UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# Las matrices de proyecciones y su uso en el diseño gráfico



| | |
|---|---|
| **Apellidos, nombre** | **Benítez López, Julio** (jbenitez@mat.upv.es) |
| **Departamento** | **Departamento de Matemática Aplicada** |
| **Centro** | **Universitat Politècnica de València** |

# 1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se explicarán las matrices de proyección y su importancia en el diseño gráfico por ordenador. Además, veremos algunas proyecciones concretas.

# 2 Objetivos

Cuando se hayan asimilado los contenidos de este documento, el alumno debe poder

- Explicar cómo se construyen las matrices de proyecciones.
- Usar estas matrices en el diseño gráfico.
- Conocer algunas proyecciones concretas y algunas propiedades de estas proyecciones.

# 3 ¿Cómo representar objetos tridimensionales en el plano?

La representación de los objetos tridimensionales en el plano es una cuestión importante desde el punto de vista práctico, puesto que es útil manejar las representaciones planas (en el papel o en la pantalla del ordenador) de diferentes objetos. El paso de un objeto tridimensional a su representación plana se llama **proyección**.

Cuando proyectamos, se pierde una dimensión y esto provoca que las medidas del objeto tridimensional cambien. Por tanto, es interesante buscar las proyecciones que permitan recostruir el objeto tridimensional. Normalmente esto no es posible con una sola proyección (piensa en la sombra que dan un cilindro vertical y una esfera: ambas son indistinguibles); pero con varias proyecciones simultáneas esto sí es posible. En la figura 1 se ve la proyección de un cubo al que se le ha quitado un cubo más pequeño. Sin embargo, se puede observar que los ángulos de las aristas en la proyección no son de $90°$ (aunque da la sensación de que sí).

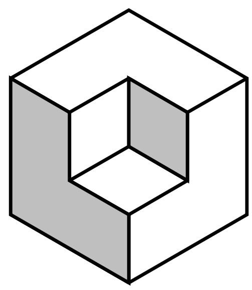


Figura 1: La proyección de una figura 3D.

Cualquier proyección consta de dos elementos principales: el plano y el eje de proyección. El plano de proyección es donde dibujamos la representación plana. Para entender lo que es el eje de proyección, nada mejor que mirar la figura 2. Cuando el eje de proyección es perpendicular al plano de proyección se dice que la proyección es **ortográfica**.

Resulta que el plano de proyección tiene su propio sistema coordenado (por ejemplo, las unidades del sistema coordenado de una pantalla del ordenador son los píxeles). Cada punto tridimensional tiene tres coordenadas y cada punto ya proyectado tiene dos coordenadas. Por tanto, tenemos que el siguiente paso

$$\text{Objeto tridimensional que queremos dibujar} \quad \Longrightarrow \quad \text{Objeto bidimensional ya dibujado}$$

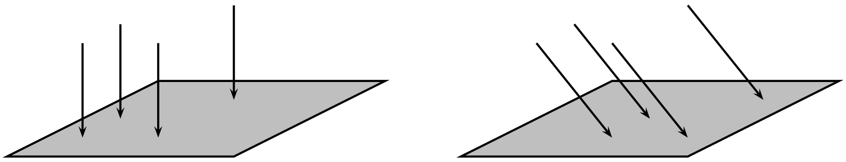


Figura 2: Si el eje de proyección es perpendicular al plano de proyección, la proyección es ortográfica.

se modela como una aplicación $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, de forma que si $\mathbf{x}$ es el punto que queremos dibujar, entonces $P(\mathbf{x})$ es donde debemos dibujar el punto $\mathbf{x}$.

En este documento **solo manejaremos proyecciones que transforman rectas paralelas en paralelas** (mira la figura 1 en la que las aristas del cubo se dibujan paralelamente) y que **el origen se proyecta en el origen**, es decir, que $P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Sin embargo, no todas las representaciones planas conservan el paralelismo. En el cuadro *La academia de Atenas* de Rafael (pintor italiano del renacimiento), podemos observar que las líneas del suelo, que aparentan ser paralelas, convergen hacia un mismo punto (llamado punto de fuga).

Las dos condiciones mencionadas anteriormente fuerzan a que exista una matriz $A$ con tres columnas y 2 filas tal que

$$P(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Figura 3: La academia de Atenas. Rafael.

Esta igualdad es muy importante y se usará a lo largo de todo el documento. La matriz $A$ de esta igualdad se llama la **matriz de proyección**. Observa que para usar la proyección $P$ es suficiente conocer la matriz $A$.

# 4 La matriz de una proyección

**¿Cómo se obtiene esta matriz?** Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ los tres vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es muy fácil comprobar que la columna $i$-ésima de $A$ es $P(\mathbf{e}_i)$. Por tanto, para determinar la matriz $A$, basta saber $P(\mathbf{e}_1), P(\mathbf{e}_2), P(\mathbf{e}_3)$ y escribir

$$A = [P(\mathbf{e}_1) \mid P(\mathbf{e}_2) \mid P(\mathbf{e}_3)].$$

***Ejemplo***: Considera la proyección sobre el plano $z = 0$. Esta proyección no es más que quitar la coordenada $z$ o de una forma gráfica: es la sombra cuando el sol está en lo más alto. Matemáticamente tenemos que $P(x, y, z) = (x, y)$. La representación matricial de esta proyección es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{:=A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad \text{(ecuación 1)}$$

Observa que la primera fila de la matriz $A$ es $P(\mathbf{e}_1)$, donde tenemos que dibujar $\mathbf{e}_1$ y la segunda fila de la matriz $A$ es $P(\mathbf{e}_2)$, donde tenemos que dibujar $\mathbf{e}_2$. También observa que $\mathbf{e}_3$ se proyecta al origen. Puedes ver una imagen y su proyección por medio de esta proyección en la figura 4. Se suele llamar **planta** la imagen proyectada. ■

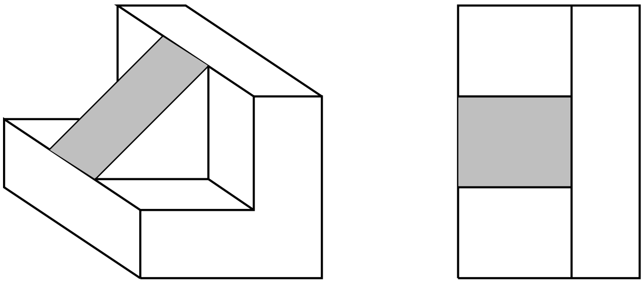


Figura 4: Un objeto y su planta.

***Problema 1*** *Halla las matrices de la proyecciones sobre los planos $y = 0$ y $x = 0$. Dibuja las proyecciones de la imagen de la izquierda de la figura 4.*

***Problema 2*** *Considera la proyección $P$ dada por $P(\mathbf{e}_1) = [1\ 1]^T$, $P(\mathbf{e}_2) = [1\ 0]^T$, $P(\mathbf{e}_3) = [0\ 1]^T$. Halla la matriz de la proyección. ¿Qué obtienes si proyectas el cubo cuyas 8 vértices son $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, siendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0, 1\}$?*

## 4.1 El espacio nulo de una proyección

Una matriz $A$ con $n$ filas y $m$ columnas tiene asociados dos subespacios fundamentales: el **espacio nulo** y el **espacio imagen** que se definen, respectivamente, por medio de

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \qquad \mathcal{R}(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}.$$

La "$\mathcal{R}$" proviene del inglés "**r**ange space". Por supuesto, una matriz de proyección tiene 2 filas ($n = 2$) y 3 columnas ($m = 3$). Geométricamente, el espacio nulo son todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que se proyectan al origen y el espacio imagen es donde se proyectan *todos* los puntos de $\mathbb{R}^3$. Aunque matemáticamente es posible, en la práctica no es razonable proyectar sobre solo una recta. Por lo tanto, haremos otra suposición más a las matrices de proyecciones: **el espacio imagen de una matriz de proyección es** $\mathbb{R}^2$. Esta última condición equivale a que el rango de la matriz de proyección sea 2.

El comando en Octave para calcular el rango es `rank`. Así, `rank(A)` calcula el rango de la matriz $A$ siempre y cuando tengamos definida previamente esta matriz.

***Problema 3*** *Considera la proyección sobre el plano $z = 0$, es decir, con la que se obtiene la planta. La matriz $A$ viene dada en la* ecuación 1. Observa que el rango de $A$ es 2. Calcula $\mathcal{N}(A)$ y da una interpretación geométrica del espacio nulo de $A$.

Como[1] $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = m$, siendo $m$ el número de columnas de una matriz $A$ y si recordamos que hemos impuesto que $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$, entonces, ya que toda matriz de proyección tiene 3 columnas, se debe cumplir que $\dim \mathcal{N}(A) = 1$.

Es decir, todos los puntos que son proyectados al $\mathbf{0}$ forman una recta. Además, si $\mathbf{v}$ es un vector que genera $\mathcal{N}(A)$ (o un vector director de esta recta) y si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$A(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) = A\mathbf{x} + \lambda A\mathbf{v} = A\mathbf{x}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. En otras palabras, toda la recta $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ se proyecta al punto $A\mathbf{x}$. Mira la figura 5.

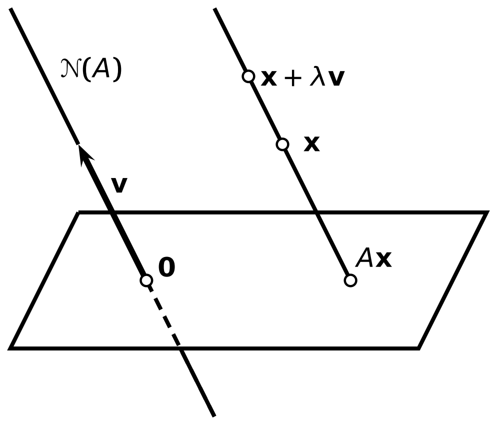



Figura 5: El eje de proyección es el espacio nulo.

Por lo que podemos decir que el **eje de proyección de la proyección $P(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es el espacio nulo de** $A$. Mira de nuevo la figura 5.

## 4.2 El factor de escala

Pensemos en la proyección sobre el plano $z = 0$. Las dimensiones en los ejes $x$ e $y$ se mantienen inalteradas, mientras que cualquier distancia en el eje $z$ se colapsa a 0. Diremos en este caso que el factor de escala en los ejes $x$ e $y$ es igual a 1, mientras que el factor de escala en el eje $z$ es 0. Así, en general, hay tres factores de escala y miden la razón entre la distancia proyectada y la distancia original. ¿Cómo se calculan estos factores de escala?

Consideremos una recta cualquiera con vector director $\hat{\mathbf{u}}$ (nada impide que lo tomemos unitario[2]) y vamos a calcular el factor de escala en este eje. Para ello tomamos un punto $\mathbf{p}$ de esta recta y observamos que otro punto cualquiera de la recta es de la forma $\mathbf{p} + \lambda \hat{\mathbf{u}}$, siendo $\lambda$ un número real.

La razón entre la distancia de los puntos proyectados, $A\mathbf{p}$ y $A(\mathbf{p} + \lambda \hat{\mathbf{u}})$, y la distancia de los puntos sin proyectar, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p} + \lambda \hat{\mathbf{u}}$, es (usaremos que $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$)

$$\frac{\|A(\mathbf{p} + \lambda \hat{\mathbf{u}}) - A\mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p} + \lambda \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{p}\|} = \frac{\|A\mathbf{p} + \lambda A\hat{\mathbf{u}} - A\mathbf{p}\|}{|\lambda|} = \|A\hat{\mathbf{u}}\|.$$

Por tanto, **el factor de escala en la dirección $\hat{\mathbf{u}}$ es** $\|A\hat{\mathbf{u}}\|$.

***Ejemplo***: Considera la proyección que proporciona la planta de una figura (aparece en la ecuación 1). Para calcular el factor de escala en la dirección $x$, cogemos un vector

[1] Esta igualdad es un teorema básico del álgebra matricial. En lenguaje de aplicaciones lineales, es equivalente a que si $f : U \to V$ es lineal, entonces $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim U$.

[2] Un vector es unitario si su norma es 1, es decir, este vector $\hat{\mathbf{u}}$ cumple $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$.

unitario en esta dirección: $\mathbf{e}_1 = [1\ \ 0\ \ 0]^T$. Luego el factor de escala en la dirección $x$ es $\|A\mathbf{e}_1\| = \|[1\ \ 0]^T\| = 1$. ∎

Los factores de escala más usados (casi los únicos) son los de los ejes x, y, z. Estos factores se suelen denotar $s_x, s_y, s_z$, respectivamente.

***Problema 4*** *Calcula $s_y$ y $s_z$ para la proyección del ejemplo anterior. Interpreta geométricamente este resultado.*

# 5 Proyecciones isométricas

Las proyecciones isométricas no distorsionan las distancias en ningún eje coordenado (salvo un factor de escala igual para los tres ejes). Decimos que **una proyección es isométrica cuando** $s_x = s_y = s_z$. Veamos algunas proyecciones isométricas usadas en el diseño.

## 5.1 La proyección isométrica 30°

La proyección isométrica 30° se basa en la figura 6. Como $s_x = \|P(\mathbf{e}_1)\| = 1$, $s_y = \|P(\mathbf{e}_2)\| = 1$ y $s_z = \|P(\mathbf{e}_3)\| = 1$ (ya que, como se ve en la figura 6, los puntos $P(\mathbf{e}_1)$, $P(\mathbf{e}_2)$ y $P(\mathbf{e}_3)$ están en la circunferencia de centro el origen y de radio 1), esta proyección es, efectivamente isométrica. Pero además, la distancia angular entre los tres ejes dibujados es la misma: 120°.

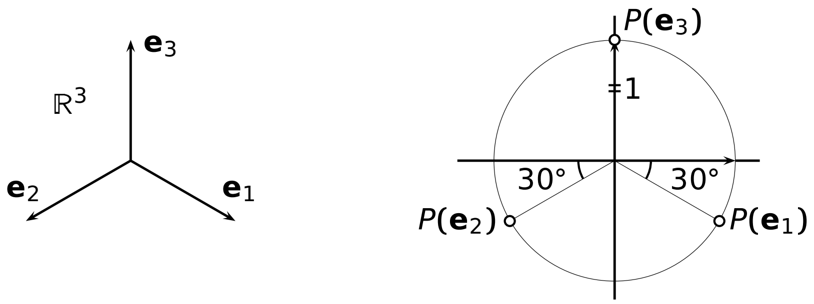



Figura 6: A la izquierda está el "mundo 3D". A la derecha, donde dibujamos.

Vamos a calcular la expresión matricial de esta proyección. Como

$$A = \begin{bmatrix} P(\mathbf{e}_1) & P(\mathbf{e}_2) & P(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & -\cos 30^o & 0 \\ -\operatorname{sen} 30^o & -\operatorname{sen} 30^o & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\mathbf{x}$ es donde tenemos que dibujarlo. Así, dibujamos el punto espacial $[x\ \ y\ \ z]^T$ en

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(x-y) \\ -\frac{x+y}{2} + z \end{bmatrix}.$$

Problema 5 *Resuelve el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ¿Qué significado geométrico tiene la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?*

Podemos ver en la figura 7 la proyección de un cubo por medio de la proyección isométrica 30°. Da la sensación de imagen tridimensional; sin embargo, se ha dibujado un hexágono regular.

La figura 7 muestra claramente la razón de que esta proyección no cumple que $||P(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x}||$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Si te fijas en el centro del hexágono verás que dos vértices distintos del cubo coinciden. Si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son estos dos vértices, entonces $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ y sin embargo $P(\mathbf{p}) = P(\mathbf{q})$. Podemos dar el mismo ejemplo numéricamente: Si $\mathbf{p} = [0\ 0\ 0]^T$ y $\mathbf{q} = [1\ 1\ 1]^T$, entonces $P(\mathbf{p}) = P(\mathbf{q}) = [0\ 0]^T$.

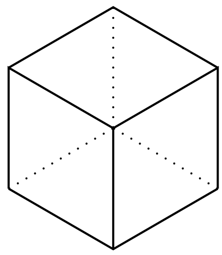


Figura 7: La proyección isométrica 30°.

Sin embargo, debido a la definición de proyección isométrica, si el vector que une los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ es paralelo a los ejes coordenados, entonces la distancia entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ coincide con la distancia entre $P(\mathbf{p})$ y $P(\mathbf{q})$.

Una pequeña modificación de esta proyección ha ganado peso en el mundo del diseño por ordenador.

## 5.2 La proyección isométrica 27°

Hoy en día, casi todos los dispositivos gráficos (principalmente pantallas de ordenador e impresoras) dibujan píxel a píxel. Debido a que la proyección isométrica 30° del eje $x$ o la del eje $y$ es una recta cuya pendiente es $\pm\sqrt{3}/3 \approx \pm 0.577$, estas rectas no se representan muy bien. Se obtienen mejores resultados con rectas cuyas pendientes son $\pm 1/2$.

La representación matricial es muy parecida a la isométrica 30°. Si $\varphi$ el ángulo del primer cuadrante tal que $\tan\varphi = 1/2$, entonces $\varphi \simeq 26.57$ (en grados sexagesimales). Si

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

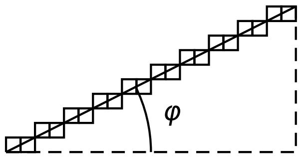



Figura 8: La recta pasa por los extremos de los píxeles.

entonces $P(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. De la igualdad $\tan\varphi = 1/2$ se deduce fácilmente que $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ y $\operatorname{sen}\varphi = 1/\sqrt{5}$. En la figura 9 se observa con nitidez el uso de la proyección isométrica. No está claro si es la de 30° o la de 27°.

## 5.3 La proyección militar

Una tercera proyección isométrica es la que se comenta ahora. Su nombre viene de comienzos del siglo XVI, cuando los ingenieros militares diseñaban sus fortificaciones utilizando este sistema de representación. La expresión es parecida a las anteriores y esta

Figura 9: Captura de pantalla del juego LBA2 (La odisea de Twinsen).

proyección cumple

$$P(\mathbf{e}_1) = [\cos\varphi \ \ \operatorname{sen}\varphi]^T, \qquad P(\mathbf{e}_2) = [-\cos(90°-\varphi) \ \ \operatorname{sen}(90°-\varphi)]^T, \qquad P(\mathbf{e}_3) = [0 \ \ 1]^T.$$

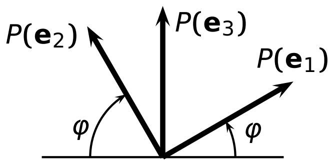



Figura 10: La proyección militar

Mira la figura 10. Normalmente se elige $\varphi = 45°$ o bien $\varphi = 30°$. Como $\cos(90° - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$ y $\operatorname{sen}(90° - \varphi) = \cos\varphi$, si definimos

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(ecuación 2)}$$

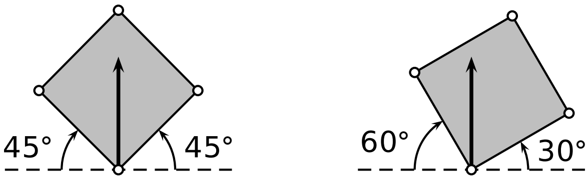
entonces la proyección de $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ es $A\mathbf{x}$.

***Ejemplo***: Vamos a dibujar el cuadrado de vértices $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ y el vector $\mathbf{e}_3$ por medio de la proyección militar. Para ello definimos la matriz $A$ como en la ecuación 2. Sea $M$ la siguiente matriz donde almacenamos los puntos que queremos dibujar.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tras multiplicar $AM$ obtenemos una matriz de 5 columnas y 2 filas. Cada columna de $AM$ es la proyección de cada punto que tenemos que dibujar. Por ejemplo, para dibujar la proyección del punto $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T$, como es la cuarta columna de $M$, entonces nos tenemos que fijar en la cuarta columna de $AM$, que no es más que $[c - s \ \ c + s]^T$, siendo $c = \cos\varphi$ y $s = \operatorname{sen}\varphi$. En la figura siguiente se ha dibujado las proyecciones para los valores $\varphi = 45°$ y $\varphi = 30°$. ■

Esta proyección se suele usar cuando la planta (la vista desde arriba) es importante.




**Problema 6** *¿Qué figura geométrica se obtiene si se proyecta militarmente una circunferencia horizontal?*

## 5.4 La proyección caballera

La idea de esta proyección es parecida a las anteriores, salvo que el plano $xz$ mantiene todas sus magnitudes. Observa la figura 11. En la proyección caballera se tiene

$$P(\mathbf{e}_1) = [1\ 0]^T, \qquad P(\mathbf{e}_2) = [a\ b]^T, \qquad P(\mathbf{e}_3) = [0\ 1]^T$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ que especificaremos un poco más adelante.

La proyección de un punto $\mathbf{x} = [x\ y\ z]^T$ se calcula por medio de $A\mathbf{x}$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix}.$$

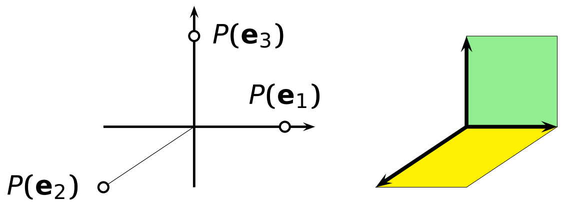



Figura 11: La proyección caballera.

En primer lugar vamos a ver qué condición debe cumplir la proyección caballera si es isométrica. Puesto que $\|P(\mathbf{e}_1)\| = \|P(\mathbf{e}_3)\| = 1$, si queremos que sea isométrica, tenemos que exigir que $\|P(\mathbf{e}_2)\| = 1$. Como $P(\mathbf{e}_2) = [a\ b]^T$, entonces $P$ es isométrica si y solo si $a^2 + b^2 = 1$. En la figura 11, como $P(\mathbf{e}_2)$ está en el tercer cuadrante, se deben tomar $a, b < 0$; mientras que en la figura 12 se tiene $a, b > 0$.

Una elección muy usada es $a = \pm\cos 45°$ y $b = \pm\operatorname{sen} 45°$. Puedes ver esta elección en la figura 12 para $a, b > 0$.

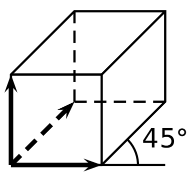



Figura 12: Una elección de la caballera.

Si te fijas en la figura 12, verás que la figura está algo desproporcionada: la dirección del eje $y$ parece más alargada de lo que debería ser. En la práctica se aplica un **factor de reducción** para reducir este efecto visual no deseado. Los coeficientes más usados son los de 1/2, 2/3 y 3/4. No hay un acuerdo universal respecto al coeficiente de reducción (se trata más de una cuestión de estética que de ciencia).

La matriz de la proyección caballera de ángulo 45° con un factor de reducción $\alpha$ es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha\cos 45° & 0 \\ 0 & \alpha\operatorname{sen} 45° & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(ecuación 3)}$$

En la figura 13 se puede apreciar el efecto de varios factores de reducción en donde se ha dibujado el mismo cubo en proyección caballera.

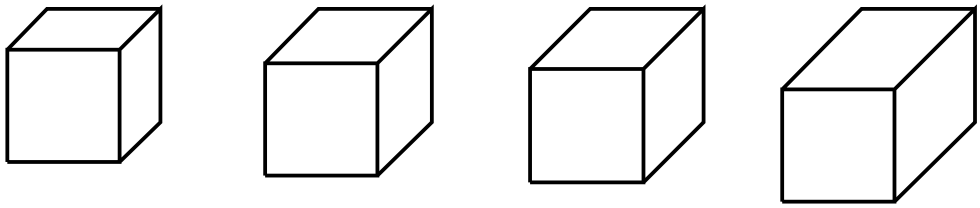


Figura 13: Un cubo en proyección caballera con los factores de reducción 1/2, 2/3, 3/4 y 1, respectivamente.

*__Problema 7__ Calcula el factor de escala en el eje y de esta última proyección. Deduce que, a no ser que $\alpha = 1$, esta proyección no es isométrica.*

Obviamente, el ejemplo anterior se puede generalizar: La matriz de la proyección caballera de factor de reducción $\alpha$ y ángulo $\phi$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha\cos\phi & 0 \\ 0 & \alpha\,\mathrm{sen}\,\phi & 1 \end{bmatrix} \tag{ecuación 4}$$

*__Problema 8__ En la* ecuación 4 se evitan los ángulos múltiplos de $\pi/2$. ¿Por qué?

En la figura 14 vemos algunos ejemplos (todos con un factor de reducción de 3/4).

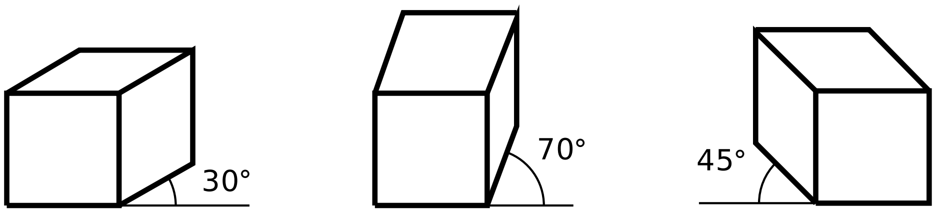



Figura 14: El mismo cubo dibujado en proyección caballera. Se han tomado, respectivamente, $\phi = 210°$, $\phi = 250°$, $\phi = 315°$.

# 6 Proyecciones ortográficas

Recordemos que una proyección es ortográfica cuando el plano de proyección es perpendicular al eje de proyección (mira de nuevo la figura 2). Lo que vamos a hacer ahora es dar una caracterización matricial de las proyecciones ortográficas.

***Teorema***: Sea $P$ la proyección dada por $P(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo $A$ una matriz con tres columnas y dos filas. Entonces $P$ es ortográfica si y sólamente si existe $\mu > 0$ tal que $AA^T = \mu I_2$.

***Ejemplo***: La proyección isométrica 30° es una proyección ortográfica puesto que

$$AA^T = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/4 & 0 \\ 0 & 6/4 \end{bmatrix} = \frac{6}{4} I_2. \quad \blacksquare$$

***Problema 9*** *Considera la matriz*

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{array} \right],$$

*que corresponde a una proyección caballera. Prueba que esta proyección es ortográfica si y solamente si $a = b = 0$. ¿Cuál es el significado geométrico de la condición $a = b = 0$?*

Puedes ver la demostración del teorema anterior, aunque no es necesaria en una primera lectura. Requiere conocer que si las columnas de una matriz cuadrada $U$ son perpendiculares y de norma 1, entonces $U$ es invertible y $U^{-1} = U^T$.

Supongamos que $P$ es ortográfica. Sea $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ una base ortonormal del plano de proyección de forma que $P(\hat{\mathbf{u}}) = A\hat{\mathbf{u}} = [\lambda\ 0]^T$ y $P(\hat{\mathbf{v}}) = A\hat{\mathbf{v}} = [0\ \lambda]^T$. Observa que $\lambda > 0$ es la escala de la proyección. Sea $\widehat{\mathbf{w}}$ un vector unitario del eje de proyección (es perpendicular a la vez a $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$). Como además, $A\widehat{\mathbf{w}} = 0$, entonces

$$A[\hat{\mathbf{u}}\ \hat{\mathbf{v}}\ \widehat{\mathbf{w}}] = [A\hat{\mathbf{u}}\ A\hat{\mathbf{v}}\ A\widehat{\mathbf{w}}] = \left[ \begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{array} \right].$$

Como las columnas de la matriz $[\hat{\mathbf{u}}\ \hat{\mathbf{v}}\ \widehat{\mathbf{w}}]$ son perpendiculares y de norma 1,

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{array} \right] [\hat{\mathbf{u}}\ \hat{\mathbf{v}}\ \widehat{\mathbf{w}}]^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}}^T \\ \hat{\mathbf{v}}^T \\ \widehat{\mathbf{w}}^T \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \lambda\hat{\mathbf{u}}^T \\ \lambda\hat{\mathbf{v}}^T \end{array} \right] = \lambda \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}}^T \\ \hat{\mathbf{v}}^T \end{array} \right].$$

Y ahora

$$AA^T = \lambda^2 \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}}^T \\ \hat{\mathbf{v}}^T \end{array} \right] [\hat{\mathbf{u}}\ \hat{\mathbf{v}}] = \lambda^2 \left[ \begin{array}{cc} \hat{\mathbf{u}}^T\hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{u}}^T\hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{v}}^T\hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{v}}^T\hat{\mathbf{v}} \end{array} \right] = \lambda^2 I_2.$$

Supongamos que $AA^T = \mu I_2$, siendo $\mu > 0$. La matriz $A^T$ tiene dos columnas y tres filas. Por tanto, podemos escribir $A^T = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna de $\mathbb{R}^3$. La condición $AA^T = \mu I_2$ implica que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores perpendiculares y que $\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 = \mu$. Sea $\mathbf{c}$ un vector no nulo perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (por ejemplo, podemos elegir $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$). Como

$$A = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}^T/\|\mathbf{a}\| \\ \mathbf{b}^T/\|\mathbf{b}\| \\ \mathbf{c}^T/\|\mathbf{c}\| \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} & 0 \end{array} \right] V^T.$$

Puesto que las columnas de $V$ son perpendiculares y de norma 1,

$$A \left[ \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\ \ \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\ \ \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} & 0 \end{array} \right].$$

Es decir,

$$P(\mathbf{a}) = A\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \left[ \begin{array}{c} \sqrt{\mu} \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mu \\ 0 \end{array} \right], \qquad P(\mathbf{b}) = A\mathbf{b} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \mu \end{array} \right], \qquad P(\mathbf{c}) = A\mathbf{c} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

En otras palabras, $P$ es la proyección ortogonal sobre el plano generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ sobre el eje con vector $\mathbf{c}$ (recuerda que $\mathbf{c}$ es perpendicular a la vez $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$). □