

# La carta de Smith y sus generalizaciones

## Smit's Chart and its Generalizations

Andrei A. Müller, María José Pérez-Peñalver y Esther Sanabria-Codesal  
 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
[andrei.stefan1@gmail.com](mailto:andrei.stefan1@gmail.com), [mjperez@mat.upv.es](mailto:mjperez@mat.upv.es), [esanabri@mat.upv.es](mailto:esanabri@mat.upv.es).

### Abstract

*La carta de Smith es una herramienta gráfica, clásicamente utilizada en el análisis y diseño de circuitos de microondas, basada en la idea matemática de invertir el semiplano positivo al círculo unitario a través de la transformación de Möbius  $M(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . Una de sus principales ventajas es que proporciona un excelente enfoque visual de los problemas en alta frecuencia y, a pesar de que su utilidad ha llegado hasta nuestros días, presenta algunos inconvenientes que se han intentado paliar con sucesivas generalizaciones. En Müller et al., 2011, los autores propusieron una generalización de la carta de Smith en el espacio: la carta de Smith 3D, donde utilizan la proyección estereográfica de la esfera de Riemann en el plano. Este nuevo modelo unifica el diseño de los circuitos, manteniendo inalteradas todas las propiedades de la carta de Smith original. Además, estos autores desarrollaron una herramienta CAD ([www.3dsmithchart.com](http://www.3dsmithchart.com)) para facilitar las mediciones y gráficos en ella. Esta no es la única generalización posible, en este trabajo presentamos otras posibilidades utilizando la geometría hiperbólica. Esta geometría fue explorada por M. C. Escher, en algunas de sus más conocidas ilustraciones, además de guardar un estrecha relación con la carta de Smith plana, como muestra el trabajo de M. Gupta (Gupta, 2006).*

*Smith's chart is a graphical tool, classically used in the analysis and design of microwave circuits, based on the mathematical idea of inverting the positive semi-plane to the unit circle through the transformation of Möbius  $M(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . One of its main advantages is that it provides an excellent visual approach to high-frequency problems and, although its usefulness has survived to this day, it has some drawbacks that have been alleviated by successive generalizations. In Müller et al., 2011, the authors proposed a generalization of Smith's chart in space: the Smith 3D chart, where they use the stereographic projection of the sphere in the plane. This new model unifies the design of the circuits, keeping unchanged all the properties of the original Smith chart. In addition, these authors developed a CAD tool ([www.3dsmithchart.com](http://www.3dsmithchart.com)) to facilitate the measurements and graphics in it. This is not the only possible generalization, in this work we present other possibilities using hyperbolic geometry. This geometry was explored by M. C. Escher, in some of his best known illustrations, as well as being closely related to original Smith's chart (Gupta, 2006).*

Palabras clave: Geometría hiperbólica, Transformaciones de Möbius, Carta de Smith.  
 Keywords: Hyperbolic Geometry, Möbius Transformations, Smith's Chart.

## 1. Introducción: Un poco de historia

La carta de Smith relaciona la impedancia normalizada con el coeficiente de reflexión de las líneas de transmisión de cualquier circuito de microondas. Fue propuesta por Philip H. Smith en 1939 (Smith, 1939) y desarrollada, por el mismo autor, en años posteriores como una herramienta básica y de gran utilidad para estudiar circuitos de alta frecuencia, ya que permite calcular el rendimiento de un circuito o resolver problemas de adaptación de impedancias de forma gráfica, sin necesidad de recurrir al cálculo complejo. A partir de las últimas décadas del siglo XX se generalizó su utilización en las principales herramientas CAD/testing, pero también como fundamento de herramientas independientes.

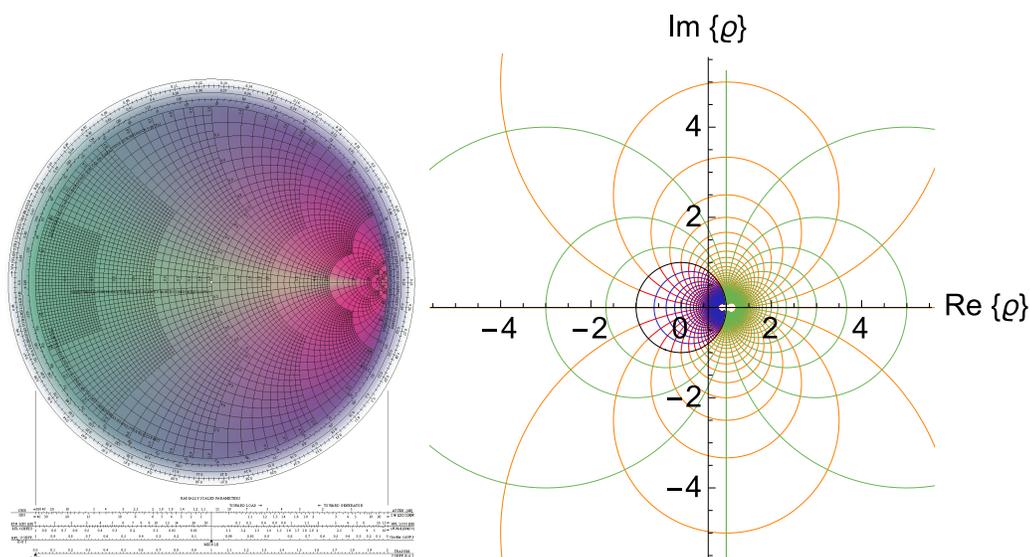


Figura 1: Carta de Smith clásica y carta de Smith extendida al plano complejo.

Esta carta está restringida al círculo de radio uno, lo que representa un inconveniente, ya que las cargas con coeficiente de reflexión mayor que la unidad no se pueden evaluar en ella. Este tipo de cargas a menudo aparecen en líneas de transmisión con pérdidas de impedancias características complejas y en el análisis de la estabilidad y el diseño de amplificadores y osciladores. Para trabajar con estos casos, podemos considerar la carta de Smith extendida al plano complejo (Smith, 1969), como vemos en la Figura 1, pero esta no es fácil de manejar, especialmente cuando nos acercamos al infinito.

Buscando obtener una extensión que, sin sacrificar las ventajas de la carta original, evite la extensión al infinito para circuitos con resistencia negativa, P. H. Smith propone en 1969 una segunda carta, denominada carta de Smith negativa (Smith, 1969), representada en la Figura 2.

Sin embargo, estas dos cartas no pueden ser usadas a la vez, ya que la escala utilizada para una, no tienen sentido para la otra, puesto que en la carta de Smith negativa el origen representa circuitos con coeficiente de reflexión de voltaje de magnitud infinita (Smith, 1969), mientras que en la carta de Smith clásica los circuitos situados en el origen tienen esta magnitud igual a cero. Además, los arcos de circunferencia que corresponde a los valores constantes de la resistencia  $x$  y la reactancia  $r$ , representan valores diferentes en cada una de ellas.

Los primeros intentos del siglo XXI para solucionar estas limitaciones (Zelley, 2007, Wu et al., 2008, Wu et al., 2009) no lograron proporcionar un modelo unitario suficientemente simple, hasta que en 2011 apareció la carta de Smith 3D (Müller et al., 2011, Müller et al., 2012) que,

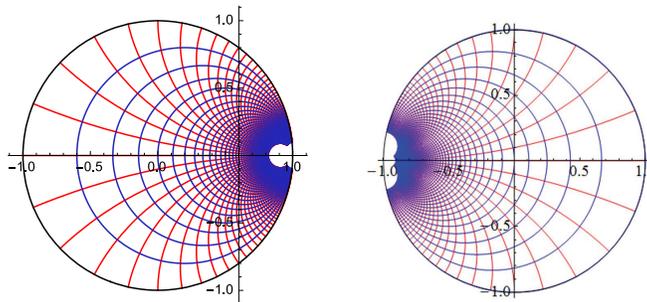


Figura 2: Carta de Smith clásica y carta de Smith negativa.

utilizando el concepto matemático de inversión, condujo a la creación de la primera herramienta gráfica: [www.3dsmithchart.com](http://www.3dsmithchart.com) que permitía unificar en la esfera, el diseño de circuitos con cualquier magnitud en el coeficiente de reflexión, manteniendo todas las propiedades de la carta de Smith, como vemos en la Figura 3. En esta representación tridimensional, descrita en (Müller et al., 2011, Müller et al., 2012, Müller et al., 2014, Müller et al., 2017), un elemento clave es la correspondencia entre el punto del infinito del plano y el polo sur de la esfera.

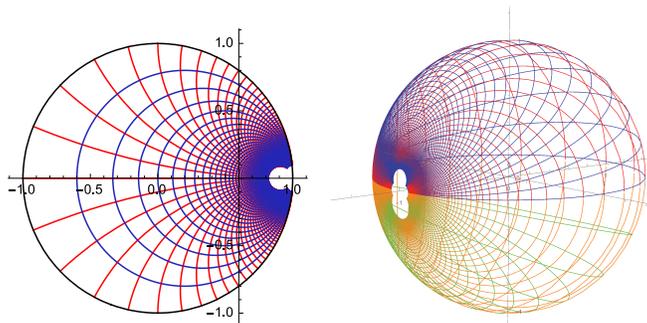


Figura 3: Carta de Smith y carta de Smith 3D.

Sin embargo, también la carta de Smith 3D presenta algunos inconvenientes, como por ejemplo, la dificultad de analizar los resultados obtenidos sin herramientas de software adecuadas. Así, los autores siguieron explorando otras posibilidades y, partiendo de la idea de Gupta (Gupta, 2006) que relacionaba la carta de Smith con la geometría hiperbólica y el arte de Escher, desarrollaron en 2016 una nueva generalización, denominada carta de Smith hiperbólica 2D (Müller y Sanabria, 2016, Müller et al, 2016), de la que posteriormente han estudiado sus propiedades en (Pérez-Peñalver et al., 2018). Esta carta también es adecuada para circuitos con cualquier valor en su coeficiente de reflexión de voltaje ( $0 < \rho < \infty$ ), de manera que todos son representados en el disco de radio uno, como vemos en la Figura 4.

En los siguiente apartados, analizaremos el desarrollo matemático de la carta de Smith y sus generalizaciones, además de proponer una nueva posibilidad en el espacio: la carta de Smith hiperbólica 3D. Para finalizar, observamos estas cartas a través de las deformaciones que se producen en una tesela, como hacía M. C. Escher en algunas de sus ilustraciones (Gupta, 2006).

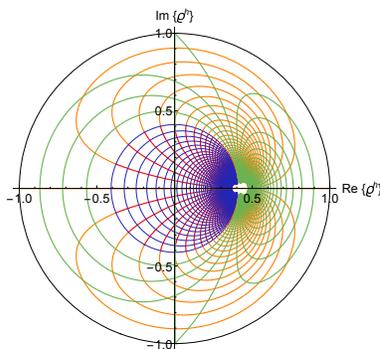


Figura 4: Carta de Smith hiperbólica 2D.

## 2. La Carta de Smith como transformación de Möbius

Una transformación de Möbius es una función compleja dada por:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d$  son números complejos, de manera que  $ad \neq bc$ . Estas transformaciones son conformes, es decir, conservan los ángulos y llevan *circunferencias* en *circunferencias*, considerando a las rectas como circunferencias que contienen un punto infinito.

Una de estas transformaciones establece la relación entre la impedancia normalizada  $z = Z/Z_0 = r + jx$ , dada en función de la resistencia  $x$  y la reactancia  $r$ , y el coeficiente de reflexión de voltage  $\rho$ :

$$\rho = \frac{z - 1}{z + 1}, \quad z \neq -1. \quad (1)$$

La expresión (1) lleva las impedancias con resistencia normalizada positiva, es decir, las que están situadas en el semiplano derecho, dentro del círculo unidad y las impedancias con resistencia negativa fuera de este, como se observa en la Figura 5.

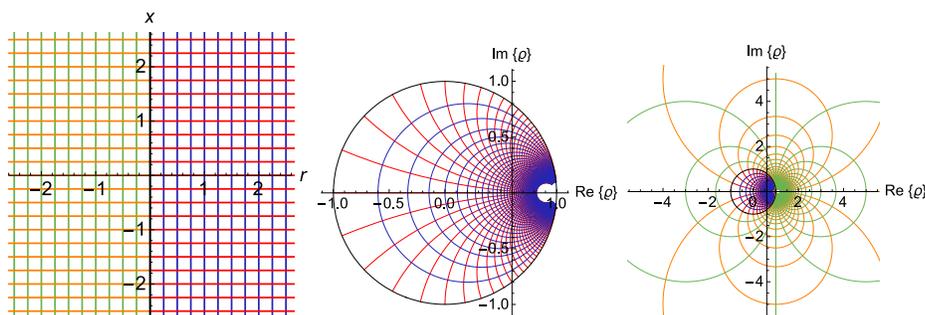


Figura 5: Plano de impedancias normalizadas y cartas de Smith original y extendida.

Es posible ampliar esta transformación de Möbius al plano complejo extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ :

$$M(z) = \rho = \frac{z - 1}{z + 1}, \quad M(-1) = \infty, \quad M(\infty) = 1, \quad (2)$$

de manera que lleva el  $z$ -plano en el  $\rho$ -plano extendido.

En términos de la resistencia  $r$  y la reactancia  $x$ , la fórmula anterior (2) resulta:

$$\rho = M(z = r + jx) = \frac{r^2 - 1 + x^2}{(r + 1)^2 + x^2} + j \frac{2x}{(r + 1)^2 + x^2}. \quad (3)$$

Observamos que la circunferencia de radio uno en el  $z$ -plano se corresponde con el eje imaginario en el  $\rho$ -plano.

Su inversa  $M^{-1}(\rho) = z$ , para cada punto  $\rho = \rho_r + j\rho_x$ , viene dada por

$$z = M^{-1}(\rho) = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{1 - \rho_r^2 - \rho_x^2}{(\rho_r - 1)^2 + \rho_x^2} + j \frac{2\rho_x}{(\rho_r - 1)^2 + \rho_x^2}, \rho \neq 1, \quad (4)$$

con  $M^{-1}(1) = \infty$  y  $M^{-1}(\infty) = -1$ .

### 3. Una generalización en la esfera: la carta de Smith 3D

Para construir la carta de Smith 3D (Wu et al, 2009, Müller et al 2011, Müller et al 2012, Müller et al 2014), aplicamos a la carta de Smith extendida la inversa de la proyección estereográfica desde el polo sur de la esfera, como muestra la Figura 6.

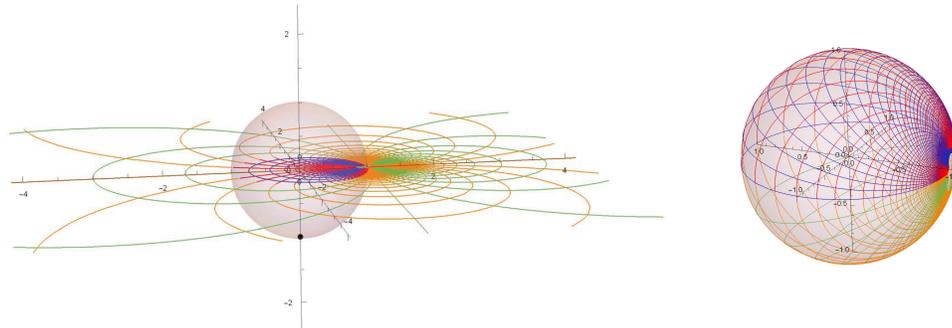


Figura 6: Carta de Smith extendida en el plano ecuatorial de la esfera que se transforma en la carta de Smith 3D.

Si denotamos por  $S = (0, 0, -1)$  el polo sur de la esfera de radio uno  $\mathbb{S} = \{(x_S, y_S, z_S) \in \mathbb{R}^3 : x_S^2 + y_S^2 + z_S^2 = 1\}$ , la proyección estereográfica desde el polo sur  $S$   $\pi_S : \mathbb{S} \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$ , viene dada por:

$$\pi_S(x_S, y_S, z_S) = \frac{x_S}{z_S + 1} + j \frac{y_S}{z_S + 1}. \quad (5)$$

Aplicando su inversa sobre el  $\rho$ -plano extendido, obtenemos su correspondiente valor en la carta de Smith 3D:

$$\rho^S(\rho = \rho_r + j\rho_x) = \left( \frac{2\rho_r}{|\rho|^2 + 1}, \frac{2\rho_x}{|\rho|^2 + 1}, \frac{1 - |\rho|^2}{|\rho|^2 + 1} \right). \quad (6)$$

Análogamente, aplicando la transformación de Möbius  $M$  (3) primero y posteriormente  $\rho^S$  (6), obtenemos la correspondencia en la carta de Smith 3D del  $z$ -plano

$$(\rho^S \circ M)(z = r + jx) = \left( \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2r}{|z|^2 + 1} \right). \quad (7)$$

A la inversa, podemos calcular el coeficiente de reflexión  $\rho$  aplicando, a cada punto de la esfera  $(x_S, y_S, z_S) \in \mathbb{S} \setminus \{S\}$ , la proyección estereográfica (5)  $\rho(x_S, y_S, z_S) = \frac{x_S}{z_S + 1} + j \frac{y_S}{z_S + 1}$ , o bien, podemos calcular el valor de la impedancia  $z$ , componiendo esta con  $M^{-1}$  (4):

$$z(x_S, y_S, z_S) = (M^{-1} \circ \rho)(x_S, y_S, z_S) = \frac{z_S}{1 - x_S} + j \frac{y_S}{1 - x_S}. \quad (8)$$

Para analizar y dibujar en la carta de Smith 3D todo tipo de circuitos, con cualquier magnitud del coeficiente de reflexión, utilizamos la herramienta: [www.3dsmithchart.com](http://www.3dsmithchart.com). En la Figura 7 vemos una representación de la carta de Smith 3D con este software.

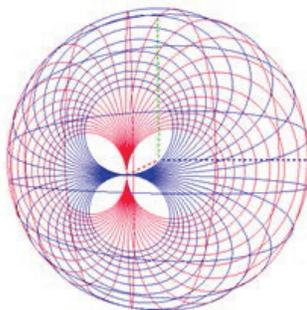


Figura 7: Carta de Smith 3D obtenida con el programa [www.3dsmithchart.com](http://www.3dsmithchart.com).

#### 4. Una nueva generalización plana: la carta de Smith hiperbólica

La carta de Smith hiperbólica (Müller y Sanabria, 2016, Müller et al, 2016, Pérez-Peñalver et al., 2018), como la carta de Smith 3D, es una representación acotada del  $\rho$ -plano extendido, en este caso dentro de un disco unitario del plano. Este hecho facilita su uso práctico, ya que no se necesita ninguna herramienta de software para interpretar los resultados obtenidos, como en la carta esférica. Por tanto, para construir esta carta se utilizan dos modelos, asociados a la geometría hiperbólica, el modelo de Weierstrass en la superficie del hiperboloide y su proyección estereográfica en el disco de Poincaré en el plano (Brannan, 1999), como vemos en la Figura 8.

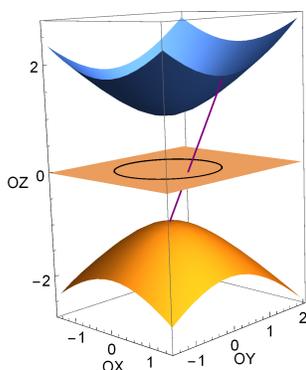


Figura 8: Proyección de la parte superior del hiperboloide sobre el disco unitario.

Comenzamos considerando un punto del  $\rho$ -plano extendido  $\rho = \rho_r + j\rho_x$  y lo aplicamos sobre la parte superior del hiperboloide de dos hojas

$$\mathbb{H}^+ = \{(x_{\mathbb{H}}, y_{\mathbb{H}}, z_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{R}^3 : x_{\mathbb{H}}^2 + y_{\mathbb{H}}^2 - z_{\mathbb{H}}^2 = -1, z > 0\}, \quad (9)$$

utilizando la parametrización habitual de esta superficie  $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^+$ :

$$t(\rho = \rho_r + j\rho_x) = \left( \rho_r, \rho_x, \sqrt{1 + |\rho|^2} \right). \quad (10)$$

A continuación, aplicamos la proyección estereográfica de la hoja superior del hiperboloide desde el punto  $(0, 0, -1)$ , situado en la hoja inferior, sobre el disco unidad  $\mathbb{D} = \{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| < 1\}$  en el plano  $z = 0$ , dada por  $s : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{D}$

$$s(x_{\mathbb{H}}, y_{\mathbb{H}}, z_{\mathbb{H}}) = \frac{x_{\mathbb{H}}}{z_{\mathbb{H}} + 1} + j \frac{y_{\mathbb{H}}}{z_{\mathbb{H}} + 1}, \tag{11}$$

como ilustra la Figura 8. De esta manera se construye la carta de Smith hiperbólica, siguiendo los pasos de la Figura 9.

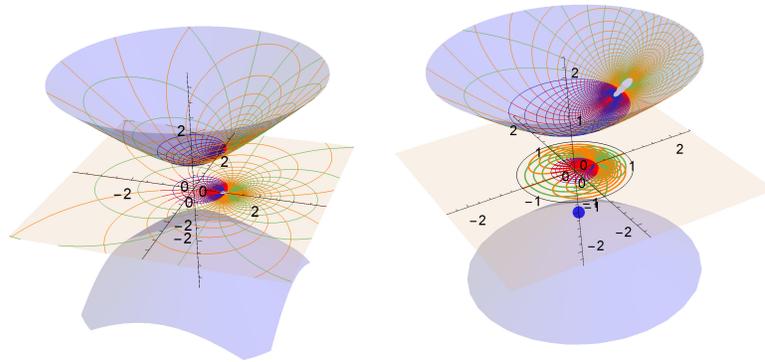


Figura 9: Pasos para obtener la carta de Smith hiperbólica.

Por lo tanto, la ecuación de la carta de Smith hiperbólica en términos del coeficiente de reflexión viene dada por:

$$\rho^h(\rho = \rho_r + j\rho_x) = (s \circ t)(\rho) = \frac{\rho_r}{1 + \sqrt{1 + |\rho|^2}} + j \frac{\rho_x}{1 + \sqrt{1 + |\rho|^2}}. \tag{12}$$

Podemos también expresarla en términos de la resistencia  $r$  y la reactancia  $x$ , a través de la transformación de Möbius  $M$  (3), que envía el  $z$ -plano al  $\rho$ -plano extendido:

$$(\rho^h \circ M)(z = r + jx) = \frac{\frac{|z|^2 - 1}{(r+1)^2 + x^2 + \sqrt{2(1+|z|^2)((r+1)^2 + x^2)}}}{1 + \sqrt{1 + |\rho|^2}} + j \frac{2x}{(r+1)^2 + x^2 + \sqrt{2(1+|z|^2)((r+1)^2 + x^2)}}. \tag{13}$$

A la inversa, un punto  $d = x_h + jy_h \in \mathbb{D}$  en el plano complejo se aplica en la parte superior del hiperboloide a través de la inversa de la proyección estereográfica,  $s^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}^+ :$

$$s^{-1}(d = x_h + jy_h) = \left( \frac{2x_h}{1 - |d|^2}, \frac{2y_h}{1 - |d|^2}, \frac{1 + |d|^2}{1 - |d|^2} \right). \tag{14}$$

Además, este punto de la parte superior del hiperboloide se lleva al plano complejo aplicando la proyección ortogonal  $t^{-1} : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ . Por lo tanto, un punto  $d = (x_h, y_h)$  de la carta de Smith hiperbólica se expresa en el  $\rho$ -plano extendido como sigue:

$$\rho(d) = (\rho^h)^{-1}(d) = (t^{-1} \circ s^{-1})(d = x_h + jy_h) = \frac{2x_h}{1 - |d|^2} + j \frac{2y_h}{1 - |d|^2}. \tag{15}$$

Para encontrar la expresión en el  $z$ -plano, necesitamos componer la expresión anterior (15) con la transformación de Möbius inversa  $M^{-1}$  (4):

$$z(d) = (M^{-1} \circ \rho^h)^{-1}(d = x_h + jy_h) = \frac{1 - 6|d|^2 + |d|^4}{(1 + |d|^2)((1 + |d|^2) - 4x_h)} + j \frac{4y_h(1 - |d|^2)}{(1 + |d|^2)((1 + |d|^2) - 4x_h)}. \quad (16)$$

## 5. Otra generalización hiperbólica: la carta de Smith hiperbólica 3D

Proponemos, como última generalización de la carta de Smith, una carta de Smith hiperbólica en el espacio, pero no acotada. Para este caso, utilizaremos la inversa de la proyección estereográfica del modelo anterior, para llevar los puntos pertenecientes al disco unidad del  $\rho$ -plano extendido a la hoja superior del hiperboloide y el resto de puntos a la hoja inferior, como vemos en la Figura 10.

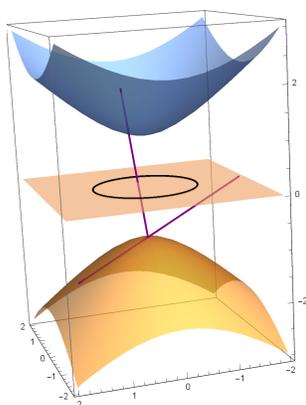


Figura 10: Proyección del plano sobre el hiperboloide desde el punto  $(0, 0, -1)$ .

Cada punto del hiperboloide  $\mathbb{H} = \{(x_{\mathbb{H}}, y_{\mathbb{H}}, z_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{R}^3 : x_{\mathbb{H}}^2 + y_{\mathbb{H}}^2 - z_{\mathbb{H}}^2 = -1\}$ , se proyecta sobre el  $\rho$ -plano complejo mediante la proyección estereográfica  $S : \mathbb{H} \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\rho = S(x_{\mathbb{H}}, y_{\mathbb{H}}, z_{\mathbb{H}}) = \frac{x_{\mathbb{H}}}{z_{\mathbb{H}} + 1} + j \frac{y_{\mathbb{H}}}{z_{\mathbb{H}} + 1}, \quad (17)$$

como muestra la Figura 10.

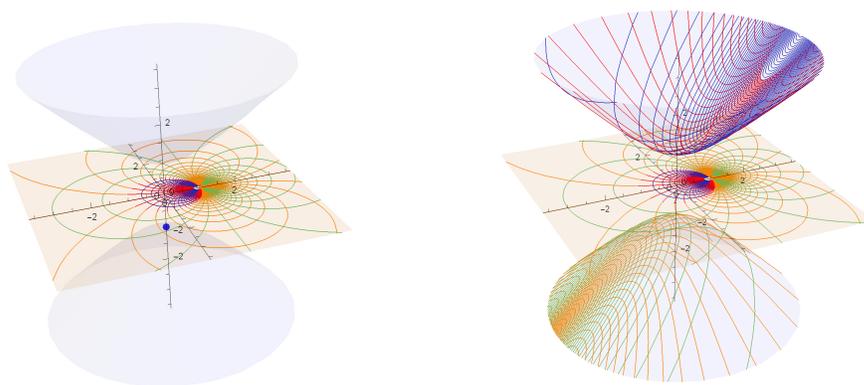


Figura 11: Pasos de la carta de Smith hipérbólica 3D.

Por tanto, aplicando la inversa de la proyección estereográfica  $S$  (17), dada por  $S^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| = 1\} \rightarrow \mathbb{H}$ , a cada punto del  $\rho$ -plano extendido:

$$\rho^H(\rho) = S^{-1}(\rho = \rho_r + j\rho_x) = \left( \frac{2\rho_r}{1 - |\rho|^2}, \frac{2\rho_x}{1 - |\rho|^2}, \frac{1 + |\rho|^2}{1 - |\rho|^2} \right), \tag{18}$$

obtenemos la ecuación de la carta de Smith hiperbólica 3D, como vemos en la Figura 11.

Podemos también expresarla en términos de la resistencia  $r$  y la reactancia  $x$ , para lo que necesitamos la transformación de Möbius  $M$  (3):

$$(\rho^H \circ M)(z = r + jx) = \left( \frac{|z|^2 - 1}{2r}, \frac{x}{r}, \frac{|z|^2 + 1}{2r} \right). \tag{19}$$

Análogamente, para encontrar la expresión en el  $z$ -plano, necesitamos la transformación de Möbius inversa  $M^{-1}$  :

$$z(x_{\mathbb{H}}, y_{\mathbb{H}}, z_{\mathbb{H}}) = (M^{-1} \circ \rho)(x_{\mathbb{H}}, y_{\mathbb{H}}, z_{\mathbb{H}}) = \frac{1}{z_{\mathbb{H}} - x_{\mathbb{H}}} + j \frac{y_{\mathbb{H}}}{z_{\mathbb{H}} - x_{\mathbb{H}}}. \tag{20}$$

En la carta de Smith hiperbólica 3D, con impedancias normalizadas de resistencia positiva están representadas en hoja superior del hiperboloide, mientras que las impedancias con resistencia negativa se representan en la hoja inferior, como se puede observar en la Figura 12.

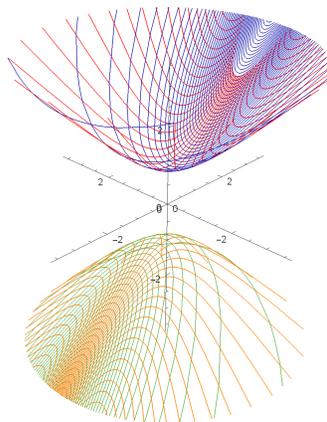


Figura 12: Carta de Smith 3D hipérbólica con las impedancias normalizadas con resistencia positiva representadas en rojo y azul y las impedancias con resistencia negativa en verde y amarillo.

## 6. Teselas tipo M. C. Escher con estas cartas

Para finalizar, observamos en este apartado, las diferentes deformaciones que producen estas cartas en la Tesela de Yoshiaki Araki, mostrada en la Figura 13 (<https://rita314.wordpress.com/2008/06/09/dog-tessellations/>).

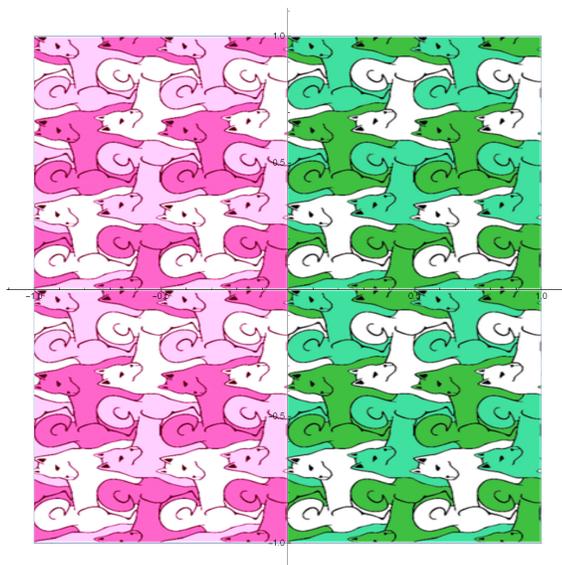


Figura 13: Tesela de Yoshiaki Araki.

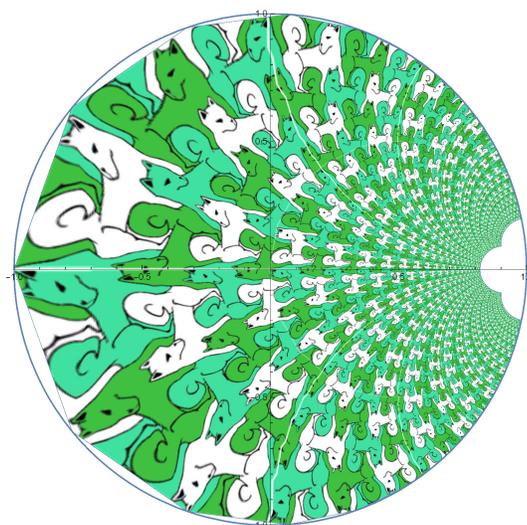


Figura 14: Deformación con la carta de Smith.



Figura 15: Dos visiones de la deformación con la carta de Smith 3D.

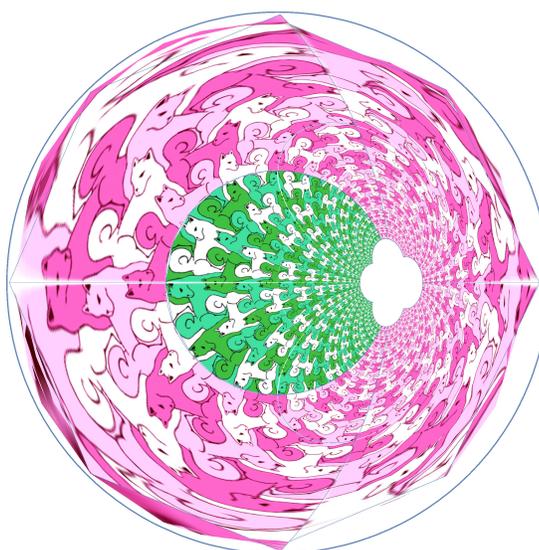


Figura 16: Deformación con la carta de Smith hiperbólica 2D.

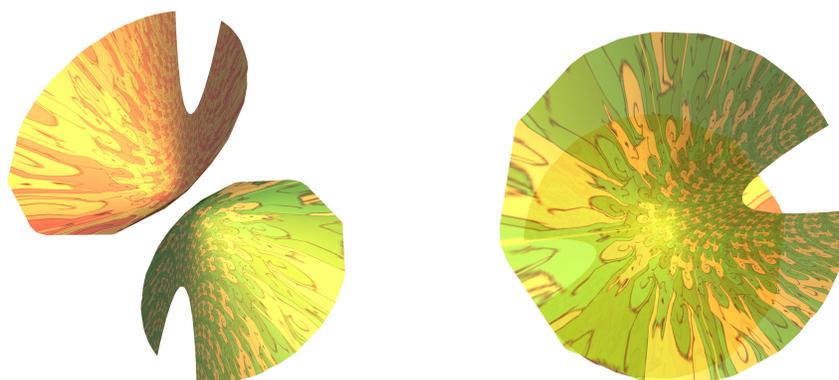


Figura 17: Dos visiones de la deformación para la carta de Smith hiperbólica 3D.

## 7. Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por proyecto MTM2015-64013-P del Ministerio de Economía y Competitividad.

## Referencias

- 

Smith, P. H. (1939).  
*Transmission-line calculator*.  
Electronics, vol 12, pp. 29–31.
- 

Smith, P. H. (1969).  
*Electronic Applications Of The Smith Chart*.  
McGraw-Hill Book Company.
- 

Zelley, C. (2007).  
*A spherical representation of the Smith Chart*.  
IEEE Microwave, vol 8, pp. 60–66.
- 

Wu, Y., Liu, Y., Huang, H. (2008).  
*Spherical Representation of the omnipotent Smith chart*.  
Microwave Opt. Technol. Lett., vol 50, no. 9, pp. 2452–2454.
- 

Wu, Y., Liu, Y., Huang, H. (2009).  
*Theory of the spherical generalized Smith Chart*.  
Microwave Opt. Technol. Lett., vol 51, no. 1 pp. 95–97.
- 

Müller, A. A., Soto, P., Dascalu, D., Neculoiu, D., Boria, V. E. (2011).  
*A 3-D Smith chart base on the Riemann Spheres for Activ and Passive Microwave circuits*.  
IEEE Microwave and Wireless Component Letters, vol 21, no. 6, pp. 286–288.
- 

Müller, A. A., Soto, P., Dascalu, D., Neculoiu, D., Boria, V. E. (2012).  
*The 3D Smith chart and its practical applications*.  
Microwave Journal, vol 5, no 7, pp. 64–74.
- 

Müller, A. A., Sanabria-Codesal, E., Moldoveanu, A., Asavei, V., Soto, P., Boria, V. E., Lucyszyn, S. (2014).  
*Apollonius Unilateral Transducer Power Gain Circles on 3D Smith charts*.  
IET Electronics Letters, vol 50, n. 21, pp. 1531–1533.
- 

Müller, A. A., Sanabria-Codesal, E., Moldoveanu, A., Asavei, V., Lucyszyn, S. (2017).  
*Extended Capabilities of the 3-D Smith Chart With Group Delay and Resonator Quality Factor*.  
IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol 65, pp. 10–19.

-  Müller, A. A., Sanabria-Codesal, E. (2016).  
*A Hyperbolic Compact Generalized Smith Chart.*  
Microwave Journal, Horizon House Publications, Inc., vol 59, pp. 90-94.
-  Müller, A. A., Sanabria-Codesal, E., Moldoveanu, A.,  
Asavei, V., Dascalu, D. (2016).  
*Two Compact Smith Charts: The 3D Smith Chart and a Hyperbolic Disc  
Model of the Generalized. Infinite Smith Chart.*  
Science and Technology vol. 19, n. 1-2, pp. 166–174.
-  Pérez-Peñalver, M., Sanabria-Codesal, E., Moldoveanu, F., Moldoveanu, A.,  
Asavei, V., Müller, A. A., Ionescu, A. (2018).  
*A Review and Mathematical Treatment of Infinity on the Smith Chart,  
3D Smith Chart and Hyperbolic Smith Chart.*  
Symmetry, vol. 10, 458.
-  Gupta, M. (2006).  
*Escher's art, Smith chart, and hyperbolic geometry.*  
IEEE Microwavol 7, no. 5, pp. 66–76.
-  Brannan, D. A., Esplen, M. F., Gray, J. J. (1999).  
*Geometry.*  
Cambridge University Press: Cambridge, UK.