



Anisotropía en materiales. Efecto del ángulo de orientación de la fibra de refuerzo en las propiedades elásticas de una lámina de material compuesto.

Apellido, nombre	Balart Gimeno, Rafael Antonio (rbalart@mcm.upv.es) Quiles Carrillo, Luís Jesús (luiquic1@epsa.upv.es) Néstor Montañés Muñoz (nesmonmu@upvnet.upv.es) Teodomiro Boronat Vitoria (tboronat@dimmm.upv.es) Octavio Ángel Fenollar Gimeno (OCFEGI@epsa.upv.es)
Departamento	Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (DIMM)
Centro	Escuela Politécnica Superior de Alcoy (EPSA) Universitat Politècnica de València (UPV)



1 Resumen de las ideas clave

Este artículo aborda el efecto que tiene el **ángulo de orientación** (θ) de las **fibras de refuerzo** en una **lámina de material compuesto** reforzada sobre las **constantes ingenieriles** o constantes elásticas. Este artículo es clave para entender la naturaleza **anisotrópica** de los materiales compuestos y la necesidad de trabajar con estructuras de laminados formados con capas con fibras orientadas en diferentes direcciones para minimizar o paliar al máximo esta anisotropía.

2 Introducción

Los **materiales compuestos** han adquirido gran relevancia en el panorama de la ingeniería ya que se trata de materiales con una **excelente combinación** de propiedades: ligereza, alta tensión de rotura, elevada rigidez, buena resistencia a la corrosión, etc. Es por ello que es posible encontrar, de forma creciente, materiales compuestos en sectores de alto contenido tecnológico tales como el transporte: náutico, automóvil, ferroviario y, fundamentalmente en el sector aeronáutico donde se requieren materiales de bajo peso y elevadas propiedades mecánicas. Los compuestos también han invadido el sector aeroespacial, construcción, militar, deporte, médico, eléctrico-electrónico, de tal manera que en la actualidad se encuentran ampliamente introducidos en la práctica **totalidad de los sectores industriales**.

Si bien es cierto que los **materiales compuestos** ofrecen interesantes posibilidades frente a materiales tradicionales, los compuestos presentan una particularidad y es que se trata de **materiales anisotrópicos**, es decir, que ofrecen propiedades diferentes según la dirección considerada. La estructura más habitual de material compuesto es la formada por un apilamiento de capas con fibras o tejidos con diversas orientaciones con el fin de conseguir, de forma global, cubrir de manera homogénea las direcciones de refuerzo y, de esta manera, alcanzar un comportamiento lo más parecido a la isotropía.

Bajo este marco, el ángulo de las fibras en cada una de las capas desempeña un papel relevante ya que, en función de la orientación de las fibras en cada una de las capas o láminas, se proporcionará rigidez o resistencia longitudinal, transversal, a cortadura o cizalla, etc. Las **constantes elásticas** de una **lámina unidireccional** vienen definidas por:

- E_1 Módulo elástico longitudinal.
- E_2 Módulo elástico transversal.
- G_{12} Módulo de cortadura en la dirección 1-2
- ν_{12} Módulo de Poisson en la dirección 1-2
- ν_{21} Módulo de Poisson en la dirección 2-1

Siendo los subíndices 1 y 2 las direcciones longitudinal (L) y transversal (T) de las fibras en una lámina con fibra de refuerzo unidireccional. Sin embargo, cuando las fibras se orientan un determinado **ángulo** (θ), las propiedades cambian de forma directa con la magnitud de este ángulo, repercutiendo en las propiedades elásticas de la lámina y, en consecuencia, en las propiedades globales del material compuesto. Un correcto diseño de estructura de laminado implica una correcta selección de ángulos de

orientación de fibras para conseguir las propiedades deseadas en el laminado, de ahí la importancia de evaluar cómo influye el ángulo de las fibras en las propiedades de una lámina.

3 Objetivos

El objetivo de este artículo docente es que **analices** la influencia del **ángulo de orientación** de las fibras (θ) en una lámina de compuesto con fibra unidireccional, sobre las propiedades elásticas o **constantes ingenieriles**. Bajo esta premisa, otro de los objetivos es que **evalúes gráficamente** la influencia del ángulo de las fibras (θ) en cada una de las constantes globales de una lámina de compuesto reforzada con fibra larga unidireccional.

4 Desarrollo

En la **Figura 1** se resume esquemáticamente la geometría de una lámina de compuesto con fibra larga unidireccional en la que no se aprecia un ángulo en la dirección de las fibras ya que la dirección de las fibras coincide con una de las direcciones locales (1). El estado tensional que puede soportar esta lámina, se muestra en la **Figura 1** (izquierda) y está constituido por la tensión longitudinal (σ_1), la tensión transversal (σ_2) y la tensión de cortadura o cizalla (τ_{12}). En relación a las deformaciones que se pueden producir en esta lámina, destacan la elongación longitudinal (ϵ_1), la elongación transversal (ϵ_2) y la elongación o deformación de cortadura (γ_{12}) [1].

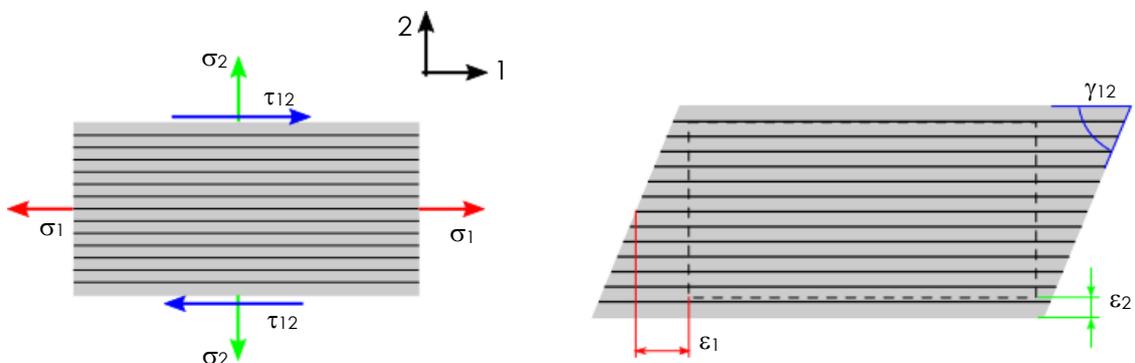


Figura 1. Representación esquemática de las tensiones y deformaciones en el plano en una lámina de material compuesto con fibra larga unidireccional, en las direcciones locales (1-2).

La relación existente entre las tensiones y las deformaciones en el plano, viene dada por la **Expresión 1** que representa una extensión de la **Ley de Hooke**.



$$[\varepsilon]_{12} = [S] \cdot [\sigma]_{12}$$

$$[\sigma]_{12} = [Q] \cdot [\varepsilon]_{12}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}; [Q] = [S]^{-1}$$

Expresión 1

En estas expresiones, la matriz $[\varepsilon]_{12}$ representa un vector con las deformaciones en el plano ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$) y, obviamente, la matriz $[\sigma]_{12}$, contiene los valores de las tensiones en el plano en las direcciones locales ($\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$). La **matriz [S]** es la denominada matriz de conformidad o **flexibilidad local** y los términos se obtienen a partir de las propiedades de las **constantes ingenieriles** de la lámina. Finalmente, la **matriz [Q]** representa la **matriz de rigidez local** de la lámina y es la matriz inversa de la de flexibilidad [S] [2, 3].

Las constantes ingenieriles de la lámina en las direcciones locales se pueden estimar mediante diferentes modelos (**Expresión 2 – 6**). Seguidamente se muestran las expresiones correspondientes al modelo de **Halpin-Tsai**, ampliamente utilizadas en laminados de material compuesto. Estas constantes ingenieriles se pueden obtener a partir de la información de las propiedades elásticas de la matriz (E_m, G_m, ν_m), de la fibra de refuerzo (E_f, G_f, ν_f) y de la fracción en volumen de fibras (ν_f).

$$E_1 = E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot (1 - \nu_f)$$

Expresión 2

$$E_2 = \frac{E_m \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \nu_f)}{1 - \beta \cdot \nu_f}; \beta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2}$$

Expresión 3

$$G_{12} = G_m \cdot \frac{(G_f + G_m) + \nu_f \cdot (G_f - G_m)}{(G_f + G_m) - \nu_f (G_f - G_m)}$$

Expresión 4

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot (1 - \nu_f)$$

Expresión 5

$$\nu_{21} = \nu_{12} \cdot \left(\frac{E_2}{E_1} \right)$$

Expresión 6

Estas expresiones son válidas si las fibras no están orientadas en ningún ángulo (θ), pero, es posible que te plantees ¿**qué ocurre cuando la dirección de las fibras no**

coincide con las direcciones principales? Esto es lo que vamos a abordar en el apartado próximo.

4.1 Relaciones tensión-deformación en una lámina de material compuesto en las direcciones globales (x-y).

La **Figura 2** muestra una situación similar a la descrita en la **Figura 1**, pero en este caso, las fibras forman un ángulo (θ) con los ejes principales. Evidentemente el estado tensional que se muestra en la **Figura 2**, no coincide con las direcciones locales (1-2) y, evidentemente, está referenciado a las direcciones globales (x-y) [4, 5].

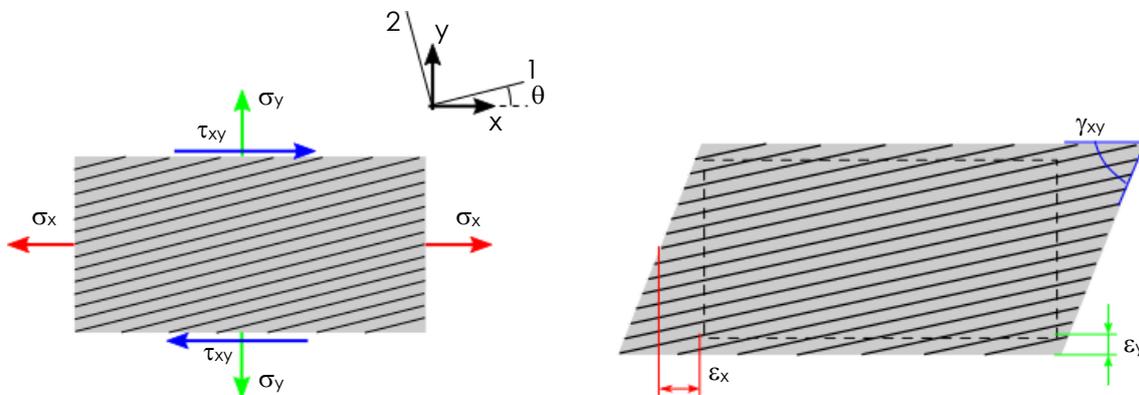


Figura 2. Representación esquemática de las tensiones y deformaciones en el plano en una lámina de material compuesto con fibra larga unidireccional con las fibras orientadas un ángulo (θ) con respecto a las direcciones globales (x-y).

Como las fibras forman un ángulo θ con la dirección x, es necesario relacionar las tensiones y deformaciones en direcciones locales (1-2) y globales (x-y). Para ello, se requiere de una **transformación trigonométrica**, ligada al ángulo θ , de tal manera que se puede establecer una relación directa entre las tensiones en las direcciones locales $[\sigma]_{12}$ y las tensiones en las direcciones globales $[\sigma]_{xy}$ (**Expresión 7**) a través de una matriz de proporcionalidad que representa una transformación trigonométrica del vector columna tensiones en el plano. Esta matriz, $[T\sigma]$ se denomina **matriz de transformación de tensiones** y depende el ángulo (θ) (**Expresión 8**).

$$[\sigma]_{12} = [T\sigma] \cdot [\sigma]_{xy} \quad \text{Expresión 7}$$

$$[T\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad \text{Expresión 8}$$

Similar deducción se puede realizar con las deformaciones o elongaciones en el plano tal y como se muestra en la **Expresión 9** y **Expresión 10** que indican la relación



entre las **deformaciones en el plano** en las direcciones locales y globales y los valores de la **matriz de transformación de deformaciones [T ϵ]**, respectivamente.

$$[\epsilon]_{12} = [T\epsilon] \cdot [\epsilon]_{xy} \quad \text{Expresión 9}$$

$$[T\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta \\ -2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta & 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad \text{Expresión 10}$$

Teniendo en cuenta la **Expresión 9**, se puede escribir de forma inversa tal y como se muestra en la **Expresión 11**:

$$[\epsilon]_{xy} = [T\epsilon]^{-1} \cdot [\epsilon]_{12} \quad \text{Expresión 11}$$

Si en la **Expresión 11** se substituye el valor de $[\epsilon]_{12}$ según la **Expresión 1**, se tiene:

$$[\epsilon]_{xy} = [T\epsilon]^{-1} \cdot [S] \cdot [\sigma]_2 \quad \text{Expresión 12}$$

Finalmente, si se substituye la **Expresión 7** correspondiente a la relación entre las tensiones en las direcciones locales y globales en la **Expresión 12**, se obtiene.

$$[\epsilon]_{xy} = [T\epsilon]^{-1} \cdot [S] \cdot [T\sigma] \cdot [\sigma]_{xy} \quad \text{Expresión 13}$$

Por analogía con la ecuación general descrita anteriormente para las direcciones locales (1-2) (**Expresión 1**), la **Expresión 13** puede escribirse de la siguiente manera:

$$[\epsilon]_{xy} = [\bar{S}] \cdot [\sigma]_{xy} \quad \text{Expresión 14}$$

Siendo $[\bar{S}]$ la matriz de flexibilidad global, que queda definida, tal y como sugiere la **Expresión 13** como:

$$[\bar{S}] = [T\epsilon]^{-1} \cdot [S] \cdot [T\sigma] \quad \text{Expresión 15}$$

Con la misma analogía existente entre las matrices de flexibilidad local $[S]$ y de rigidez local $[Q]$, es posible reescribir la **Expresión 14** en su forma inversa, quedando:

$$[\sigma]_{xy} = [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon]_{xy}$$

Expresión 16

La relación entre las **matrices de rigidez global** $[\bar{Q}]$ y la de **flexibilidad global** $[\bar{S}]$, es una relación inversa tal y como se muestra en la Expresión 17.

$$[\bar{Q}] = [\bar{S}]^{-1} = [T\varepsilon] \cdot [Q] \cdot [T\sigma]^{-1}$$

Expresión 17

Las características mecánicas o constantes ingenieriles de la lámina en las direcciones globales (x-y), se pueden determinar a partir de la matriz de flexibilidad global $[\bar{S}]$ por analogía con la matriz de flexibilidad local $[S]$. Si revisas la definición de la matriz de flexibilidad local tal y como se muestra en la **Expresión 1**, te darás cuenta que el primer término (S_{11}) representa la inversa del módulo en la dirección longitudinal ($1/E_1$). Así pues, por analogía, en la matriz de flexibilidad global $[\bar{S}]$, el término (\bar{S}_{11}) estará directamente relacionado con la inversa del módulo elástico en la dirección x, es decir ($1/E_x$) tal y como indica la **Expresión 18**.

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad [\bar{S}] = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta el procedimiento que se ha descrito para la obtención del módulo en la dirección x, ahora te animo a que intentes, a partir de los diferentes términos de la matriz de flexibilidad global de la lámina $[\bar{S}]$, identificar los valores del resto de las constantes ingenieriles y compararlo con las **Expresiones 18-22**.

$$E_x = \frac{1}{\bar{S}_{11}}$$

Expresión 18

$$E_y = \frac{1}{\bar{S}_{22}}$$

Expresión 19

$$G_{xy} = \frac{1}{\bar{S}_{33}}$$

Expresión 20

$$\nu_{xy} = E_x \cdot \bar{S}_{21}$$

Expresión 21

$$\nu_{yx} = E_y \cdot \bar{S}_{12}$$

Expresión 22



4.2 Influencia del ángulo de orientación de las fibras en las propiedades mecánicas elásticas o constantes ingenieriles en las direcciones globales (x-y).

Para evaluar la **influencia del ángulo de orientación** de las fibras (θ) en las propiedades elásticas de una lámina de material compuesto, vamos a suponer que disponemos de una lámina de material compuesto formada por una matriz epoxi con las siguientes propiedades: $E_m = 3.500$ MPa, $G_m = 1.296,3$ MPa y $\nu_m = 0,35$. En relación a la fibra de refuerzo, sus propiedades elásticas son: $E_f = 230.000$ MPa, $G_m = 30.000$ MPa y $\nu_m = 0,23$. El contenido en fibras viene definido por una fracción en volumen, ν_f de 0,7.

Con la información proporcionada en este ejemplo, el procedimiento para obtener el gráfico es el siguiente. Sería interesante que intentaras construir el gráfico a través de las siguientes etapas utilizando una herramienta para procesar datos como EXCEL.

- 1.- Obtener las propiedades mecánicas de la lámina en las direcciones locales (1-2), según las **Expresiones 2-6**. Para obtener estas constantes ingenieriles, se requiere la información de las propiedades elásticas de la matriz, de la fibra y la fracción en volumen de las fibras.
- 2.- Construir la matriz de flexibilidad local $[S]$ y su correspondiente matriz de rigidez local $[Q]$ tal y como se establece en la **Expresión 1**.
- 3.- Determinar las matrices de transformación de tensiones $[T\sigma]$ (**Expresión 8**) y de deformaciones $[T\varepsilon]$ (**Expresión 10**) a partir de un ángulo inicial de 0° .
- 4.- Construir la matriz de flexibilidad global $[\bar{S}]$ (**Expresión 15**) y su correspondiente matriz de rigidez global $[\bar{Q}]$ tal y como se establece en la **Expresión 17**.
- 5.- A partir de los términos de la matriz de flexibilidad global $[\bar{S}]$, se estiman las constantes ingenieriles en las direcciones globales (x-y) según las **Expresiones 18-22**.
- 6.- Se anotan en una tabla los valores correspondientes a este ángulo inicial.
- 7.- Para obtener la variación entre 0 y 90° , las etapas 1-6 deberán repetirse con incrementos de θ hasta alcanzar 90° ; por ejemplo con $\Delta\theta=5^\circ$ ó $7,5^\circ$ ó 10° .

Partiendo de la información anterior y siguiendo el procedimiento descrito, se obtiene un gráfico como el que se muestra en la **Figura 3** que ofrece la variación de las cinco **constantes ingenieriles** en las direcciones globales (E_x , E_y , G_{xy} , ν_{xy} y ν_{yx}) en función del **ángulo de orientación** de las fibras, en el rango comprendido entre 0° y 90° .

Para que los valores se puedan representar y observar diferencias en el mismo gráfico, los valores de G_{xy} , aparecen multiplicados por 10 y los valores de ν_{xy} y ν_{yx} se han multiplicado por 10^5 .

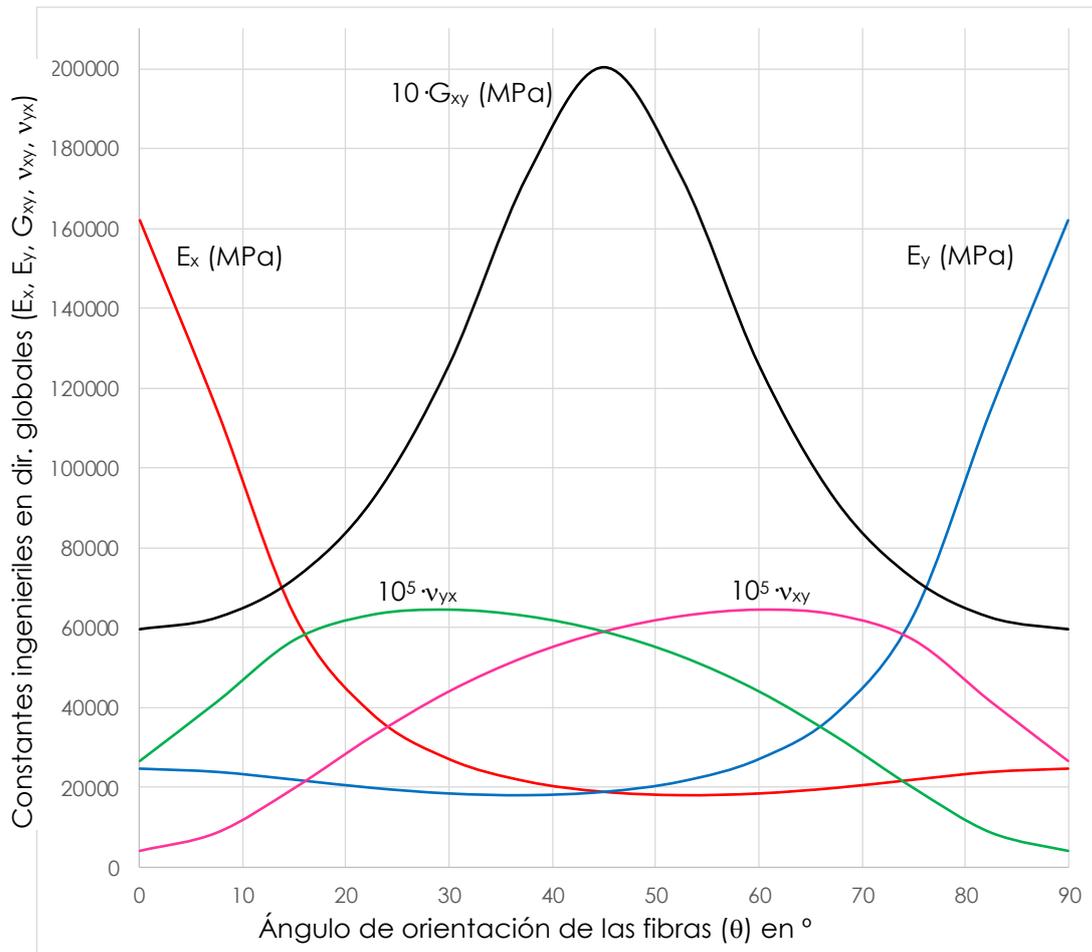


Figura 3. Representación gráfica de la variación de las diferentes constantes ingenieriles (E_x , E_y , G_{xy} , v_{xy} y v_{yx}) en una lámina de material compuesto con fibra larga unidireccional en función del ángulo (θ) de orientación de las fibras con respecto a las direcciones globales (x-y).

En relación a este gráfico, es posible realizar las siguientes consideraciones (intenta razonarlas al mismo tiempo que las vas leyendo).

- 1.- Se aprecia total simetría en el gráfico. Simetría especular entre E_x y E_y . De la misma manera, los módulos de Poisson v_{xy} y v_{yx} también muestran simetría especular, con el eje de simetría situado en 45° . Es por ello, que con solo comentar la evolución de E_x y de v_{xy} , la evolución de E_y y v_{yx} es simétrica respecto a 45° .
- 2.- El módulo E_x , alcanza el máximo para un ángulo de 0° . Este hecho es obvio ya que en 0° , la dirección de la fibra coincide con la dirección local 1 y con la dirección global x. Este módulo experimenta una reducción de gran magnitud a medida que aumenta el ángulo θ hasta valores mínimos situados entre $50 - 60^\circ$ y un ligero incremento posterior hasta 90° .
- 3.- El módulo de Poisson v_{xy} comienza con valores relativamente bajos para ángulos de 0° y va creciendo de forma progresiva hasta que alcanza el máximo



en torno a 60° . Cuanto mayor es el módulo de Poisson, peor es la estabilidad dimensional de la lámina ante esfuerzos en el plano.

4.- El módulo de cortadura, G_{xy} alcanza su valor máximo para un ángulo θ de 45° , lo cual era de esperar, ya que para este ángulo la cizalla fibra-matriz es máxima.

4. Conclusión

En el ámbito de la ingeniería se trabaja mucho con estructuras de **materiales compuestos** formadas por **laminados**. Estos laminados están formados por el apilamiento de diferentes láminas reforzadas con fibras, telas, etc. Con el fin de mejorar la **isotropía** en los materiales compuestos, **los ángulos** de las fibras o de los tejidos varía con el fin de cubrir el mayor número de direcciones. Evidentemente las propiedades mecánicas de una lámina están fuertemente ligadas al ángulo de orientación de las fibras (θ). Junto con este parámetro, las propiedades mecánicas elásticas tanto de la matriz como del refuerzo permiten, con el contenido de fibras (expresado en fracción en volumen de fibras, v_f), obtener las constantes de ingeniería tanto en las direcciones locales (1-2) como globales (x-y).

5. Referencias

- [1] Matthews, F.L., Rawlings, R.D. "Composite Materials, Engineering and Science", CRC Press (1999).
- [2] Hull, D. "Materiales Compuestos", Ed. Reverté (2003).
- [3] Miravete de Marco, A, "Materiales compuestos. Tomo I". Autor-Editor (2000).
- [4] Tsai, S. "Diseño y Análisis de Materiales Compuestos", Ed. Reverté (1988).
- [5] Gay, D. "Composite Materials: Design and Applications", Ed. CRC Press (2015).