616–629.
37. Rezaei B, Knight DW. Application of the Shiono and Knight Method in compound channels with non-prismatic floodplains [Aplicación del método de Shiono y Knight de canales compuestos con campo de inundación no prismáticas]. *J Hydraul Res.* 2009;47:716–726.
38. Ervine DA, Babaeyan-Koopaei K, Sellin RHJ. Two-dimensional solution for straight and meandering overbank flows [Solución en dos dimensiones para flujo de inundación en riberas rectas y curvilineares]. *J Hydraul Eng.* 2000;126:653–669.
39. Vionnet CA, Tassi PA, Martín Vide JP. Estimates of flow resistance and eddy viscosity coefficients for 2D modelling on vegetated floodplains [Estimación de resistencia de flujos y coeficientes de viscosidad de pozos rotantes en dos dimensiones sobre zonas de inundación con vegetación]. *Hydrol Process.* 2004;18:2907–2926.
40. McGahey C, Samuels PG. Methodology for conveyance estimation in two-stage straight, skewed and meandering channels [Metodología para estimar transporte en dos etapas en canales rectos, no rectos y curvilíneos]. en *Proceedings of the XXX Congress of the International Association for Hydraulic Research, Thessaloniki;* 2003. vol. 1, p. 33–40.
41. Fenton JD. Rating Curves : part 2 – Representation and Approximation [Juzgando curvas: parte 2 - Representación y aproximación], *Conf. Hydraul. Civ. Eng., Horbart;* 2001 Noviembre; p. 319–328.

42. Hussein AS. Simplified design of hydraulically efficient power-law channels with freeboard [Diseño simplificado para canales eficientes con Freeboard]. *J Irrig Drain Eng.* 2008;134:380–386.
43. Sánchez-Romero FJ. Criterios de seguridad en balsas de tierra para riego. *Universitat Politècnica de València*; 2014.
44. Legates DR, McCabe GJ. Evaluating the use of ‘goodness-of-fit’ Measures in hydrologic and hydroclimatic model validation [Evaluando el uso de medidas hidrológicas y validación del modelo hidroclimático]. *Water Resour Res.* 1999;35:233–241.
45. Singh J, Knapp HV, Arnold JG, et al. Hydrological modeling of the Iroquois river watershed using HSPF and SWAT. [Modelación hidrológica de la cuenca del Rio Iroquois usando HSPF y SWAT]. *J Am Water Resour Assoc.* 2005;41:343–360.
46. Moriasi DN, Arnold JG, Van Liew MW, et al. Model Evaluation Guidelines for Systematic Quantification of Accuracy in Watershed Simulations [Indicaciones para la cuantificación sistemática de un simulacro de cuencas]. *Trans ASABE.* 2007;50:885–900.
47. McGahey C, Samuels PG. River roughness: the integration of diverse knowledge [Fuerza de río: la integración de conocimientos diversos]. En: *Proc. of the 2nd International Conference on Fluvial Hydraulics, River Flow, Napoli*; 2004. p. 405–414.
48. Wallingford HR. Reducing uncertainty in river flood conveyance. Interim Report 2: review of methods of estimating conveyance. [Reduciendo incertidumbre acerca de transporte en inundación de río. Reporte 2: repaso de los métodos para estimar transporte.]. *Proj. W5A-057; HR Wallingford*, 2003.