



# Anisotropía en materiales. Comportamiento mecánico de laminados de material compuesto según Teoría Clásica de Laminados (CLT).

<b>Apellido, nombre</b>	Balart Gimeno, Rafael Antonio (rbalart@mcm.upv.es) Quiles Carrillo, Luís Jesús (luiquic1@epsa.upv.es) Néstor Montañés Muñoz (nesmonmu@upvnet.upv.es) Teodomiro Boronat Vitoria (tboronat@dimmm.upv.es) Octavio Ángel Fenollar Gimeno (OCFEGI@epsa.upv.es)
<b>Departamento</b>	Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (DIMM)
<b>Centro</b>	Escuela Politécnica Superior de Alcoy (EPSA) Universitat Politècnica de València (UPV)

## 1 Resumen de las ideas clave

Con este artículo docente se pretende abordar la complejidad que lleva asociada al cálculo de las **propiedades mecánicas de un laminado** de material compuesto formado por la **superposición** de capas o láminas con **fibras largas unidireccionales**, con diferentes ángulos de fibras con el fin de alcanzar un comportamiento cercano a la isotropía. Se lleva a cabo un **análisis** de las relaciones entre las **tensiones y las deformaciones** y se analizan las matrices características y su repercusión en las propiedades globales. Partiendo de modelos micromecánicos que permiten estimar las propiedades elásticas locales en una lámina, se procede a desarrollar las expresiones que implican el apilamiento o superposición de estas láminas individuales hasta conformar un laminado de material compuesto.

## 2 Introducción

Las **propiedades** mecánicas de los **materiales compuestos** representan un gran **reto** para los **ingenieros**. Es posible obtener estas propiedades de forma experimental mediante una serie de ensayos normalizados, pero esta opción exige la fabricación previa del material compuesto. Dada la fuerte presión que existe en nuestra sociedad por el consumo de tecnología, el **"time-to-market"** o tiempo que tarda un producto en salir al mercado es una variable crítica que marca el éxito o fracaso de este producto. Bajo este prisma, se plantea el empleo de herramientas que permitan predecir el comportamiento de los materiales compuesto, tanto en relación a sus propiedades elásticas como resistentes, sin necesidad de construir o fabricar el laminado ya que ello requiere mucho tiempo, tanto de fabricación como de caracterización.

Los **modelos micromecánicos** son bastante útiles para estimar las propiedades de una lámina de material compuesto con fibra larga unidireccional a partir de las propiedades elásticas de la matriz ( $E_m$ : módulo elástico o de tracción,  $G_m$ : módulo de cortadura,  $\nu_m$ : módulo de Poisson), de la fibra de refuerzo ( $E_f$ ,  $G_f$ ,  $\nu_f$ ) y de la fracción en volumen de fibras,  $\nu_f$ . Si bien son diversos los modelos micromecánicos que se pueden emplear para la predicción de las propiedades de la lámina en las direcciones locales (1-2), correspondientes a la dirección de las fibras (1) y su dirección perpendicular (2), el modelo de Halpin-Tsai es ampliamente utilizado. Las **Expresiones 1-5** de este modelo se resumen a continuación:

$$E_1 = E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot (1 - \nu_f)$$

**Expresión 1**

$$E_2 = \frac{E_m \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \nu_f)}{1 - \beta \cdot \nu_f}; \quad \beta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2}$$

**Expresión 2**

$$G_{12} = G_m \cdot \frac{(G_f + G_m) + \nu_f \cdot (G_f - G_m)}{(G_f + G_m) - \nu_f (G_f - G_m)}$$

**Expresión 3**

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot (1 - \nu_f)$$

**Expresión 4**

$$\nu_{21} = \nu_{12} \cdot \begin{pmatrix} E_2 \\ E_1 \end{pmatrix}$$

### Expresión 5

En cuanto a las relaciones entre las tensiones en el plano  $[\sigma]_{12}$ : vector columna con las tensiones en el plano,  $\sigma_1$ : tensión longitudinal a las fibras,  $\sigma_2$ : tensión transversal,  $\tau_{12}$ : tensión de cortadura o cizalla en la dirección 1-2, y las deformaciones en el plano, definidas por un vector columna  $[\varepsilon]_{12}$  que contiene las diferentes deformaciones,  $\varepsilon_1$ : elongación longitudinal,  $\varepsilon_2$ : elongación transversal,  $\gamma_{12}$ : elongación o deformación de cortadura), la **Expresión 6** muestra estas relaciones que son una ampliación de la Ley de Hooke para situaciones de tensiones en el plano.

$$[\varepsilon]_{12} = [S] \cdot [\sigma]_{12}$$

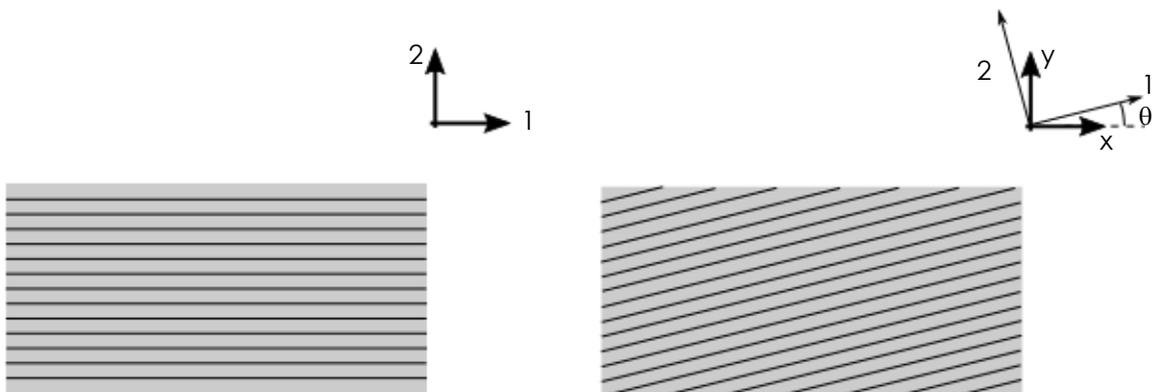
$$[\sigma]_{12} = [Q] \cdot [\varepsilon]_{12}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}; [Q] = [S]^{-1}$$

### Expresión 6

La **matriz [S]** se denomina **matriz de flexibilidad** o de conformidad local y sus términos derivan de las constantes ingenieriles obtenidas mediante algún modelo micromecánico (revisar **Expresiones 1-5** y su relación con [S]). La **matriz [Q]** representa la **matriz de rigidez local** de la lámina y es la matriz inversa de la de flexibilidad [S].

Otro aspecto relevante en el análisis de laminados de material compuesto es que habitualmente se superponen o apilan láminas con fibras orientadas en diversos ángulos con el fin de obtener un comportamiento **lo más cercano a la isotropía**. Es por ello que se requiere un análisis de las relaciones entre las tensiones y deformaciones locales definidas por  $[\sigma]_{12}$  y  $[\varepsilon]_{12}$  respectivamente y las tensiones y deformaciones globales ligadas a un ángulo  $\theta$ , definidas por  $[\sigma]_{xy}$  y  $[\varepsilon]_{xy}$  respectivamente. En la **Figura 1**, se muestra claramente la geometría del laminado en las direcciones locales y en las direcciones globales.



**Figura 1.** Representación de una lámina de material compuesto sin ángulo de orientación (izq.) en la que la dirección de las fibras coincide con las direcciones locales (1-2) y lámina de material compuesto (der.) con fibras orientadas un ángulo  $\theta$  con respecto a las direcciones globales (x-y).

$$[\varepsilon]_{xy} = [\bar{S}] \cdot [\sigma]_{xy}$$

$$[\sigma]_{xy} = [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon]_{xy}$$

$$[\bar{S}] = [T\varepsilon]^{-1} \cdot [S] \cdot [T\sigma] ; [\bar{Q}] = [\bar{S}]^{-1}$$

$$[T\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix}$$

**Expresión 7**

$$[T\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta \\ -2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta & 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix}$$

En estas expresiones,  $[\sigma]_{xy}$  representa un vector columna con los valores de las tensiones en las direcciones globales ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ). De forma análoga, la matriz  $[\varepsilon]_{xy}$  representa un vector columna con las deformaciones en las direcciones globales ( $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ). La **matriz  $[\bar{S}]$  representa la matriz de flexibilidad global** y, de forma análoga, la **matriz  $[\bar{Q}]$  se corresponde con la matriz de rigidez global** de la lámina. Estas matrices se obtienen mediante transformaciones trigonométricas empleando la matriz de transformación de tensiones  $[T\sigma]$  y la matriz de transformación de deformaciones,  $[T\varepsilon]$ , que están directamente ligadas al ángulo de orientación de las fibras  $\theta$ .

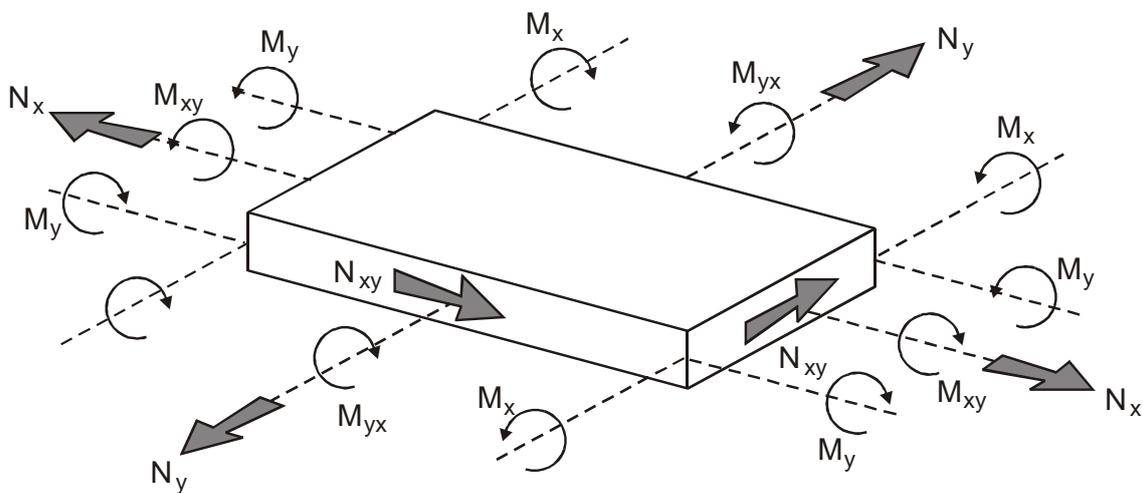
Si bien las expresiones y deducciones que estamos viendo pueden resultarte un poco complejas, lo cierto es que básicamente se refieren a la Ley de Hooke generalizada de tal manera que es fácil asimilar, por ejemplo, la matriz de rigidez global de la lámina  $[\bar{Q}]$  al término de módulo elástico (E) que aparece en la expresión de la Ley de Hooke para tensiones uniaxiales ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ). Una vez revisados estos conceptos básicos de comportamiento elástico de láminas de material compuesto, estás preparado para abordar la construcción de laminados.

### 3 Objetivos

El objetivo de este artículo docente es que **seas capaz de deducir** las expresiones que rigen el **comportamiento de un laminado** de material compuesto a partir de las propiedades y características de las diferentes láminas que lo componen. Otro objetivo claro es que te **familiarices** con las matrices que rigen la **rigidez** y **flexibilidad** del material compuesto, denominadas **[ABBD]** y **[abβd]** y su repercusión en las deformaciones en el compuesto y que seas capaz de **estimar** las **propiedades mecánicas** del laminado en las **direcciones globales**.

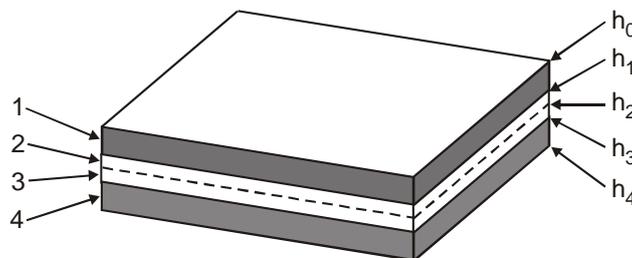
## 4 Desarrollo

Para que puedas realizar el análisis del comportamiento mecánico de un laminado de material compuesto, vamos a considerar un laminado de material compuesto simétrico que consta de "i" láminas de matriz polimérica con propiedades ( $E_m$ ,  $G_m$  y  $\nu_m$ )<sub>i</sub> con una fracción en volumen de fibras de refuerzo ( $\nu_f$ )<sub>i</sub> con propiedades ( $E_f$ ,  $G_f$  y  $\nu_f$ )<sub>i</sub>. Cada una de las capas tiene un espesor  $h(i)$  y presenta cierta orientación de las fibras ( $\theta_i$ ). El laminado de material compuesto está sometido a un estado tensional complejo formado por fuerzas en el plano ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ) y momentos en el plano ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ). Como puedes observar, este análisis es algo más complejo que el de láminas individuales ya que, además, se introducen momentos en el análisis, que son responsables de las curvaturas en el laminado.



**Figura 1.** Representación esquemática de un laminado de material compuesto formado por la superposición de capas o láminas y estado tensional al que puede estar sometido el laminado de forma genérica.

Bajo estas premisas, el problema que vamos a abordar es determinar las expresiones que permiten calcular las propiedades del laminado en las direcciones x-y y la relación entre las tensiones y las deformaciones en el laminado en estas direcciones globales (x-y). Para un análisis más sencillo vamos a tomar como referencia un laminado como el de la **Figura 2**, donde la posición de cada una de las láminas viene definida por las cotas o alturas ( $h_i$ )

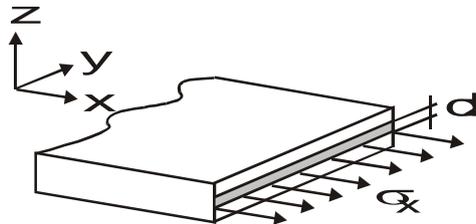


**Figura 2.** Representación esquemática de un laminado formada por diversas capas con la identificación de la línea neutra (en línea discontinua) y las cotas en altura de cada una de las capas ( $h_i$ ).

De la observación del gráfico se deduce que el espesor de cada una de las láminas viene definido por la expresión:

$$h(i)=h_i - h_{i-1}$$

**Expresión 8**



**Figura 3.** Representación esquemática la fuerza normal actuando en la dirección x en un elemento diferencial dz del laminado de material compuesto.

La fuerza total que está soportando un elemento diferencial dz en la dirección x ( $N_x$ ) viene dada por la **Expresión 9**.

$$N_x = \int \sigma_x \cdot dz$$

**Expresión 9**

Esta expresión puede generalizarse para todas las direcciones en la matriz [N] que es un vector columna con las fuerzas en el plano ( $N_x, N_y, N_{xy}$ )

$$[N] = \int [\sigma] \cdot dz$$

**Expresión 10**

De la misma manera los momentos que actúan sobre el compuesto, teniendo en cuenta la definición de momento como producto de fuerza por distancia, se obtiene la **Expresión 11**, donde [M] es un vector columna con valores ( $M_x, M_y, M_{xy}$ )

$$[M] = \int [\sigma] \cdot z \cdot dz$$

**Expresión 11**

La deformación unitaria vendrá determinada por una componente de deformaciones en el plano ( $\epsilon$ ): vector columna ( $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ ) y una componente curva resultado de la flexión, que vendrá definida por ( $z/R$ ) o también puede expresarse como  $z \cdot c$ , donde c hace referencia al vector columna con las curvaturas de flexión ( $c_x, c_y, c_{xy}$ ).

$$\epsilon(z) = \epsilon + z \cdot c$$

**Expresión 12**

Teniendo en cuenta la ecuación que aparece en la segunda línea de la **Expresión 7**, es posible establecer (recuerda que  $[\bar{Q}]$  es la matriz de rigidez global de la lámina, que tiene en cuenta el ángulo de orientación de las fibras).

$$\sigma(z) = [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon] + [\bar{Q}] \cdot z \cdot [C] \quad \text{donde } [\bar{Q}] = [T\varepsilon] \cdot [Q] \cdot [T\sigma]^{-1}$$

**Expresión 13**

Si el laminado consta de  $l_r$  láminas, la fuerza total que actúa sobre el laminado es:

$$[N]_T = \sum_{i=1}^{l_r} [N]_i = \sum_{i=1}^{l_r} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\sigma]_i \cdot dz = \sum_{i=1}^{l_r} \left\{ [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon] \cdot \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz + [\bar{Q}] \cdot [C] \cdot \int_{h_{i-1}}^{h_i} z \cdot dz \right\}_i$$

**Expresión 14**

$$= \sum_{i=1}^{l_r} \left\{ [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon] \cdot (h_i - h_{i-1}) + [\bar{Q}] \cdot [C] \cdot \left( \frac{1}{2} \right) \cdot (h_i^2 - h_{i-1}^2) \right\}_i$$

Esta expresión puede simplificarse como:

$$[N]_T = [A] \cdot [\varepsilon] + [B] \cdot [C]$$

**Expresión 15**

La **matriz [A]** se denomina **matriz extensional** y su valor se obtiene según la **Expresión 16**.

$$[A] = \sum_{i=1}^{l_r} [\bar{Q}]_i \cdot (h_i - h_{i-1})$$

**Expresión 16**

En relación a la **matriz [B]**, destacar que se denomina **matriz de acoplamiento** y se puede obtener de la siguiente manera:

$$[B] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{l_r} [\bar{Q}]_i \cdot (h_i^2 - h_{i-1}^2)$$

**Expresión 17**

En lo referente a los momentos que actúan sobre el laminado, el análisis es similar:

$$[M]_T = \sum_{i=1}^{l_r} [M]_i = \sum_{i=1}^{l_r} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\sigma] \cdot z \cdot dz = \sum_{i=1}^{l_r} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \left( [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon] \cdot z + [\bar{Q}] \cdot [C] \cdot z^2 \right) \cdot dz$$

$$= \sum_{i=1}^{l_r} \left\{ [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon] \cdot \int_{h_{i-1}}^{h_i} z \cdot dz + [\bar{Q}] \cdot [C] \cdot \int_{h_{i-1}}^{h_i} z^2 \cdot dz \right\}_i$$

**Expresión 18**

$$= \sum_{i=1}^{l_r} \left\{ [\bar{Q}] \cdot [\varepsilon] \cdot \left( \frac{1}{2} \right) \cdot (h_i^2 - h_{i-1}^2) + [\bar{Q}] \cdot [C] \cdot \left( \frac{1}{3} \right) \cdot (h_i^3 - h_{i-1}^3) \right\}_i$$

Esta expresión puede esquematizarse como:

$$[M]_T = [B] \cdot [\varepsilon] + [D] \cdot [C] \quad \text{Expresión 19}$$

Donde la **matriz [B]** o **matriz de acoplamiento** adquiere el mismo valor que el descrito en la Expresión 17 y la **matriz [C]**, también **denominada de curvaturas**, se obtiene según la siguiente expresión.

$$[D] = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{h_T} [\bar{Q}]_i \cdot (h_i^3 - h_{i-1}^3) \quad \text{Expresión 20}$$

A partir de las **Expresiones 15 y 19**, es posible establecer la relación entre las fuerzas y los momentos aplicados sobre el laminado y las deformaciones unitarias y curvaturas. Esta relación viene dada por la **Expresión 21** (en su forma reducida) o tal y como muestra la **Expresión 22**, en su forma ampliada.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ C \end{bmatrix} \quad \text{Expresión 21}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ C_x \\ C_y \\ C_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{Expresión 22}$$

Para calcular las características mecánicas del laminado, basta con formular la expresión anterior de forma inversa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \beta & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad \text{Expresión 23}$$

Si el laminado de material compuesto no está sometido a momentos flectores, se puede establecer:

$$[\varepsilon] = a \cdot [N] \quad \text{Expresión 24}$$

Teniendo en cuenta que  $[N] = h_T \cdot [\sigma]$ , la expresión anterior queda:

$$[\varepsilon] = a \cdot h_T \cdot [\sigma] \quad \text{Expresión 25}$$

Teniendo en cuenta que la matriz **[a]** es una matriz de 3x3, y considerando su **equivalencia** con los términos de la **matriz de flexibilidad local [S]**, es posible obtener las propiedades mecánicas elásticas del laminado.

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad \text{Expresión 26}$$

En la matriz de flexibilidad local [S], el término ( $S_{11}$ ) corresponde a la inversa del módulo de la lámina en la dirección longitudinal (1). Por analogía, el término ( $a_{11}$ ) de la matriz [a], está relacionado con la inversa del módulo del laminado en la dirección x, tal y como se muestra en la **Expresión 27**. Siguiendo el mismo razonamiento, intenta deducir el valor de las restantes propiedades elásticas ( $E_y$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$ ).

$$E_x = \frac{1}{a_{11} \cdot h_T} \quad \text{Expresión 27}$$

$$E_y = \frac{1}{a_{22} \cdot h_T} \quad \text{Expresión 28}$$

$$G_{xy} = \frac{1}{a_{33} \cdot h_T} \quad \text{Expresión 29}$$

$$\nu_{xy} = E_x \cdot a_{21} \cdot h_T \quad \text{Expresión 30}$$

$$\nu_{yx} = E_y \cdot a_{12} \cdot h_T \quad \text{Expresión 31}$$

## 4. Conclusión

El **análisis de laminados** de materiales compuestos mediante la **Teoría Clásica de Laminados** (CLT), representa una herramienta de gran utilidad para predecir las propiedades mecánicas elásticas de un laminado formado por el apilamiento de diversas láminas o capas formadas por una matriz en la cual se encuentran embebidas las fibras de refuerzo. A partir de las propiedades de la matriz, de las fibras, de la cantidad en volumen de fibras ( $\nu_f$ ), del ángulo de orientación de las fibras ( $\theta$ ) y de la geometría del laminado (posición de capas, espesor de capas, etc.), es posible realizar una estimación de las propiedades mecánicas del laminado, aspecto que es de gran relevancia para predecir las propiedades sin necesidad de fabricar el laminado, de tal manera que la CLT se consolida como una **herramienta muy útil** para **desarrollo y diseño de laminados de material compuesto**, con su repercusión positiva en el tiempo de diseño y desarrollo de producto.



## 5. Referencias

- [1] Miravete de Marco, A, "Materiales compuestos. Tomo I". Autor-Editor (2000).
- [2] Tsai, S. "Diseño y Análisis de Materiales Compuestos", Ed. Reverté (1988).
- [3] Matthews, F.L., Rawlings, R.D. "Composite Materials, Engineering and Science", RC Press (1999).
- [4] Gay, D. "Composite Materials: Design and Applications", Ed. CRC Press (2015).
- [5] Hull, D. "Materiales Compuestos", Ed. Reverté (2003).