acadèmica

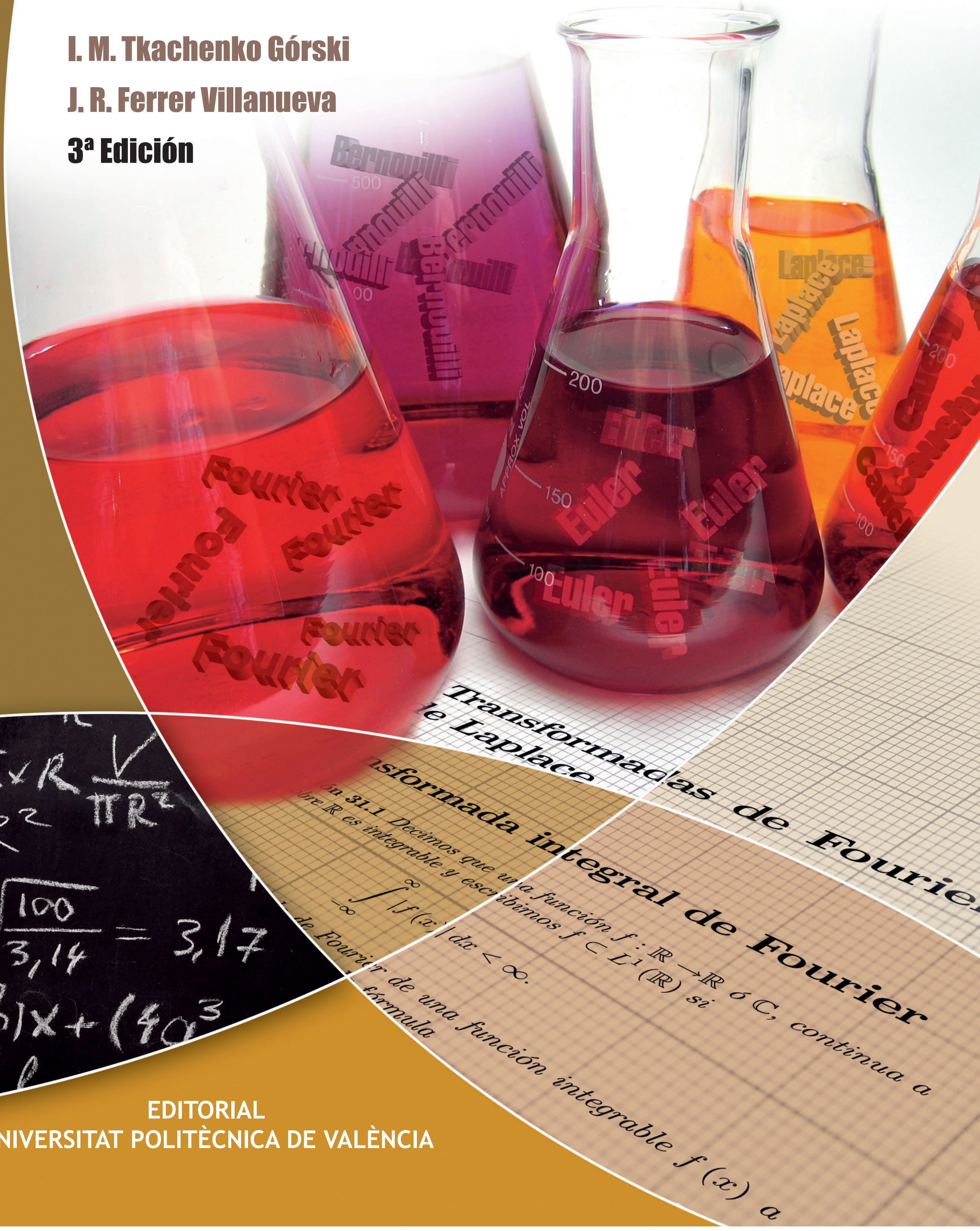
Fundamentos matemáticos de la Ingeniería Química

Ecuaciones diferenciales y temas complementarios

I. M. Tkachenko Górski

J. R. Ferrer Villanueva

3ª Edición



EDITORIAL

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Fundamentos matemáticos de la Ingeniería Química

Ecuaciones diferenciales y temas complementarios

3ª ed.

I.M. Tkachenko Górski
J.R. Ferrer Villanueva

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: TKACHENKO GÓRSKI, I.M. y FERRER VILLANUEVA, J.R.(2014) [3ªed.]. *Fundamentos matemáticos de la ingeniería química: ecuaciones diferenciales y temas complementarios.* Valencia: Universitat Politècnica de València

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 4082_02_03_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-760-0
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Prólogo

El conocimiento del curso básico de Cálculo es el prerrequisito para el trabajo fructífero con este libro.

Por otro lado, hemos intentado hacer este texto autoconsistente, algunos resultados extraídos del libro A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, *Integrals and Series,* Vol. 1: *Elementary Functions,* Gordon and Breach Science Publishers, 1986, son complementarios.

Para profundizarse en los temas de la Parte II se puede recomendar el libro clásico de H. Feshbach and Ph.M. Morse, *Methods of Theoretical Physics,* Cambridge University Press, 1953, y numerosos libros más contemporáneos.

I.M.T.G. expresa su profunda gratitud al Prof. V.M. Adamyan, Director del Departamento de Física Teórica de la Universidad Nacional de Odesa (Ucrania), uno de los últimos discípulos del Académico M.G. Krein, por todo lo que le ha enseñado en las ciencias y la vida.

Índice general

Índice general v

I Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y sistemas de EDO 1

1 Introducción 3

2 EDO de primer orden 7

2.1 EDO de primer orden resueltas respecto a la derivada 7

2.2 EDO con variables separadas 8

2.3 EDO que se reducen a ecuaciones con variables separadas 10

2.4 Las EDO homogéneas 11

3 EDO lineales de primer orden 13

4 Ecuación de Bernoulli 17

5 Ecuaciones exactas 19

5.1 La función potencial . . . 19

5.2 El factor integrante . . . 22

6 EDO de orden mayor que uno 27

6.1 Reducción del orden . . . 28

6.2 EDO lineales de n-ésimo orden . . . 29

6.3 EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes y ecuaciones de Euler . . . 32

6.4 EDO lineales no homogéneas . . . 35

6.5 EDO lineales no homogéneas con coeficientes constantes y las ecuaciones de Euler . . . 41

7 Algunos modelos mecánicos que se reducen a las EDO 49

7.1 Movimiento uniforme . . . 49

7.2 Movimiento oscilatorio . . . 55

8 Problemas propuestos 59

8.1 EDO de variables separadas . . . 59

8.2 EDO que se reducen a las ecuaciones de variables separadas . . . 60

8.3 EDO homogéneas . . . 61

8.4 EDO lineales . . . 61

8.5 EDO de Bernoulli . . . 62

8.6 EDO exactas . . . 63

8.7 EDO sin clasificar . . . 65

8.8 EDO con coeficientes constantes . . . 68

9 Sistemas de EDO: generalidades 73

9.1 Integración de un SED por reducción a una ecuación de mayor orden . . . 75

9.2 Las formas integrables de un SED . . . 76

9.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales . . . 77

9.4 SDL con coeficientes constantes . . . 80

II Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales 87

10 Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: generalidades 89

11 Problemas simples que se reducen a las ecuaciones del tipo parabólico 91

11.1 Problema lineal de la propagación de calor 91
11.2 Ecuación de difusión 93
11.3 Propagación del calor o difusión en el espacio 93

12 Problemas simples que se reducen a ecuaciones del tipo hiperbólico 95

12.1 La ecuación de la cuerda vibrante 95
12.2 Vibraciones longitudinales de las vigas 97
12.3 La propagación de ondas en dos y tres dimensiones 97

13 Planteamiento de los problemas de contorno 99

13.1 Problemas de contorno del tipo parabólico 99
13.2 Problemas de contorno del tipo hiperbólico 103

14 El método de Fourier 105

14.1 El método de separación de las variables 105
14.2 Justificación matemática 119

15 La ecuación no homogénea 135

15.1 Solución de los problemas no homogéneos por el método de Fourier 136
15.2 Las condiciones de contorno no homogéneas 140

16 El método de las funciones de Green para las ecuaciones parabólicas 163

16.1 Generalidades 163

16.2 La función de Green de la ecuación de calor en el eje 168
16.3 La transmisión de calor en el eje y en el semieje. 171
16.4 La ecuación de calor en el eje no homogénea 174

17 Transmisión de calor en el espacio de dos y tres dimensiones 177

18 Funciones de Green para las ecuaciones hiperbólicas no homogéneas 181
18.1 Solución general: el método de Fourier 181
18.2 Función de Green: definición. 183
18.3 Función de Green de frecuencias 185

19 Problemas hiperbólicos especiales: Vibraciones de cuerdas, barras y vigas 191

20 Problemas a resolver 207
20.1 Problemas parabólicos unidimensionales 207
20.2 Problemas hiperbólicos unidimensionales 212
20.3 Problemas multidimensionales 218

21 Tres problemas fundamentales de Mecánica Cuántica 223

22 Anexos 233
22.1 Funciones generalizadas 233
22.2 La forma alternativa de hallar la función de Green de la ecuación parabólica sobre el eje 241

III Elementos de Álgebra Lineal 243

23 Matrices y sistemas 245
23.1 Definiciones 245
23.2 Operaciones con matrices 246

23.3 Producto de un escalar por una matriz 247
23.4 Proceso de escalonamiento de una matriz 252
23.5 Sistemas de ecuaciones lineales algebráicas 255

24 Espacios vectoriales y Aplicaciones lineales 265
24.1 Espacios vectoriales 265
24.2 Espacios euclídeos 294

IV Elementos de la teoría de funciones de variable compleja, las transformadas integrales de Fourier y de Laplace 305

25 Funciones de variable compleja 307
25.1 Límite. Continuidad 308
25.2 Los ceros 308
25.3 Analiticidad 310
25.4 Series de potencias 311

26 Integrales en el plano complejo. Teoremas de Cauchy 315

27 Series de Laurent, singularidades, residuos 323

28 Aplicaciones de la teoría de los residuos 331

29 Principio del argumento. Teorema de Rouché 347

30 Transformadas de Fourier y de Laplace 349
30.1 Transformada integral de Fourier 349
30.2 Transformada integral de Laplace 351
30.3 Aplicaciones de la transformada de Laplace 356

Parte I

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y sistemas de EDO

Capítulo 1

Introducción

Para estudiar un fenómeno natural, habitualmente es difícil hallar unas relaciones que enlacen las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno. Pero, al mismo tiempo, a menudo es fácil establecer la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas. Así obtenemos un modelo matemático del fenómeno que contiene las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, bajo el signo de derivada.

No estudiamos aquí fenómenos cuya descripción matemática exigiría el uso de las magnitudes matriciales.

Definición 1.1 *Las ecuaciones en las cuales la función desconocida, escalar o vectorial, se encuentra bajo el signo de derivada, se llaman* ***ecuaciones diferenciales.***

Ejemplo 1.2 *Muchos fenómenos, por ejemplo, la desintegración radioactiva o el proceso elemental unimolecular,* $A \to P$*, los podemos describir mediante la EDO*

$$\frac{dx}{dt} = -kx. \tag{1.1}$$

Aquí $x = x(t)$ *es la cantidad de sustancia no desintegrada o la concentación* $[A]$ *en el momento de tiempo* t*;* k *es una constante que puede depender de* *otros parámetros (en el segundo caso, de las condiciones termodinámicas): la velocidad del proceso* $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ *es proporcional a la cantidad de la sustancia.*

Ejemplo 1.3 *La ecuación de movimiento de un punto de masa* m*, bajo la influencia de una fuerza* $\mathbf{F}$ *dependiente del tiempo y de la posición del punto,*

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}(t, \mathbf{r})}{m}$$

Ejemplo 1.4 *La ecuación de difusión*

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(D(t, \mathbf{r})\,\boldsymbol{\nabla} u(t, \mathbf{r})\right),$$

donde $u(t, \mathbf{r})$ *es la concentación de la sustancia,* $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ *es el operador de gradiente y* $D(t, \mathbf{r})$ *es el coeficiente de difusión variable.*

Observación 1.5 *La búsqueda de las funciones desconocidas, determinadas por las ecuaciones diferenciales, es precisamente el problema fundamental a resolver en esta Parte del curso.*

Definición 1.6 *Si en una ecuación diferencial las funciones desconocidas, escalares (como en el Ejemplo 1.2) o vectoriales (como en el Ejemplo 1.3), son funciones de una sóla variable (en estos ejemplos lo es el tiempo* t*), la ecuación diferencial se dice* ***ordinaria (EDO).*** *Si, en cambio, la función desconocida es función de dos o más variables (como en el Ejemplo 1.4 donde la función a determinar depende de cuatro variables:* t, x, y, z*), la ecuación es una ecuación diferencial en* ***derivadas parciales (EDDP).***

En lo que sigue, particularmente en los Capítulos 7 y 21, veremos ejemplos de los modelos físicos que podrán ayudar ver la utilidad de los desarrollos matemáticos propuestos.

Definición 1.7 *Se llama* ***solución*** *de la ecuación diferencial a una función que, al ser sustituida en la ecuación diferencial, la convierte en una identidad.*

Por ejemplo, la ecuación (1.1) tiene la solución

$$x(t) = Ce^{-kt}.$$

Si conocemos el valor de la función en un momento inicial t_0,

$$x_0 = x(t_0),$$

podemos determinar el valor de la constante arbitraria (positiva):

$$x_0 = x(t_0) = Ce^{-kt_0} \Longrightarrow C = x_0 e^{kt_0}.$$

Así tenemos la solución *única* del **problema del valor inicial** (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -kx, \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. :$$

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}. \tag{1.2}$$

Definición 1.8 *El proceso de determinación de las soluciones de una EDO o EDDP se llama integración de la misma.*

Nota 1.9 *Supongamos que una pequeña variación de los parámetros del problema, por ejemplo, de la constante k y/o de la condición x_0, produce sólo un pequeño cambio de la solución (1.2) que estos determinan. Es decir, supongamos que la solución es **estable**.*

Capítulo 2

EDO de primer orden

2.1 EDO de primer orden resueltas respecto a la derivada

Consideremos ecuaciones del tipo

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

y empecemos con un ejemplo simple de tal ecuación,

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

La integración de esta ecuación se analiza en cálculo integral. La solución, en el caso que sea la función $f(x)$ integrable,

$$y = \int f(x)\, dx + C$$

contiene una constante arbitraria y la solución del PVI

$$\begin{cases} y' = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

es

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s\right) ds. \tag{2.2}$$

Observación 2.1 *Está claro que la integrabilidad de la función $f\left(x\right)$ garantiza ahora la existencia y eventualmente la unicidad de la solución (2.2). También entendemos que la existencia y la unicidad de las soluciones de las ecuaciones del tipo*

$$y' = \frac{dy}{dx} = g\left(y\right)$$

vienen garantizadas por la integrabilidad de la función

$$f\left(y\right) = \frac{1}{g\left(y\right)} = \frac{dx}{dy} \tag{2.3}$$

y por la posibilidad de hallar la función inversa $y = y\left(x\right)$ de la solución $x = x\left(y\right)$ de la ecuación (2.3).

2.2 EDO con variables separadas

Las ecuaciones del tipo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f_1\left(x\right)}{f_2\left(y\right)} \tag{2.4}$$

que podemos reescribir como

$$f_2\left(y\right) dy = f_1\left(x\right) dx \tag{2.5}$$

se llaman *ecuaciones con variables separadas.* Es evidente que la ecuación (2.3) es un caso particular de (2.4). Supongamos que las funciones $f_1\left(x\right)$ y $f_2\left(y\right)$ son continuas, entonces la ecuación

$$\int f_2\left(y\right) dy = \int f_1\left(x\right) dx + C, \tag{2.6}$$

donde C es una constante de integración, nos proporciona una solución *implícita* de la ecuación (2.5). Si esta solución determina sin excepción todas las soluciones de (2.4), entonces se trata de su *solución general.*

Ejemplo 2.2 *La ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \tag{2.7}$$

carece de sentido para $y = 0$. Lo tendremos en cuenta si a la solución implícita de la ecuación

$$ydy = xdx,$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Longleftrightarrow y^2 = x^2 + K$$

añadimos la condición $K = 2C \neq 0$.

Ejemplo 2.3 *Podemos escribir la solución general de la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

como $y = Kx$ con $K \in \mathbb{R}$ [1] *y $x \neq 0$.*

Ejercicio 2.4 *Resolver el PVI*

$$\begin{cases} y' + \frac{x}{y} = 0, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Comentario. La solución única,

$$y = -\sqrt{2 - x^2},$$

geométricamente es la semi-circunferencia inferior de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.

Ejercicio 2.5 *La solución general de la ecuación*

$$y' = e^{x^2} \ln y,$$

$$\int e^{x^2} dx = \int \frac{dy}{\ln y} + C,$$

no la podemos reducir a funciones elementales.

[1] La integración de la ecuación $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ produce la solución implícita $\log y = \log x + C$ de donde tenemos: $y = x \exp(C) = cx$ con $c > 0$.

Ejercicio 2.6 *La solución del PVI*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}, \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

es [2]

$$x(t) = t^4,$$

pero el problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}, \\ x(1) = -1. \end{cases}$$

no tiene solución.

2.3 EDO que se reducen a ecuaciones con variables separadas

Muchas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones con variables separadas mediante una sustitución de variables.

Por ejemplo, las EDO

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

donde a y b son constantes, se transforman a las EDO con variables separadas mediante la sustitución de la función y por $z = ax + by$. Efectivamente,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z)$$

con lo que hemos separado las variables. Integrando, obtenemos

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C.$$

Ejemplo 2.7

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Haciendo $z = 2x + y$*, tendremos*

$$\frac{dz}{dx} = 2 + z \Longrightarrow \ln|z + 2| = x + \ln c \Longrightarrow z = 2x + y = -2 + ce^x$$

ó

$$y = ce^x - 2x - 2, \quad c > 0.$$

[2] $\int_1^x \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \int_1^t 2tdt \Longrightarrow \sqrt{x} = t^2 \Longrightarrow x = t^4.$

Ejemplo 2.8

$$y' = \frac{1}{x-y} + 1.$$

Haciendo $z = x - y$, obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} \Longrightarrow z^2 = -2x + c \Longrightarrow (x-y)^2 = -2x + c.$$

A EDO con variables separadas se reducen también

2.4 Las EDO homogéneas

que tienen la forma

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

En efecto, la sustitución $y = zx$ nos lleva a

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = f(z) \Longrightarrow \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + \ln c \Longrightarrow x(z) = c\exp\left(\int \frac{dz}{f(z) - z}\right).$$

Ejemplo 2.9 *La solución general de la EDO homogénea*

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$$

es

$$y = x \arcsin kx \ , \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.10 *La solución del PVI*

$$\begin{cases} y' = \frac{x-y}{y-x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

$$y = 1 - x \tag{2.8}$$

es única. En efecto, supongamos que existe otra solución

$$y = h(x),$$

distinta de la (2.8), tal que

$$\begin{cases} h' = -1, \\ h(1) = 0. \end{cases}$$

Entonces, la función

$$r = h(x) + x - 1$$

satisface el problema

$$\begin{cases} r' = h' + 1 = 0, \\ r(1) = h(1) = 0, \end{cases}$$

cuya solución, obviamente, es

$$r = 0 \Longleftrightarrow h(x) = 1 - x,$$

que es una contradiccón.

Ejercicio 2.11 *Probar que (2.2) representa la ínica solución del PVI (2.1).*

Capítulo 3

EDO lineales de primer orden

Definición 3.1 *Se llama* ***EDO lineal de primer orden*** *a toda EDO lineal con respecto a la función desconocida y a su derivada:*

$$y' + g(x)\, y = h(x)\,, \tag{3.1}$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ se consideran en lo sucesivo funciones continuas de x en el dominio donde se exige integrar la ecuación (3.1).

Si $h(x) \equiv 0$, la ecuación (3.1) se dice lineal *homogénea* (ELH). En la ELH las variables se separan:

$$\frac{dy}{dx} + g(x)\, y = 0 \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -g(x)\, dx, \tag{3.2}$$

e integrando, obtenemos

$$\ln|y| = -G(x) + C_1\ ,$$

siendo $G(x)$ una primitiva (¡que existe!) de la función $g(x)$:

$$G = \int g(x)\, dx \Longleftrightarrow G'(x) = g(x)\,. \tag{3.3}$$

Entonces,

$$y(x) = Ce^{-G(x)}, \quad C = e^{C_1} > 0.$$

Si permitimos que la constante C tome todos los valores reales, incluimos las soluciones negativas y la identicamente nula. La última, la hemos perdido al dividir entre y en (3.2). Así, la solución general de la ELH

$$y' + g(x)\, y = 0 \tag{3.4}$$

es

$$y(x) = Ce^{-G(x)}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Observación 3.2 *Es fácil ver que podemos hallar la solución general de la ecuación lineal no homogénea (ELNH), (3.1), si sumamos a la general de la ELH, (3.5) una solución particular de la (3.1), pues son lineales. Para encontrar una solución particular de la ELNH, (3.1), apliquemos el* ***método de variación de los parámetros****.*

Precisamente, supongamos que la solución particular de la ELNH, (3.1), tiene la forma

$$y(x) = C(x)\, e^{-G(x)}, \tag{3.6}$$

siendo $C(x)$ una función diferenciable a determinar. Para hallar la última, sustituyamos (3.6) a la ELNH y hagamos uso de la definición (3.3):

$$\frac{d\left(Ce^{-G}\right)}{dx} + Ce^{-G}g = h \iff \tag{3.7}$$

$$\iff C'e^{-G} - gCe^{-G} + Ce^{-G}g = h \iff$$

$$\iff C' = he^{G} \iff C(x) = \int h(x)\, e^{G(x)} dx. \tag{3.8}$$

Entonces, la solución general de la ELNH (3.1) tiene la forma

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(C + \int h(x)\, e^{G(x)} dx \right), \tag{3.9}$$

siendo C una constante real arbitraria.

Teorema 3.3 *La solución del PVI lineal no homogénea*

$$\begin{cases} y' + g(x)\, y = h(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.10}$$

(i) tiene la forma

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds \right) \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(s) \exp\left(\int_{x_0}^{s} g(t)\, dt \right) ds \right) \tag{3.11}$$

y (ii) es única.

Demostración. Para simplificar esta demostración, introduzcamos la notación
$$G(x, x_0) := \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds.$$
Entonces, podemos reescribir (3.11) como
$$y(x) = e^{-G(x,x_0)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(s)\, e^{G(s,x_0)} ds \right) \tag{3.12}$$
y al sustituir la última función a la ELNH, observar que su derivada es exactamente igual a
$$-g(x) \left(e^{-G(x,x_0)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(s)\, e^{G(s,x_0)} ds \right) \right) + h(x).$$
Así tenemos probada la parte (i). Para probar la unicidad, supongamos que existe una solución $y = y_1(x)$ del PVI (3.10) distinta de la solución (3.12). El resto $r(x) = y(x) - y_1(x)$ entonces satisface el correspondiente PVI homogéneo:
$$\begin{cases} r' + g(x)\, r = 0, \\ r(x_0) = 0, \end{cases}$$
cuya solución es, como sigue de la (3.5), idénticamente nula. ■

Ejercicio 3.4 *Ya sabemos que la solución de la ELH*
$$y' - \frac{y}{x} = 0$$
asociada a la ELNH
$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \tag{3.13}$$
es
$$y = kx.$$
Consideremos k como una función diferenciable de x, entonces
$$y = k(x)\, x \Longrightarrow y' = xk' + k = k + x^2 \Longrightarrow xk' = x^2 \Longrightarrow k(x) = \frac{x^2}{2} + c.$$
Por lo tanto, la solución general de la ecuación (3.13) es
$$y(x) = cx + \frac{x^3}{2}, \tag{3.14}$$
lo que es fácil de comprobar sustituyendo (3.14) a (3.13).

Ejercicio 3.5 *Probar que la solución única del PVI*

$$\begin{cases} y' - y\cot x = 2x\sin x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \end{cases}$$

es

$$y(x) = \left(x^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\sin x.$$

Capítulo 4

Ecuación de Bernoulli

La ecuación de *Bernoulli*

$$y' + g(x)\, y = h(x)\, y^n \ , \quad n \neq 1 \tag{4.1}$$

es un ejemplo de la EDO reducible a las lineales mediante un cambio de variable. En efecto, introduzcamos la nueva función $z(x) = y^a(x)$ y seleccionemos el parámetro a que reduzca la ecuación (4.1) a una lineal. Derivando, hallamos

$$z' = ay^{a-1}y' = ay^{a-1}\left(-gy + hy^n\right) = -agz + ahy^{a-1+n}. \tag{4.2}$$

Así, con $a = 1 - n$ la última ecuación es lineal:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + g(x)\, z = h(x)\, . \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.1 *La ecuación de Bernoulli*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y} = \frac{y^2 + x^3}{2xy} \tag{4.4}$$

mediante el cambio $z(x) = y^2(x)$ *se convierte en la del ejercicio 3.4:*

$$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} = \frac{z + x^3}{x} = \frac{z}{x} + x^2.$$

Entonces, la solución general implícita de la ecuación (4.4) es

$$y^2(x) = cx + \frac{x^3}{2}.$$

Capítulo 5

Ecuaciones exactas

5.1 La función potencial

Puede suceder que la parte izquierda de la EDO

$$p(x,y) + q(x,y)\,y' = h(x) \tag{5.1}$$

sea la derivada completa de una cierta función de dos variables $f(x,y)$ llamada *función potencial,*

$$p(x,y) + q(x,y)\,y' = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{df(x,y)}{dx}.$$

Si existe una función potencial tal que

$$p(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \tag{5.2}$$

entonces

$$\frac{df(x,y)}{dx} = h(x) \tag{5.3}$$

y si la función $y = y(x)$ es una solución de la ecuación (5.1), su solución general implícita será

$$f(x,y) = \int h(x)\,dx. \tag{5.4}$$

Recíprocamente, si una cierta función $y = y(x)$ convierte en identidad la condición (5.4), entonces derivándola obtendremos la relación (5.3), es decir, que (5.4) es la solución general implícita de la ecuación (5.1).

Definición 5.1 *Si existe una función potencial tal que se cumplen las condiciones (5.2) decimos que la EDO (5.1) es* ***exacta.***

Observación 5.2 *Para comprobar si la EDO (5.1) es exacta, basta comprobar que se cumplen las condiciones de Euler*

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}, \tag{5.5}$$

es decir, que las derivadas cruzadas segundas de la función potencial coinciden en el dominio de definición de las funciones $p(x,y)$ *y* $q(x,y)$.

Observación 5.3 *Las condiciones (5.2) permiten hallar la función potencial y así encontrar la solución implícita (5.4).*

Podemos proponer dos caminos a elegir.

(i) A partir de la primera condición (5.2) tenemos

$$f(x,y) = \int p(x,y)\,dx + F(y), \tag{5.6}$$

donde $F(y)$ es una función arbitraria diferenciable de y. Utilicemos la segunda de las condiciones (5.2) para obtener que

$$q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)\,dx + F'(y),$$

de donde

$$F(y) = \int \left(q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)\,dx \right) dy$$

y así hallamos la potencial (5.6).

(ii) A partir de la segunda condición (5.2) tenemos

$$f(x,y) = \int q(x,y)\,dy + G(x), \tag{5.7}$$

donde $G(x)$ es una función arbitraria diferenciable de x. Utilicemos la primera de las condiciones (5.2) para obtener que

$$p(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int q(x,y)\,dy + G'(x),$$

de donde

$$G(x) = \int \left(p(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int q(x,y)\,dy \right) dx$$

y así hallamos la potencial (5.7).

Ejemplo 5.4 *Es fácil ver que la EDO*

$$(x+y+1) + \left(x - y^2 + 3\right) y' = 0 \tag{5.8}$$

es exacta, puesto que se cumple la condición de Euler (5.5),

$$\frac{\partial (x+y+1)}{\partial y} = \frac{\partial (x-y^2+3)}{\partial x} = 1.$$

Entonces, yendo por el camino (i) tenemos:

$$f(x,y) = \int (x+y+1)\,dx + F(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + F(y),$$

$$\left(x - y^2 + 3\right) = \frac{\partial\left(\frac{x^2}{2} + xy + x\right)}{\partial y} + F'(y) = x + F'(y),$$

$$F'(y) = 3 - y^2 \Longrightarrow F(y) = 3y - \frac{y^3}{3} + C_1,$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + 3y - \frac{y^3}{3} + C_1.$$

La solución implícita de la ecuación es, entonces,

$$3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 = C.$$

Ejercicio 5.5 *Comprobar que el camino (ii) lleva la mismo resultado.*

5.2 El factor integrante

En algunos casos, aunque la ecuación (5.1) no es exacta, es posible escoger una función $m = m(x, y)$ no nula tal que la ecuación equivalente a la (5.1),

$$m(x,y)\,p(x,y) + m(x,y)\,q(x,y)\,y' = m(x,y)\,h(x) \tag{5.9}$$

sea exacta.

Definición 5.6 *Si se cumple la condición de Euler,*

$$\frac{\partial(m(x,y)\,p(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(m(x,y)\,q(x,y))}{\partial x}, \tag{5.10}$$

decimos que la función $m(x, y)$ es un factor integrante de la ecuación (5.9).

Ejemplo 5.7 *La EDO*

$$\left(x + x^2\left(x^2 + y^2\right)\right) + yy' = 0 \tag{5.11}$$

no es exacta, pues

$$\frac{\partial\left(x + x^2\left(x^2+y^2\right)\right)}{\partial y} = 2x^2y$$

pero

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Sin embargo, es evidente que al multiplicar (5.11) por el factor

$$m(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

conseguiremos que se cumpla la condición (5.10),

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

es decir, que sea la ecuación

$$x^2dx + \frac{xdx}{x^2+y^2} + \frac{ydy}{x^2+y^2} = 0$$

exacta. Integrando, tendremos la solución implícita

$$\left(x^2+y^2\right)\exp\left(\frac{2}{3}x^3\right) = C.$$

Está claro que no siempre el factor integrante se escoge tan fácilmente. En general, para hallarlo es necesario seleccionar por lo menos una solución particular no identicamente nula de la ecuación en derivadas parciales (5.10) o, en forma desarrollada,

$$p\frac{\partial m}{\partial y}+m\frac{\partial p}{\partial y}=q\frac{\partial m}{\partial x}+m\frac{\partial q}{\partial x},$$

la cual, al dividir entre m, se reduce a

$$p\frac{\partial \ln m}{\partial y}-q\frac{\partial \ln m}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y} \quad . \tag{5.12}$$

En general, la integración de (5.12) en derivadas parciales no es un problema menos simple que la integración de la ecuación inicial (5.1). Sin embargo, a veces, la elección de la solución particular de (5.12) no presenta dificultades.

Aparte de ello, considerando que el factor integrante es una función de una sólo variable (por ejemplo, depende sólo de $x+y$ o de x^2+y^2, o función sólo de x o de y, etc.) se puede integrar ya sin dificultad la ecuación (5.12) e indicar las condiciones de existencia de un factor integrante del tipo considerado. Con esto se obtienen clases de ecuaciones para las cuales el factor integrante puede ser hallado fácilmente.

Consideremos los dos últimos casos.

Caso 5.8 *El factor integrante depende sólo de x: $m=m(x)$. La ecuación se simplifica y toma la forma*

$$-q\frac{\partial \ln m}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y} \quad ,$$

de donde, considerando

$$\varphi(x)=\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}}{q}$$

función continua de x, obtenemos

$$\ln m=\int \varphi(x)\,dx+\ln c,$$

$$m(x)=\exp\left\{\int\left(\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}}{q}\right)dy\right\}, \tag{5.13}$$

ya que es suficiente tener sólo un factor integrante y poner $c=1$. Si $\varphi(x)$ no es una función continua de x, no existe ningún factor de la forma $m=m(x)$.

Caso 5.9 *En el caso que sea $m = m(y)$, la forma (5.13) viene sustituida por*

$$m(y) = \exp\left\{\int \left(\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p}\right) dx\right\} \tag{5.14}$$

con

$$(y) = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p}$$

función continua de y sólo.

Ejemplo 5.10 *¿Tiene la ecuación*

$$(x - y) + (x + y) y' = 0 \tag{5.15}$$

un factor integrante de la forma $m = m(x^2 + y^2)$?

Solución. Designemos $z = x^2 + y^2$. La ecuación (5.12) para

$$m = m\left(x^2 + y^2\right) = m(z)$$

toma la forma

$$2(py - qx)\frac{\partial \ln m}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \ ,$$

de donde

$$m(z) = e^{\frac{1}{2}\int \chi(z)dz} \tag{5.16}$$

con

$$\chi(z) = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{py - qx}. \tag{5.17}$$

Para la existencia de un factor integrante del tipo elegido, es necesario - y, en caso de que $\chi(z)$ sea continua, suficiente - que (5.17) sea función sólo de $x^2 + y^2$. En nuestro caso,

$$\chi(z) = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{py - qx} = -\frac{2}{z};$$

por lo tanto, el factor integrante $m = m(x^2 + y^2)$ existe y es igual a (5.16):

$$m(z) = e^{\frac{1}{2}\int \chi(z)dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Así, la ecuación (5.15) se reduce a

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0,$$

o bien,

$$\frac{1}{2} \frac{d\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2} d \ln\left(x^2 + y^2\right) + d \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Integrando, obtenemos

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \ln c$$

y, al potenciar, tendremos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Ejercicio 5.11 *Integrar la ecuación*

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

sujeta a la condición

$$y\left(0\right) = 1.$$

Solución 5.12 *Ayuda. La solución de este PVI,* $y = \sqrt{2x+1}$*, se obtiene mediante el cambio de variables* $x = zy$ *o aplicando el factor integrante* $\left(x^2 + y^2\right)^{-1/2}$*.*

Para seguir leyendo haga click aquí