



Anisotropía en materiales. Relación tensión-deformación en una lámina de material compuesto de fibra larga unidireccional.

Apellido, nombre	Balart Gimeno, Rafael Antonio (rbalart@mcm.upv.es) Quiles Carrillo, Luís Jesús (luiquic1@epsa.upv.es) Néstor Montañés Muñoz (nesmonmu@upvnet.upv.es) Teodomiro Boronat Vitoria (tboronat@dimmm.upv.es) Octavio Ángel Fenollar Gimeno (OCFEGI@epsa.upv.es)
Departamento	Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (DIMM)
Centro	Escuela Politécnica Superior de Alcoy (EPSA) Universitat Politècnica de València (UPV)



1 Resumen de las ideas clave

Este artículo se centra en el **análisis matricial** de las relaciones entre las **tensiones** aplicadas (σ) y las **deformaciones** (ε) en una **lámina de material compuesto**. Este análisis es la base para el análisis de **laminados de material compuesto** y te permitirá conocer con mayor profundidad las particularidades de los materiales **anisotrópicos**.

2 Introducción

Los **materiales compuestos** han ganado relevancia en las últimas décadas, situándose como materiales de **altas prestaciones** para aplicaciones de alto contenido tecnológico. La definición de material compuesto es muy amplia y contempla la combinación de dos o más materiales que consiguen un efecto sinérgico en dicha combinación. Uno de los ejemplos más habituales de materiales compuestos donde se aprecia esta sinergia es en los compuestos de matriz polimérica reforzados con fibra.

Las **resinas termoestables** como las epoxi (EP), poliéster insaturado (UP), fenólicas (PF), etc. se caracterizan por unas **propiedades mecánicas moderadas-bajas** comparadas con otros materiales altamente rígidos como la fibra de carbono (CF), de vidrio (GF), de aramida (AF), entre otras. No obstante, muchas de estas resinas termoestables se suministran en forma de **resinas bicomponente en estado líquido**. Al poner en contacto ambos componentes (o mediante el empleo de iniciadores o catalizadores), se produce una reacción de entrecruzamiento que convierte el líquido inicial en un **sólido rígido**. Este tipo de resinas, encuentran interesantes aplicaciones en el campo de los adhesivos, recubrimientos, sellantes, etc.

Por su parte, las fibras de alto rendimiento ofrecen unas propiedades realmente sorprendentes. Así, por ejemplo, en el caso de la **fibra de carbono** (CF), merece la pena destacar su **elevado módulo elástico** en torno a los 390 GPa. Si se compara este valor con el módulo elástico típico de los aceros, en torno a 210 GPa, la fibra de carbono está muy por encima en cuanto a rigidez. Además de esta ventaja, la fibra de carbono es muy ligera comparada con el acero, con una densidad en torno a 1,6-1,7 g/cm³ frente a los 7,8 g/cm³ típicos del acero.

No obstante, las **fibras o telas** de carbono son **flexibles** y **no mantienen la forma** una vez moldeadas. Así pues, se requiere el empleo de una **resina termoestable** líquida que permita el moldeo de la fibra/tela de carbono con la geometría deseada. Una vez se ha producido el entrecruzamiento de la resina, mantiene el estado sólido y las fibras/telas se mantienen en su posición. Este efecto sinérgico permite la obtención de **materiales de alta tecnología** para aplicaciones punteras como el sector aeronáutico, aeroespacial, sector del deporte, transporte, etc.

Los materiales compuestos presentan muchas ventajas frente a otros materiales convencionales en ingeniería como los metales, cerámicos o plásticos pero dada la alta direccionalidad de las fibras de refuerzo, las **propiedades** de las láminas de material compuesto suelen ser **altamente anisotrópicas** y es por ello que, en muchas ocasiones se trabaja con **laminados** de material compuesto, formados por la superposición de capas con fibras orientadas en diferentes ángulos, con la finalidad de alcanzar un comportamiento lo más cercano a la isotropía.

El diseño y cálculo con materiales compuestos implica trabajar con materiales **anisotrópicos**. Ello implica que las propiedades mecánicas de una lámina de material compuesto son diferentes según la dirección considerada y ello va a repercutir en las

prestaciones finales de los laminados obtenidos. La expresión básica de la **Ley de Hooke (Expresión 1)**, se amplía de forma considerable y es aplicable en láminas y laminados de material compuesto.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Expresión 1

3 Objetivos

El objetivo de este artículo docente es que **construyas** las **expresiones** que permiten relacionar las **tensiones** y las **deformaciones** en una lámina de material compuesto donde las fibras forman un ángulo de 0° con respecto a las direcciones locales, bajo la acción de esfuerzos en el plano. Dada la complejidad que adquiere el análisis de estas expresiones, otro de los objetivos es que **desarrolles** las **expresiones matriciales** que permiten relacionar las tensiones y las deformaciones y **profundices** en el estudio de las **propiedades mecánicas** a través de las **expresiones matriciales**.

4 Desarrollo

Para llevar a cabo el estudio y análisis de las **relaciones tensión-deformación** en una lámina de material compuesto formada por fibra larga unidireccional (**Figura 1**), es necesario definir las direcciones que nos van a ser de utilidad. Como se observa en la **Figura 1**, la dirección de las fibras o longitudinal, se denomina dirección "1" y la dirección transversal o perpendicular a las fibras se denomina "2".

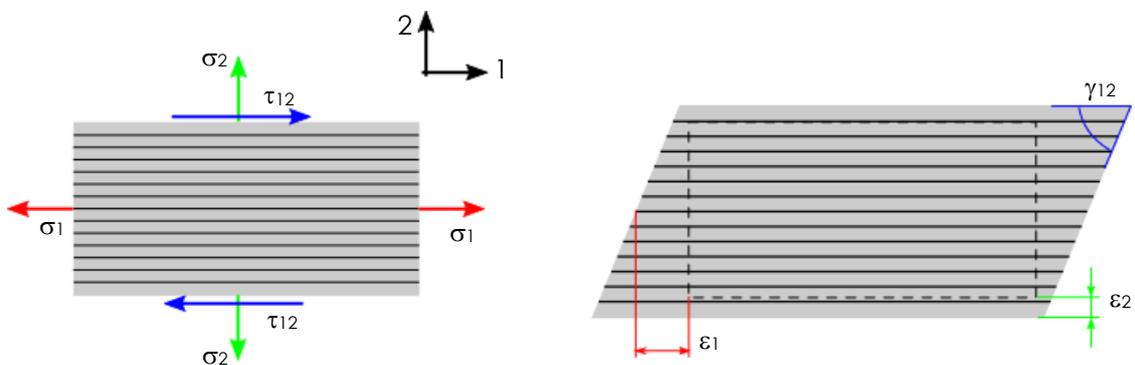


Figura 1. Representación esquemática de la relación entre tensiones aplicadas en el plano y deformaciones en el plano en una lámina de material compuesto con fibra larga unidireccional.

La lámina de material compuesto está constituida por una matriz de tipo polimérico cuyas propiedades mecánicas elásticas vienen definidas por su módulo elástico (E_m), módulo de cortadura (G_m) y su módulo de Poisson (ν_m). Esta lámina de material compuesto contiene una fracción en volumen v_f de fibras (no confundir con la letra del módulo de Poisson, ν), cuyas propiedades elásticas vienen definidas por E_f , G_f y ν_f , de manera idéntica a las de la matriz [1,2].

Como puede apreciarse en la **Figura 1**, el estado tensional en el plano viene definido por la tensión longitudinal (σ_1), la tensión transversal (σ_2) y la tensión de cizalla o cortadura en la dirección longitudinal-transversal (τ_{12}). De la misma manera, las deformaciones provocadas por este estado tensional en el plano, vienen definidas por las correspondientes deformaciones en el plano: elongación en la dirección longitudinal (ϵ_1), elongación en la dirección transversal (ϵ_2) y deformación de cortadura en la dirección longitudinal-transversal (γ_{12}).

Si bien en condiciones simples de tracción axial, la **Expresión 1** (Ley de Hooke básica) es aplicable, en las condiciones que hemos definido en la lámina de material compuesto, ¿**cuáles serán las expresiones** que permitan relacionar las **tensiones con las deformaciones**? En la Ley de Hooke se puede apreciar el estímulo externo (tensión aplicada, σ) y la consecuencia de esta tensión (deformación o elongación, ϵ). Estos dos parámetros están relacionados entre sí de forma directa a través de una constante del material, denominada módulo elástico o de Young (E). ¿**Cuál será la expresión** que relacione tensiones y deformaciones en la lámina del compuesto y cuál será la **equivalencia** con la Ley de Hooke? Esto es lo que vamos a descifrar a continuación.

4.1 Propiedades elásticas de una lámina de material compuesto en las direcciones locales (1-2).

En primer lugar, se determinan las características mecánicas del material en las direcciones 1-2 (direcciones locales), dirección longitudinal de las fibras y perpendicular respectivamente. Dada la fuerte anisotropía en la lámina de material compuesto, es posible pensar que las propiedades mecánicas elásticas, vendrán definidas por los siguientes parámetros:

E_1	Módulo elástico longitudinal.
E_2	Módulo elástico transversal.
G_{12}	Módulo de cortadura en la dirección 1-2
G_{21}	Módulo de cortadura en la dirección 2-1
ν_{12}	Módulo de Poisson en la dirección 1-2
ν_{21}	Módulo de Poisson en la dirección 2-1

Así pues, con la determinación de estos **6 parámetros**, tendríamos perfectamente definido el comportamiento de la lámina anisotrópica. No obstante, si te fijas bien en la **Figura 1**, solamente se produce **cortadura** (fibra-matriz) en la dirección 1-2, de tal manera que habitualmente se prescinde del cálculo de G_{21} , de tal manera, que los **5 parámetros restantes** (E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} y ν_{21}) se denominan "**constantes ingenieriles**" de la lámina. Estas constantes ingenieriles se pueden obtener mediante diversos modelos matemáticos como (regla de las mezclas, Chamis, Halpin Tsai [3], Abolin'sh, Hopkins&Chamis, Puck, etc.). Cada uno de estos modelos lleva a cabo una estimación de estos 5 parámetros a partir de las propiedades de la matriz (E_m , G_m , ν_m), de la fibra (E_f , G_f y ν_f) y de la fracción en volumen de fibras (ν_f). Y en estos momentos, te estarás preguntando, entonces, ¿**cuál es el modelo más apropiado**? La respuesta no es sencilla ya que cada modelo parte de una serie de premisas y suposiciones que avalan



su validez en determinados estados tensionales, tipología de laminado, condiciones de trabajo, etc. Para que veas la diferencia entre estos modelos, las expresiones siguientes muestran las fórmulas empleadas para el cálculo del módulo de cortadura G_{12} según los diferentes modelos: Abolin'sh (**Expresión 2**), Chamis (**Expresión 3**), Halpin-Tsai (**Expresión 4**), Hopkins & Chamis (**Expresión 5**), Puck (**Expresión 6**) y Regla de las Mezclas (**Expresión 7**).

$$G_{12} = G_m \cdot \frac{\left(\frac{G_f}{G_m}\right) \cdot (1 + \nu_f) + (1 - \nu_f)}{\left(\frac{G_f}{G_m}\right) \cdot (1 + \nu_f) + (1 + \nu_f)}$$

Expresión 2

$$G_{12} = \frac{G_m}{(1 - \sqrt{\nu_f}) \cdot \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}$$

Expresión 3

$$G_{12} = G_m \cdot \frac{(G_f + G_m) + \nu_f \cdot (G_f - G_m)}{(G_f + G_m) - \nu_f (G_f - G_m)}$$

Expresión 4

$$G_{12} = G_m \cdot \left[(1 - \sqrt{\nu_f}) + \frac{\sqrt{\nu_f}}{1 - \sqrt{\nu_f} \cdot \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)} \right]$$

Expresión 5

$$G_{12} = G_m \cdot \left[\frac{1 + 0,4 \cdot \sqrt{\nu_f}}{(1 - \nu_f)^{1,45} + \nu_f \cdot \frac{G_m}{G_f}} \right]$$

Expresión 6

$$G_{12} = \frac{G_f \cdot G_m}{G_f \cdot (1 - \nu_f) + G_m \cdot \nu_f}$$

Expresión 7

Como habrás podido comprobar, todas expresiones realizan una estimación de una propiedad (en este caso concreto, del módulo longitudinal-transversal, G_{12}) a partir de las propiedades de la matriz (E_m , G_m , ν_m), de la fibra (E_f , G_f y ν_f) y de la fracción en volumen de fibras (ν_f). La mayoría de estos modelos, difieren en el cálculo del módulo transversal (E_2) y del módulo de cortadura (G_{12}) ya que tanto el módulo longitudinal (E_1), como el módulo de Poisson en la dirección 12 (ν_{12}) se obtienen con mucha exactitud

mediante la regla de las mezclas. Vamos a comprobar estas afirmaciones con un ejemplo numérico. Supongamos que disponemos de una lámina de material compuesto formada por una **matriz epoxi** con las siguientes propiedades: $E_m = 3.500$ MPa, $G_m = 1.296,3$ MPa y $\nu_m = 0,35$. En relación a la **fibra de refuerzo**, sus propiedades elásticas son: $E_f = 230.000$ MPa, $G_m = 30.000$ MPa y $\nu_m = 0,23$. Partiendo de esta información, la **Figura 2** muestra la variación del módulo longitudinal, E_1 , en función de la fracción en volumen de fibras.

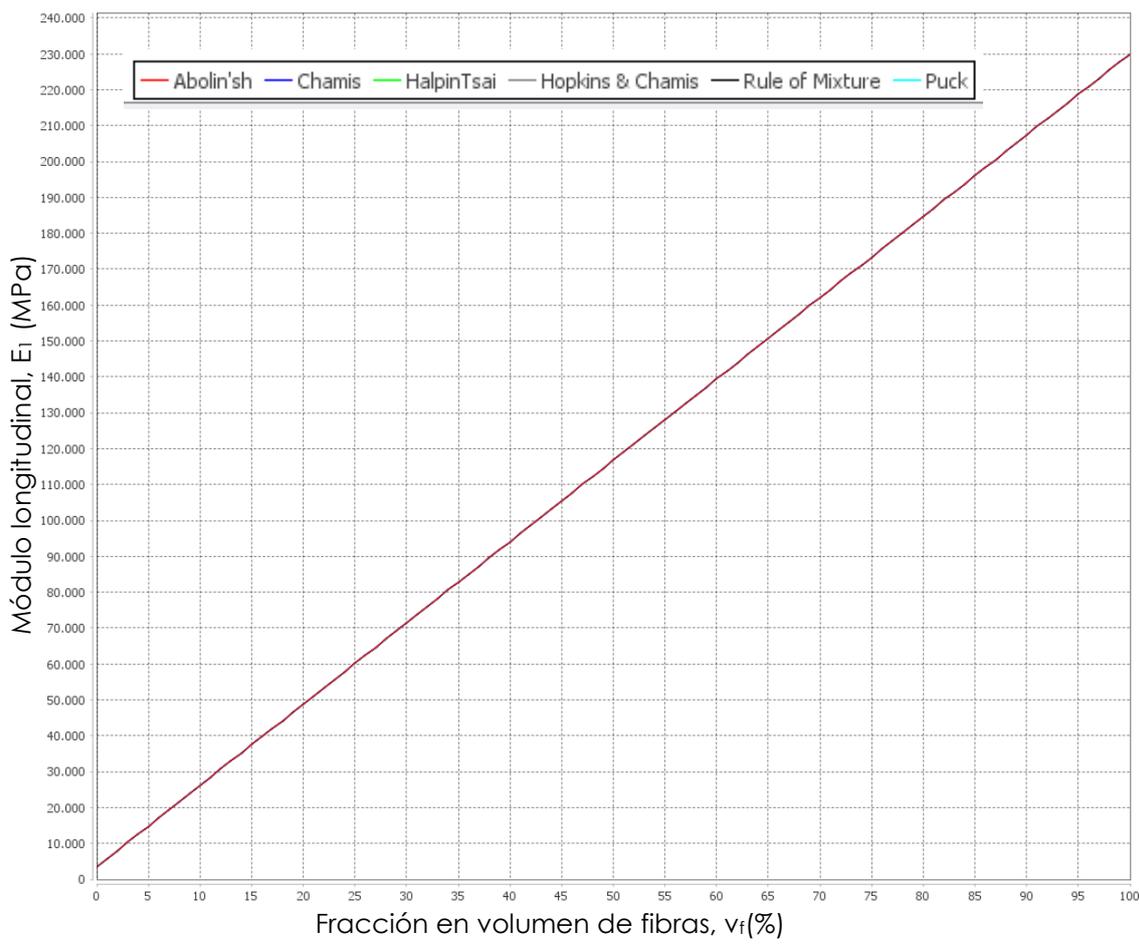


Figura 2. Representación gráfica de la variación del módulo longitudinal, E_1 , en una lámina de material compuesto con fibra larga unidireccional, según diferentes modelos.

Como puedes ver claramente, los valores que estiman los diferentes modelos para el módulo longitudinal son coincidentes y, además, presentan una relación lineal, de tal manera que, a medida que aumenta el contenido en fibras de refuerzo (v_f), también aumenta el módulo longitudinal E_1 .

En relación al módulo de cortadura, G_{12} , los diferentes modelos descritos previamente, conducen a valores diferentes que tendrán mayor o menor utilidad en función del tipo de geometría de laminado, forma de trabajo, tensiones que debe soportar, simetría, etc. Esta diferencia de valores se muestra claramente en la **Figura 3**.

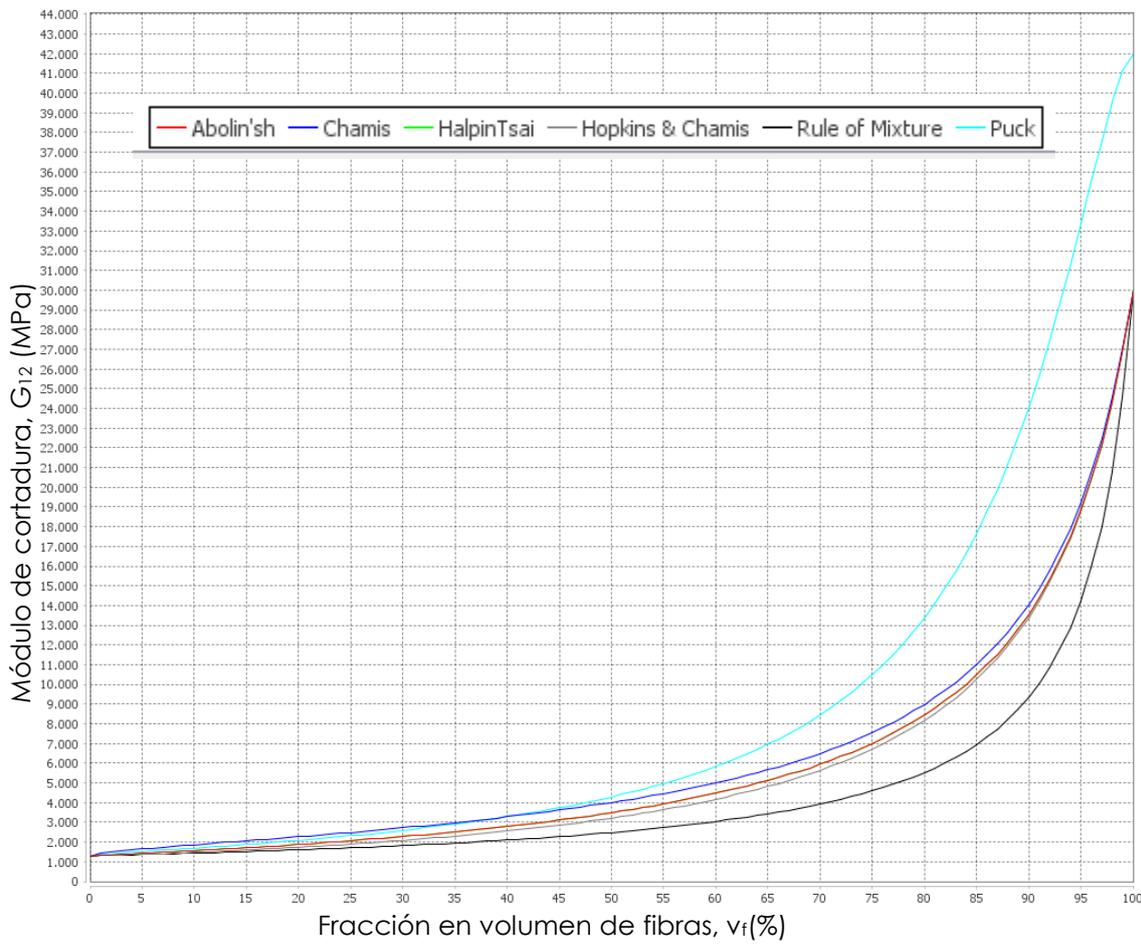


Figura 3. Representación gráfica de la variación del módulo de cortadura en 1-2, G_{12} , en una lámina de material compuesto con fibra larga unidireccional, según diferentes modelos.

4.2 Relaciones tensión-deformación en una lámina de material compuesto en las direcciones locales (1-2).

Ahora que ya entiendes la utilidad de los diferentes modelos micromecánicos en la estimación de las propiedades de una lámina de compuesto en las direcciones locales, vamos a dar un paso más y avanzar en el estudio de las relaciones entre las tensiones y las deformaciones. Para tomar un modelo de referencia, emplearemos las expresiones de Halpin-Tsai que se resumen en las **Expresiones 8 – 12**.

$$E_1 = E_f \cdot v_f + E_m \cdot (1 - v_f)$$

Expresión 8



$$E_2 = \frac{E_m \cdot (1 + 2 \cdot \beta \cdot \nu_f)}{1 - \beta \cdot \nu_f}; \quad \beta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 2}$$

Expresión 9

$$G_{12} = G_m \cdot \frac{(G_f + G_m) + \nu_f \cdot (G_f - G_m)}{(G_f + G_m) - \nu_f \cdot (G_f - G_m)}$$

Expresión 10

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot (1 - \nu_f)$$

Expresión 11

$$\nu_{21} = \nu_{12} \cdot \left(\frac{E_2}{E_1} \right)$$

Expresión 12

Las propiedades del material, como se deduce de las expresiones anteriores, son anisotrópicas, puesto que los módulos son diferentes en las direcciones longitudinal y transversal.

Es posible realizar una estimación de las deformaciones en las direcciones locales. En la **Expresión 13** se muestra el valor de la deformación longitudinal en el plano (ε_1) [4, 5]. Tal y como se ha visto en la **Figura 1**, la deformación que se produce en la dirección 1 (longitudinal), está directamente ligada a **dos tensiones aplicadas**. Por un lado, la tensión en la dirección 1 (σ_1), provoca una elongación positiva de valor σ_1/E_1 según la Ley de Hooke. No obstante, el estiramiento en la dirección 2 (σ_2) provoca una elongación negativa (contracción) debido al módulo de Poisson. Esta contracción corresponde a un porcentaje o ratio de la deformación que provoca σ_2 en la dirección 2 o transversal. De la misma manera, aplicando la Ley de Hooke, la deformación que provoca σ_2 en la dirección 2 tiene un valor de σ_2/E_2 . Como se ha descrito previamente, la contracción en la dirección 1 es solo un porcentaje de esta deformación. Precisamente este porcentaje o fracción viene definido por el módulo de Poisson en la dirección 21, ν_{21} , de tal manera que la contracción que se produce en la dirección 1, como consecuencia del estiramiento en la dirección 2, adopta un valor de $-\nu_{21} \cdot \sigma_2/E_2$. Así pues, la deformación global en la dirección 1, ε_1 , resulta de la suma de las dos contribuciones anteriormente descritas tal y como se muestra en la **Expresión 13**. Ahora intenta realizar el mismo razonamiento para la obtención de la elongación en la dirección transversal, ε_2 y comprueba los resultados con la **Expresión 14**.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \cdot \frac{\sigma_2}{E_2}$$

Expresión 13

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12} \cdot \frac{\sigma_1}{E_1}$$

Expresión 14



y la deformación cortante γ_{12} , está relacionada directamente con la tensión cortante aplicada τ_{12} y el módulo cortante, G_{12} según la **Expresión 15**.

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

Expresión 15

Las expresiones que se han deducido (13, 14 y 15) corresponden a la forma paramétrica de estas. Por comodidad, es preferible emplear la **notación matricial**, ya que los cálculos pueden acelerarse considerablemente. Para ello, se considera un vector columna, $[\varepsilon]_{12}$ que contiene las deformaciones en el plano (ε_1 , ε_2 y γ_{12}) y un vector columna $[\sigma]_{12}$ con los valores de las tensiones en el plano (σ_1 , σ_2 y τ_{12}). La relación entre estos dos vectores se establece a través de una matriz de flexibilidad local, $[S]$, formada por 9 términos. Todo ello se muestra de forma clara en la **Expresión 16**.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Expresión 16

Si recuerdas la forma de multiplicación en matrices, se puede establecer la siguiente relación para la deformación longitudinal, ε_1 .

$$\varepsilon_1 = S_{11} \cdot \sigma_1 + S_{12} \cdot \sigma_2 + S_{13} \cdot \tau_{12}$$

Expresión 17

Para que lo tengas más claro, a continuación, te vamos a mostrar la expresión paramétrica correspondiente a la deformación o elongación en la dirección longitudinal, ε_1 .

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \cdot \frac{\sigma_2}{E_2}$$

Expresión 13

Comparando los términos que aparecen en la **Expresión 13** y **Expresión 17**, se obtienen los valores de S_{11} , S_{12} y S_{13} que resultan ser $(1/E_1)$, $(-\nu_{21}/E_2)$ y (0) , respectivamente. Fíjate que en la **Expresión 13**, el término que multiplica a σ_1 , es $(1/E_1)$ y el término que multiplica a σ_2 es $(-\nu_{21}/E_2)$. Finalmente, en la **Expresión 13** no aparece ningún término relacionado con la tensión de cortadura, τ_{12} , de tal manera que se supone que es **cero** el término que multiplica a τ_{12} . Ahora que ya conoces el procedimiento para convertir las expresiones paramétricas en matriciales, intenta determinar el resto de los valores de S_{ij} y compáralos con los que se muestran en la **Expresión 18**.



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Expresión 18

Esta expresión, puede abreviarse tal y como se muestra en la **Expresión 19**.

$$[\varepsilon]_{12} = [S] \cdot [\sigma]_{12}$$

Expresión 19

donde $[S]$ representa la **matriz de conformidad o flexibilidad** cuyos términos dependen exclusivamente de las propiedades elásticas de la lámina.

También empleando la notación matricial, la expresión anterior se puede expresar aplicando matrices inversas tal y como se muestra en la **Expresión 20**.

$$[\sigma]_{12} = [S]^{-1} \cdot [\varepsilon]_{12} \quad \text{ó} \quad [\sigma]_{12} = [Q] \cdot [\varepsilon]_{12}$$

Expresión 20

donde $[Q] = [S]^{-1}$ es la matriz de rigidez.

En la **Expresión 21** se resumen las relaciones entre tensiones en el plano y deformaciones en el plano en las direcciones locales (1-2). Se puede apreciar claramente la similitud de estas expresiones con la Ley de Hooke que establece $\sigma = E \cdot \varepsilon$ y su forma inversa, $\varepsilon = 1/E \cdot \sigma$. De hecho, las expresiones que se han obtenido, corresponden a una extensión de la Ley de Hooke a un material anisotrópico con tensiones y deformaciones en el plano. En cierta medida, la matriz $[Q]$ o matriz de rigidez, es equivalente al parámetro E en la Ley de Hooke para estados tensionales uniaxiales.

$$[\varepsilon]_{12} = [S] \cdot [\sigma]_{12}$$

$$[\sigma]_{12} = [Q] \cdot [\varepsilon]_{12}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}; [Q] = [S]^{-1}$$

Expresión 21

4. Conclusión

El **análisis y cálculo con materiales compuestos** es diferente a la mayoría de materiales ya que, en general, los compuestos son materiales anisotrópicos debido a la **elevada direccionalidad** de las fibras de refuerzo. Es difícil encontrar las propiedades mecánicas elásticas de los materiales compuestos ya que existen infinidad de



combinaciones de fibra, matrices, capas, orientación de fibras, tejidos, etc. Por ello, se emplean **modelos micromecánicos** que permiten predecir con mayor o menor exactitud las propiedades elásticas de las láminas de compuestos. Entre estos modelos destacan el de Chamis, Halpin-Tsai, Hopkins&Chamis, Abolin'sh, la Regla de las Mezclas, entre otros. Cada uno presenta mayor exactitud en función del tipo de compuesto, la forma de trabajo, los estados tensionales, etc. A partir de los modelos micromecánicos, es posible llevar a cabo un **análisis paramétrico** de las deformaciones en el plano, en función de las tensiones en el plano. A partir de este análisis paramétrico se pueden obtener las correspondientes expresiones matriciales que conducen a expresiones muy similares a la **Ley de Hooke** pero ampliada a situaciones de **materiales anisotrópicos** sometidos a tensiones en el plano y con deformaciones en el plano.

5. Referencias

- [1] Hull, D. "Materiales Compuestos", Ed. Reverté (2003).
- [2] Gay, D. "Composite Materials: Design and Applications", Ed. CRC Press (2015).
- [3] Matthews, F.L., Rawlings, R.D. "Composite Materials, Engineering and Science", CRC Press (1999).
- [4] Miravete de Marco, A, "Materiales compuestos. Tomo I". Autor-Editor (2000).
- [5] Tsai, S. "Diseño y Análisis de Materiales Compuestos", Ed. Reverté (1988).