

## **SOBRE LA FOTOGRAMETRÍA AUTOMATIZADA APLICADA AL ESTUDIO DE BÓVEDAS**

### **AUTOMATED PHOTOGRAMMETRY APPLIED TO THE STUDY OF VAULTS**

*Miguel Ángel Alonso Rodríguez, Licinia Aliberti*

doi: 10.4995/ega.2019.11495

La fotogrametría se ha transformado notablemente al superar los sistemas tradicionales de identificación de puntos homólogos, basados en la visión estereoscópica o en la digitalización directa sobre la pantalla del ordenador, y realizarse de forma automática mediante el uso de algoritmos de correlación que reconocen puntos homólogos en dos o más fotografías, lo que ha dado lugar a la denominada fotogrametría de correlación automática y también llamada automatizada.

Su aplicación arquitectónica se ha empleado, fundamentalmente, para el levantamiento de fachadas con diferentes objetivos, que van desde la documentación gráfica al estudio de paramentos.

En este trabajo analizamos su uso aplicado a la medición de bóvedas, centrándonos en el caso concreto de una bóveda de crucería singular

de la iglesia de Nuestra Señora de la Asunción de Valdemorillo, Madrid. Es un análisis de la forma de obtener los datos necesarios para el estudio geométrico de una bóveda; es también un recorrido por los hitos más singulares de desarrollo de la fotogrametría arquitectónica, en cuanto registro de información espacial.

**PALABRAS CLAVE: FOTOGRAMETRÍA ARQUITECTÓNICA. FOTOGRAMETRÍA AUTOMATIZADA. BÓVEDAS. ESTUDIO**

---

*Photogrammetry has been significantly transformed by surpassing traditional systems that identify homologous points based on the automatic stereoscopic vision or direct digitalization of computer screens using correlation algorithms that recognize homologous points from two or more photographs. This has led*

*to the development of automatic correlation photogrammetry, which is also referred to as automated photogrammetry.*

*Its architectural application primarily involves surveying facades for purposes ranging from graphic documentation to surface examination.*

*In this study, we analyse the use of photogrammetry for the measurement of architectural vaults with a focus on the specific case of a singular ribbed vault in Our Lady of the Assumption Parish Church in Valdemorillo, Madrid. Not only do we analyse how to obtain data needed for the geometrical study of a vault, but we cover the most remarkable milestones achieved through the development of architectural photogrammetry.*

**KEYWORDS: ARCHITECTURAL PHOTOGRAMMETRY. AUTOMATED PHOTOGRAMMETRY. VAULTS. SURVEY**



## Antecedentes de la fotogrametría automatizada

La fotogrametría se debe a la fotografía, pero el primer levantamiento con pretensiones realizado según los principios de la fotogrametría lo realizó Aimé Laussedat empleando dos imágenes del Castillo de Vincennes obtenidas con una cámara clara, y obtuvo la planimetría de la fortaleza. El procedimiento era en su totalidad gráfico y dio lugar a la fotogrametría gráfica, que se empleó a lo largo del siglo XIX.

A comienzos del siglo XX, Carl Pulfrich simplificó la identificación de puntos homólogos con la invención del estereocomparador, que aplicando el principio de la visión estereoscópica, permitió medir paralajes y obtener las coordenadas de los puntos con precisión.

El siguiente avance significativo en el desarrollo de la técnica fotogramétrica se debe a Von Orel y la invención en 1914 del estereoautógrafo. Construido sobre la base del estereocomparador de Pulfrich, Von Orel acopló un dispositivo de reglas que transmitían los valores de las coordenadas al lápiz de una mesa de dibujo. A esta fotogrametría se le denominó estereoscópica o estereofotográfica y se empleó a lo largo del siglo XX. Su principal aplicación, y el impulso de su gran desarrollo, fue la realización de mapas y planos de gran valor estratégico y catastral que se realizaban empleando los restituidores, instrumentos basados en el estereoautógrafo de Von Orel. Los primeros restituidores eran mecánicos, y se les denominó analógicos debido a que materializaban con barras metálicas los rayos visuales que contemplaban la escena estereoscópica. Con la aparición de los ordenadores y el desarrollo del

cálculo informático surgieron los restituidores analíticos, que realizaban el proceso de obtención de las coordenadas mediante cálculo matemático. A finales del siglo XX con la aparición y desarrollo de la fotografía digital surgieron los programas informáticos de fotogrametría estereoscópica, que empleaban imágenes contempladas en la pantalla del ordenador. A esta fotogrametría se la denominó digital.

Con la llegada del siglo XXI se desarrollaron nuevas técnicas fotogramétricas. La llamada de imágenes cruzadas emplea fotos oblicuas, y la identificación de puntos homólogos se realiza manualmente con el ratón sobre la pantalla del ordenador. El procedimiento es muy intuitivo y el resultado es una nube dispersa de puntos que se manejan en el espacio virtual de los programas habituales de dibujo y modelado.

## Principios y método de la fotogrametría automatizada

La identificación manual de puntos homólogos se vio como un proceso repetitivo sujeto a los errores y criterios arbitrarios del operador. El siguiente paso en la evolución de los programas de fotogrametría consistió en automatizar la identificación de puntos en un proceso denominado de correlación automática o autocorrelación que encuentra su fundamento en la composición de color de los píxeles de la imagen, basada en el modelo RGB de síntesis aditiva del verde, el rojo y el azul. Los algoritmos de correlación comparan los valores de la intensidad de los tres colores primarios de un píxel y su entorno en una imagen, con las posibles ventanas en la otra para encontrar el punto homólogo. Uno de los algoritmos más eficientes

## Background on automated photogrammetry

Photogrammetry is based on photography, but the first survey geared towards the use of photogrammetry principles was performed by Aimé Laussedat using two images of the Castle of Vincennes obtained with a camera lucida, revealing the planimetry of the fortress. The procedure applied was entirely graphic and gave rise to graphic photogrammetry, which was used throughout the 19th century. At the start of the 20th century, Carl Pulfrich simplified the identification of homologous points with the invention of the stereocomparator, which, applying the principle of stereoscopic vision, allowed parallaxes to be measured to obtain the coordinates of points with more precision. The next significant advancement of the photogrammetric technique is attributed to Von Orel and his 1914 invention of the stereograph. Based on Pulfrich's stereocomparator, Von Orel coupled a device with strips that transmitted coordinates to the drawing instrument of a drafting table. This was referred to as stereoscopic or stereophotographic photogrammetry and was used throughout the 20th century. Its main application, and the impetus for its development, was to create maps and plans of great strategic and cadastral value generated using *restitutores*, devices based on Von Orel's stereograph. The first *restitutores* were mechanical analogue devices that used metallic bars to materialize rays of a stereoscopic scene. With the introduction of computers, analytical *restitutores* that obtained coordinates from mathematical calculations were developed. At the end of the 20th century, with the appearance and development of digital photography, stereoscopic photogrammetry software emerged, and images could in turn be viewed on a computer screen through digital photogrammetry. With the arrival of the 21st century, new photogrammetric techniques were developed. Image correlation involves the use of oblique photos, and the identification of homologous points is executed manually using a computer mouse. The procedure is very intuitive, and the result is a scattered cloud of points that are managed in the virtual space of common drawings and modelling programs.



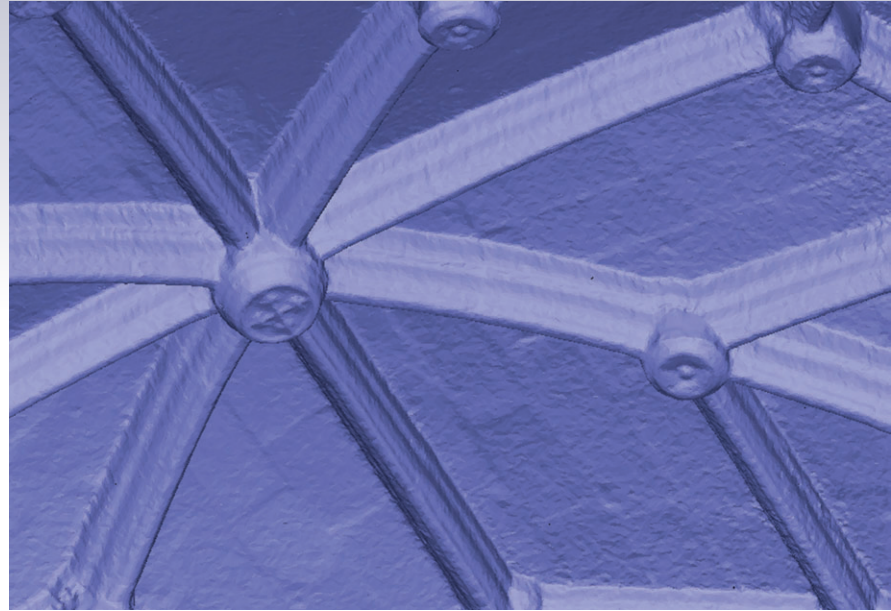
## Principles and methods of automated photogrammetry

The manual identification of homologous points was a repetitive process subject to operator errors and arbitrary criteria. The next step in the evolution of photogrammetry programs was thus to automate the identification of points through a process of automatic correlation or autocorrelation based on the colour compositions of image pixels using the additive colour system. Correlation algorithms compare intensity values of the three primary colours (green, red and blue) of a pixel and of its surrounding pixels in one image with pixels of another image used to identify a homologous point. One of the most efficient algorithms developed was designed in 1999 by David G. Lowe, professor and university researcher and currently a Google engineer, who found common characteristics between images to extract numerous common or key points. These algorithms combined with principles of digital photogrammetry led to the development of automated photogrammetry and autocorrelation methods used today.

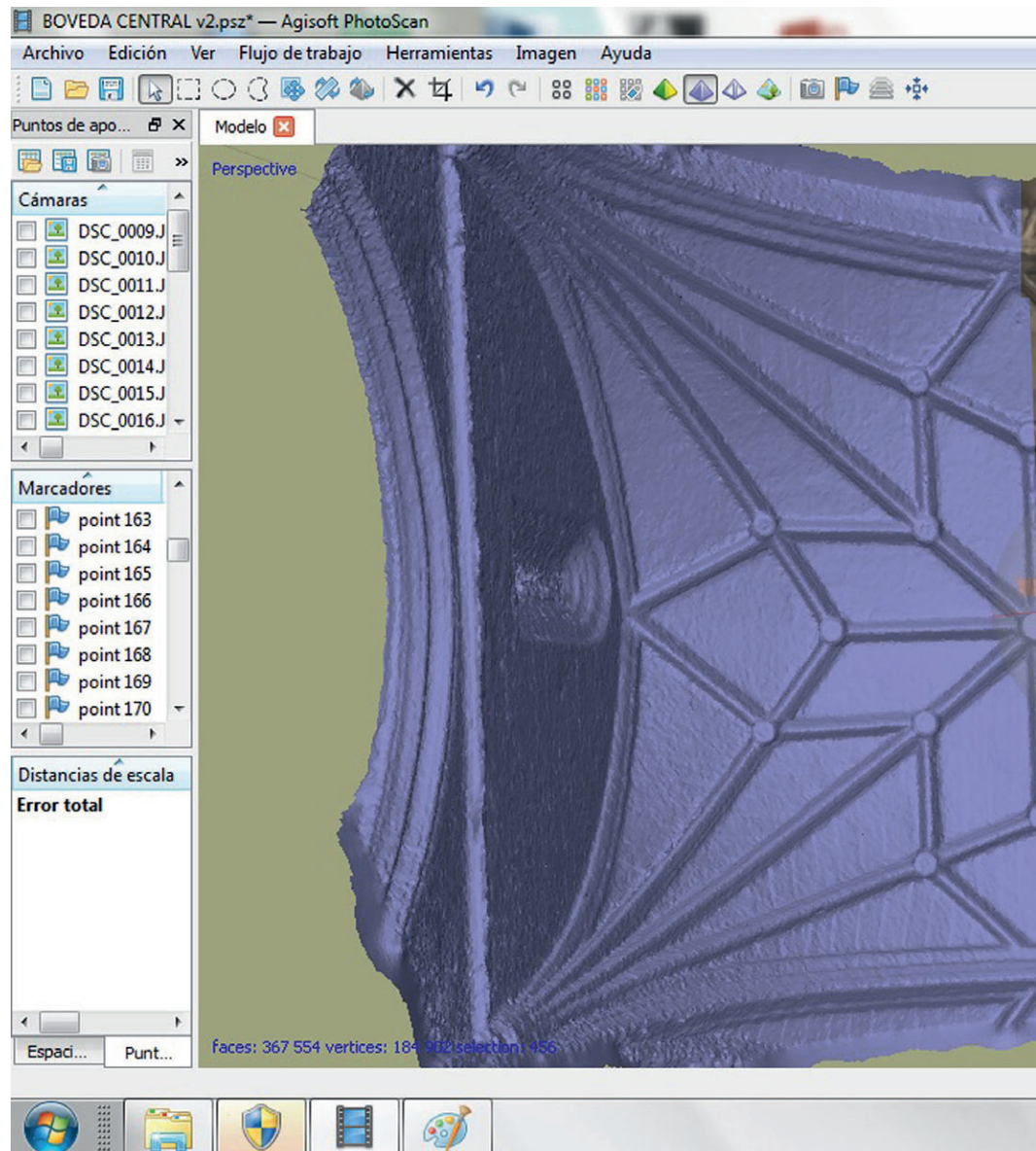
The process of capturing photographs for image correlation has certain limitations. For a change in perspective that does not affect the intensity values of pixels compared between two photographs of the same object, it is necessary for each image to be photographed within a close range, for images to have a large overlapping region and for lighting to not differ significantly, which is why it is not advisable to use flash. A few years later, the first automatic correlation programs that operated under a close range and that required the use of nearby images became available. Current programs can process photographs taken at distances of 40 metres or more, which is why new opportunities for their application to architectural surveys have emerged.

## Objectives

In this work, we analyse the use of automated photogrammetry and its applications for the measurement of architectural vaults. The objective is to justify the use of tools offered by the system for the study and analysis of the geometry of the singular pieces of stonework that interests us. We verify the rigor of the



1



2



1. Malla cruda. Detalle de los nervios, claves y juntas de la plementería
2. Malla cruda y mapeada

1. Free mesh. Ribs, bosses and joints of the lierne ribs
2. Free and mapped mesh

lo diseño en 1999 David G. Lowe, profesor e investigador universitario y en la actualidad ingeniero de Google, que detecta características comunes entre imágenes, con el fin de extraer grandes cantidades de puntos comunes, o puntos clave. La conjunción de estos algoritmos y los principios de la fotogrametría digital dio lugar a la fotogrametría automatizada o por correlación.

El proceso de correlación de imágenes tiene limitaciones y, para que en dos fotografías de un mismo objeto los valores de intensidad considerados no se vean afectados por los factores del cambio de perspectiva, es preciso que las fotografías sean próximas, con amplios solapes, y que la iluminación no difiera notablemente, razón por la cual no es recomendable emplear flash.

procedure directly based on our results without determining accuracy and uncertainty levels, which would involve a study of another focus and of different dimensions.

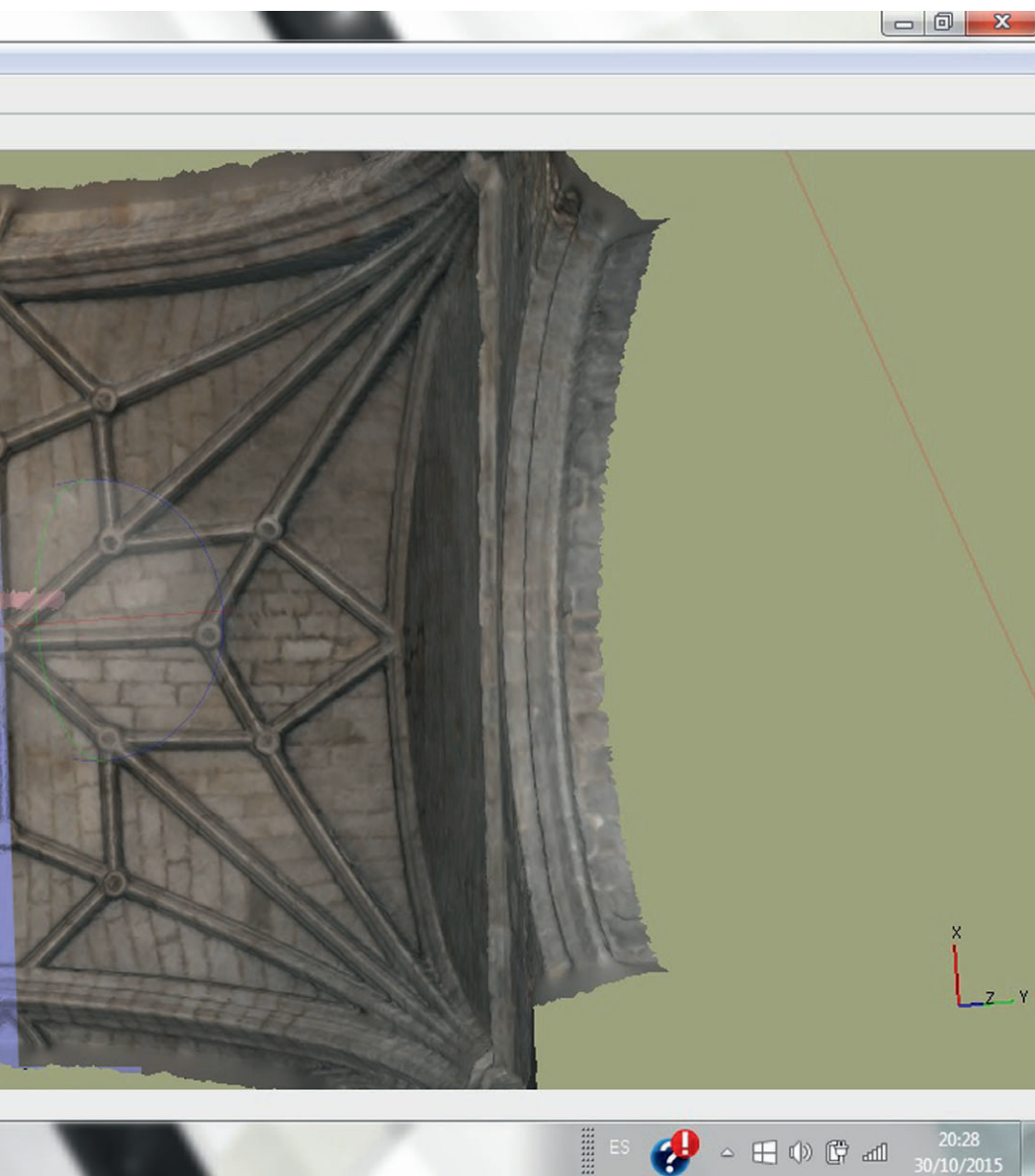
We do this by focusing on the specific case of a singular ribbed vault in Our Lady of the Assumption Parish Church in Valdemorillo, Madrid. A ribbed vault was studied because such a vault has a sufficiently complex shape to provide numerous opportunities for measurement.

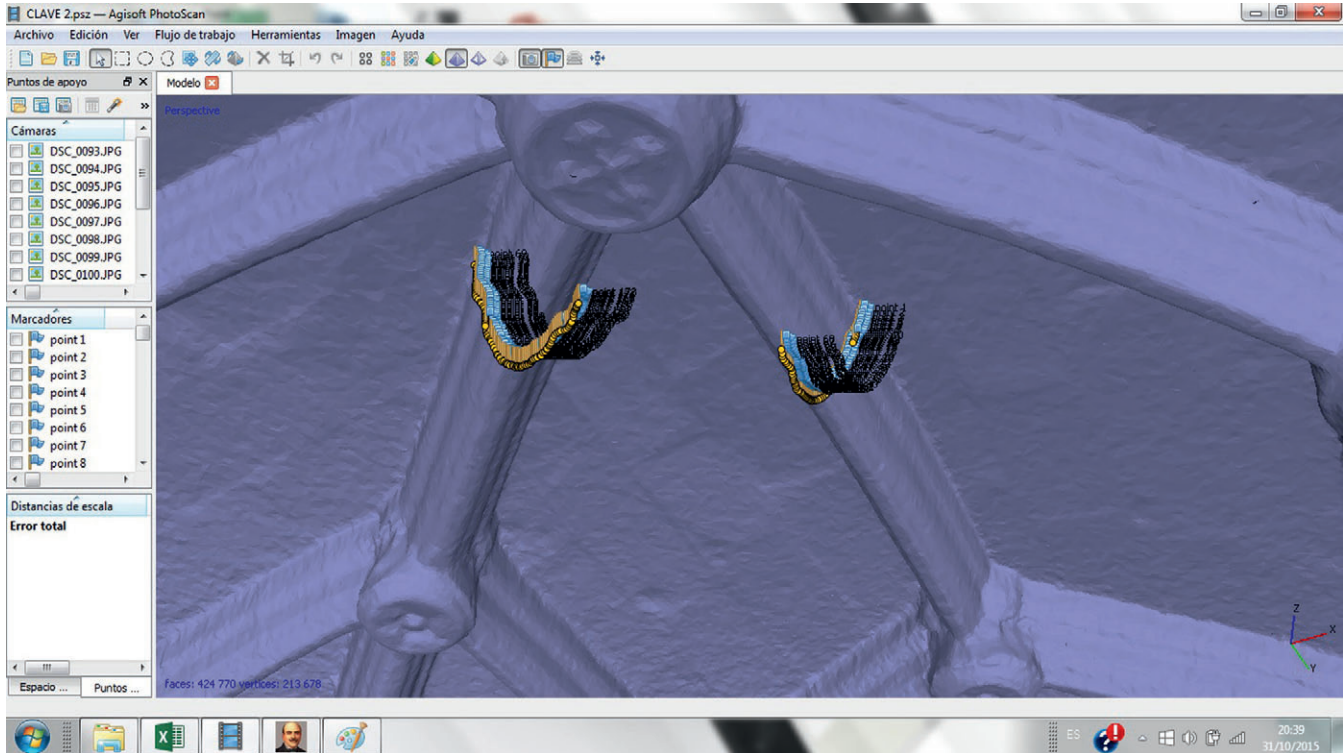
Our Lady of the Assumption Parish Church is a single nave covered by five ribbed vaults of the same height. Drawings of the church were given to the master Bartolomé Elorriaga, a disciple of Juan de Herrera, in 1591, and the work was completed in 1601, according to the vault located at the foot of the temple. Its exterior is of Herrerian style, which contrasts sharply with the late Gothic elements of its interior. Two of the five vaults in the nave are rectangular in shape with ribs crossing parallel transversal ribs. As vaults with parallel ribs are unusual, and we measured the third rib via automated digital photogrammetry.

### Methodology

From the now classic work of Robert Willis, the study of the shape of a ribbed vault is approached from an analysis of the disposition of its ribs, as the spatial composition of the severy conforms to the ribs. The ribs include a set of arches broken down by simple voussoirs, which are only complex at their interfaces: in their convergence with the pillar and in the crown. According to the drawings, when ribs are projected as a straight line, their directrix describes the circumference of the arc or at most two arcs, and even when they appear curved in the plans, it is usual for their moulding to be positioned vertically. As such, data needed for the analysis of the constructive configuration of a ribbed vault should include the directrices and profiles of the ribs together with the height of the springer connected to one end of the arch and the keystone or boss connecting the arch at the other end. These data have been collected with a theodolite since laser distance measurers became popular at the start of the present century.

We obtained required measurement data through automatic correlation photogrammetry. To achieve these results





3

and to evaluate the anticipated features, 73 photographs were taken with a Nikon D5000 camera equipped with a 23.6 x 15.8 mm CMOS sensor and a fixed 18 mm objective. We use a fixed objective to enhance brightness levels and to maintain the same focal distance because while this condition was required in the past, it is currently recommended as a means to improve the resulting image. For the same reason, the focus was manually set to infinity. The photographs were taken at a resolution of 4288 x 2848 pixels. As we took photographs of the interior space, we used the aperture priority mode, which automatically determines the shutter speed based on the sensitivity of the sensor and based on lighting conditions to produce an appropriately exposed image. We used ISO 100 as a sensitivity level to allow for the highest possible resolution, and we applied a low aperture level of F11 to increase the depth of the field and the sharpness of the image. The camera was placed on a tripod, and a self-timer for shutter release was used to prevent shaking because no flash was used. Two photographic series were made from the floor of the church: the first series along a vertical axis, and those of the second convergent directed to the centre of the vault. The two series were processed together. We used the PhotoScan program developed by AgiSoft LLC, which is available as a demo for free for 30 days, as photogrammetric software.

Pocos años después se comercializaron los primeros programas de correlación automática que operaban a corta distancia y requerían imágenes cercanas. Los actuales permiten emplear fotografías tomadas a 40 metros o más, motivo por el que surgen nuevas oportunidades para su aplicación al levantamiento arquitectónico.

### Objetivos

En este trabajo analizamos el uso de la fotogrametría automatizada y su aplicación a la medición de bóvedas. El objetivo es justificar el uso de las herramientas que ofrece el sistema para el estudio y análisis de la geometría de las piezas singulares de cantería que nos interesa. Verificaremos la rigurosidad del procedimiento de forma directa, en función de los resultados, sin pretender determinar su precisión e incertidumbre, lo que sería un estudio de otra índole y dimensiones.

Lo haremos centrándonos en el caso concreto de una bóveda de crucería singular de la iglesia de

Nuestra Señora de la Asunción de Valdemorillo, Madrid. La elección de una bóveda de crucería se debe a que posee una forma lo suficientemente compleja como para abarcar los distintos casos particulares que podemos encontrar al medir una bóveda.

La iglesia parroquial de Valdemorillo, Madrid, dedicada a Nuestra Señora de Asunción, es de una sola nave cubierta con cinco bóvedas de crucería a la misma altura. Las trazas de la iglesia las dio el maestro Bartolomé Elorriaga, discípulo de Juan de Herrera, en 1591 y las obras se terminaron en 1601, según figura en la bóveda situada a los pies del templo. Su exterior es de estilo herreriano, que contrasta fuertemente con los elementos tardogóticos de su interior. Dos de las cinco bóvedas que cubren la nave son de planta rectangular y sus nervaduras dibujan una cruz con nervios paralelos a los rampantes. No es habitual una bóveda de nervios paralelos, y hemos medido la tercera mediante fotogrametría digital automatizada.



- 3. Puntos definiendo el perfil de los nervios
- 4. Nube de puntos exportada a AutoCad

- 3. Points defining the profile of the ribs
- 4. Point cloud exported to AutoCad

## Metodología

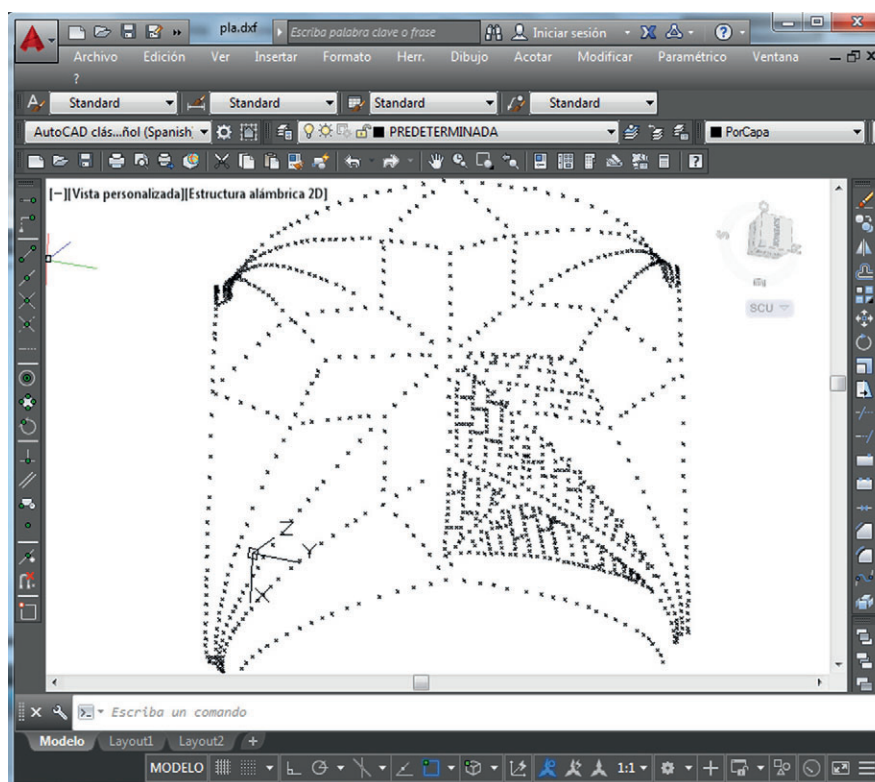
Desde el ya clásico trabajo de Robert Willis, el estudio de la forma de una bóveda de crucería se aborda fundamentalmente a partir del análisis de la disposición de sus nervios, pues la plementería se adapta a la trama espacial que los nervios conforman. La nervadura es un conjunto de arcos descompuestos en dovelas sencillas, que solo resultan complejas en sus interferencias: en su convergencia sobre el pilar y en los cruces. Según la tratadística, si los nervios se proyectan en planta según una recta, su directriz es un arco de circunferencia, o a lo sumo dos, y aún cuando aparecen curvados en planta lo habitual es que se mantengan con la molduración vertical.

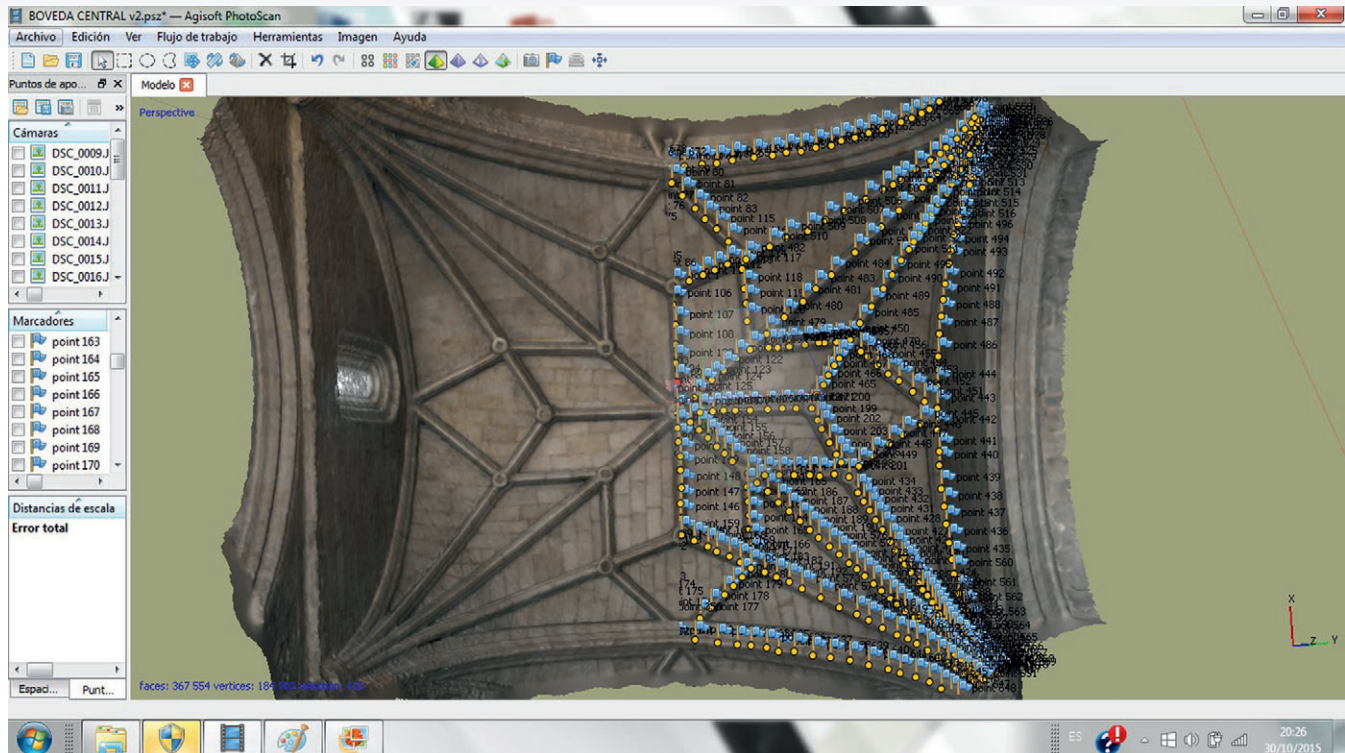
Entendida de esta manera la configuración constructiva de una bóveda de crucería, los datos fundamentales para su análisis son las directrices y los perfiles de los nervios, junto con la altura de los enjarjes, desde la que parten los arcos, y la de las claves o cruces, a los que llegan. Estos datos se han medido con estación, desde comienzos del presente siglo cuando se popularizó la distanciometría láser.

Nosotros los obtuvimos mediante fotogrametría de correlación automática. Para alcanzar estos resultados y evaluar los aspectos previstos, se realizó una serie de 73 fotografías con una cámara Nikon D5000 provista de un sensor CMOS de 23,6 x 15,8 mm y un objetivo fijo de 18 mm. Empleamos un objetivo fijo por ser más luminoso que los habituales y para que las fotografías tuviesen la misma distancia focal, pues si bien en el pasado esta condición era estricta, en la actualidad es recomendable para mejorar el resultado. Por el mismo motivo

el enfoque lo situamos en manual enfocado al infinito. Las fotografías se hicieron con una resolución de 4288 x 2848 píxeles. Al ser fotografías de un interior se empleó el modo de prioridad de apertura, que determina automáticamente la velocidad del obturador una vez fijada la sensibilidad el sensor y la apertura del diafragma. La sensibilidad elegida fue ISO 100, que permite la mayor resolución posible, y una apertura del diafragma pequeña F11 para aumentar la profundidad de campo y la nitidez de la imagen. Las fotografías se hicieron con trípode, empleando el autodisparador para evitar trepidaciones y sin flash. Se realizaron dos series fotográficas desde el suelo de la iglesia, la primera serie de eje vertical, y las de la segunda convergentes dirigidas al centro de la bóveda. Las dos series se procesaron conjuntamente.

The program uses algorithms that automatically determine homologous points in different images and, following the principles of direct linear transformation (DLT), calibrates the camera, rendering the use of an express calibration methodology unnecessary. It simultaneously determines parameters of the relative orientations of photographs (i.e., the relative spatial position at the time they were taken). It then densifies the point cloud and creates a mesh of triangular elements that corresponds to the surface of the recorded model. What is produced is a surface model that is highly representative of the real model because it reflects boss specifications, rib profiles and even lierne rib joints. It determines the sufficient precision required for the geometric analysis of a vault. Finally, the original photographs are mapped on a triangular surface. The result is a virtual model of non-specific size and orientation. To perform the formal analysis of a vault, it is not necessary to determine the absolute orientation, as the shape is independent of the size. However, to level and scale the model, we must determine the coordinates of at least three





points that can be obtained from a Total Station theodolite or modern mini-stations, which perform similar functions with smaller scope and data storage capacities but are sufficient for determining necessary coordinates of a few points (perhaps eight or ten located no more than 40 metres away), as in the case of the highest vaults. The mini-stations are small in size and thus can be mounted on a photographic tripod rather than on a less practical survey tripod. The assignment of coordinates to a set of points in the model does not modify or alter its geometry, as it only adjusts its orientation and size.

To obtain points from directrices of the arches and their profiles, we follow two paths; the most immediate and generic involves selecting required points of the cloud and exporting them to a format that can be read by typical drawing and modelling programs; the most specific approach involves using the approach provided with the program that involves placing points called markers on the free or textured surface of the virtual model and then exporting them. When we want to obtain the coordinates of a set of generic points (e.g., those that define the directrix of an arch), we use the former;

El software fotogramétrico utilizado ha sido el programa PhotoScan de la empresa AgiSoft LLC, cuya versión demostración es gratuita durante 30 días. El programa emplea algoritmos que determinan de forma automática puntos homólogos en distintas imágenes y siguiendo los principios de la transformación lineal directa (LTD) calibra la cámara, haciendo innecesaria una metodología expresa de calibración, y simultáneamente determina los parámetros de la orientación relativa de las fotografías, es decir la posición espacial relativa en el momento en que se tomaron. A continuación densifica la nube de puntos y crea un malla de triángulos que se ajusta a la superficie del modelo real registrado.

El resultado es un modelo superficial que reproduce la del modelo real con detalle pues refleja la de-

coración de la claves, los perfiles de los nervios e incluso las juntas de la plementería. Tiene la precisión suficiente que se precisa para el análisis geométrico de la bóveda

Finalmente sobre la superficie triangular se mapean las fotografías originales. El resultado es un modelo virtual, de tamaño y orientación inespecífica. Para realizar el análisis formal de la bóveda estrictamente no sería necesario llevar a cabo la orientación absoluta, puesto que la forma es independiente del tamaño. No obstante, para nivelar y escalar el modelo precisamos conocer las coordenadas de al menos tres puntos que podemos obtener mediante estación total o las modernas mini-estaciones, que realizan funciones similares aunque con menor alcance y capacidad de almacenamiento de datos, pero suficientes para los requerimientos exigibles que se re-



sumen en dar coordenadas a unos pocos puntos, ocho o diez, situados a no más de 40 metros, en el caso de las bóvedas más altas. Las mini-estaciones tienen la ventaja de su reducido tamaño y que se pueden montar sobre trípode fotográfico, mucho más prácticos que los topográficos. La asignación de coordenadas a un conjunto de puntos del modelo no modifica ni altera su geometría, tan solo ajusta su orientación y tamaño.

Para obtener puntos de las directrices de los arcos y sus perfiles seguimos dos caminos; el más inmediato y genérico consiste en seleccionar los puntos requeridos de la nube y exportarlos a un formato que lean los programas habituales de dibujo y modelado; el más específico consiste en emplear la opción que da el programa de situar puntos, que llama marcadores, sobre la superficie, cruda o con texturas, del modelo virtual, y a continuación exportarlos. Si queremos obtener las coordenadas de conjuntos de puntos genéricos, por ejemplo que definan la directriz de un arco, empleamos el primero, en cambio cuando queremos conocer las coordenadas de puntos concretos y específicos, como el comienzo de las jarjas o las juntas de un arco, resulta más apropiado el segundo.

Para concluir el proceso el modelo digital se puede ortoproyectar sobre un plano y obtener una ortoimagen al modo del alzado, la planta o sección. Una ortoimagen también permite dibujar sobre ella aquellos elementos de interés mediante cualquier programa de dibujo.

## Conclusiones

La metodología fotogramétrica ha experimentado importantes cambios en los últimos años, siendo el

más notable el uso de sistemas de correlación automática implementados en programas informáticos intuitivos que no requieren una gran especialización por parte del usuario. También han sido importantes los avances relacionados con la calibración de la cámara que los nuevos programas de fotogrametría realizan simultáneamente a la orientación relativa de los fotogramas y permiten el uso de cámaras convencionales.

Estos avances han contribuido notablemente a acercar la fotogrametría arquitectónica a un amplio número de usuarios y a popularizarla en cuanto a registro espacial. Un aplicación de resultados contrastados es el relacionado con el estudio de bóvedas para el análisis de su forma y configuración constructiva. ■

### Referencias

- ALONSO VIDAL, E., 2014. “Desarrollo y validación de un sistema de modelado 3D de software abierto” <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/13086/1/TFG-I-155.pdf>
- BURKHARDT, R., 1987. “Métodos e instrumentos analógicos. Desarrollo histórico de los equipos y métodos fotogramétricos”. Instituto Panamericano de Geografía e Historia. México.
- GENTIL BALDRICH, J., 1998. “Método y aplicación de representación acotada y del terreno”. Ed. Bellisco.
- RODRIGUEZ NAVARRO, P., 2012. “La fotogrametría digital automatizada frente a los sistemas basados en sensores 3D activos”. *Revista EGA*, nº 20, pp.100-111, Valencia.
- SOUTO-VIDAL, M., ORTIZ-SANNZ J., GIL-OCAMPO, M., 2015. “Implementación del levantamiento eficiente de fachadas mediante fotogrametría digital automatizada y el uso de software gratuito”. *Informes de la Construcción*, 67(539): e107, doi:<http://dx.doi.org/10.3989/ic.14.098>.
- WILLIS, Robert, 1840. “On the construction of the vaults of the middle ages”. *Transactions of the Institute of British Architects*, vol 1, parte 2. Traducción al castellano por PLIEGO DE ANDRES, E., 2012 Instituto Juan de Herrera, Madrid.

however, when we want to determine the coordinates of actual and specific points (e.g., the beginning of joints of an arch), the latter is more appropriate.

To conclude the process, the digital model can be orthoprojected on a plane to obtain an orthoimage in elevation, plan or section mode. An orthoimage also allows elements of interest to be drawn on using any drawing program.

## Conclusions

Photogrammetric methodologies have undergone significant changes in recent years, with the most notable involving the use of automatic correlation systems implemented through intuitive computer programs that do not require considerable expertise from the user. There have also been significant advances related to camera calibration that new photogrammetry programs simultaneously perform relative to the orientation of frames that permit the use of conventional cameras.

These advances have notably helped deliver architectural photogrammetry to a large number of users and have popularized it within the realm of spatial tools. One application is related to the study of vaults for analysing shapes and constructions. ■

### References

- ALONSO VIDAL, E., 2014. “Desarrollo y validación de un sistema de modelado 3D de software abierto” <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/13086/1/TFG-I-155.pdf>
- BURKHARDT, R., 1987. “Métodos e instrumentos analógicos. Desarrollo histórico de los equipos y métodos fotogramétricos”. Instituto Panamericano de Geografía e Historia. México.
- GENTIL BALDRICH, J., 1998. “Método y aplicación de representación acotada y del terreno”. Ed. Bellisco.
- RODRIGUEZ NAVARRO, P., 2012. “La fotogrametría digital automatizada frente a los sistemas basados en sensores 3D activos”. *Revista EGA*, nº 20, pp.100-111, Valencia.
- SOUTO-VIDAL, M., ORTIZ-SANNZ J., GIL-OCAMPO, M., 2015. “Implementación del levantamiento eficiente de fachadas mediante fotogrametría digital automatizada y el uso de software gratuito”. *Informes de la Construcción*, 67(539): e107, doi:<http://dx.doi.org/10.3989/ic.14.098>.
- WILLIS, Robert, 1840. “On the construction of the vaults of the middle ages”. *Transactions of the Institute of British Architects*, vol 1, parte 2. Traducción al castellano por PLIEGO DE ANDRES, E., 2012 Instituto Juan de Herrera, Madrid.