UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Ecuaciones en derivadas parciales

Apellidos, nombre	Martínez Molada, Eulalia (eumarti@mat.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior Ingenieros de Telecomunicación

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo se presenta la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales por el método de separación de variables como parte de la asignatuta de Matemáticas III que se imparte en el Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. El tema está estructurado como sigue:

Contenidos de este artículo
1. Introducción.
2. Objetivos.
3. Desarrollo del método.
4. Ejercicios.
5. Cierre.

Cuadro 1: Contenidos del artículo

2. Introducción

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es aquella ecuación diferencial cuyas incógnitas son funciones de diversas variables independientes, donde en dicha ecuación figuran no solo las propias funciones sino también sus derivadas parciales respecto a alguna de las variables. Se emplean en la formulación matemática de procesos de la física y otras ciencias que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo. Participaron, al inicio, en su estudio los franceses d'Alembert, Fourier, matemáticos de la época napoleónica.
Ejemplos prácticos más importantes de su utilización pueden ser:

1. Problemas de propagación sonido o calor.
2. Problemas de electroestática.
3. Problemas de dinámica de fluidos.
4. Problemas de mecánica cuántica.

3. Objetivos

El objetivo de este tema es utilizar el método de separación de variables para obtener la solución de algunas EDP's homogéneas sencillas, como la ecuación de ondas o la ecuación del calor. Con este método transformamos la EDP en EDO's simples, que el alumnado resolvió en la asignatura de Matemáticas II. El conocimento del desarrollo en serie de Fourier para funciones continuas a trozos, acotadas y periódicas en intervalos finitos será de gran ayuda a la hora de obtener el valor de los coeficientes de la solucion de la EDP aplicando el principio de superposición.
Para el caso de las EDP's no homogéneas utlizaremos el operador transformada finita de Fourier y sus propiedades más relevantes.

4. Desarrollo

Para dar al articulo un énfasis práctico de cara a facilitar el seguimiento por parte del alumno, en primer lugar realizaremos un resumen de la teoría que servirá solo de guía para definir los conceptos y propiedades que los relacionen, pero que el alunmo tendrá que ampliar para profundizar en la materia. Nos centraremos a continuación en el desarrollo paso a paso de algunos problemas o ejercicicios representativos del tema que resolveremos en todos los casos aplicando las pautas dadas en el desarrollo teórico que basicamente consisten en:

1. **Planteamiento:** Aplicar la técnica de separación de variables transformando la EDP en dos EDO's, donde las condiciones de contorno de la primera se adaptarán dando lugar a problemas de frontera. Si la ecuación es no homogénea esto se conseguirá aplicando el operador transformada finita de Fourier.

2. **Desarrollo:** Resolviendo los problemas de frontera asociados obtendremos infinitas soluciones y aplicando el principio de superposición consideraremos la suma de todas ellas.

3. **Conclusión:** Para finalizar el proceso debemos aplicar las condiciones iniciales que nos permitiran el cálculo de los coeficientes que queden por determinar haciendo uso del desarrollo trigonométrico de Fourier para extensiones pares o impares de las funciones implicadas en la o las condiciones iniciales.

4.1. Resumen de la teoría

Sea $f(x)$ una función definida para valores de x tal que $-L \leq x \leq L$. La serie de Fourier de $f(x)$ en ese intervalo tiene la siguiente forma:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

donde los coeficientes son dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad\qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad\qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Asumiendo que estas integrales existen.
Puede demostrarse que si $f(x)$ es continua en x_0 entonces $S(x_0)$ converge a $f(x_0)$ en caso contrario se tiene que $S(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.
Además como hemos comentado intentaremos transformar la EDP en EDO's sencillas por lo que necesitamos recordar las soluciones de EDO's homogéneas lineales con coeficientes constantes de segundo orden (EDO-2). Estas son las ecuaciones de la forma

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

con p, q constantes. Resolveremos el polinomio característico

$$r^2 + pr + q = 0$$

y utilizaremos la siguiente tabla para expressar la solución $y(x)$, según el tipo de raíces, r_1, r_2.

Caso	Solución	
$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$	$r_1 \neq r_2$	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
	$r_1 = r_2 = r$	$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
$r = a \pm ib$	$y(x) = C_1 e^{ax}\cos(bx) + C_2 e^{ax}\sin(bx)$	

4.1.1. Método de separación de variables

A continuación hacemos un esbozo del método de separación de variables para resolver la EDP, resolviendo un ejemplo concreto. La idea fundamental consiste en suponer que la solució de la misma, $u(x,t)$, puede expresarse como producto de funciones de la forma $X(x)T(t)$, este hecho va a permitir facilitar la resolucion de la EDP. Veámoslo con el siguiente caso práctico. Sea una ecuación de la forma

$$\frac{d^2u(x,t)}{dt^2} = c^2\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} \tag{1}$$

o equivalentemente

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0, \tag{2}$$
$$u(0,t) = 0,\ t > 0, \tag{3}$$
$$u(\pi,t) = 0,\ t > 0, \tag{4}$$
$$u(x,0) = f\left(x\right),\ x \in [0,\pi], \tag{5}$$
$$u_t(x,0) = g(x),\ x \in [0,\pi], \tag{6}$$

Donde $u = u(x,t)$ es la función que queremos hallar y representa el desplazamiento vertical de una onda en un punto x y en un instante de tiempo t. El termino c es la velocidad de onda.
Para resolver la ecuación necesitamos saber la posición inicial, $u(x,0) = f(x)$ y la velocidad inicial $u_t(x,0) = g(x)$. Así como las condiciones de contorno que supondremos homogéneas, es decir, $u(0,t) = 0$ y $u(L,t) = 0,\ \ \forall t \geq 0$. Las condiciones de contorno dadas son de tipo Dirichlet (sabemos el valor de u en la frontera), podrían ser tipo Neumann (sabemos el valor de una derivada parcial con respecto a la dirección normal en la frontera) o tipo Robin (mezcla de las anteriores).

Para resolver las ecuaciones asumimos que (separación de variables):

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{7}$$

Y si conectamos (7) con (1) obtenemos la constante que aísla dos problemas con variables distintas:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = \lambda$$

de forma que nuestra EDP ha sido transformada en el siguiente sistema de EDO's que resolveremos según la ecuación característica asociada y haciendo uso del las condiciones iniciales y de contorno descritas.

$$\left.\begin{array}{r} X'' - \lambda X = 0 \\ T'' - \lambda c^2 T = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Hasta este momento, λ es una constante arbitraria. Ahora determinamos las soluciones de X y T de (8) de tal modo que $u = XT$ satisfaga las condiciones de frontera dadas,

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0\ ,\ u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0\ \ \forall t. \tag{9}$$

Si $X(0) \neq 0$, o $X(\pi) \neq 0$, se obtendra $T \equiv 0$, por lo que $u \equiv 0$, y esta solución no satisface las condiciones iniciales. Necesariamente

$$X(0) = 0\ ,\ X(\pi) = 0 \tag{10}$$

Para $\underline{\lambda = 0}$, la solución general de la ecuacion en x de (8) es $X = ax + b$ y por las condiciones de contorno se obtiene $a = b = 0$. Por tanto, $X \equiv 0$, luego $u \equiv 0$, que no satisface las condiciones iniciales.
Para $\underline{\lambda = \mu^2 > 0}$, la solución general de (8) es

$$X = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Llevando esta solución a (10), obtenemos

$$\begin{aligned} X(0) = A + B = 0 &\implies A = -B, \\ X(\pi) = Ae^{\mu\pi} + Be^{-\mu\pi} &= 0, \\ = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) &= 0, \\ \text{luego} \quad A = 0 \quad y \ B &= 0. \end{aligned}$$

Se obtiene $X \equiv 0$, como antes. En consecuencia, sólo queda la posibilidad $\lambda < 0$. Hacemos pues $\lambda = -p^2$. La primera ecuación de (8) asume la forma

$$X'' + p^2 X = 0.$$

Su solución general es

$$X(x) = A\cos(px) + B\sin(px).$$

A partir de está expresión usando (10) se tiene

$$X(0) = A = 0, \tag{11}$$

por tanto

$$X(\pi) = B\sin(p\pi) = 0$$

es necesario tomar $B \neq 0$, ya que de otro modo $X \equiv 0$. En consecuencia, $\sin(p\pi) = 0$. Por tanto

$$p = n, \text{ para } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Consideramos pues una sucesión de soluciones linealmente independientes en la forma $X(x) = X_n(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ (pues $X_n = -X_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), donde

$$X_n(x) = \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pasamos resolver la segunda EDO en la variable t de (8).
La constante λ está ahora restringida a los valores $\lambda = -p^2 = -n^2$. Para estos λ, la ecuación queda

$$T'' + c^2 n^2 T = 0 \ \text{ donde } \ n = 1, 2, ..., \ n \in \mathbb{N}.$$

La solución general para cada n será:

$$T_n(t) = b_n \cos(cnt) + b_n^\star \sin(cnt).$$

Por consiguiente, las funciones $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, es decir,

$$u_n(x,t) = \Big(b_n \cos(cnt) + b_n^\star \sin(cnt)\Big) \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

son soluciones de la EDP dada que satisfacen las condiciones de frontera. Por el principio de superposición escribimos la solución como suma de una serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n \cos(cnt) + b_n^\star \sin(cnt)\Big) \sin(nx). \tag{13}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(- b_n cn \sin(cnt) + b_n^{\star} cn \cos(cnt) \Big) \sin(nx). \tag{14}$$

Resulta así que las condiciones iniciales nos indican que:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = f(x), \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\star} cn \sin(nx) = g(x). \tag{16}$$

Resulta de (15) que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de la extensión 2π-periódica e impar de la función f (pues se trata de una serie de senos). De la segunda condición inicial, expresada en (16), resulta que los coeficientes $\{b_n^{\star}\}_{n=1}^{\infty}$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la extensión impar de la función $g(x)$ al intervalo $]-\pi,\pi]$.
Resulta, finalmente, escribiendo el resultado en términos de la función original y de las variables originales,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(cnt) + b_n^{\star} \sin(cnt)) \sin(nx)\,, \tag{17}$$

4.1.2. Ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas

Por último abordaremos el caso de resolver una EDP no homogénea, por ejemplo

$$u_t(x,t) - k u_{xx}(x,t) = g(x,t)$$

en un dominio finito $x \in [0,L]$ y $t > 0$.
En este caso intentaremos aplicar el operador Transformata finita de Fourier a la ecuación dada y haciendo uso de su linealidad y las propiedades que vamos a mencionar podríamos conseguir transfomar la EDPNH en una EDONH.

Definiciones:
Se define la Transformada finita seno de Fourier de una función $f(x)$ definida en un intervalo $]0,L]$ en los siguientes términos

$$\mathcal{F}_s(f(x))(n) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1,2,...$$

Notemos que se trata de considerar la extensión impar de la función dada al intervalo $[-L,L]$ y obtener su desarollo de Fourier. De manera que en los puntos donde la función sea continua se tendrá:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_s(f(x))(n) \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

De forma análoga, pensando en la extensión par de la función inicial, la Transformada finita coseno de Fourier para $f(x)$ será::

$$\mathcal{F}_c(f(x))(n) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 0,1,2,...$$

proporcionará en los puntos de continuidad:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_c(f(x))(n) \cos(\frac{n\pi x}{L})$$

Notamos que si tenemos $f(x,t)$ entonces $\mathcal{F}_s$ y $\mathcal{F}_c$ son funciones de n y t. Podemos escribir $\mathcal{F}_s(u(x,t)) \equiv \mathcal{F}_s(u(x,t))(n,t) = T_n(t)$

Propiedades
Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas a trozos definida en $]-L,L[$ y $\alpha \in R$, entonces:
1.- Linealidad:

$$\mathcal{F}_s(\alpha f(x) + g(x))(n) = \alpha \mathcal{F}_s(f(x))(n) + \mathcal{F}_s(g(x))(n)$$

$$\mathcal{F}_c(\alpha f(x) + g(x))(n) = \alpha \mathcal{F}_c(f(x))(n) + \mathcal{F}_c(g(x))(n)$$

2.- Transformaciones de la segunda derivada:

$$\mathcal{F}_s(f''(x))(n) = \frac{2n\pi}{L^2}[f(0) - (-1)^n f(L)] - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mathcal{F}_s(f(x))(n)$$

$$\mathcal{F}_c(f''(x))(n) = \frac{2}{L}[(-1)^n f'(L) - f'(0)] - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mathcal{F}_c(f(x))(n)$$

Estas relaciones sugieren que cuando tenemos condiciones de contorno de Dirichlet debemos usar $\mathcal{F}_s(f(x))(n)$ y cuando tenemos condiciones de contorno de Neumann usaremos $\mathcal{F}_c(f(x))(n)$. También necesitamos la regla de Leibniz para establecer que

$$\mathcal{F}_s(u_t(x,t))(n) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_s(u(x,t))(n),$$

$$\mathcal{F}_c(u_t(x,t))(n) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_c(u(x,t))(n) = T_n'(t),$$

donde $T_n(t)$ representa la transformada finita seno (o coseno) de la función $u(x,t)$.

4.2. Ejercicios

Problema 1
Una barra de longitud dada l de un elemento fusionable con constante de difusión k produce neutrones. Los extremos de la barra son perfectamente reflectantes. Si la distribución inicial de neutrones en la barra viene dada por $f(x)$, se pide encontrar la distribución en un instante posterior sabiendo que se rige por la siguiente EDP con las condiciones iniciales y de contorno que se indican:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + bu, \text{ donde b es una constante real.} \\ u(x,0) &= f(x), x \in]0,l[, \\ u_x(0,t) &= u_x(l,t) = 0, t > 0 \end{aligned}$$

Solución: Utilizaremos los dos métodos expuestos para resolver el problema.

- **Mediante el método de separación de variables**
  Suponemos que $u(x,t) = X(x)T(t)$ por lo que calculando las derivadas que aparecen en cada parte de la EDP tenemos:

  $$XT' = kX''T + bXT$$

  Dividiendo por XT aislamos las variables:

  $$\frac{T'}{T} = k\frac{X''}{X} + b$$

El primer miembro es función de t y el segundo de x. Entonces, cada uno es (la misma) constante.

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} - \frac{b}{k} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por un razonamiento análogo al realizado en (9) respecto a las condiciones de contorno y teniendo en cuenta que ahora tenemos condiciones derivadas tenemos: $X'(0)T(t) = 0$ y $X'(l)T(t) = 0$ por lo que necesariamente se verificará que $X'(0) = X'(l) = 0$
Resolvamos pues La EDO en x con estas condiciones de contorno:

$$X'' - \lambda X = 0$$

Consideraremos todos los casos posibles para la constante de aislamiento. 1) Si $\boxed{\lambda > 0}$ las raíces de la ecuación característica son reales por lo que la solución se expresa como sigue:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Derivamos para imponer las condiciones de contorno:

$$X'(x) = A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$X'(0) = A\sqrt{\lambda} - B\sqrt{\lambda} = 0$$

$$X'(l) = A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}l} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$$

Necesariamente $A = B = 0$ y así este caso no proporciona solución.
2) Si $\boxed{\lambda = 0}$ la solución sería $X = Ax + B$ de modo que

$$X'(x) = A \longrightarrow X'(0) = 0 = A \longrightarrow X(x) = B, \forall x \in]0, l]$$

3) Por último si $\boxed{\lambda < 0}$ las soluciones de la ecuación característica son complejas conjugadas por tanto:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Derivando impondremos las condiciones de contorno

$$X'(x) = A\sqrt{-\lambda}(-\sin(\sqrt{-\lambda}x)) + B\sqrt{-\lambda}\cos(-\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(0) = B\sqrt{-\lambda} = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$X'(l) = -A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$$

Debemos tomar $\sqrt{-\lambda}l = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Por tanto, $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ y las soluciones son $X_n(x) = \cos(-\sqrt{\lambda_n}x)$ donde $n = 1, 2, 3, ...$

Para cada valor λ_n buscamos una solución para la EDO en la variable t por tanto denotaremos $T_n(t)$

$$\frac{1}{k}\frac{T_n'}{T_n} = \frac{b}{k} + \lambda_n = \mu_n$$

donde $\mu_n = \frac{b}{k} + \lambda_n$.

Entonces, $T_n' = k\mu_n T_n \longrightarrow \boxed{T_n(t) = e^{k\mu_n t}}$

Así las soluciones de la EDP son de la forma, $u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{k\mu_n t}, n = 1, 2, \ldots$

Cuando $\lambda = 0$, resulta $X_0 = \frac{a_0}{2}$. Entonces, $T_0' = bT_0 \longrightarrow \boxed{T_0(t) = e^{bt}}$

Por tanto, $u_0(x,t) = \frac{a_0}{2} e^{bt}$

Por el principio de superposición consideramos la suma de todas las soluciones encontradas:

$$u(x,t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n = \frac{a_0}{2} e^{bt} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{k\mu_n t} a_n$$

Exigimos que

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) a_n$$

Por tanto, hemos obtenido el desarrollo en serie de Fourier de la extensión par $2l$-periódica de $f(x)$ e identificando coeficientes tendremos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), n = 0, 1, 2, ...$$

De manera que la solución de la EDP dada erá:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{a_0}{2} e^{bt} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{k\mu_n t} a_n}$$

donde

$$\mu_n = \frac{b}{k} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, ...$$

Puede comprobarse que usando transformada finita coseno de Fourier se obtiene el mismo resultado.

5. Cierre

En esta tema se aborda la continuación de la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que los alumnos han estudiado en el primer curso del grado. El objetivo ahora es la resolucion de Ecuaciones en Derivadas Parciales, haciendo notar al estudiante en primer lugar la complejidad de este tipo de ecuaciones si las comparamos con las EDO's. Principalmente, mientras que las EDO's tienen solución en un espacio de dimensión finita, la solución de una EDP's suele pertenecer a un espacio de dimensión infinita. Se ha presentado el método de separación de variables para resolver las EDP's clásicas homogéneas y la utilización de la transformada finita de Fourier culmina el tema par resolver las EDP's no homogéneas o con condiciciones de contorno no nulas.

6. Bibliografia

- Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales : métodos analíticos y numéricos. Volumen I (Thome Coppo, Néstor Javier)
- Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales : métodos analíticos y numéricos. Volumen II (Thome Coppo, Néstor Javier)
- Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales : métodos analíticos y numéricos. Volumen III (Thome Coppo, Néstor Javier)
- Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera (Zill, Dennis G — Cullen, Michael)
- Partial differential equations for scientists and engineers (Farlow, Stanley J)
- An introduction to differential equations and their applications (Farlow, Stanley J)
- Fourier series and boundary-value problems (Brown, James Ward, Churchill, Ruel V)