

# ***ESTIMACION DEL DESAGÜE DE SUPERFICIES IMPERMEABLES MEDIANTE EL HIDROGRAMA DE GONZÁLEZ QUIJANO***

**Juan Vicente Giráldez<sup>1</sup>, José Luis Ayuso<sup>2</sup> y José Gabriel López<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Departamento de Agronomía

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Rural, Apdo. 3048, 14080 Córdoba,

<sup>3</sup> Delegación Provincial del IARA, 04080 Almería

**RESUMEN:** El desagüe de superficies impermeables ha sido analizado tradicionalmente mediante ecuaciones que simplifican la resolución de las ecuaciones de Saint-Venant del flujo superficial de agua. A raíz de los trabajos de Izzard, y con anterioridad en otro tipo de superficies, Horton, se acuñó la expresión *hidrograma de Horton-Izzard* para describir una de las ecuaciones más comunes. Sin embargo Pedro González Quijano había propuesto con mucha anterioridad una expresión similar, por lo que los autores sugieren un cambio de nombre para reconocer el precedente.

Esta simplificación presenta algunas ventajas como la sencillez de cálculo, por lo que puede servir como una primera aproximación, aunque algunas dificultades como la dualidad de los parámetros que asumen diferentes valores entre las ramas ascendente y descendente del hidrograma, como se muestra con la ayuda de la ecuación de la onda cinemática, recomiendan otras técnicas para cálculos más precisos.

Tras presentar una solución general para la rama ascendente, válida para valores enteros del exponente de la relación almacenamiento-caudal, se propone un procedimiento sencillo de ajuste de parámetros a datos experimentales, aplicándolo a un caso real de inducción de escorrentía, discutiéndose los resultados en función de las respectivas pendientes.

## **ORIGEN DEL HIDROGRAMA DE HORTON-IZZARD**

El hidrograma de Horton-Izzard fué una de las primeras técnicas con que los hidrólogos intentaron caracterizar la respuesta de una cuenca al exceso de lluvia, resolviendo de manera simple el problema del flujo superficial transitorio espacialmente variado. Las referencias más tempranas de esta técnica parecen ser las de Horton en 1938, e Izzard en 1946, (citadas ambas por Chow, 1959, §18-8). La descripción del flujo superficial del agua se puede efectuar con las ecuaciones de Saint-Venant, una de continuidad, o conservación de masa,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = r \quad (1)$$

en la que  $q$  representa el caudal,  $h$  el calado,  $r$  el

aporte lateral de agua por unidad de superficie, como la intensidad de lluvia sobre un plano impermeable,  $x$  es la coordenada espacial, y  $t$  el tiempo; y otra de conservación de la cantidad de movimiento, o dinámica,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = S_0 - S_f - \frac{q}{gh^2} r \quad (2)$$

con  $v$  como la velocidad del flujo,  $S_0$  la pendiente del plano,  $S_f$  la pendiente de fricción, y  $g$  como la aceleración de la gravedad. La solución analítica exacta de estas ecuaciones con las pertinentes condiciones inicial y de contorno, es difícil de obtener. Sin embargo, existen diversas simplificaciones válidas para diferentes problemas hidrológicos que permiten llegar a soluciones analíticas. Entre estas simplificaciones está la substitución de la ecuación dinámica por una relación potencial entre el volumen detenido o alma-

cenado sobre la superficie, denominado en adelante almacenamiento,  $S$ , y el caudal  $q$ , que es la base de los llamados modelos conceptuales de hidrogramas, (e.g. Singh, 1988). En los resultados experimentales de Izzard, en planos impermeables, (Dooge, 1973, fig. 9-2), aparecía una relación aproximadamente lineal entre caudales y almacenamientos en diagramas doblemente logarítmicos, que avalaba la formulación de una expresión

$$q = a S^c \quad (3)$$

De esta forma, combinando (3) con una versión modificada de (1), según la cual el caudal de entrada, intensidad de lluvia  $r$  por la longitud del plano que se considera,  $L$ , menos el de salida,  $q$  es igual a la variación temporal del almacenamiento,

$$rL - q = \frac{dS}{dt} \quad (4)$$

se llega a una ecuación diferencial

$$dt = \frac{dS}{rL - aS^c} \quad (5)$$

conocida en Hidrología como ecuación del *hidrograma de Horton-Izzard*, por haber sido usado por ambos autores en cuencas naturales, y en superficies pavimentadas, respectivamente.

Mucho antes, en 1922, en su libro, *Hidrología general agrícola*, Pedro González Quijano, había enunciado una propuesta similar, (§IX-2-c). Partiendo de una relación entre la velocidad y el calado, parecida a la de Manning,

$$v = A S_0^{1/2} h \quad (6)$$

y, suponiendo un equilibrio del caudal con la intensidad de lluvia que cae sobre el plano, obtuvo una relación parabólica del calado con la distancia,

$$Ah^2 S_0^{1/2} = rx \rightarrow \left( \frac{r}{A S_0^{1/2}} \right)^{1/2} x^{1/2} \quad (7)$$

por lo que el calado medio,  $h$ , que le servía para determinar el almacenamiento en el plano era  $h = 2x/3$ . Así su ecuación de continuidad se presentaba como

$$rL - q = L \frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{2L}{3(A S_0^{1/2})^{1/2}} \frac{dq^{1/2}}{dt} \quad (8)$$

correspondiente a una relación cuadrática entre caudal y almacenamiento, como adoptó 16 años después Horton.

$$q = \left( \frac{9AS_0^{1/2}}{4L^2} \right) S^2 \quad (9)$$

Aunque González Quijano no llegase a usar esta expresión en su tratado, más allá de su deducción y una gráfica, ni la contrastase con resultados experimentales, es preciso reconocerle su prioridad, por lo que se le debería incluir en la denominación del hidrograma, pudiendo llamarle *hidrograma de González Quijano-Horton-Izzard*, o *HGQHI* para abreviar.

El desarrollo de la Hidrología, y el avance de los métodos de cálculo ha dejado algo olvidado este hidrograma. Sin embargo por su sencillez puede ser usado para analizar la hidrología de cuencas no muy complejas. El segundo propósito de este trabajo es revisar algunas de las propiedades de este hidrograma, mostrando la conveniencia de su aplicación en un caso experimental. Se mostrará la asimetría de ambas ramas del hidrograma, ascendente y descendente, para exponer algunas soluciones generales.

### ASIMETRÍA TEMPORAL DEL HIDROGRAMA

La mayoría de los hidrogramas experimentales muestran un distinto carácter en la fase ascendente, generalmente rápida hasta alcanzar el estado de equilibrio, y la descendente, en la que, en ausencia de infiltración, los caudales disminuyen muy lentamente. Para mostrar cómo los valores del parámetro  $c$  son diferentes en ambas ramas, se puede analizar el comportamiento de otro hidrograma, consecuencia también de las ecuaciones de Saint-Venant, el de la onda cinemática, en el que se deducirá una relación caudal almacenamiento.

El hidrograma de la onda cinemática resulta de la integración de la ecuación de continuidad del agua que fluye sobre un plano impermeable uniforme, bajo una lluvia de intensidad uniforme y constante,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = f \quad (10)$$

en donde  $q$  representa el caudal,  $h$  el calado,  $x$  la distancia a lo largo del plano,  $t$  el tiempo, y  $f$  el exceso de agua,

$$f = \begin{cases} r & 0 < t < t_r \\ 0 & t_r < t \end{cases} \quad (11)$$

con  $t_r$  como duración de la lluvia. A la ecuación de continuidad hay que añadirle la ecuación de conser-

vación de la cantidad de movimiento, simplificada a una relación entre calado y caudal, típica del régimen uniforme,

$$q = \alpha h^n \quad (12)$$

con  $\alpha$  como un coeficiente de flujo, dependiendo de las características de la superficie, y  $n$  como un exponente.

Las condiciones inicial, superficie seca, y de contorno, calado nulo en cabecera, son

$$h(x,0) = h(0,t) = 0 \quad (13)$$

Para integrar esta ecuación se puede recurrir al método de las características, (e.g. Woolhiser y Liggett, 1967), que conduce a sendas ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{dh}{dt} = f \quad (14)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha n h^{n-1} \quad (15)$$

Se distinguen tres dominios principales de integración. El primero, que para chubascos de gran duración corresponde al periodo que va desde el inicio hasta que todos los excesos originados en cualquier punto del plano llegan al final del mismo, D1, coincide con la fase ascendente del hidrograma. El segundo, D2, dura hasta el final de la lluvia. Finalmente el tercero, D3 desde el final de la lluvia hasta el fin de la escorrentía, corresponde con la fase decreciente del hidrograma.

Con la ayuda de los parámetros que representan, respectivamente, al calado de normalización,  $h_0$ ,

$$h_0 = \left( \frac{rL}{\alpha} \right)^{1/n} \quad (16)$$

a longitud del plano,  $x_0 = L$ , y el tiempo que se tarda en alcanzar el equilibrio,  $t_0$ ,

$$t_0 = \left( \frac{L}{\alpha r^{n-1}} \right)^{1/n} \quad (17)$$

y el caudal de equilibrio,  $q_0 = rL$ , se puede expresar la ecuación de forma más simplificada,

$$\frac{\partial q_*}{\partial x_*} + \frac{\partial h_*}{\partial t_*} = 1 \quad (18)$$

en la que las magnitudes con el asterisco están normalizadas,

$$x_* = x / x_0 ; t_* = t / t_0$$

$$h_* = h / h_0 ; q_* = q / q_0$$

Durante el primer dominio el perfil del agua en la superficie está descrito por la siguiente ecuación, en la que, por sencillez, se han eliminado los asteriscos,

$$h = \begin{cases} x^{1/n} & 0 < x \leq x_0 \\ t & x_0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

El volumen almacenado,  $S$ , se obtiene al integrar los calados a lo largo del plano, como indica la figura 1,

$$S = \int_0^1 h dx = \frac{n}{n+1} x^{(n+1)/n} + x^{1/n} (1-x) \quad (20)$$

o, en términos del caudal

$$q = t^n \quad (21)$$

llegando a una relación implícita entre almacenamiento y caudal

$$S = q^{1/n} \left( 1 - \frac{q}{n+1} \right) \quad (22)$$

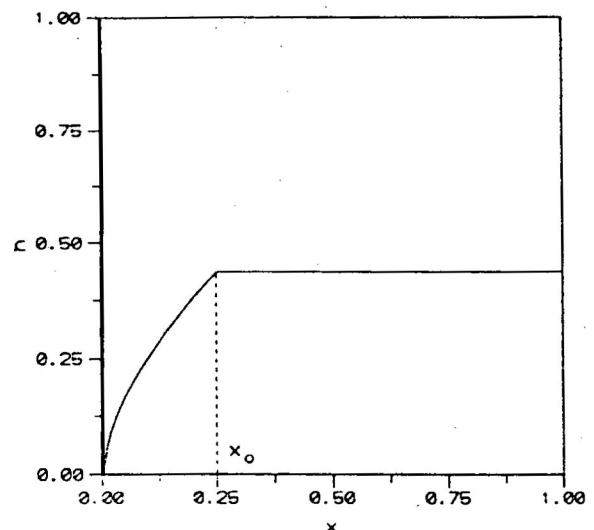


Figura 1. Calados en un plano durante la fase ascendente del hidrograma.

Con objeto de deducir una relación potencial entre ambas magnitudes, se han generado 100 pares de valores de ellas en el intervalo temporal (0,1), calculando mediante una regresión lineal de sus transformadas logarítmicas, como se muestra en la figura 2.

Para el valor del exponente  $n=5/3$ , que aparece cuando se utiliza la expresión de Manning para la relación entre el calado y el caudal, el resultado de la regresión es:

$$q = 1.643 S^{1.865} \quad (23)$$

próximo a los exponentes sugeridos por González Quijano y Horton.

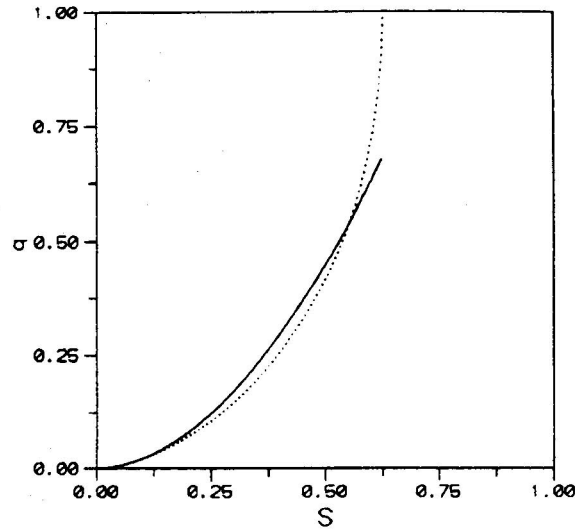
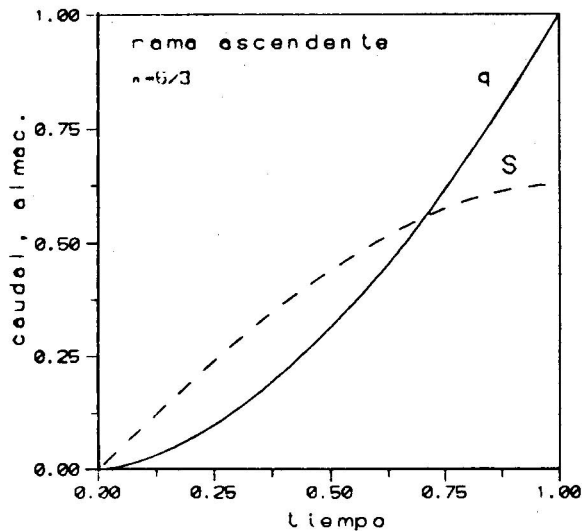


Figura 2. Almacenamiento y caudales en la fase descendente del hidrograma

Las diferencias observadas entre las fases ascendentes y descendentes de los hidrogramas arrojan dudas sobre la conveniencia de adoptar un exponente  $c$  único para todo él. Efectivamente, al repetir el procedimiento descrito en fase descendente se puede apreciar la divergencia.

El calado de la fase descendente se obtiene también de las ecuaciones anteriores.

$$h^{n-1} [n(t-t_r)h] = x \tag{24}$$

El almacenamiento se calcula integrando el calado a lo largo del plano. Un cambio de variables permite resolver de forma analítica la integral,

$$S = \int_0^1 h dx = h_1 - \int_0^{h_1} x dh = h_1 \left[ 1 - h_1^{n-1} \left( t-t_r + \frac{h_1}{n+1} \right) \right] \tag{25}$$

El calado en el extremo aguas abajo del plano,  $h_1$ , es

$$h_1^{n-1} [n(t-t_r) + h_1] = 1 \tag{26}$$

lo que simplifica la anterior ecuación a

$$S = h_1 \left\{ 1 - \frac{(t-t_r)(n+1) + h_1}{(n+1)[n(n+1) + h_1]} \right\} \tag{27}$$

o, como el caudal es

$$q = h_1^n \tag{28}$$

la relación final queda de la forma,

$$S = q^{1/n} \left\{ 1 - \frac{(t-t_r)(n+1) + q^{1/n}}{(n+1)[n(n+1) + q^{1/n}]} \right\} \tag{29}$$

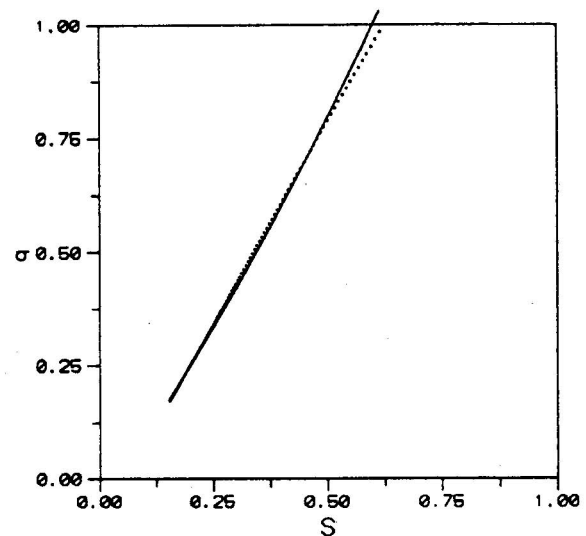
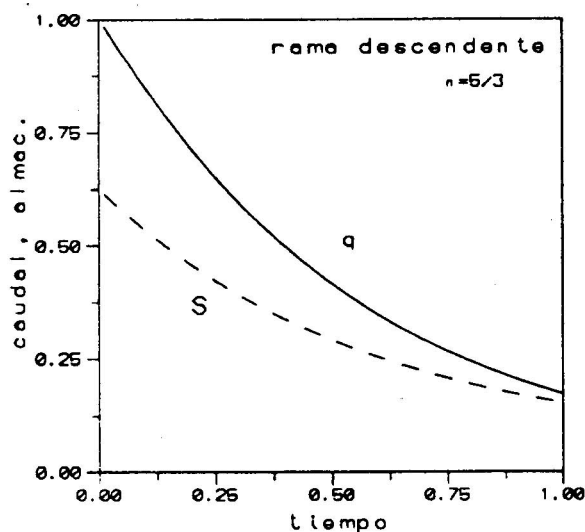


Figura 3. Almacenamiento y caudales en la fase descendente del hidrograma

Una regresión lineal análoga a la de la rama ascendente, como muestra la figura 3, dió como resultado la ecuación,

$$q = 1.904 S^{1.255} \quad (30)$$

cuyo exponente es distinto al anterior.

**RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL HIDROGRAMA**

La ecuación del hidrograma **HGQHI**,

$$rL - q = \frac{dS}{dt} \equiv a S_e^c - a S^c = \frac{dS}{dt} \quad (31)$$

se integra separando variables

$$\int_0^t dt = \frac{1}{aS_e^{c-1}} \int_0^{S/S_e} \frac{d(S/S_e)}{1 - (S/S_e)^c} \quad (32)$$

La solución analítica de la integral del segundo miembro es inmediata cuando el exponente *c* es entero, (Gradshteyn y Ryzhik, 1965, §2.144),

$$t = \frac{1}{aS_e^{c-1}} \left\{ \begin{aligned} &Ln \frac{1+S/S_e}{1-S/S_e} - \sum_{k=1}^{n/2-1} Ln \left[ \left( \frac{S}{S_e} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{2S}{S_e} \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right] \cos \frac{2k\pi}{n} + \\ &\sum_{k=1}^{n/2-1} 2 \left\{ \arctg \left[ \frac{(S/S_e) - \cos(2k\pi/n)}{\text{Sen}(2k\pi/n)} \right] \right. \\ &\left. - \pi \left( \frac{1}{2} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\} \text{Sen} \frac{2k\pi}{n} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

para *n* par o, caso contrario, para *n* impar,

$$t = \frac{1}{aS_e^{c-1}} \left\{ \begin{aligned} &-Ln \left( 1 - \frac{S}{S_e} \right) - \sum_{k=0}^{(n-3)/2} Ln \left[ \left( \frac{S^2}{S_e^2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{2S}{S_e} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + 1 \right] \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + \\ &\sum_{k=1}^{(n-3)/2} 2 \left\{ \arctg \left[ \frac{(S/S_e) \cos[(2k+1)\pi/n]}{\text{Sen}[(2k+1)\pi/n]} \right] \right. \\ &\left. - \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{(2k+1)\pi}{n} \right) \right\} \text{Sen} \frac{(2k+1)\pi}{n} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Existen también soluciones analíticas para algunos valores reales de *c*, como 3/2, 4/3, citados por Dooge (1973), o incluso para 5/3, disponibles en el compendio de Gradshteyn y Ryzhik (1965).

Como ya había anticipado Dooge (1973, §9) la forma de la ecuación de este hidrograma se asemeja a la ecuación del flujo gradualmente variado con la función de Bakhmeteff (Chow, 1959; §9-2, 10-2). Utilizando

esa vía, Gill (1977) aprovechó las soluciones exactas de esta última ecuación, que había presentado previamente (1976) para determinados valores del exponente *c*, para proponer las soluciones de los casos de Izzard, *c*=3, de González Quijano y Horton, *c*=2, y *c*=5/3.

En la fase descendente la resolución de la ecuación es inmediata. En este caso la ecuación se reduce a

$$-aS^c = \frac{dS}{dt} \quad (35)$$

que conduce a la solución

$$\left( \frac{q}{q_e} \right)^{(1-c)/c} - 1 = a^{1/c} q_e^{(c-1)/c} (c-1)(t-t_r) \quad (36)$$

con *t<sub>r</sub>* como el tiempo final de lluvia.

**ESTIMACION DE PARAMETROS DEL HIDROGRAMA**

Para determinar qué exponente es el más adecuado para ajustar el hidrograma a unos datos experimentales, no es preciso deducir la solución analítica. Un algoritmo de optimización, como el de Rosenbrok (Himmelblau, 1972, §4.3), puede servir para ello, separando las ramas ascendente y descendente.

La función a optimizar en la rama ascendente es

$$U = \sum_{i=1}^{n_d} \left( t_i - t_r - \frac{1}{a^{1/c} q_e^{(c-1)/c} (c-1)} \left[ \left( \frac{q}{q_e} \right)^{(1-c)/c} - 1 \right] \right)^2 \quad (37)$$

en donde *U* es la función a optimizar, con los *n<sub>d</sub>* pares de datos (*t<sub>p</sub>*, *q<sub>i</sub>*). La integral del segundo miembro puede resolverse con algún algoritmo como el de Gauss, (Press y col., 1992, §4.5). En la rama descendente la función correspondiente es

$$U = \sum_{i=1}^{n_d} \left( t_i - \frac{1}{a^{1/c} q_e^{(c-1)/c}} \int_0^{q/q_e} \frac{d(q/q_e)^{1/c}}{1 - (q/q_e)^c} \right)^2 \quad (38)$$

En ambas ecuaciones los parámetros se reducen a un coeficiente y un límite superior de integración, o un exponente, respectivamente.

Los datos experimentales proceden de un ensayo para inducir escorrentía en zonas áridas. Unas parcelas rectangulares de 10x5 m<sup>2</sup> desbrozadas, y compactado el suelo, se cubrieron con una lámina de plástico que se protegió de los efectos de la radiación solar con una capa de grava, con tres pendientes uniformes de 5%, 15% y 25%. Se simuló una lluvia de intensidad cons-

tante y distribución uniforme, recogiendo la escorrentía en la parte inferior mediante un embocador.

Algunos de los parámetros experimentales se recogen en el cuadro 1.

La figura 4 muestra los hidrogramas experimentales.

Los valores finales de los parámetros aparecen en el cuadro 2.

Las funciones ajustadas aparecen en la figura 5, en donde se aprecia la calidad del ajuste.

Se observa una disminución del valor del exponente  $c$  con la pendiente en la rama ascendente como correspondería a una progresión desde el régimen laminar,  $c=3$ , al turbulento,  $c=5/3$ , aunque las diferencias no son excesivas. Estos valores son superiores al de la ecuación de la onda cinemática, antes deducido. Los

valores del mismo parámetro en la rama descendente son distintos, aunque sin mostrar tendencia alguna con la pendiente. En este caso hay mejor concordancia con el exponente 1.255 de la onda cinemática. Los valores del parámetro  $a$ , que no son adimensionales,  $[L^{3(1-c)}T^{-1}]$ , están en unidades SI, aunque no se han puesto por

Pendiente $S_0$	Tiempo de equilibrio, $t_e$ (s)	Caudal de equilibrio, $q_e$ (m <sup>3</sup> /s)
0.05	519	$1.55 \cdot 10^{-4}$
0.15	311	$3.58 \cdot 10^{-4}$
0.25	260	$4.57 \cdot 10^{-4}$

variar con  $c$ . No muestran tendencias aunque son mucho mayores en la rama descendente que en la

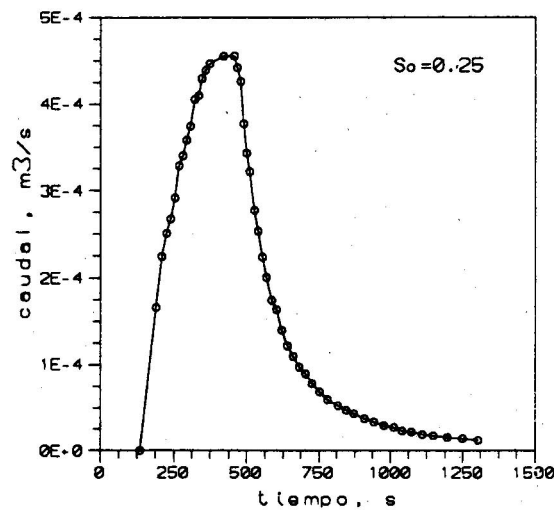
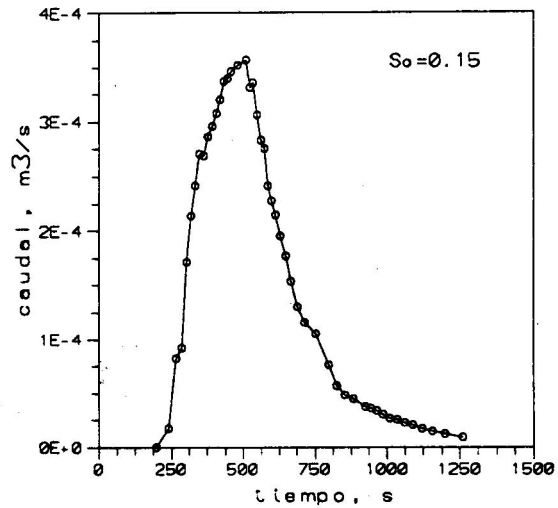
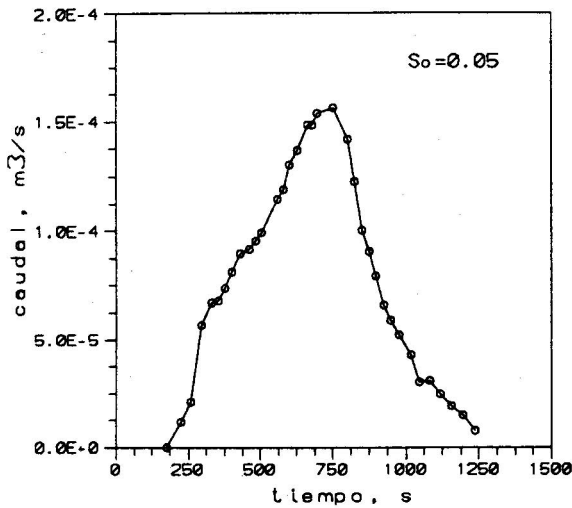


Figura 4. Hidrogramas experimentales

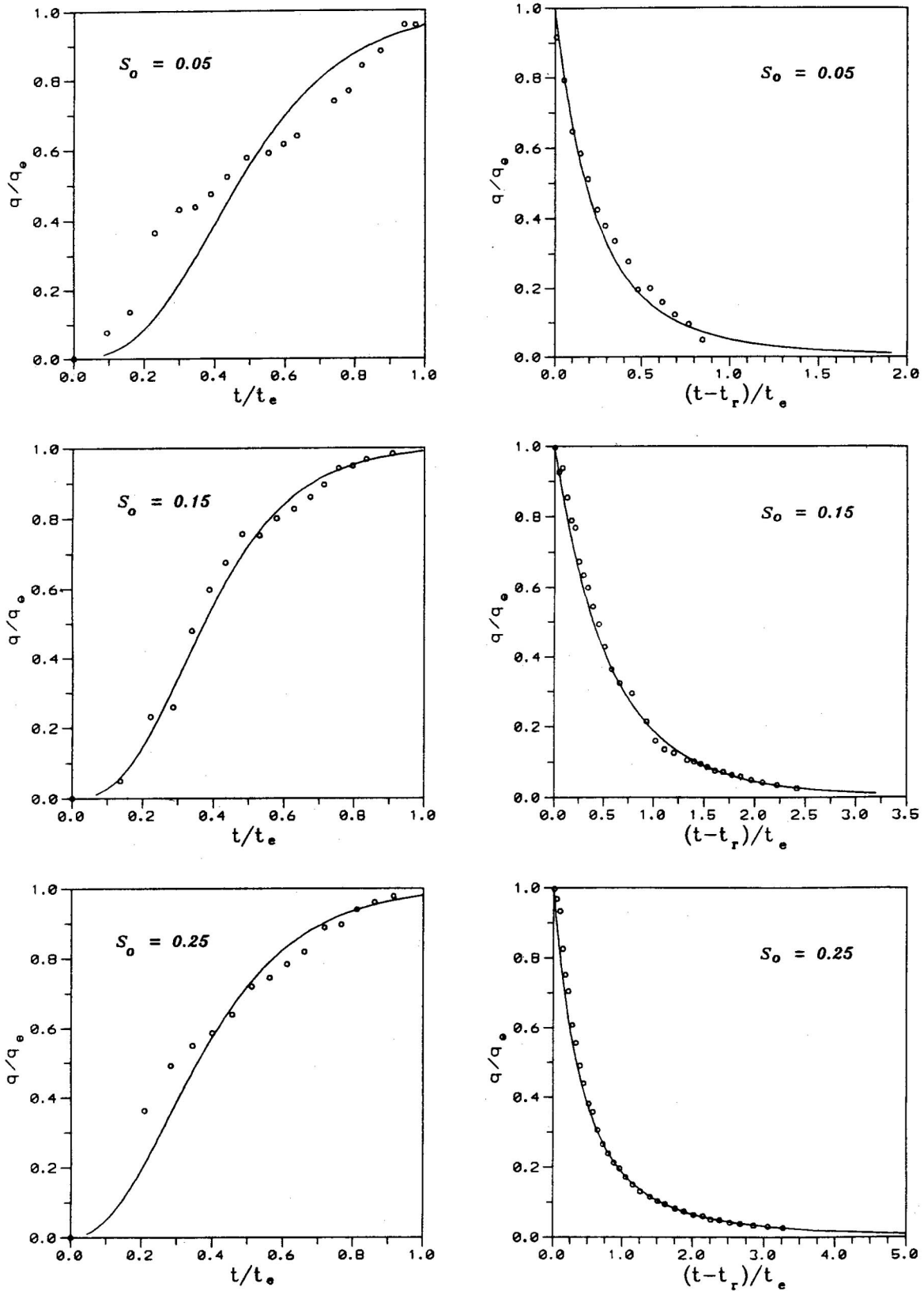


Figura 5. Ramas ascendentes y descendentes de los hidrogramas ajustados a los datos experimentales

ascendente. La función optimizada alcanza cotas similares en los distintos procesos.

**Cuadro 2. Parámetros de los hidrogramas HGQHI**

S <sub>o</sub>	Rama ascendente			Rama descendente		
	a	c	U/n <sub>d</sub>	a	c	U/n <sub>d</sub>
.05	.622	2.59	6.76*10 <sup>-3</sup>	.01844	1.29	3.66*10 <sup>-3</sup>
.15	1.05	2.58	8.18*10 <sup>-4</sup>	0.007	1.11	1.81*10 <sup>-3</sup>
.25	.307	2.14	2.20*10 <sup>-3</sup>	.02486	1.59	1.12*10 <sup>-3</sup>

Estos resultados aconsejan el uso de este hidrograma en el desagüe de superficies planas impermeables. Para superficies más irregulares una combinación de hidrogramas con algoritmos para circulación de flujos en canales y embalses, (e.g. Bras, 1990, §9) permitiría extender su aplicación.

## CONCLUSIONES

Formulaciones sencillas del flujo superficial de agua como el hidrograma basado en la relación potencial entre el caudal y el volumen almacenado o detenido son de utilidad para aproximar el comportamiento de cuencas poco permeables. Sus parámetros tienen un cierto significado físico, como se ha visto en relación con las pendientes de las parcelas analizadas, por lo que se les puede asignar valores establecidos *a priori*. Sin embargo su uso no puede excluir un análisis más profundo volviendo a las ecuaciones de Saint-Venant, en función de las condiciones del problema.

Cabe resaltar también la figura de González Quijano, quien uniendo una gran capacidad de análisis a una información notable, a pesar de que las comunicaciones en materias científicas y técnicas no eran tan buenas como las actuales, plasmó en un librito un excelente tratado de Hidrología cuando apenas se sabía el significado de esta palabra.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la colaboración del Dr. J. Roldán y de D. F. Ciria en los ensayos experimentales cuyos datos han sido utilizados en el texto, así como la financiación de los mismos por la Fundación Ramón Areces.

## REFERENCIAS

- Bras, R.L., (1990), Hydrology, Addison-Wesley, Nueva York.
- Chow, V.T., (1959) Open-channel hydraulics, McGraw-Hill, Nueva York.
- Dooge, J.C.I., (1973), Linear theory of hydrologic systems, USDA ARS Tech. Bull. 1468, Washington.
- González Quijano, P.M., (1922), Hidrología general agrícola, Espasa-Calpe, Madrid.
- Gill, M.A., (1976), Exact solution for gradually varied flow, J. Hydr. Div., 102:1353-1364.
- Gill, M.A., (1977), Algebraic solution of the Horton-Izzard turbulent overland flow model of the rising hydrograph, Nordic Hydrol. 8:249-256.
- Gradshteyn, I.S., e I.M. Ryzhik, (1965), Table of integrals, series, and products, Academic Press, Nueva York.
- Himmelblau, D.M., (1972), Applied nonlinear programming, McGraw-Hill, Nueva York.
- Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.V. Vetterling, y B.P. Flannery (1992), Numerical recipes, (2<sup>o</sup> edición), Cambridge University Press, Cambridge.
- Singh, V.P., (1988), Hydrologic systems. Rainfall-runoff modeling, (Vol. I), Prentice-Hall, Englewoods Cliffs.
- Woolhiser, D.A., y J.A. Liggett, (1967), Unsteady one-dimensional flow over a plane: the rising hydrograph, Water Resour. Res., 3:753-751.