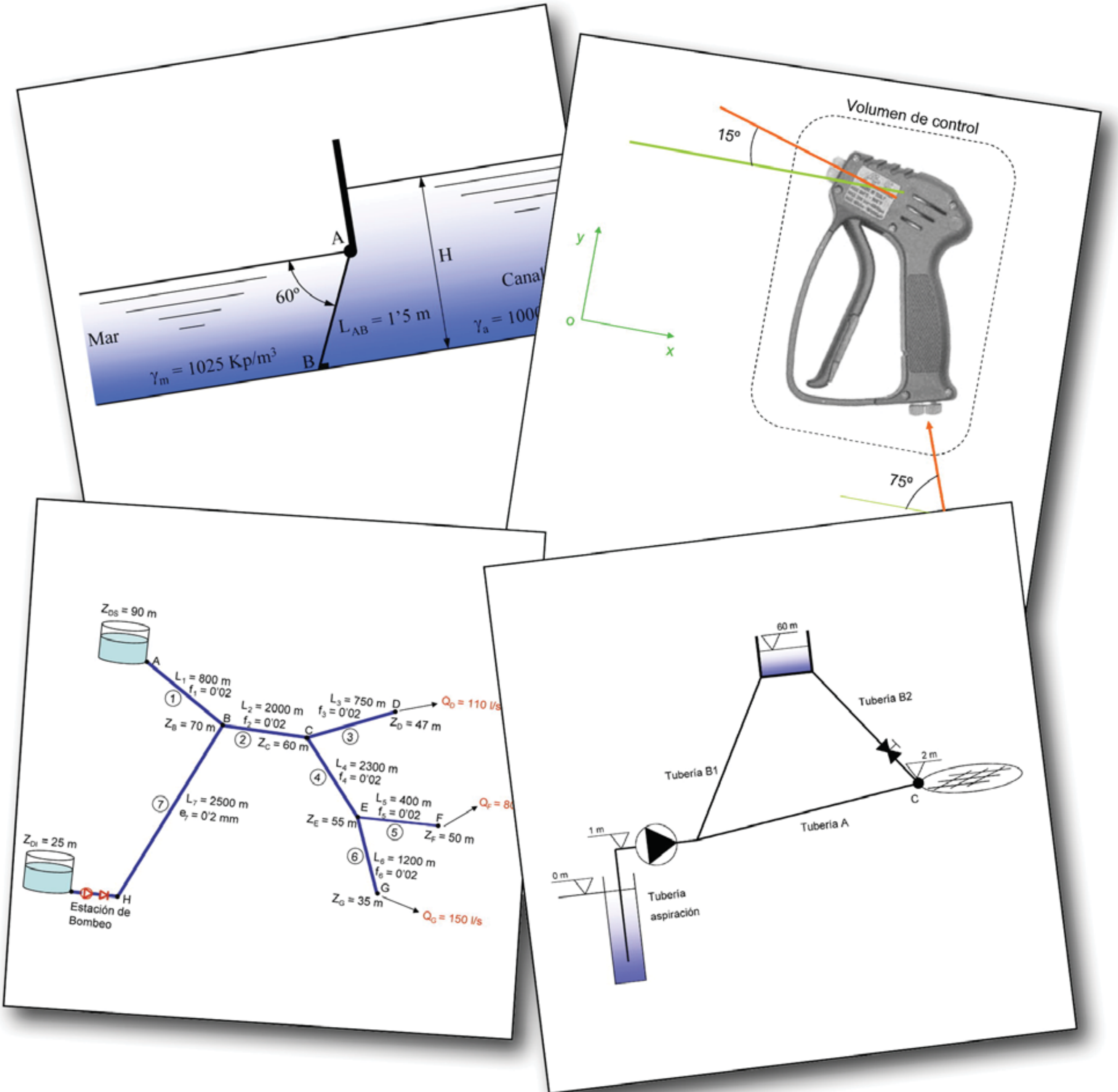
PROBLEMAS RESUELTOS DE INGENIERÍA FLUIDOMECÁNICA

Ricardo Cobacho Jordán
Enrique Cabrera Rochera
Vicent Espert Alemany
Francisco Arregui de la Cruz



EDITORIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Ricardo Cobacho Jordán
Enrique Cabrera Rochera
Vicent Espert Alemany
Francisco Arregui de la Cruz

PROBLEMAS RESUELTOS DE INGENIERÍA FLUIDOMECÁNICA

EDITORIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Primera edición, 2008

ISBN: 978-84-8363-268-0 (versión impresa)

RESUMEN

El libro "Problemas resueltos de Ingeniería Fluidomecánica" es una recopilación de 40 problemas que, en distintos años, han formado parte del examen de dicha asignatura en la Universidad Politécnica de Valencia.

La solución de cada problema está totalmente detallada, desde su planteamiento hasta el resultado final, añadiendo esquemas explicativos si resulta conveniente.

Los 40 problemas se encuentran divididos en cuatro grupos sucesivos:

I. Estática de fluidos (fuerzas hidrostáticas y flotación)

II. Ecuaciones fundamentales del flujo (continuidad, Bernoulli y conservación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control fijos e indeformables)

III. Diseño de redes ramificadas (criterios de velocidad y de la pendiente hidráulica uniforme)

IV. Bombas de elevación (punto de funcionamiento, acoplamiento de bombas, cambio de velocidad de giro y recorte del rodete)

PRESENTACIÓN

Este libro recoge una selección de cuarenta problemas resueltos que, cada uno en su momento, han formado parte de exámenes de la asignatura de Ingeniería Fluidomecánica, asignatura que ha sido impartida en diferentes centros y diferentes años por los cuatro autores que lo firman.

Aun con lo necesariamente limitada que una selección debe ser, se ha buscado cubrir e ilustrar los principales aspectos de la materia, y por ello los problemas aquí contenidos se han agrupado en cuatro partes sucesivas: estática de fluidos, ecuaciones fundamentales del flujo, diseño de redes ramificadas y bombas de elevación.

Cabe subrayar que la ordenación de los problemas, dentro de cada parte, se ha hecho de acuerdo al contenido de cada uno, pero no necesariamente según un orden creciente de dificultad. Es más, puesto que en definitiva se trata de problemas de examen, dicho contenido individual de cada problema no es estanco y circunscrito a la parte en que se incluye, sino que más bien es abierto, pudiendo encontrarse en general algún apartado relativo a otras partes de la materia. Por ello, es conveniente acercarse a estos problemas cuando ya se dominan los fundamentos básicos de la asignatura en su conjunto.

Confiamos en que el material aquí preparado resulte de utilidad a estudiantes de Ingeniería Fluidomecánica, así como también, a estudiantes de otras materias estrechamente relacionadas como la Mecánica de Fluidos o la Ingeniería Hidráulica.

Por último, queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a tres personas sin cuya inestimable colaboración este trabajo no habría sido posible: Ana Arrarás del Haya y Carlos Martínez Pino, en su primera etapa, y Jesús Ortega Herrero en la segunda y última.

Los autores

Valencia, Abril de 2008

ÍNDICE

I

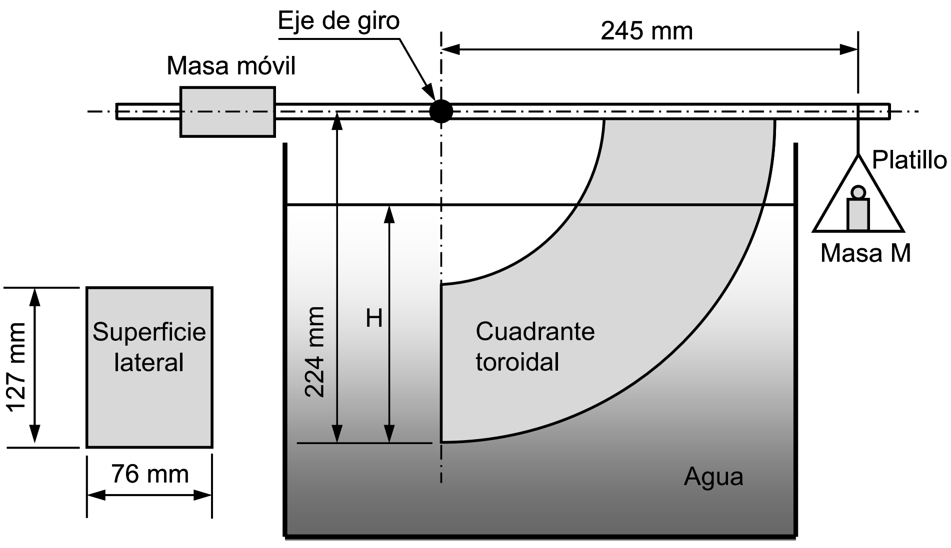
ESTÁTICA DE FLUIDOS

PROBLEMA I.1

En una balanza hidrostática, con las dimensiones de la figura, la masa móvil está dispuesta de tal manera que la superficie lateral del cuadrante toroidal se encuentra sobre un plano vertical que pasa por el eje de giro, cuando al poner a punto el equipo éste se encuentra sin agua y el platillo vacío en la posición indicada.

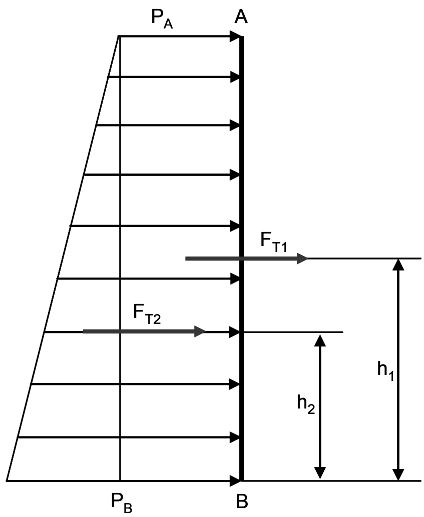
En una experiencia en la que se ha introducido en el equipo una cierta cantidad de agua, la cual alcanza el nivel H, la posición vertical de la superficie lateral se consigue de nuevo situando pesas en el platillo que suman en total una masa M.

Si en la experiencia se miden los valores H=200 mm y M=920 g, justificar si estas mediciones son correctas o la experiencia se ha realizado de manera errónea.



SOLUCIÓN

Sobre la superficie lateral, el diagrama de presiones será el indicado en la figura:



$$P_A = \gamma z_A = 9810 \cdot (0,2 - 0,127) =$$

$$= 716,13\, N/m^2$$

$$P_B = \gamma z_B = 9810 \cdot 0,2 = 1962\, N/m^2$$

Este diagrama se divide en las fuerzas totales debidas a cada una de estas partes, y su distancia al punto inferior B de la superficie lateral:

$$F_{T1} = P_A \cdot S = 716,13 \cdot 0,076 \cdot 0,127 = 6,91\, N$$

$$F_{T2} = \frac{1}{2} \cdot (P_B - P_A) \cdot S =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1962 - 716,13) \cdot 0,076 \cdot 0,127 = 6,01\, N$$

$$h_1 = \frac{127}{2} = 63,5\, mm \quad ; \quad h_2 = \frac{127}{3} = 42,33\, mm$$

El momento de giro sobre el cuadrante toroidal debido a las presiones sobre la superficie lateral será:

$$M_{giro} = F_{T1} \cdot b_1 + F_{T2} \cdot b_2 = 6,91 \cdot (0,224 - 0,0635) + 6,01 \cdot (0,224 - 0,04233) = 2,20\, N \cdot m$$

Y el momento estabilizador creado por la masa M:

$$M_{estabilizador} = M \cdot g\, b_M = 0,92 \cdot 9,81 \cdot 0,245 = 2,21\, N \cdot m$$

Como el $M_{giro} \approx M_{estabilizador}$, las mediciones son correctas.

PROBLEMA I.2

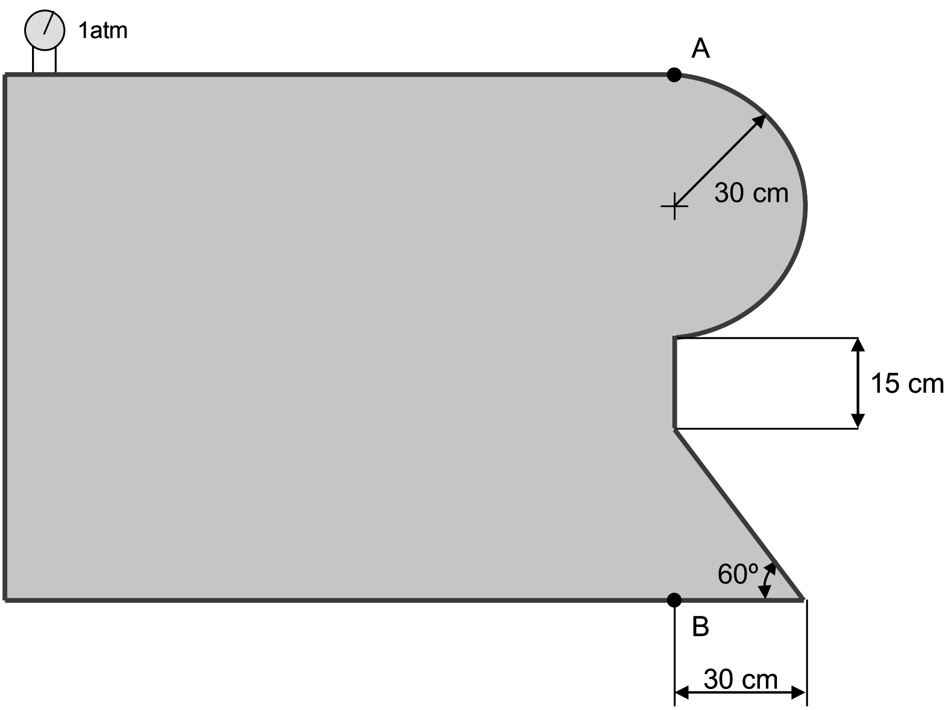
La figura representa un depósito estanco de agua presurizada (cuya anchura perpendicular al papel es de b=1 m), en el que el manómetro muestra la diferencia entre la presión del agua de la parte superior del depósito y la presión en el exterior del mismo.

Si la presión absoluta del aire en el exterior es de 1 atmósfera y el manómetro señala a su vez 1 atm, entonces:

a) Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre toda la pared lateral del depósito desde A hasta B (no es necesario calcular el punto de aplicación de la misma).

La presión en el exterior del depósito disminuye, mientras que la del interior se mantiene constante, y el manómetro pasa a marcar 1,5 atm.

b) ¿Cuál es la presión absoluta en el exterior? Indicar en este caso cómo se calcularía la fuerza sobre la pared.

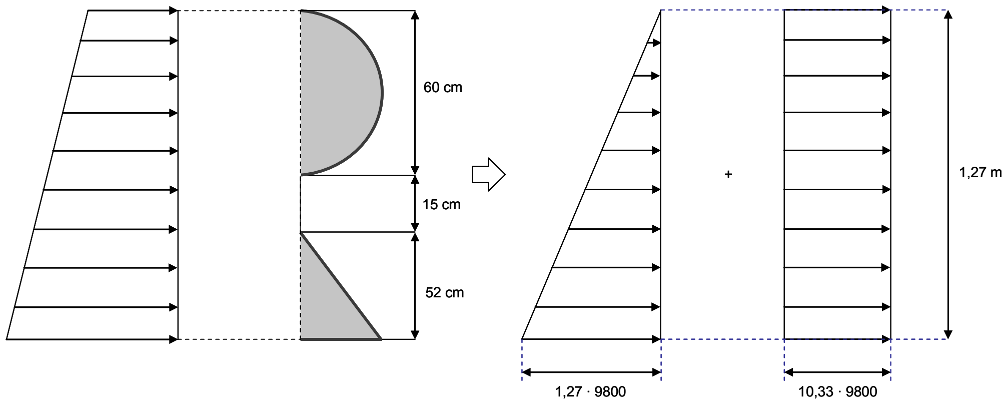


SOLUCIÓN (en esta solución, se omite directamente la anchura de b=1 m)

a) Hay que calcular las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el fluido sobre la compuerta.

Fuerza Horizontal

Puede calcularse en conjunto sobre toda la compuerta (fuerza por metro de profundidad):



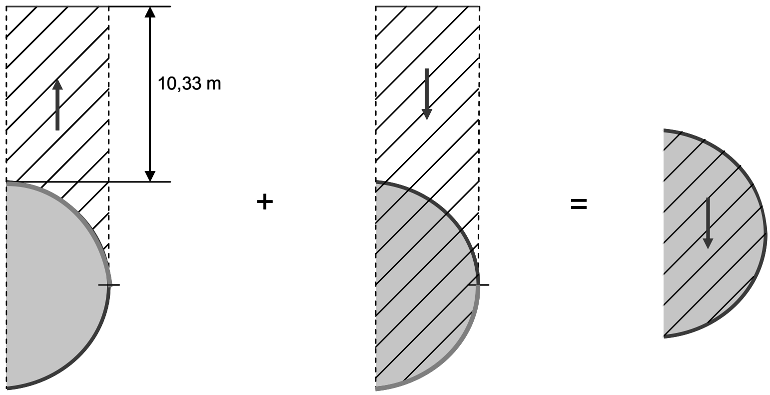
$$F_H = 10{,}33 \cdot 9800 \cdot 1{,}27 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}27 \cdot 1{,}27 \cdot 9800 = 128567{,}2\,N + 7903{,}2\,N$$

$$\boxed{F_H = 136470{,}4\,N}$$

Fuerza Vertical

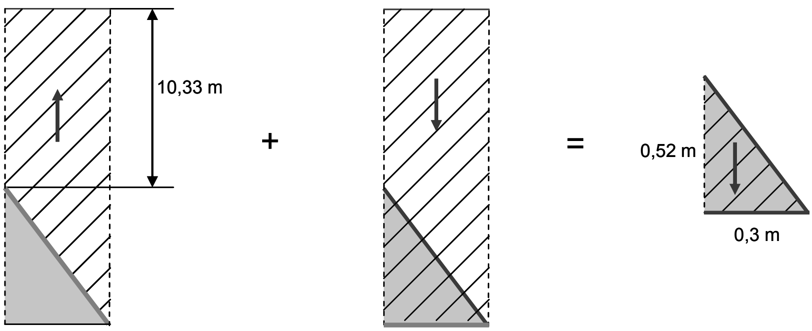
Descomponiendo la pared vertical en tres tramos:

TRAMO SEMICIRCULAR



$$F_{v_1} = 9800 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{8} = 9800 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{8} = 1384{,}7\,N$$

TRAMO TRIANGULAR



$$F_{v_3} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}52 \cdot 9800 = 764{,}4\,N$$

Evidentemente el tramo vertical de 15 cm no sufre fuerzas verticales.

$$F_v = F_{v_1} + F_{v_3} = 1384{,}7 + 764{,}4 = 2149{,}1\,N$$

$$\boxed{F_v = 2149{,}1\,N}$$

b) En el apartado a) teníamos:

$$P_{manómetro} = P^*_{\text{int}} - P^*_{ext}$$

$$1\,atm = P^*_{\text{int}} - 1\,atm$$

$$P^*_{\text{int}} = 2\,atm$$

En el apartado b) tendremos:

$$P_{manómetro} = P^*_{\text{int}} - P^*_{ext}$$

$$P^*_{ext} = 2 - 1{,}5 = 0{,}5\,atm$$

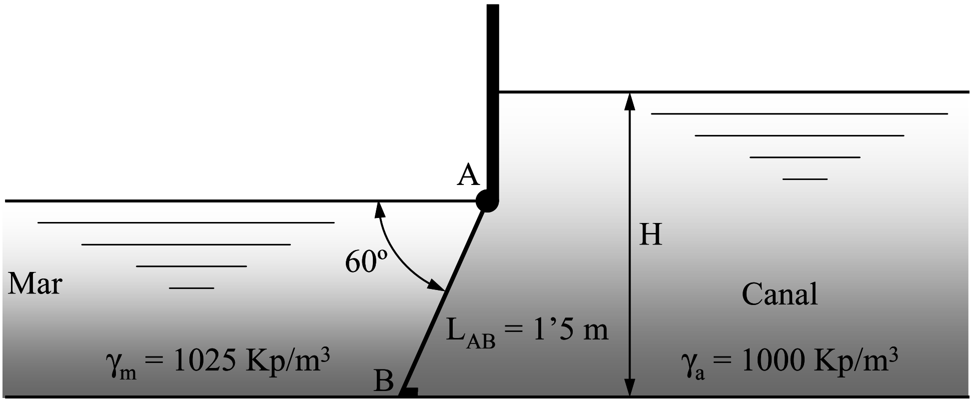
El problema ahora se resolverá igual, teniendo en cuenta que la presión del agua en la parte superior del depósito es 1,5 atm = 15,5 mca = 152005 Pa.

PROBLEMA I.3

Las descargas de aguas residuales depuradas desde el canal que las transporta hasta el mar están controladas por una compuerta rectangular AB de 1,50 m de longitud, 2 m de anchura y 400 Kp de peso. Esta compuerta se encuentra articulada en su arista superior A como indica la figura, y cuando está cerrada, tiene una inclinación de 60º respecto de la horizontal. Si el nivel del agua del lado del mar se considera constante, coincidente con el de la articulación A, determinar:

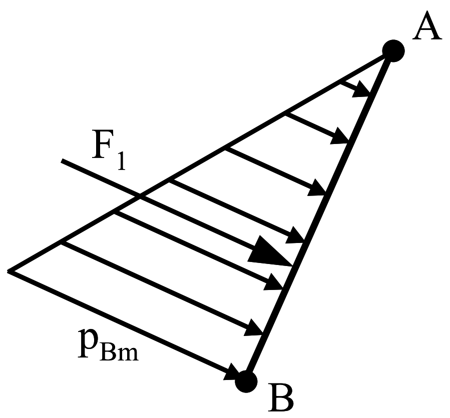
a) Reacción que aparecerá en el tope inferior B de la compuerta, sobre el cual se apoya cuando está cerrada, en caso de que el canal esté vacío.

b) Altura H que alcanzará el agua en el canal en el momento en que la compuerta esté a punto de abrirse para descargar agua hacia el mar.



SOLUCIÓN

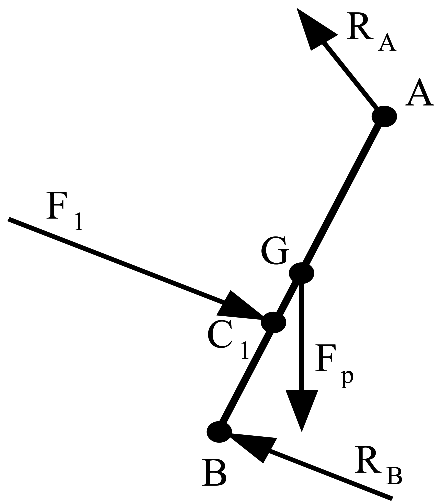
a)



Cuando el canal esté vacío, sobre la compuerta actúa un diagrama de presiones triangular debido a las acciones hidrostáticas del agua del mar. La fuerza resultante de este diagrama de presiones será:

$$F_1 = \frac{1}{2} p_{Bm} L_{AB} b =$$
$$= \frac{1}{2} 1025 (1{,}5 \, sen 60^{\circ}) \cdot 1{,}5 \, 2 =$$
$$= 1997{,}27 \; Kp$$

Por otra parte, y para que la compuerta esté en equilibrio, tanto la suma de fuerzas que actúan sobre la misma como la suma de momentos de estas fuerzas respecto de cualquier punto serán nulos. Sobre la compuerta, además de la fuerza hidrostática F_1 y el peso F_p, actuarán las reacciones en A y en B. La reacción en A, R_A, podrá tener cualquier dirección, al producirse en una articulación, y la reacción en B, R_B, será perpendicular a la compuerta, al estar ésta apoyada en dicho punto.



De esta manera, si tomamos momentos de estas fuerzas respecto de la articulación A, tendremos:

$$F_1 \frac{2L_{AB}}{3} + F_p \frac{L_{AB}}{2} \cos 60^{\circ} - R_B L_{AB} = 0$$

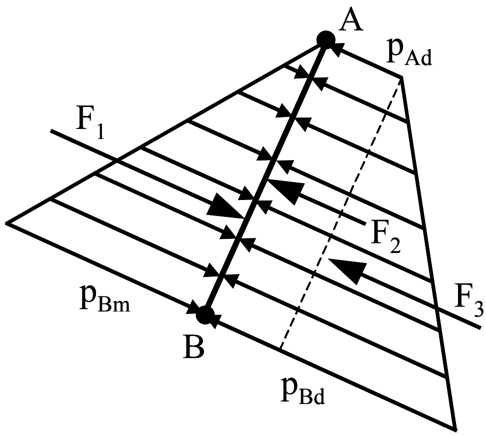
De donde resulta:

$$R_B = \frac{2F_1}{3} + \frac{F_p}{2}\cos 60^\circ = \frac{2\cdot 1997,27}{3} + \frac{400}{2}\cos 60^\circ = 1431,51\,Kp$$

$$\boxed{R_B = 1431,51\,Kp}$$

b)

Si tenemos en el lado del canal una altura H de agua dulce, sobre la compuerta se produce, en este lado, un diagrama de presiones trapecial. Para calcular la fuerza total que actúa sobre la compuerta por este lado, el diagrama de presiones se puede descomponer en una parte rectangular, que produce una fuerza total F_2, y una parte triangular, que produce una fuerza total F_3. El valor de estas fuerzas será:



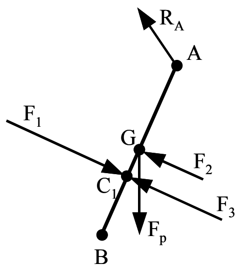
$$F_2 = p_{Ad} L_{AB} b =$$

$$= 1000\cdot(H - 1,5\,sen 60^\circ)\cdot 1,5\cdot 2 = 3000(H - 1,30)\,Kp$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(p_{Bd} - p_{Ad})L_{AB}b = \frac{1}{2}1000\cdot 1,5\,sen 60^\circ\cdot 1,5\cdot 2 = 1948,50\,Kp$$

Además, en el lado del mar, y como el nivel del agua no cambia respecto del apartado anterior, la fuerza total producida es la F_1 ya calculada.

En el instante en que la compuerta está a punto de abrirse debido al nivel H del agua dulce, el conjunto de fuerzas aplicadas sobre la misma será el indicado en la figura adjunta. Podemos observar que la reacción en B, R_B, ya no se produce, al estar la compuerta justo en el momento en que empieza a girar alrededor de la articulación A.



Así, la condición de equilibrio es que la suma de momentos respecto del punto A será cero, o sea,

$$F_1 \frac{2}{3} L_{AB} + F_p \frac{L_{AB}}{2} \cos 60^{o} - F_2 \frac{L_{AB}}{2} - F_3 \frac{2}{3} L_{AB} = 0$$

Dando valores a esta expresión, tendremos:

$$1997{,}27 \frac{2}{3} 1{,}5 + 400 \frac{1{,}5}{2} \cos 60^{o} - 3000(H - 1{,}30) \frac{1{,}5}{2} - 1948{,}50 \frac{2}{3} 1{,}5 = 0$$

De aquí obtenemos que la altura del agua dulce en el canal, necesaria para abrir la compuerta, es de H=1,39 m. Esto corresponde a una altura del agua dulce mayor que la del agua del mar, con una diferencia de alturas de

$$\boxed{\Delta H = H - L_{AB} sen 60^{o} = 1{,}39 - 1{,}5\, sen 60^{o} = 0'09\ m = 9\ cm}$$

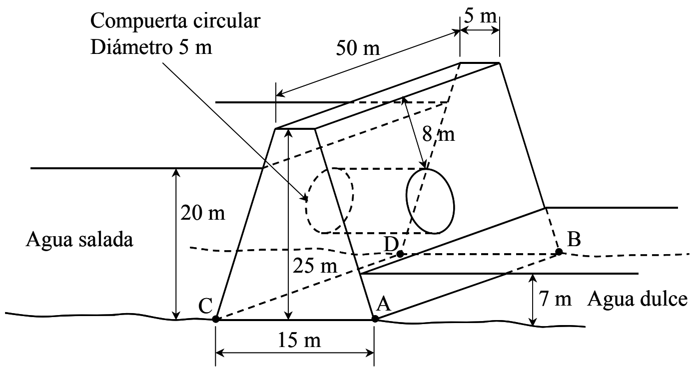
PROBLEMA I.4

Se tiene un dique que separa agua dulce (peso específico 1000 Kp/m^3) de agua salada del mar (peso específico 1025 Kp/m^3), de 50 m de longitud, con las características del esquema de la figura. En este dique se ha dispuesto un orificio, de manera que en el lado del agua dulce está abierto, y en el lado del mar se cierra con una compuerta circular de 5 m de diámetro y 10 Tm de peso. La compuerta se ha montado en el plano inclinado del dique, y se articula en su punto superior a la distancia de 8m de la coronación, medida en la dirección de dicho plano. Esta compuerta puede abrirse hacia el lado del mar por acción de la presión hidrostática del agua dulce cuando el nivel de ésta alcance un valor suficientemente alto.

En estas condiciones, considerando que el nivel del agua del mar es en todo momento de 20 m, y admitiendo que la evolución de las presiones bajo el dique por efecto de las filtraciones en el terreno es lineal, determinar:

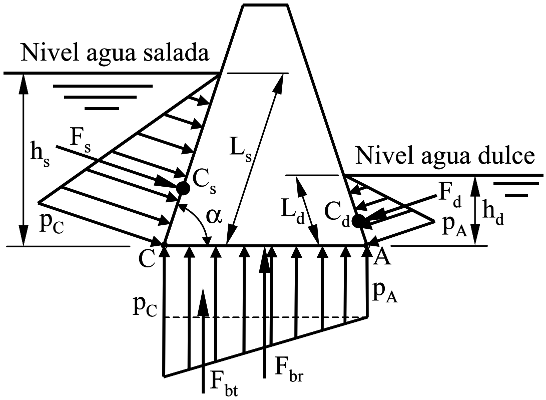
a) Siendo el peso específico del material del dique de 4500 Kp/m^3, comprobar si existirá o no tendencia al vuelco del mismo alrededor de la arista AB cuando el nivel de agua dulce alcance su valor mínimo de 7 m.

b) Altura que deberá alcanzar el agua dulce para que empiece a abrirse la compuerta, hacia el lado del agua del mar, por efecto de las presiones hidrostáticas.



SOLUCIÓN

a)



En relación con la figura adjunta, el ángulo de inclinación de las paredes del dique vale:

$$\alpha = arctg\frac{2\cdot 25}{15-5} = 78{,}69^{\circ}$$

El diagrama de presiones sobre las caras laterales del dique, tanto en la parte del agua salada como del agua dulce, es triangular. Por ello, las fuerzas totales debidas a las presiones sobre dichas caras valen:

$$F_s = \frac{\gamma_s h_s}{2} L_s b = \frac{1025\cdot 20}{2}\frac{20}{sen78{,}69^{\circ}} 50 = 10452990\ Kp$$

$$F_d = \frac{\gamma_d h_d}{2} L_d b = \frac{1000\cdot 7}{2}\frac{7}{sen78{,}69^{\circ}} 50 = 1249260\ Kp$$

Por efecto de las filtraciones del agua en el terreno a una parte y a otra del dique, debajo del mismo admitimos que existe una distribución de presiones lineal entre la presión de los puntos C y A. El diagrama de presiones que así resulta es trapecial, y para el cálculo de la fuerza resultante sobre la base del dique lo separaremos en un diagrama rectangular y en otro triangular. Así tendremos:

$$F_{br} = p_A A_{base} = 1000\cdot 7\cdot 15\cdot 50 = 5250000\ Kp$$

$$F_{bt} = \frac{p_C - p_A}{2} A_{base} = \frac{1025\cdot 20 - 1000\cdot 7}{2} 15\cdot 50 = 10125000\ Kp$$

Si suponemos que el orificio del dique tiene el mismo diámetro que la compuerta, y si L_0 es la longitud de dicho orificio a la altura de su eje, el cual vale

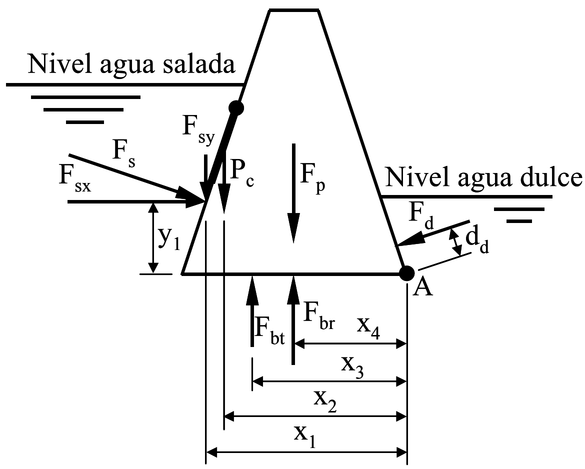
$$L_0 = 5 + 2(8 + 2{,}5)\cos 78{,}69° = 9{,}12\ m$$

el peso total del dique será:

$$F_p = \left(\frac{15+5}{2}\,25\cdot 50 - \frac{\pi\, 5^2}{4}\,9{,}12\right)4500 = 55444314\ Kp$$

En la figura adjunta se ha representado el conjunto de fuerzas que actúan sobre el dique, siendo P_c el peso de la compuerta. En este caso, la fuerza F_s se descompone en sus dos componentes, de manera que

$$F_{sx} = F_s\, sen\,\alpha =$$
$$= 10452990\cdot sen 78{,}69° =$$
$$= 10250000\ Kp$$



$$F_{sy} = F_s \cos\alpha = 10452990\cos 78{,}69° = 2050000\ Kp$$

La distancia al punto A de cada una de las fuerzas que actúan sobre el dique vale:

$$x_1 = 15 - \frac{1}{3}\frac{h_s}{\tan\alpha} = 15 - \frac{1}{3}\frac{20}{\tan 78{,}69} = 13{,}67\ m$$

$$x_2 = 10 + (8 + 2{,}5)\cos 78{,}69° = 12{,}06\ m$$

$$x_3 = \frac{2}{3}15 = 10\ m$$

$$x_4 = \frac{15}{2} = 7{,}5\ m$$

$$y_1 = \frac{h_s}{3} = \frac{20}{3} = 6{,}67\ m$$

$$d_d = \frac{1}{3}L_d = \frac{1}{3}\frac{7}{sen78{,}69^{o}} = 2{,}38\ m$$

El momento de vuelco del dique alrededor de la arista AB será:

$$M_{vco} = F_{bt}x_3 + F_{br}x_4 + F_{sx}y_1 = 10125000\cdot 10 + 5250000\cdot 7{,}5 + 10250000\cdot 6{,}67$$

$$\boxed{M_{vco} = 2{,}09\cdot 10^8\ Kp\ m}$$

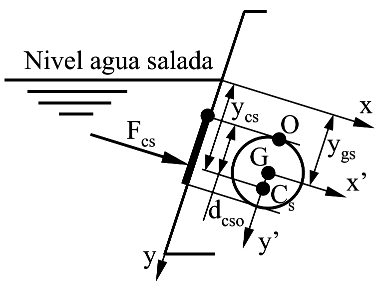
y el momento estabilizador:

$$M_{est} = F_{sy}x_1 + P_c x_2 + F_p x_4 + F_d d_d =$$
$$= 2050000\cdot 13{,}67 + 10000\cdot 12{,}69 + 55444314\cdot 7{,}5 + 1249260\cdot 2{,}38$$

$$\boxed{M_{est} = 4{,}47\cdot 10^8\ Kp\ m}$$

Como el momento estabilizador es mayor que el momento de vuelco, el dique no tiende a volcar alrededor de la arista AB.

b)



Para conocer la altura del agua dulce para la cual la compuerta empieza a abrirse, deberemos calcular primero las fuerzas hidrostáticas sobre la misma, así como sus puntos de aplicación. La fuerza sobre la compuerta debido al nivel de agua salada será:

$$F_{cs} = p_{Gs} A_c = \gamma_s \left[(8 + R_c) sen\alpha - (25 - h_s) \right] \frac{\pi D_c^2}{4}$$

$$F_{cs} = 1025 \left[(8 + 2{,}5) sen 78{,}69^\circ - 5 \right] \frac{\pi\, 5^2}{4}\, p = 106586{,}38\ Kp$$

Para calcular la posición del centro de presiones Cs tenemos:

$$y_{cs} = y_{gs} + \frac{I_{x'x'}}{y_{gs} A_c}$$

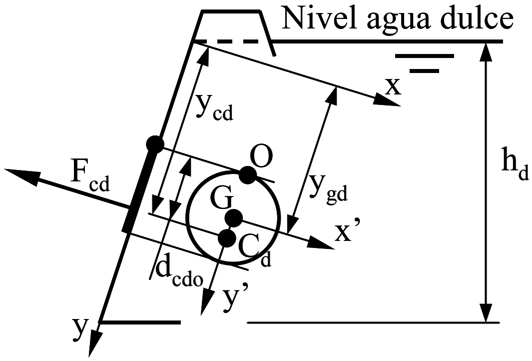
$$y_{cs} = \left(8 + 2'5 - \frac{5}{sen 78{,}69^\circ} \right) + \frac{\dfrac{\pi\, 5^4}{64}}{\left(8 + 2{,}5 - \dfrac{5}{sen 78{,}69^\circ} \right) \dfrac{\pi\, 5^2}{4}} = 5{,}69\ m$$

y la distancia entre la fuerza F_{cs} y la articulación O de la compuerta,

$$d_{cso} = y_{cs} - \left(8 - \frac{5}{sen\alpha} \right) = 5{,}69 - \left(8 - \frac{5}{sen 78{,}69^\circ} \right) = 2{,}79\ m$$

Estos mismos valores se pueden obtener para la parte de agua dulce, pero en este caso las expresiones se deberán plantear en función del nivel h_d alcanzado por el agua. Así tendremos:

$$F_{cd} = p_{Gd} A_c$$



$$F_{cd} = \gamma_d \left[(8 + R_c) sen\alpha - (25 - h_d) \right] \frac{\pi D_c^2}{4} =$$

$$= 1000\left[(8+2{,}5)sen78{,}69^{o} - (25-h_d)\right]\frac{\pi \cdot 5^2}{4}$$

$$F_{cd} = 19634{,}95 h_d - 288710{,}51\ Kp$$

$$y_{cd} = y_{gd} + \frac{I_{x'x'}}{y_{gd} A_c} = \left(8 + 2{,}5 - \frac{25-h_d}{sen78{,}69^{o}}\right) + \frac{\frac{\pi \cdot 5^4}{64}}{\left(8+2{,}5-\frac{25-h_d}{sen78{,}69^{o}}\right)\frac{\pi \cdot 5^2}{4}} =$$

$$= 1{,}02 h_d + \frac{1{,}53}{h_d - 14{,}70} - 15\ m$$

$$d_{cdo} = y_{cd} - \left(8 - \frac{25-h_d}{sen\alpha}\right) = 1{,}02 h_d + \frac{1{,}53}{h_d - 14{,}70} - 15 - \left(8 - \frac{25-h_d}{sen78{,}69^{o}}\right) =$$

$$= 2{,}50 + \frac{1{,}53}{h_d - 14{,}70}\quad m$$

En el instante en que la compuerta comienza a abrirse, la suma de momentos respecto del punto O vale cero. Por ello,

$$F_{cs} d_{cso} + P_c R_c \cos\alpha = F_{cd} d_{cdo}$$

siendo P_c el peso de la compuerta. Dando valores tendremos:

$$106586{,}38 \cdot 2{,}79 + 10000 \cdot 2{,}5 \cdot \cos 78{,}69^{o} =$$

$$= (19634{,}95 h_d - 288710{,}51)\left(2{,}50 + \frac{1{,}53}{h_d - 14{,}70}\right)$$

cuya solución es:

$$h_d = 20{,}25\ m$$

O sea, que la compuerta instalada en el dique se abrirá con un nivel de agua dulce de 25 cm por arriba del nivel del agua salada.

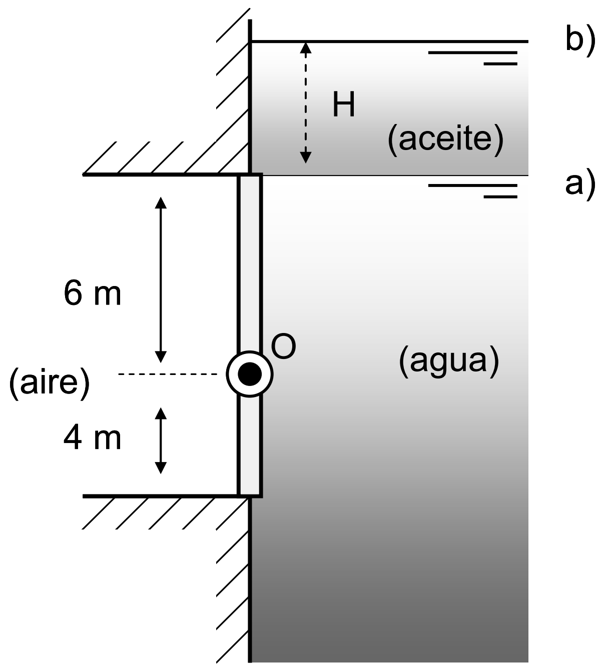
PROBLEMA I.5

La compuerta de la figura (cuya anchura perpendicular al papel es de b=1 m) puede girar alrededor del eje situado en O.

a) A la derecha de la compuerta hay agua (cuyo nivel de lámina libre está enrasado con la parte superior de la compuerta), y por encima del agua, la atmósfera. A la izquierda de la compuerta hay aire a presión absoluta de 1 atm. Se pide calcular el momento de giro (módulo y sentido) que aparece sobre la compuerta.

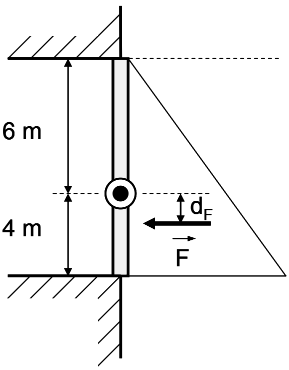
b) Mismas condiciones que en a) pero añadiendo por encima del agua una capa de aceite ($\rho'_{aceite} = 0{,}8$) de espesor H. Se pide calcular el valor de H que hace que la compuerta no gire.

c) Mismas condiciones que en b) pero estando el aire situado a la izquierda de la compuerta a una presión absoluta de 1,2 atm. Se pide calcular el nuevo valor de H que hace que la compuerta no gire.



SOLUCIÓN (en esta solución se omite directamente la anchura de b=1 m)

a)



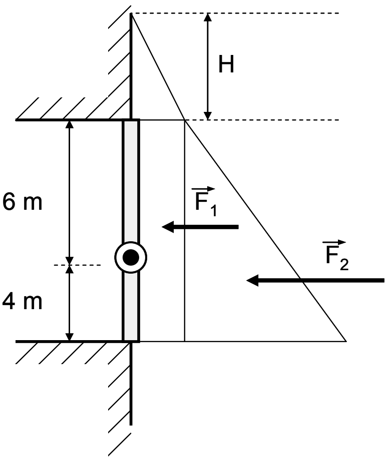
$$F = \frac{1}{2}\gamma \cdot 10 \cdot 10 = 50 \cdot \gamma = 490500\ N$$

$$M_f = F \cdot d_F = 50 \cdot \gamma \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10 - 6\right) =$$

$$= 50 \cdot 9810 \cdot 0{,}667 = 327163\ N \cdot m$$

$\boxed{M_f = 327163\, N \cdot m}$ con sentido horario

b)



$$F_1 = \gamma_{aceite} \cdot H \cdot 10$$

$$M_{F_1} = F_1 \cdot d_{F_1} = \gamma_{aceite} \cdot H \cdot 10 \cdot (5-4) =$$

$$= \gamma_{aceite} \cdot 10 \cdot H$$

(antihorario)

$$F_2 = 50 \cdot \gamma$$

$$M_{F_2} = 50 \cdot \gamma \cdot 0{,}667 \text{ (horario)}$$

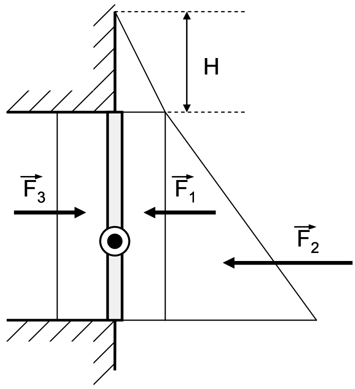
Equilibrio de momentos para que la compuerta no gire:

$$M_{F_1} = M_{F_2} \rightarrow \gamma_{aceite} \cdot 10 \cdot H = 50 \cdot \gamma \cdot 0{,}667$$

$$\boxed{H = \frac{327163}{10 \cdot \gamma'_{aceite} \cdot \gamma} = \frac{327163}{10 \cdot 0{,}8 \cdot 9810} = 4{,}17\, m}$$

c) Para que la compuerta no gire se debe cumplir:

$$\vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} + \vec{M}_{F_3} = 0$$



(trabajamos con presiones relativas)

$$F_3 = P \cdot A = (1{,}2 - 1) \cdot 101337 \cdot 10 = 202674\ N$$

$$M_{F_3} = P \cdot A \cdot 1 = 202674\ N \cdot m \text{ (horario)}$$

$$-327163 - 202674 + \gamma_{aceite} \cdot 10 \cdot H = 0$$

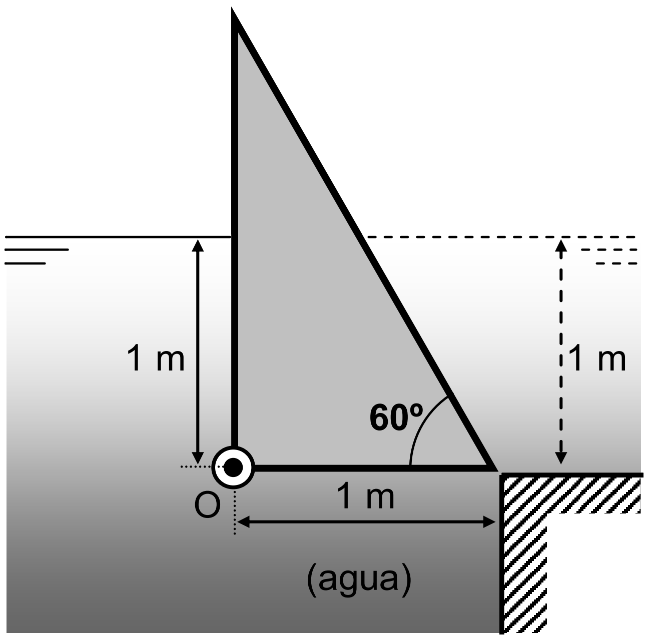
$$\boxed{H = 6{,}75\ m}$$

PROBLEMA I.6

La compuerta mostrada en la figura (cuya anchura perpendicular al papel es de b=1 m) es maciza, de masa homogénea y puede girar alrededor de O. Para la misma, se pide:

a) **Si no hay agua a la derecha de la compuerta y el nivel del agua a su izquierda es de 1 m, tal como se indica, ¿cuál habría de ser la masa de la compuerta para que se mantenga en equilibrio (sin ningún par de giro resultante) en la posición mostrada?**

b) **Si ahora (con la masa ya conocida) también hay agua a la derecha, con un nivel también igual a 1 m, ¿cuál es el valor y sentido (horario o antihorario) del momento de giro resultante sobre la compuerta**

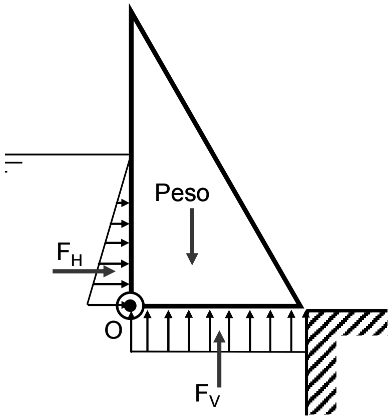


SOLUCIÓN (en esta solución se omite directamente la anchura de b=1m)

a) Fuerzas que intervienen en el problema

$$F_H = \frac{1}{2}\cdot\gamma\, 1\cdot 1\, N \quad ; \quad F_V = \gamma\, 1\cdot 1\, N$$

$$Peso = m\, g\, N$$



Distancia del punto de aplicación de cada fuerza al punto O:

$$d_H = \frac{1}{3}\cdot 1\, m \quad ; \quad d_V = \frac{1}{2}\, m \quad ; \quad d_{Peso} = \frac{1}{3}\cdot 1\, m$$

Planteando equilibrio de momentos:

$$\frac{\gamma\, 1^2}{2}\cdot\frac{1}{3} + m\, g\, \frac{1}{3} = \gamma\, 1^2\cdot\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\gamma}{6} + \frac{m\, g}{3} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{m\, g}{3} = \gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\gamma}{3}$$

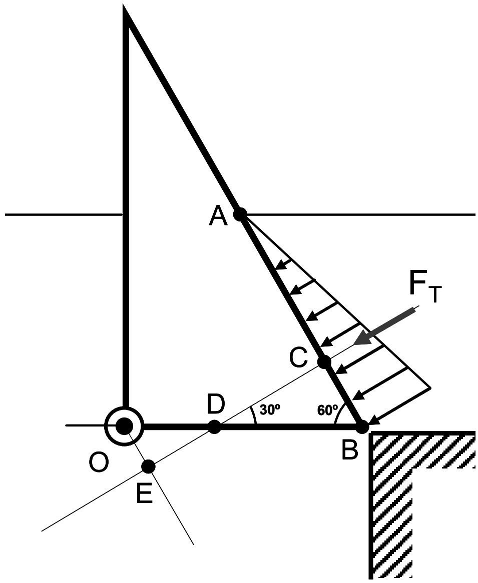
$$m = \frac{\gamma}{g} = 1000\, kg$$

b) Como los momentos de todas las fuerzas resueltas en el apartado a) siguen equilibrándose entre sí, el momento de giro resultante ahora será el producido exclusivamente por la nueva fuerza hidrostática debida al agua existente a la derecha de la compuerta.

El módulo de la nueva fuerza hidrostática será:

$$F_T = \frac{1}{2}\cdot\gamma\, 1\cdot\overline{AB} = \frac{1}{2}\cdot\gamma\, 1\cdot\frac{1}{sen60} = \frac{\gamma}{2\cdot sen60}\, N$$

La distancia (brazo) para calcular el momento de F_T con respecto al punto O es $d_{F_T} = \overline{OE}$



Calculamos $d_{F_T} = \overline{OE}$:

$$\overline{CB} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{sen60} = \frac{1}{3 \cdot sen60} \ m$$

$$cos60 = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \quad \rightarrow \quad \overline{DB} = \frac{\overline{CB}}{cos60} = \frac{\frac{1}{3 \cdot sen60}}{cos60} = \frac{1}{3 sen60 \, cos60} \ m$$

$$\overline{OD} = 1 - \overline{DB} = 1 - \frac{1}{3 \cdot sen60 \cdot cos60} \ m$$

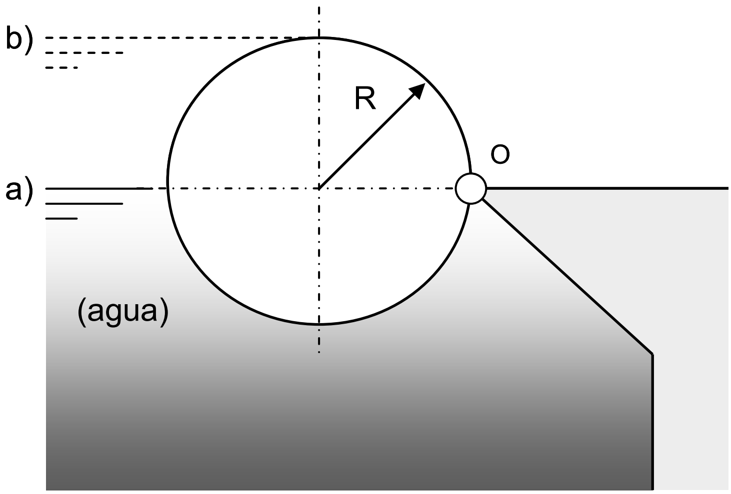
$$sen30 = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}} \quad \rightarrow \quad \overline{OE} = d_{F_T} = sen30 \, \overline{OD} = sen30 \left[1 - \frac{1}{3 \cdot sen60 \cdot cos60} \right] m$$

Finalmente:

$$M_{F_T} = F_T \cdot d_{F_T} = \frac{\gamma}{2 \cdot sen60} \cdot sen30 \left[1 - \frac{1}{3 \cdot sen60 \cdot cos60} \right] = 652 \ N \cdot m \ \text{(horario)}$$

PROBLEMA I.7

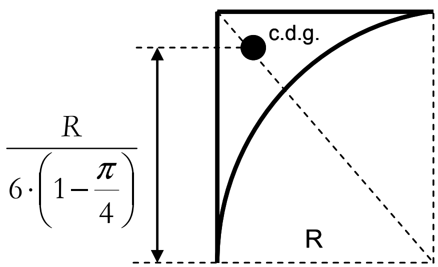
El cilindro de la figura (cuya anchura perpendicular al papel es de b=1 m) puede girar sobre un eje situado en 0. Su radio R es de 2 m.



a) **Si el agua está al nivel a), calcular cuál debe ser la masa del cilindro para que se mantenga estable en la posición que muestra la figura.**

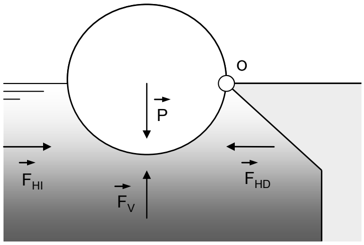
b) **Si el agua alcanzase ahora el nivel b), calcular cuál sería el par de giro resultante que, estando el sistema en esa misma posición, aparecería sobre el cilindro.**

Nota:

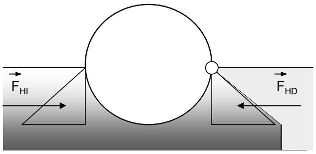


SOLUCIÓN (en esta solución se omite directamente la anchura de b=1 m)

a) Planteamos el equilibrio de fuerzas y momentos en el cilindro:



Fuerzas horizontales y sus momentos:

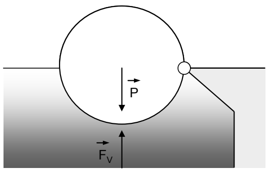


$$F_{HI} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot R \cdot R = \frac{\gamma \cdot R^2}{2} = F_{HD}$$

$$M_{FHI} = F_{HI} \cdot \frac{2}{3} \cdot R = \frac{\gamma \cdot R^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot R}{3} = M_{FHD}$$

Como $\vec{F}_{HI} = -\vec{F}_{HD}$ y $\vec{M}_{FHI} = -\vec{M}_{FHD}$, se anulan mutuamente.

Fuerzas verticales y sus momentos:



$$P = m \cdot g$$

$$M_P = P \cdot R = m \cdot g \cdot R \ \ (\textit{antihorario})$$

$$F_V = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \gamma$$

$$M_{FV} = F_V \cdot R = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \gamma \cdot R (\textit{horario})$$

Igualando momentos:

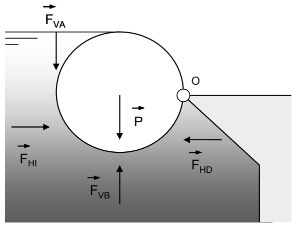
$$\sum \vec{M} = 0 \rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \gamma \cdot R$$

$$\boxed{m = \frac{1}{g} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \gamma = \frac{\pi \cdot 2^2}{9{,}81 \cdot 2} \cdot 9810 = 6283 \ kg}$$

b) Volvemos a plantear fuerzas y momentos para la nueva situación:

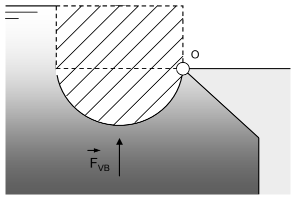
$$P = m \cdot g$$

$$M_P = m \cdot g \cdot \mathrm{R}\ (antihorario)$$

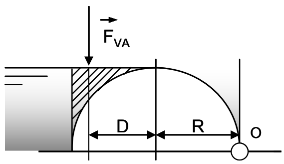


$$F_{VB} = \left(\mathrm{R} \cdot 2R + \frac{\pi \cdot \mathrm{R}^2}{2} \right) \cdot \gamma$$

$$M_{F_{VB}} = \left(2\mathrm{R}^2 + \frac{\pi \cdot \mathrm{R}^2}{2} \right) \cdot \gamma \cdot \mathrm{R}\ (horario)$$

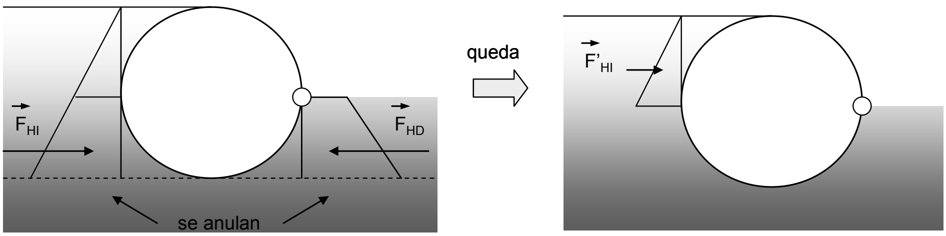


$$F_{VA} = \left[\mathrm{R}^2 - \frac{\pi \cdot \mathrm{R}^2}{4} \right] \cdot \gamma$$



$$M_{F_{VA}} = \left[\mathrm{R}^2 - \frac{\pi \cdot \mathrm{R}^2}{4} \right] \cdot \gamma \cdot \left(\frac{\mathrm{R}}{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 6} + \mathrm{R} \right)$$

$$M_{F_{VA}} = \gamma \cdot \mathrm{R}^3 \cdot \frac{14 - 3\pi}{12} \quad (antihorario)$$



$$F'_{HI} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \mathrm{R}^2$$

$$M_{F'_{HI}} = \frac{\gamma \cdot \mathrm{R}^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{R}}{3} = \frac{\gamma \cdot \mathrm{R}^3}{6}\ (horario)$$

$$M_{result} = \sum M_{antihor} - \sum M_{horario}$$

$$M_{result} = M_P + M_{F_{VA}} - M_{F_{VB}} - M_{F'_{HI}} =$$

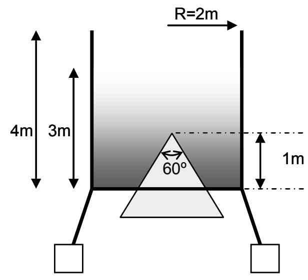
$$= m \cdot g \cdot R + \gamma \cdot R^3 \cdot \frac{14 - 3\pi}{12} - \gamma \cdot R^3 \cdot \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) - \gamma \cdot R^3 \frac{1}{6} =$$

$$= 6283 \cdot 9{,}81 \cdot 2 + 9810 \cdot 1 \cdot 2^3 \cdot (-3{,}356)$$

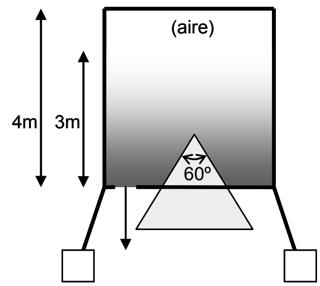
$$\boxed{M_{result} = -140121\ N \cdot m\ (horario)}$$

PROBLEMA I.8

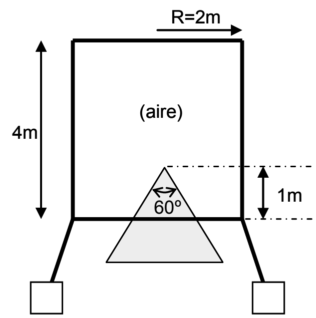
a) Sea un depósito de sección cilíndrica de radio R=2 m y altura 4 m. Está abierto a la atmósfera y se encuentra lleno de agua hasta un nivel de 3 m. En el centro de su base tiene un orificio que se encuentra tapado por un cono, tal como muestra la figura. La masa del cono es de 1000 kg. Se pide: Calcular la fuerza F que hay que ejercer sobre el cono para que no caiga.



b) Se cierra la parte superior del depósito y se abre un orificio en la base. Así, el agua empieza a salir por el orificio y el nivel en el depósito a bajar. Suponiendo que el aire encerrado en la parte superior se expande isotérmicamente (P·V=constante), se pide calcular hasta qué nivel llegará a bajar el agua cuando deje de salir por el orificio (es decir, cuando haya la misma presión a ambos lados del orificio), y qué volumen de agua habrá escapado.



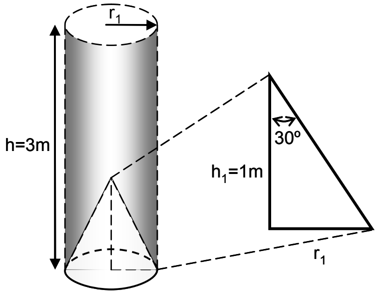
c) Se cierra el orificio del apartado b) y se extrae (por otros medios) toda el agua que quedaba en el depósito, de modo que ahora el depósito está lleno sólo por aire (la misma cantidad que antes ocupaba su parte superior). Se pide: Calcular la fuerza F' que hay que ejercer ahora sobre el cono para que no caiga.



Datos: $Volumen\ cono = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$; $\acute{A}rea\ lateral\ cono = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$

SOLUCIÓN

a) $r_1 = tg30° = 0{,}577\,m$



$$\forall_{cilindro} = \pi \cdot r_1^2 \cdot h = \pi \cdot 0{,}577^2 \cdot 3 = 3{,}14\ m^3$$

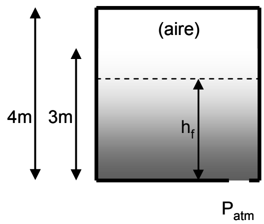
$$\forall_{cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}577^2 \cdot 1}{3} = 0{,}35\ m^3$$

$$\forall_{agua} = \forall_{cilindro} - \forall_{cono} = 2{,}79\ m^3$$

$$Peso\ agua = 2{,}79 \cdot \gamma = 27370\,N$$

$$\boxed{Fuerza\ a\ ejercer = Peso\ agua + Peso\ cono\ total = 27370 + 1000 \cdot 9{,}8 = 37180\,N}$$

b) $h_f = altura\ final\ del\ agua$



El agua dejará de salir cuando la presión sea la misma a ambos lados del orificio.

Por tanto, al final del proceso, a ambos lados del orificio debe cumplirse:

$$P_{atm} = P_{faire} + \gamma \cdot h_f$$

En cuanto al aire encerrado en el depósito, pasa de tener P_{atm} al principio (cuando se cierra el depósito) a tener P_{faire} al final (cuando deja de salir agua).

Expansión del aire (trabajando con presiones absolutas):

$$P^*_{atm} \cdot \forall_0 = P^*_{faire} \cdot \forall_{faire}$$

$$P^*_{faire} = \frac{P^*_{atm} \cdot \forall_0}{\forall_{faire}} = \frac{P_{atm} \cdot \lfloor (4-3) \cdot A_{depósito} \rfloor}{(4-h_f) \cdot A_{depósito}} = \frac{P^*_{atm}}{4-h_f}$$

$$P^*_{faire} = \frac{101337}{4-h_f}$$

Retomamos: $$P^*_{atm} = P^*_{faire} + \gamma \cdot h_f \rightarrow 101337 = \frac{101337}{4-h_f} + 9810 \cdot h_f$$

Nivel final del agua en el depósito:

$$\boxed{h_f^2 - 14{,}33 h_f + 31 = 0 \rightarrow h_f = 2{,}665\, m}$$

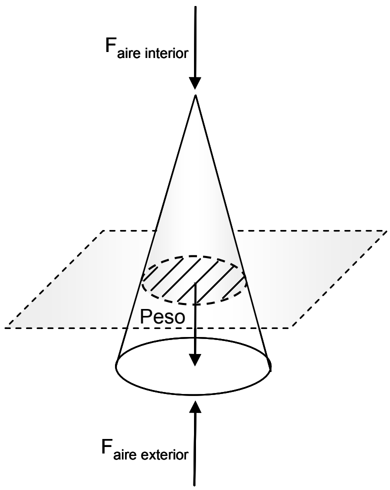
Volumen de agua escapado: $$\boxed{\forall_{agua} = [3 - 2{,}665] \cdot \pi 2^2 = 4{,}21\, m^3}$$

c) El cono se ve sometido a las siguientes fuerzas:

Calculando cada una por separado se tiene:

Fuerza del aire interior sobre el cono:

Volumen total dentro del depósito:



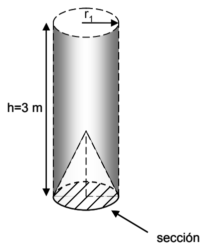
$$\forall_T = \pi \cdot R^2 \cdot h_D - \frac{1}{3}\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 =$$

$$= \pi \cdot 2^2 \cdot 4 - \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}577^2 \cdot 1 = 49{,}9\ m^3$$

Expansión del aire:

$$P^*_{final} \cdot \forall_T = P^*_{\mathrm{atm}} \cdot \forall_0 \rightarrow P^*_{final} = \frac{101337 \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1}{49{,}9} = 25520\ Pa$$

La fuerza del aire contenido en el depósito sobre el cono es vertical, y se ejerce sobre la sección marcada en la figura:



$$A_{\text{sección}} = \pi \cdot r_1^2 = \pi (tg 30^\circ)^2 = 1{,}047\ m^2$$

$$F_{\text{aire interior}} = A_{\text{sección}} \cdot P^*_{\text{final}}$$

$$F_{\text{aire interior}} = 1{,}047 \cdot 25520 = 26719\, N$$

El peso del cono:

$$\text{Peso} = 1000 \cdot 9{,}81 = 9810\ N$$

Fuerza sobre el cono de la atmósfera exterior al depósito:

$$F_{\text{aire exterior}} = A_{\text{sección}} \cdot P^{*}_{\text{atm}} = 1{,}047 \cdot 101337 = 106100\ \text{N}$$

Balance de fuerzas:

$$F_{\text{resultante}} = F_{\text{aire exterior}} - F_{\text{aire interior}} - \text{Peso} = 69570\ \text{N}$$

Como muestra el resultado del balance, la resultante sobre el cono ya es positiva (hacia arriba) por lo que, no es necesario ejercer ninguna fuerza adicional desde el exterior para evitar que caiga. Nótese que esto es debido al efecto de succión que ejerce sobre el cono la depresión del aire que existe dentro del depósito.

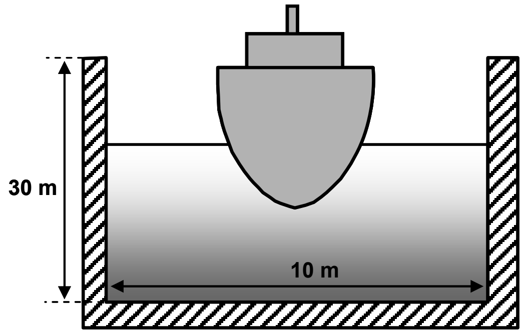
PROBLEMA I.9

La figura muestra el dique de un astillero (perpendicular al papel), que puede considerarse estanco. El dique tiene una longitud de 50 m, un ancho de 10 m y una altura de 30 m, y se llena de agua hasta una altura de 15 m.

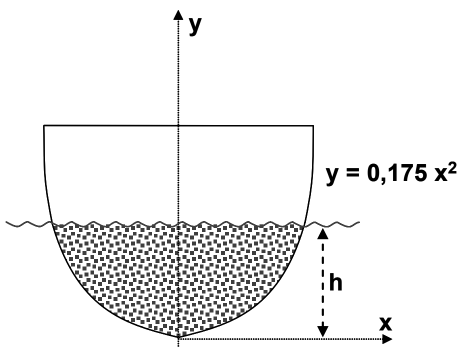
a) Determinar las fuerzas totales que soportan las paredes laterales y el fondo.

b) Se introduce en el dique una barcaza de masa 300 Tm. ¿Varía la fuerza que soportan fondo y paredes?

En caso afirmativo calcular los nuevos valores.

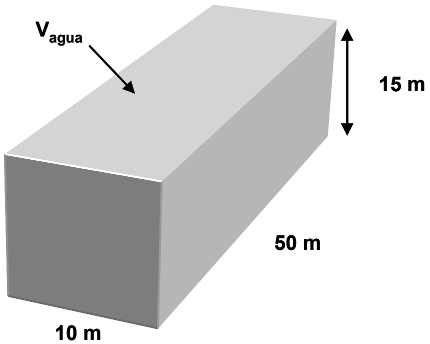


c) Suponiendo que la sección recta de la barcaza que muestra la figura es simétrica, constante, y que en la proa y la popa se cierra con dos planos verticales, determinar el calado de la barcaza (valor de h). Longitud de la barcaza: 30 m.



SOLUCIÓN

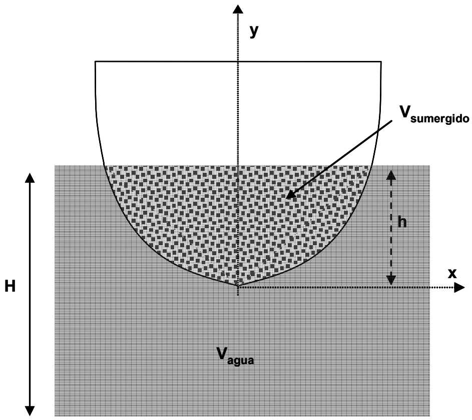
a)



$$F_{fondo} = P_G \cdot A = \gamma \cdot 15 \cdot 10 \cdot 50 = $$
$$= 73575000\,N$$

$$F_{lateral} = P_G \cdot A = \gamma \cdot 7{,}5 \cdot 50 \cdot 15 = $$
$$= 55181250\,N$$

b)



$$Peso = Empuje$$

$$m\,g = \gamma\,V_{sumergido}$$

$$V_{sumergido} = \frac{m\,g}{\gamma} = 300\,m^3$$

Comparando volúmenes con y sin barcaza:

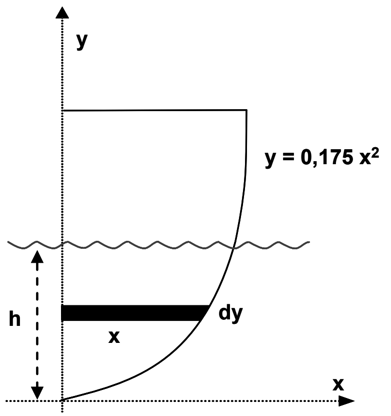
$$V_{agua} + V_{sumergido} = 10 \cdot 50 \cdot H$$
$$10 \cdot 50 \cdot 15 + 300 = 10 \cdot 50 \cdot H$$

$$H = \frac{V_{sumergido} + V_{agua}}{10 \cdot 50} = \frac{7800}{500} = 15{,}6\,m$$

$$F_{fondo} = \gamma \cdot 15{,}6 \cdot 10 \cdot 50 = 76518000\,N$$

$$F_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot 15{,}6 \cdot 15{,}6 \cdot 50 = 59684040\,N$$

c)



$$x = \sqrt{\frac{y}{0{,}175}}$$

$$V_{sumergido} = \left[\int_0^h x\, dy\right]\cdot 2\cdot 30 = 300\, m^3$$

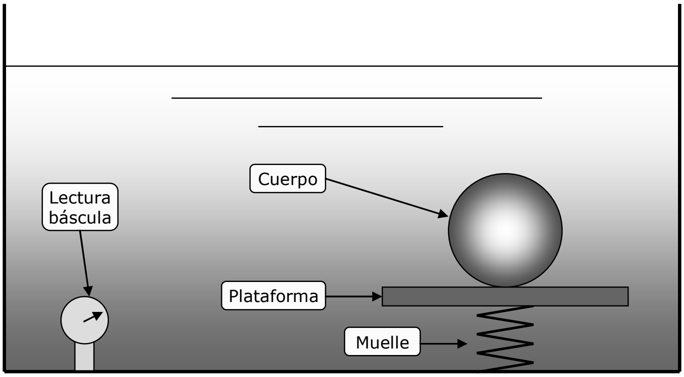
$$\int_0^h x\, dy = \int_0^h \sqrt{\frac{y}{0{,}175}}\cdot dy = 2{,}39\cdot \int_0^h y^{1/2}\cdot dy =$$

$$= 2{,}39\cdot \left[y^{3/2}\right]_0^h \cdot \frac{2}{3} = 2{,}39\cdot h^{3/2}\cdot \frac{2}{3} = 1{,}593\cdot h^{3/2}$$

$$V_{sumergido} = 300 = 1{,}593\cdot h^{3/2}\cdot 2\cdot 30 \quad \rightarrow \quad h = 2{,}144\, m$$

PROBLEMA I.10

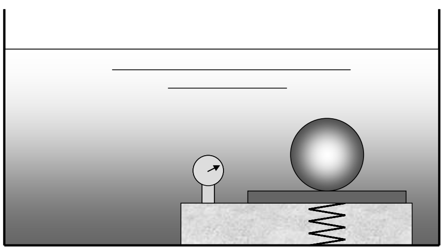
Se pretende, tal y como se muestra en la figura, utilizar una báscula de baño modificada para pesar cuerpos bajo el agua. Para ello se toma el muelle de la báscula y se ancla al fondo de un depósito. En el otro extremo se fija la plataforma de la báscula. El disco que da la lectura de la báscula se conecta al muelle de manera que en función de la deformación del muelle marca un determinado peso (para una deformación determinada del muelle, la lectura de la báscula será la misma que la que arrojaba antes de la modificación).



En estas circunstancias:

a) **Razonar el peso que marcará la báscula. ¿Será mayor o menor que el peso real del cuerpo sumergido? ¿De qué factores dependerá la lectura?**

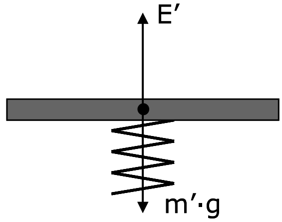
b) **Razonar si es posible que la báscula marque cero.**

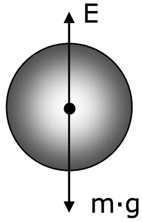


c) **Si la báscula, sin ninguna modificación, se anclase en el fondo del depósito tal y como muestra la figura adjunta, ¿marcaría el mismo peso que en el apartado a)?**

SOLUCIÓN

a) Si a igual deformación del muelle, la báscula marcará lo mismo que fuera del agua, es necesario determinar la resultante que comprime el muelle para saber cuánto marcará la báscula.





Dado que el empuje tiene siempre un valor positivo, la resultante siempre será menor que el peso.

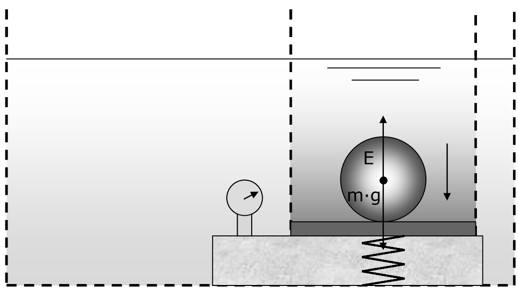
Sin embargo, no hay que olvidar que la plataforma de la báscula también tiene empuje.

Dado que el muelle está tarado teniendo en cuenta el peso de la plataforma, y que también el empuje de ésta será siempre positivo, la báscula marcará siempre menos peso. El valor que marque dependerá del volumen del cuerpo, en cada caso, y también del volumen de la plataforma (que es constante).

b) Sí es posible, ocurrirá cuando se cumpla:

$$Peso_{cuerpo} = E_{cuerpo} + E_{plataforma}$$

c) Este caso es distinto puesto que la báscula ahora no soporta sólo el cuerpo, sino también toda la columna de agua que tiene por encima. Así, la lectura de la báscula será el peso del cuerpo menos su empuje, más el peso de toda la columna de agua señalada en la figura adjunta.



II

ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL FLUJO

PROBLEMA II.1

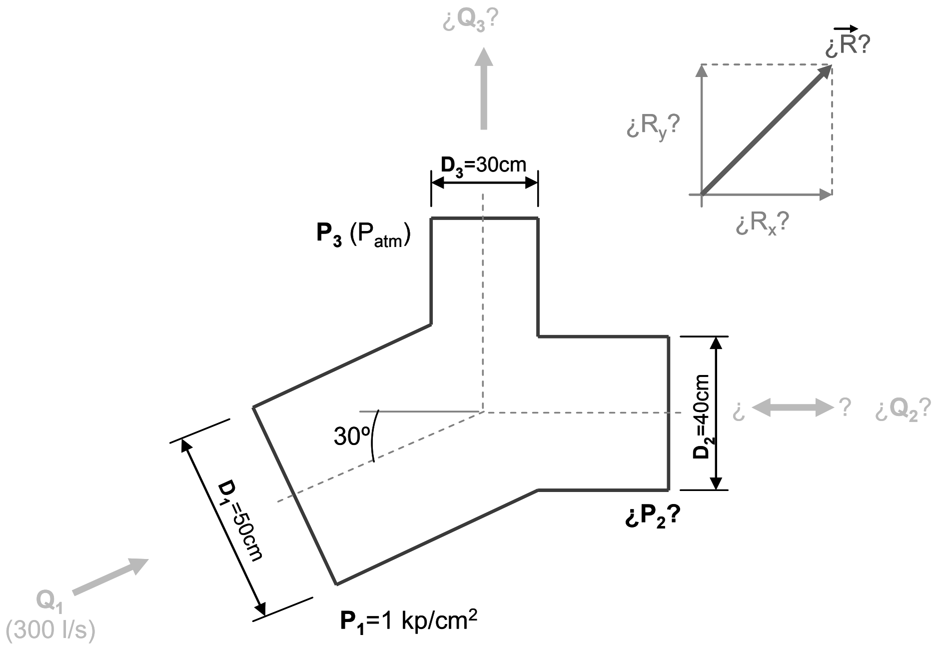
La figura muestra una conexión T, por la que circula agua, con todos los datos disponibles. Se pide:

a) **Determinar los datos que faltan relativos a caudales, presiones y velocidades en las tres secciones.**

b) **Determinar el valor de la reacción que debe ejercer el anclaje de la T para que ésta se mantenga fija en su sitio.**

Notas:

- **Suponer que las tres secciones se encuentran a la misma cota: $z_1=z_2=z_3$.**
- **No despreciar el término cinético en ninguna ecuación.**
- **Despreciar cualquier peso y cualquier pérdida de carga.**



SOLUCIÓN

a) Según el propio esquema del enunciado, procedemos a resolver cada apartado.

La velocidad en la sección 1 la obtenemos directamente:

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0{,}3\cdot 4}{\pi\cdot 0{,}5^2} = 1{,}53\ m/s$$

Aplicamos Bernoulli entre las secciones 1 y 3:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2\cdot g} = \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{v_3^2}{2\cdot g} + h_{pérdidas}$$

$z_1 = z_3$ por lo que se anulan entre sí. Trabajando con presiones relativas $\frac{P_3}{\gamma} = \frac{P_{atm}}{\gamma} = 0$ y, por último, según el enunciado las pérdidas son despreciables.

Resolviendo:

$$\frac{v_3^2}{2\cdot g} = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2\cdot g} \rightarrow \mathrm{v}_3 = \sqrt{\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2\cdot g}\right)\cdot 2\cdot g}$$

$$\boxed{\mathrm{v}_3 = \sqrt{\left(\frac{98100}{9810} + \frac{1{,}53^2}{2\cdot g}\right)\cdot 2\cdot g} = 14{,}1\ m/s}$$

$\boxed{Q_3 = v_3\cdot A_3 = 14{,}1\cdot\frac{\pi 0{,}3^2}{4} = 1\ m^3/s}$ entonces, $\begin{bmatrix} Q_1 = 0{,}3\ m^3/s \\ Q_3 = 1\ m^3/s \end{bmatrix}$ lo que implica que $Q_3 > Q_1$. De aquí obtenemos que Q_2 es ENTRANTE.

Continuidad: $Q_1 + Q_2 = Q_3$

$$\boxed{Q_2 = Q_3 - Q_1 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7\ m^3/s} \text{ entrante}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{0{,}7\cdot 4}{\pi\cdot 0{,}4^2} = 5{,}57\ m/s \text{ , así pues } \boxed{v_2 = 5{,}57\ m/s}$$

Aplicamos de nuevo Bernoulli, ahora entre las secciones 2 y 3:

$$\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2\cdot g}=\frac{P_3}{\gamma}+z_3+\frac{v_3^2}{2\cdot g}+h_{pérdidas}$$

De nuevo, $z_1 = z_3$, $\frac{P_3}{\gamma}=0$ y pérdidas despreciables

$$\frac{P_2}{\gamma}=\frac{v_3^2-v_2^2}{2\cdot g}=\frac{14{,}1^2-5{,}57^2}{2\cdot g}=8{,}55\ mca$$

$$\boxed{\frac{P_2}{\gamma}=8{,}55\ \ mca\ ;\ P_2=83875\ \text{Pa}=8550\ kp/m^2=0{,}855\ kp/cm^2}$$

b) Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum\vec{F}_{ext}=\rho\left(\sum_{salidas,i}Q_{s_i}\cdot\vec{v}_{s_i}-\sum_{entradas,j}Q_{ej}\cdot\vec{v}_{ej}\right)$$

Miembro izquierdo de la ecuación, las fuerzas exteriores:

$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{F}_{PRES_1}+\vec{F}_{PRES_2}+\vec{F}_{PRES_3}+\vec{R}$ donde $F_{PRES_3}=0$, ya que P_3=0.

$$\vec{F}_{PRES_1}=P_1\cdot A_1\cdot\left(\cos 30^{\circ}\cdot\vec{i}+sen30^{\circ}\cdot\vec{j}\right)=19262\cdot\left(\cos 30^{\circ}\cdot\vec{i}+sen30^{\circ}\cdot\vec{j}\right)\text{N}$$

$$\vec{F}_{PRES_2}=-P_2\cdot A_2\cdot\vec{i}=-10540\cdot\vec{i}\ \text{N}$$

$$\vec{R}=\text{R}_x\cdot\vec{i}+\text{R}_y\cdot\vec{j}$$

Miembro derecho de la ecuación:

$$\sum\vec{F}_{ext}=\rho\left(Q_3\cdot\vec{v}_3-Q_1\cdot\vec{v}_1-Q_2\cdot\vec{v}_2\right)$$

$$\sum\vec{F}_{ext}=\rho\left(Q_3\cdot v_3\cdot\vec{j}-Q_1v_1\cdot\left(\cos 30^{\circ}\vec{i}+sen30^{\circ}\vec{j}\right)-Q_2\cdot\left(-v_2\cdot\vec{i}\right)\right)$$

Toda la ecuación:

$$P_1 \cdot A_1 \cdot \left(\cos 30^\circ \vec{i} + sen 30^\circ \vec{j}\right) - P_2 \cdot A_2 \cdot \vec{i} + R_x \cdot \vec{i} + R_y \cdot \vec{j} =$$
$$= \rho\left(Q_3 \cdot v_3 \cdot \vec{j} - Q_1 v_1 \cdot \left(\cos 30^\circ \vec{i} + sen 30^\circ \vec{j}\right) + Q_2 \cdot v_2 \cdot \vec{i}\right)$$

Separando las componentes de la ecuación:

Eje x: $P_1 \cdot A_1 \cdot \cos 30^\circ - P_2 \cdot A_2 + R_x = \rho\left(Q_2 \cdot v_2 - Q_1 \cdot v_1 \cdot \cos 30^\circ\right)$

Eje y: $P_1 \cdot A_1 \cdot sen 30^\circ + R_y = \rho\left(Q_3 \cdot v_3 - Q_1 \cdot v_1 \cdot sen 30^\circ\right)$

Ahora obtenemos las reacciones:

$$R_x = 1000 \cdot \left(0,7 \cdot 5,57 - 0,3 \cdot 1,53 \cdot \cos 30^\circ\right) -$$
$$- 98100 \cdot \frac{\pi \cdot 0,5^2}{4} \cdot \cos 30^\circ + 0,855 \cdot 98100 \cdot \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4}$$

$$R_y = 1000 \cdot \left(1 \cdot 14,1 - 0,3 \cdot 1,53 \cdot sen 30^\circ\right) - 98100 \cdot \frac{\pi \cdot 0,5^2}{4} \cdot sen 30^\circ$$

Resolviendo los cálculos:

$$R_x = -2640 \text{ N} = -269 \text{ kp}$$

$$R_y = 4240 \text{ N} = 432 \text{ kp}$$

$$\boxed{\vec{R} = -2640 \cdot \vec{i} + 4240 \cdot \vec{j} \text{ N} ; \left|\vec{R}\right| = 4900 N}$$

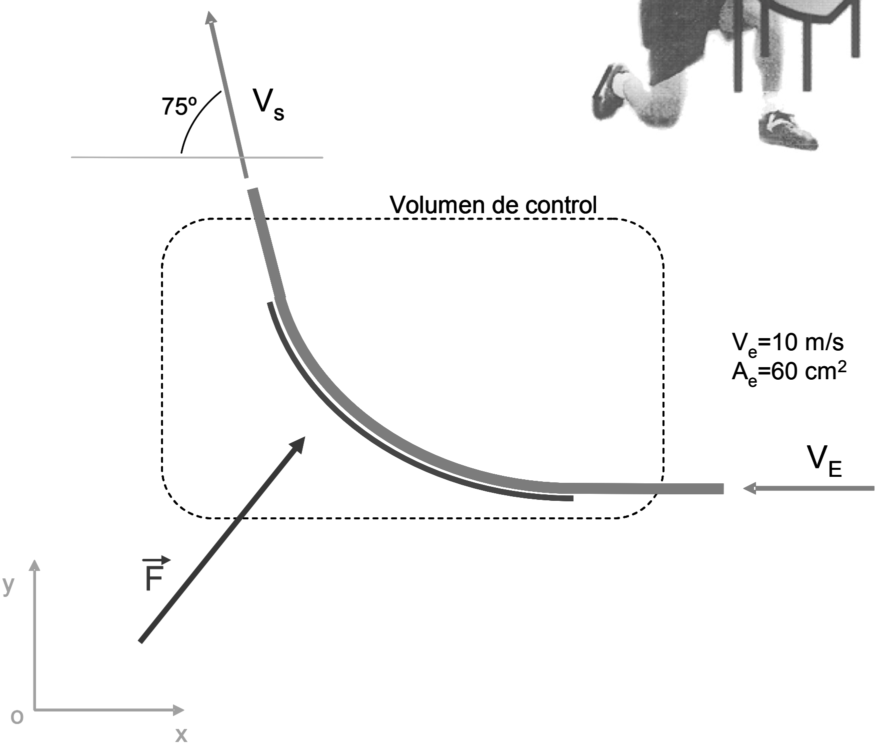
La reacción $\vec{R}$ es la fuerza necesaria en el anclaje para mantener fijo el elemento.

PROBLEMA II.2

Un hooligan decide protegerse de un cañón de agua usando una silla de diseño. De esta manera, logra desviar el chorro horizontal 75º. Si el hombre tiene una masa m=85 kg, averiguar:

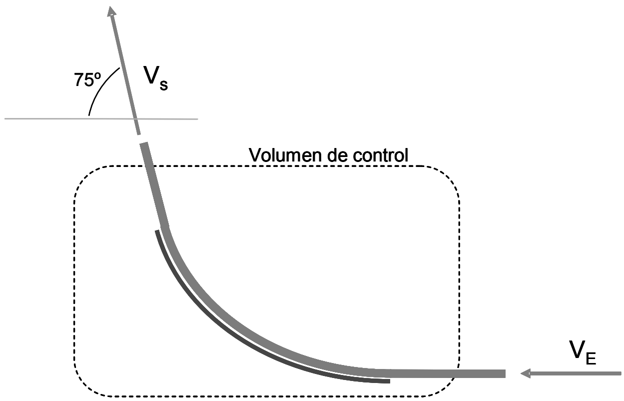
a) **¿Cuál es la fuerza F necesaria para mantener la silla frente al chorro?**

b) **Valor del coeficiente de rozamiento μ del seguidor con el suelo para que el chorro no lo arrastre hacia atrás.**



SOLUCIÓN

a) Queremos calcular la fuerza necesaria para sujetar la silla:



$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho \cdot \left(Q_s \cdot \vec{v}_s - Q_e \cdot \vec{v}_e \right)$$

$$v_e = -10 \cdot \vec{i}$$

$$v_s = -10 \cdot \cos 75 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \text{sen} 75 \cdot \vec{j} = -2{,}6 \cdot \vec{i} + 9{,}65 \cdot \vec{j}\; m/s$$

$$Q = v_e \cdot A_e = 0{,}06\ \text{m}^3/s$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = 1000 \cdot \left(0{,}06 \cdot \left(-2{,}6 \cdot \vec{i} + 9{,}65 \cdot \vec{j}\right) - 0{,}06 \cdot \left(-10 \cdot \vec{i}\right)\right) =$$

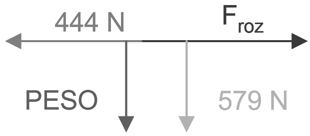
$$= 60 (7{,}4 \cdot \vec{i} + 9{,}65 \cdot \vec{j})\, N$$

En este caso, la única fuerza exterior es la fuerza F que pide el problema:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = 444 \cdot \vec{i} + 579 \cdot \vec{j}\, N}$$

b) Para calcular la fuerza de rozamiento hay que tener en cuenta la acción del agua sobre la silla. La componente vertical aumentará la normal, y la horizontal tenderá a arrastrar al hombre.

La fuerza de rozamiento del hombre con el suelo será la que evitará que éste sea arrastrado por el agua.



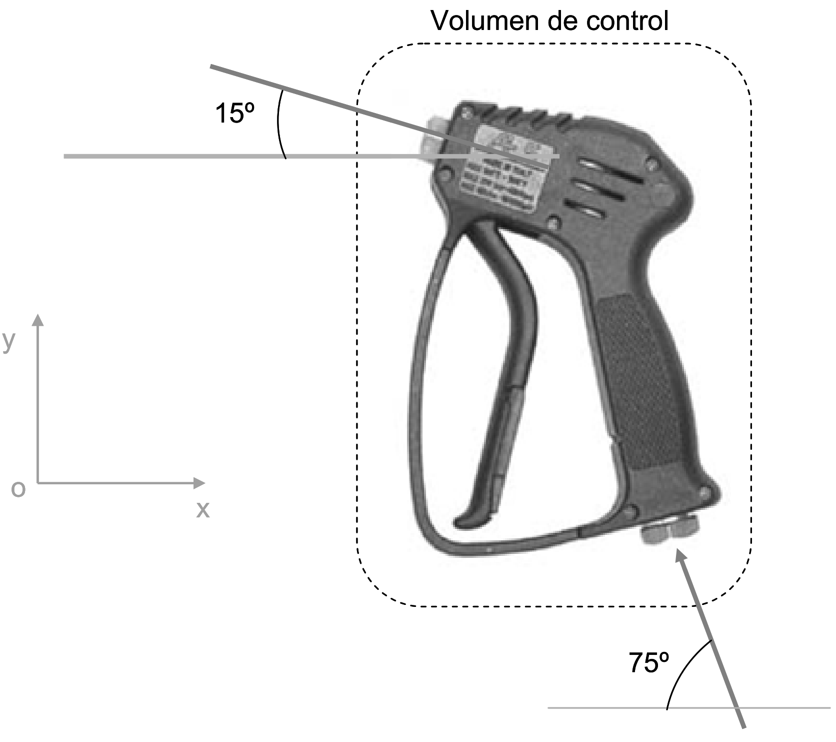
$$F_{roz} = \mu \cdot N = \mu \cdot (Peso + 579) = \mu \cdot (85 \cdot 9{,}8 + 579) = \mu \cdot 1412\,N$$

$$\boxed{F_{horizontral\ del\ agua} = F_{roz} = \mu \cdot 1412 = 444N \Rightarrow \mu = 0{,}314}$$

PROBLEMA II.3

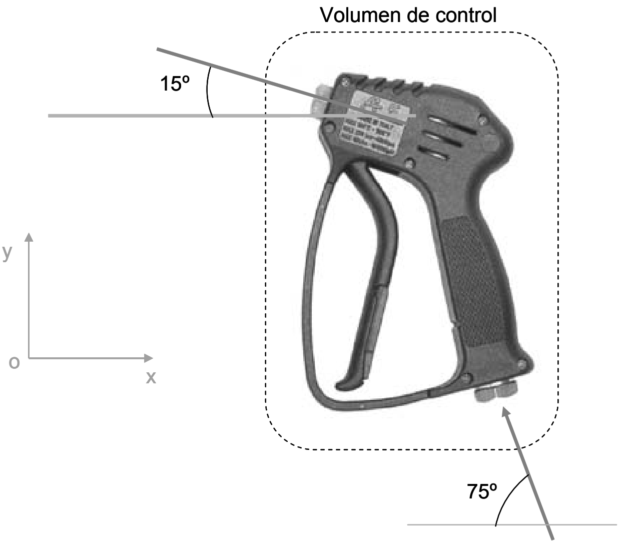
Se está diseñando la pistola de agua para el lavado de vehículos que muestra la figura. En la parte inferior del mango de la pistola se encuentra la sección de entrada, de 1 cm de diámetro, a la que llega un caudal constante de 19 l/min con una presión relativa de 1,2 bar.

Sin haber decidido aún el diámetro D de la boquilla de salida de la pistola, se pide calcular qué fuerza deberá realizar el usuario de la pistola para mantenerla fija en la posición que muestra la figura. El resultado debe así expresarse en función de dicho diámetro D.



SOLUCIÓN

a) Con la pistola en la posición de partida del enunciado, las velocidades de entrada y salida son las siguientes:



$$Q = 19\ l/\min = 3{,}16 \cdot 10^{-4}\ m^3/s$$

$$\left|\vec{V}_e\right| = \frac{Q}{A} = \frac{3{,}16 \cdot 10^{-4}}{\frac{\pi \cdot 0{,}01^2}{4}} = 4\ m/s$$

$$\left|\vec{V}_s\right| = \frac{Q}{A} = \frac{3{,}16 \cdot 10^{-4}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{D^2}\ m/s$$

$$\vec{V}_e = 4 \cdot \left(-\cos 75 \cdot \vec{i} + sen 75 \cdot \vec{j}\right) m/s$$

$$\boxed{\vec{V}_e = -1{,}04 \cdot \vec{i} + 3{,}88 \cdot \vec{j}\ m/s}$$

$$\vec{V}_s = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{D^2} \cdot \left(-\cos 15 \cdot \vec{i} + sen 15 \cdot \vec{j}\right) m/s$$

$$\boxed{\vec{V}_s = \frac{1}{D^2}\cdot\left(-3{,}86\cdot 10^{-4}\cdot\vec{i} + 1{,}03\cdot 10^{-4}\cdot\vec{j}\right) m/s}$$

Aplicando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento,

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \rho\cdot Q\cdot\left(\vec{V}_s - \vec{V}_e\right)$$

Las fuerzas exteriores son la realizada por el usuario que sujeta la pistola, $F_{usuario}$, y la fuerza de presión a la entrada de la pistola, $P_e\cdot A_e$

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{usuario} + P_e\cdot\vec{A}_e$$

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{usuario} + 1{,}2\cdot 10^5\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}01^2}{4}\cdot\left(-\cos 75\cdot\vec{i} + sen 75\cdot\vec{j}\right)$$

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{usuario} - 2{,}44\vec{i} + 9{,}10\vec{j}$$

La ecuación completa quedará:

$$\vec{F}_{usuario} - 2{,}44\vec{i} + 9{,}10\vec{j} =$$

$$= 1000\cdot 3{,}16\cdot 10^{-4}\cdot\left[\frac{1}{D^2}\left(-3{,}86\cdot 10^{-4}\cdot\vec{i} + 1{,}03\cdot 10^{-4}\cdot\vec{j}\right) - \left(-1{,}04\cdot\vec{i} + 3{,}88\cdot\vec{j}\right)\right] =$$

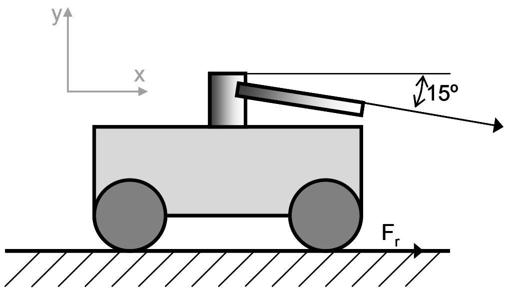
$$= \left(\frac{-1{,}21\cdot 10^{-4}}{D^2} + 0{,}33\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{0{,}32\cdot 10^{-4}}{D^2} - 1{,}23\right)\cdot\vec{j}$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{F}_{usuario} = \left[\left(2{,}77 - \frac{1{,}21\cdot 10^{-4}}{D^2}\right)\cdot\vec{i} + \left(-10{,}33 + \frac{0{,}32\cdot 10^{-4}}{D^2}\right)\cdot\vec{j}\right] N}$$

PROBLEMA II.4

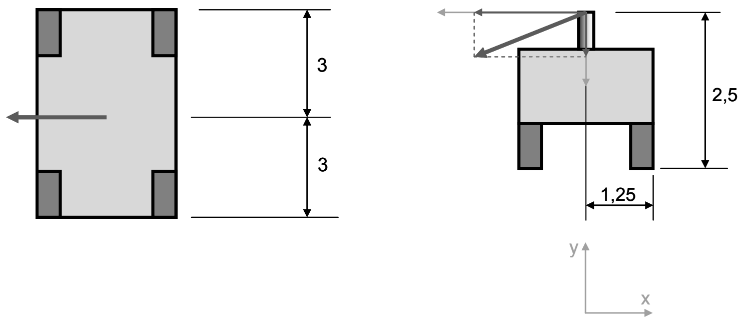
Una tanqueta antidisturbios está equipada con un cañón de agua giratorio en su parte superior. El cañón puede girar 360º alrededor del eje vertical, formando siempre el chorro 15º con la horizontal. El caudal proyectado es de 80 l/s.



a) **Calcular el módulo que debe tener la F_r de las ruedas con el suelo para evitar que la salida del agua desplace la tanqueta hacia atrás, en la posición mostrada por la figura.**

b) **Si ahora la fuerza de rozamiento con el suelo se calcula como $F_r = 0{,}27 \cdot N$ (siendo N la normal), determinar el caudal mínimo que sí sería capaz de desplazar la tanqueta hacia atrás.**

c) **Con el caudal del apartado a), determinar el máximo momento de vuelco que produce el chorro sobre la tanqueta en la posición que muestra la figura.**



Datos:

Diámetro del cañón: 10 cm

Masa de la tanqueta: 5 Tm

El cañón se encuentra situado en el centro geométrico del techo

SOLUCIÓN

a) Aplicando la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho\, Q\,(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

$$\vec{v}_e = 0$$

$$\vec{v}_s = \frac{Q}{A}(\cos 15\,\vec{i} - \text{sen}15\,\vec{j}) = \frac{0{,}08}{\frac{\pi\, 0{,}1^2}{4}}\cdot(\cos 15\,\vec{i} - \text{sen}15\,\vec{j}) = 9{,}84\cdot\vec{i} - 2{,}64\cdot\vec{j}$$

Nos interesan sólo las componentes horizontales:

$$F_r = 1000\cdot 0{,}08\cdot 9{,}84 = 782{,}2\,N$$

b) El chorro no sólo presenta la componente horizontal ya vista, sino que también tiene otra vertical, en sentido $+\vec{j}$, que disminuye el valor de la normal.

$$N = 5000\cdot 9{,}81 - \rho\cdot Q\cdot\frac{Q}{\frac{\pi\cdot 0{,}1^2}{4}}\cdot sen15$$

El módulo de la fuerza del agua que impulsaría la tanqueta en dirección x sería:

$$F = \rho\cdot Q\cdot\frac{Q}{\frac{\pi\cdot 0{,}1^2}{4}}\cdot\cos 15$$

Planteando de nuevo la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el eje de las x:

$$0{,}27\cdot\left(5000\cdot 9{,}81 - \rho\cdot Q\cdot\frac{Q}{\frac{\pi\cdot 0{,}1^2}{4}}\cdot sen15\right) = \rho\cdot Q\cdot\frac{Q}{\frac{\pi\cdot 0{,}1^2}{4}}\cdot\cos 15$$

$$123048 \cdot Q^2 = 13244 - 8902 \cdot Q^2$$

$$\boxed{Q = 0{,}317\ m^3/\mathrm{s}}$$

c) Teniendo en cuenta los ejes de la figura, la fuerza que ejerce el chorro de agua sobre la tanqueta es:

$$\vec{F}_{chorro} = -\rho \frac{Q}{A}(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = 787{,}2\,\vec{i} + 211{,}2\,\vec{j}\ N$$

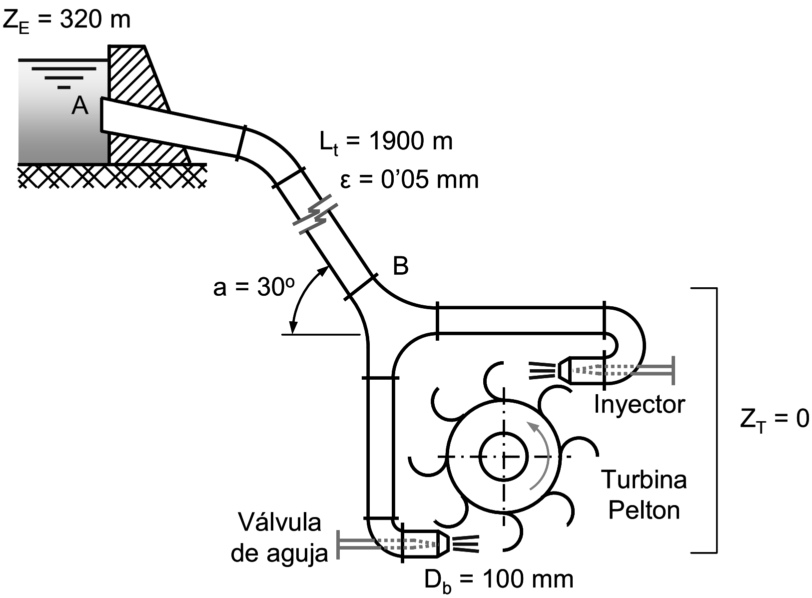
Y el par de vuelco será, por tanto:

$$\vec{M}_{vuelco} = 2{,}5 \cdot 787{,}2\,\vec{k} + 1{,}25 \cdot 211{,}2\,\vec{k} = 2232\,\vec{k}\ N \cdot m\,(horario)$$

PROBLEMA II.5

La turbina Pelton de la figura se alimenta desde un embalse por medio de una tubería forzada AB, de cuyo extremo final parten dos ramales con sus correspondientes inyectores. La tubería forzada tiene una longitud de 1900 m, rugosidad absoluta 0,05 mm, y ángulo de inclinación de su tramo final 30º. La cota de agua del embalse es de 320 m, y la cota del extremo final de la tubería forzada, los ramales, las boquillas de salida y la turbina es de 0 m.

Cada uno de los inyectores, con una boquilla de salida de diámetro 100 mm, está dotado de una válvula de aguja que permite regular el caudal turbinado. Para el mismo grado de apertura de estas válvulas, el caudal que sale por las boquillas es el mismo, e igual a la mitad del caudal transportado por la tubería forzada.



Si se suponen despreciables las pérdidas menores de la instalación, las pérdidas en cada uno de los ramales, y las pérdidas en las válvulas de aguja completamente abiertas, determinar:

a) **Diámetro que debería tener la tubería forzada para transportar un caudal total turbinado de 1 m³/s. Admitir, en caso necesario, un cierre parcial de los inyectores para conseguir dicho caudal.**

b) Componentes de la fuerza necesaria para mantener en su posición el conjunto formado por la bifurcación de la tubería forzada y los dos ramales hasta los inyectores, para el caso indicado en al apartado anterior.

c) Si en algún caso se cierra totalmente el inyector superior, conservando el inferior abierto, indicar justificadamente si las componentes de la fuerza necesaria para mantener el conjunto en su posición aumentan o disminuyen respecto de los valores calculados en el apartado anterior.

Viscosidad cinemática del agua $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

SOLUCIÓN

a) Dado el caudal de régimen que se pretende turbinar, éste se va a conseguir en principio con las válvulas de aguja completamente abiertas. En estas condiciones, la velocidad de salida del agua por cada una de las boquillas será:

$$V_b = \frac{4Q_b}{\pi D_b^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{\pi \cdot 0{,}1^2} = 63{,}66\ m/s$$

Para el cálculo del diámetro de la tubería forzada disponemos de las siguientes ecuaciones:

Bernoulli entre el embalse y la salida por una de las dos boquillas:

$$Z_E = Z_T + h_{fAB} + \frac{V_b^2}{2g} \quad \rightarrow \quad 320 = 0 + \frac{8 f \cdot 1900}{\pi^2 g D_t^5} 1{,}0^2 + \frac{63{,}66^2}{2g}$$

$$\rightarrow \quad D_t = 1{,}067 \sqrt[5]{f}$$

Número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{4Q_t}{\pi D_t \nu} = \frac{4 \cdot 1{,}0}{\pi D_t \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-6}} = \frac{1{,}16 \cdot 10^6}{D_t}$$

Rugosidad relativa:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D_t} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{D_t}$$

A partir del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, el factor de fricción se puede calcular por medio del diagrama de Moody o por la ecuación de Colebrook-White. En este caso utilizaremos la fórmula de Colebrook-White modificada, o fórmula de Swamee y Jain, para obtener *f* de forma explícita,

$$f = \frac{0{,}25}{\left[\log_{10}\left(\frac{\varepsilon_r}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\mathrm{Re}^{0'9}}\right)\right]^2}$$

Para determinar el diámetro de la tubería forzada utilizaremos las expresiones anteriores en un proceso iterativo que se inicia con un valor supuesto del factor de fricción. Los resultados obtenidos se indican en la tabla siguiente.

f sup.	D_t (m)	Re	ε_r	f calc.
0,01800	0,478	$2{,}43\cdot10^{6}$	$1{,}05\cdot10^{-4}$	0,01283
0,01283	0,447	$2{,}60\cdot10^{6}$	$1{,}12\cdot10^{-4}$	0,01292
0,01292	0,447	$2{,}59\cdot10^{6}$	$1{,}12\cdot10^{-4}$	0,01292

Se tomará, pues, una tubería de diámetro comercial 500 mm. Para conseguir por esta tubería el caudal de 1,0 m^3/s, la válvula de aguja de cada uno de los inyectores deberá estar parcialmente cerrada.

En estas condiciones, tendremos:

$$\mathrm{Re} = 2{,}32\cdot 10^{6} \quad ; \quad \varepsilon_r = 1{,}0\cdot 10^{-4} \quad ; \quad f = 0{,}01278$$

y aplicando el teorema de Bernoulli entre el embalse y la salida por una de las dos boquillas,

$$Z_E = Z_T + h_{fAB} + \frac{V_b^2}{2g} + h_{VA}$$

$$320 = 0 + \frac{8\cdot 0{,}01278\cdot 1900}{\pi^2 g\, 0{,}5^5} 1{,}0^2 + \frac{63{,}66^2}{2g} + k_{VA}\frac{63{,}66^2}{2g}$$

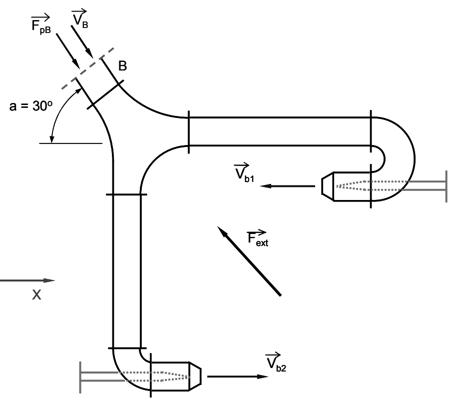
donde k_{VA} es el coeficiente de pérdidas de cada una de las válvulas de aguja parcialmente cerradas. Este coeficiente de pérdidas, para este caso, valdrá k_{VA}=0,238.

De esta manera, las pérdidas en la tubería y en cada una de las válvulas de aguja, con la instalación trabajando en condiciones de régimen, valdrán:

$$h_{fAB} = \frac{8 f L_t}{\pi^2 g D_t^5} Q_t^2 = \frac{8\cdot 0{,}01278\cdot 1900}{\pi^2 g\, 0{,}5^5} 1{,}0^2 = 64{,}20\ m$$

$$h_{VA} = k_{VA}\frac{V_b^2}{2g} = k_{VA}\frac{63{,}66^2}{2g} = 49{,}25\ m$$

b) Para conocer la fuerza exterior a aplicar al sistema de la figura con objeto de mantenerlo en su posición, vamos a calcular primero la velocidad y la presión en la sección B, a la entrada del volumen de control.



$$V_B = \frac{4Q_t}{\pi D_t^2} = \frac{4\cdot 1,0}{\pi\cdot 0,5^2} = 5,09\ m/s$$

$$p_B = \gamma\left(Z_E - Z_B - h_{fAB} - \frac{V_B^2}{2g}\right) =$$

$$= 1000\left(320 - 0 - 64,20 - \frac{5,09^2}{2g}\right) =$$

$$= 254475,23\ Kp/m^2$$

La fuerza debida a la presión en B, en módulo, será:

$$F_{pB} = p_B A_B = 254475,23\frac{\pi\cdot 0,5^2}{4} = 49966,21\ Kp$$

Por otra parte la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, aplicada al volumen de control de la figura, será:

$$\overrightarrow{F_{pB}} + \overrightarrow{F_{ext}} = \rho\left(Q_{b1}\overrightarrow{V_{b1}} + Q_{b2}\overrightarrow{V_{b2}} - Q_B\overrightarrow{V_B}\right)$$

Dando valores a esta expresión, tendremos

$$49966,21\left(\cos 30^{\circ}\vec{i} - sen 30^{\circ}\vec{j}\right) + \overrightarrow{F_{ext}} =$$

$$= \frac{1000}{9,81}\left[0,5\cdot 63,66\left(-\vec{i}\right) + 0,5\cdot 63,66\left(\vec{i}\right) - 1,0\cdot 5,09\left(\cos 30^{\circ}\vec{i} - sen 30^{\circ}\vec{j}\right)\right]$$

De aquí, resulta

$$\boxed{\overrightarrow{F_{ext}} = -43721,35\vec{i} + 25242,53\vec{j}\ \ Kp \ \rightarrow\ F_{ext} = 50485,06\ Kp}$$

c) Al cerrar totalmente el inyector superior, el nuevo caudal circulante por la tubería forzada saldrá por el inyector inferior. Si suponemos que la posición de la válvula de aguja de este inyector no varía, el nuevo caudal circulante se obtendrá aplicando el teorema de Bernoulli entre el embalse y el punto de salida de la boquilla inferior:

$$Z_E = Z_T + h_{fAB} + \frac{V_{b2}^2}{2g} + k_{VA}\frac{V_{b2}^2}{2g}$$

$$320 = 0 + \frac{8\cdot f\cdot 1900}{\pi^2 g\, 0{,}5^5}Q^2 + \frac{1+0{,}238}{2g}\left(\frac{4Q}{\pi\cdot 0{,}1^2}\right)^2$$

de donde resulta

$$Q = \sqrt{\frac{1}{15{,}70 f + 2{,}09}}$$

Además, para calcular el factor de fricción tenemos las expresiones:

$$\mathrm{Re} = \frac{4Q}{\pi D_t \nu} = \frac{4\cdot Q}{\pi\cdot 0{,}5\cdot 1{,}1\cdot 10^{-6}} = 2314981Q \quad ; \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D_t} = \frac{5\cdot 10^{-5}}{0{,}5} = 1\cdot 10^{-4}$$

$$f = \frac{0{,}25}{\left[\log_{10}\left(\frac{\varepsilon_r}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\mathrm{Re}^{0'9}}\right)\right]^2}$$

El caudal circulante por la tubería lo obtendremos por medio de un proceso iterativo a partir de estas expresiones. Los resultados obtenidos se indican en la siguiente tabla.

f sup.	Q (m^3/s)	Re	f calc.
0,01800	0,649	$1{,}50\cdot 10^6$	0,01310
0,01310	0,660	$1{,}53\cdot 10^6$	0,01309
0,01309	0,660	$1{,}53\cdot 10^6$	0,01309

El nuevo caudal será, pues, de 0,66 m^3/s, y saldrá todo por la boquilla inferior. Para este caudal tendremos:

$$V_B = \frac{4Q}{\pi D_t^2} = \frac{4 \cdot 0,66}{\pi \, 0,5^2} = 3,36 \; m/s \quad ; \quad V_{b2} = \frac{4Q}{\pi D_b^2} = \frac{4 \cdot 0,66}{\pi \, 0,1^2} = 84,03 \; m/s$$

$$p_B = \gamma \left(Z_E - Z_B - h_{fAB} - \frac{V_B^2}{2g} \right)$$

$$p_B = 1000 \left(320 - 0 - \frac{8 \cdot 0,01309 \cdot 1900}{\pi^2 g \, 0,5^5} 0,66^2 - \frac{3,36^2}{2g} \right) = 291261,46 \; Kp/m^2$$

$$F_{pB} = p_B A_B = 291261,46 \frac{\pi \, 0,5^2}{4} = 57189,05 \; Kp$$

Para el cálculo de la fuerza exterior a aplicar, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en este caso será:

$$\overrightarrow{F_{pB}} + \overrightarrow{F_{ext}} = \rho Q \left(\overrightarrow{V_{b2}} - \overrightarrow{V_B} \right)$$

Dando valores a esta expresión, tendremos

$$57189,05 \left(\cos 30^\circ \vec{i} - sen 30^\circ \vec{j} \right) + \overrightarrow{F_{ext}} =$$

$$\frac{1000}{9,81} 0,66 \left[84,03 \vec{i} - 3,36 \left(\cos 30^\circ \vec{i} - sen 30^\circ \vec{j} \right) \right]$$

De aquí, resulta

$$\overrightarrow{F_{ext}} = -44069,55 \vec{i} + 28707,55 \vec{j} \;\; Kp \;\; \rightarrow \;\; F_{ext} = 52595,14 \; Kp$$

valor mayor que en el caso anterior. Ello es debido a que, al disminuir el caudal circulante por la tubería forzada, las pérdidas en la misma disminuyen, y la presión en B aumenta. Como el efecto debido al cambio de las velocidades de entrada y salida al volumen de control es menor que el efecto del cambio de presión en B, al cerrar uno de los inyectores la fuerza exterior a aplicar aumenta.

Esta fuerza exterior alcanza su valor máximo con los dos inyectores cerrados. En este caso, y al estar el agua en reposo, la presión en la sección B será la hidrostática, o sea,

$$p_B = \gamma (Z_E - Z_B) = 1000(320 - 0) = 320000 \ Kp/m^2$$

la cual proporciona

$$F_{pB} = p_B A_B = 320000 \frac{\pi \, 0{,}5^2}{4} = 62831{,}85 \ Kp$$

Y la fuerza exterior,

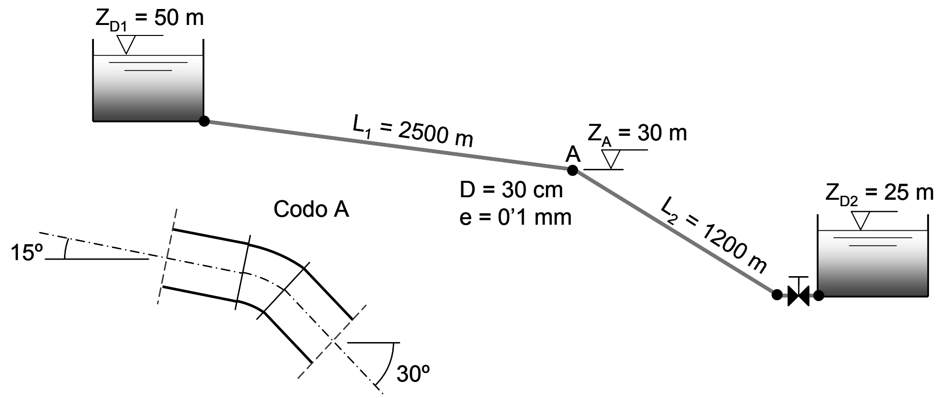
$$\overrightarrow{F_{ext}} = -\overrightarrow{F_{pB}} = -62831{,}85\left(\cos 30^\circ \vec{i} - sen 30^\circ \vec{j}\right) =$$

$$= -54413{,}98 \vec{i} + 31415{,}93 \vec{j} \quad Kp$$

$$\boxed{F_{ext} = 62831{,}85 \ Kp}$$

PROBLEMA II.6

Dos depósitos, cuyos niveles libres del agua se encuentran a las cotas respectivas de 50 y 25 m, están unidos entre sí por medio de una tubería de fundición de 30 cm de diámetro y rugosidad 0,1 mm, como indica la figura. Por las características del terreno entre los depósitos, esta tubería está constituida por dos tramos, aproximadamente rectos, de 2500 y 1200 m de longitud cada uno de ellos, y unidos por un codo A la cota 30 m. En el extremo inferior de la tubería, y antes de la entrada al depósito inferior, se ha instalado una válvula de mariposa, de 200 mm de diámetro, para regular el caudal circulante por la misma.



Si se suponen despreciables las pérdidas menores de la instalación, excepto en la válvula, determinar:

a) **Pérdidas que se deberán producir en la válvula, parcialmente abierta, si se desea trasegar entre los depósitos un caudal de 75 l/s. Coeficiente de pérdidas que deberá tener la válvula en este caso.**

b) **Componentes de la fuerza necesaria para mantener en su posición el anclaje del codo A, cuando circula por la tubería el caudal de 75 l/s.**

Cuando el depósito inferior se encuentra lleno de agua, y para evitar desbordamientos, se cierra totalmente la válvula, interrumpiéndose la circulación de agua por la tubería.

c) **Calcular en este caso la fuerza necesaria para mantener en su posición el anclaje del codo.**

Viscosidad cinemática del agua $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

SOLUCIÓN

a) Como el caudal que va a circular por la tubería es conocido, el diagrama de Moody nos permitirá determinar el correspondiente factor de fricción. Para ello tenemos:

$$\left.\begin{aligned} R_e &= \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \cdot 0{,}075}{\pi \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-6}} = 2{,}89 \cdot 10^5 \\ \varepsilon_r &= \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}1}{300} = 3{,}3 \cdot 10^{-4} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad f = 0{,}0175$$

Para que el caudal por la tubería sea el deseado, la válvula al extremo de la misma deberá estar en principio parcialmente abierta. Las pérdidas h_v que deberá tener esta válvula las podemos calcular aplicando el teorema de Bernoulli entre los depósitos superior e inferior,

$$Z_{D1} = Z_{D2} + \frac{8 fL}{\pi^2 g D^5} Q^2 + h_v \;;\; 50 = 25 + \frac{8 \cdot 0{,}0175 \cdot (2500 + 1200)}{\pi^2 g\, 0{,}3^5} 0{,}075^2 + h_v$$

De aquí obtenemos que las pérdidas en la válvula deberán ser de h_v = 12,62 m.

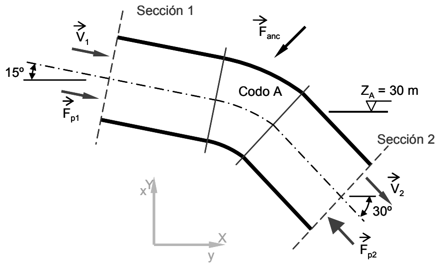
En este caso, el coeficiente de pérdidas k_v de la válvula será:

$$h_v = k_v \frac{V_v^2}{2g} = \frac{8 k_v}{\pi^2 g D_v^4} Q^2 \quad ; \quad 12{,}62 = \frac{8 k_v}{\pi^2 g\, 0{,}2^4} 0{,}075^2$$

y de aquí resulta k_v=43,44. O bien el coeficiente de pérdidas se puede considerar también como

$$h_v = K_v Q^2 \quad ; \quad K_v = \frac{h_v}{Q^2} = \frac{12{,}62}{0{,}075^2} = 2243{,}6\ m/\left(m^3/s\right)^2$$

b)



Para aplicar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento al codo A, primero hemos de calcular los siguientes valores:

Velocidad del agua en la tubería:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}075}{\pi \cdot 0{,}3^2} = 1{,}06\ m/s$$

Velocidad del agua en la sección de entrada al codo:

$$\overrightarrow{V_1} = V\left(\cos 15^{\circ}\,\vec{i} - sen 15^{\circ}\,\vec{j}\right) = 1{,}06\left(\cos 15^{\circ}\,\vec{i} - sen 15^{\circ}\,\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{V_1} = 1{,}02\vec{i} - 0{,}27\vec{j}\ \left(m/s\right)$$

$$\overrightarrow{V_2} = V\left(\cos 30^{\circ}\,\vec{i} - sen 30^{\circ}\,\vec{j}\right) = 1{,}06\left(\cos 30^{\circ}\,\vec{i} - sen 30^{\circ}\,\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{V_2} = 0{,}92\vec{i} - 0{,}53\vec{j}\ \left(m/s\right)$$

Presión en el codo:

$$\frac{p_A}{\gamma} = Z_{D1} - Z_A - \frac{V^2}{2g} - \frac{8fL_1}{\pi^2 g D^5}Q^2$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = 50 - 30 - \frac{1{,}06^2}{2g} - \frac{8 \cdot 0{,}0175 \cdot 2500}{\pi^2 g\, 0{,}3^5}0{,}075^2 = 11{,}575\ mca$$

Como en el codo no hay pérdidas, y como las velocidades de entrada y salida al mismo son iguales,

$$p_1 = p_2 = p_A = 11575\ Kp/m^2$$

Fuerza debida a la presión en la sección de entrada al codo:

$$\overrightarrow{F_{p1}} = p_1 A_1 \left(\cos 15^o \vec{i} - sen 15^o \vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{F_{p1}} = 11575 \frac{\pi\, 0{,}3^2}{4} \left(\cos 15^o \vec{i} - sen 15^o \vec{j}\right) = 790{,}31\, \vec{i} - 211{,}76 \vec{j} \ \ (Kp)$$

Fuerza debida a la presión en la sección de salida del codo:

$$\overrightarrow{F_{p2}} = p_2 A_2 \left(-\cos 30^o \vec{i} + sen 30^o \vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{F_{p2}} = 11575 \frac{\pi\, 0{,}3^2}{4} \left(-\cos 30^o \vec{i} + sen 30^o \vec{j}\right) = -708{,}57 \vec{i} + 409{,}09 \vec{j} \ \ (Kp)$$

Ya podemos aplicar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento al codo. Para este caso,

$$\overrightarrow{F_{p1}} + \overrightarrow{F_{p2}} + \overrightarrow{F_{anc}} = \rho Q \left(\vec{V_2} - \vec{V_1}\right)$$

Dando valores a la expresión anterior,

$$\begin{aligned} &\left(790{,}31\, \vec{i} - 211{,}76 \vec{j}\right) + \left(-708{,}57 \vec{i} + 409{,}09 \vec{j}\right) + \overrightarrow{F_{anc}} = \\ &= \frac{1000}{9{,}81} 0{,}075 \left[\left(0{,}92 \vec{i} - 0{,}53 \vec{j}\right) - \left(1{,}02 \vec{i} - 0{,}27 \vec{j}\right)\right] \end{aligned}$$

de donde obtenemos la fuerza que ejerce el anclaje para mantener el codo en su posición,

$$\boxed{\overrightarrow{F_{anc}} = -82{,}50 \vec{i} - 199{,}32 \vec{j} \ \ (Kp)}$$

c) Si se cierra la válvula, y con caudal nulo, la presión en el codo A será la hidrostática, de valor:

$$p_A = \gamma \left(Z_{D1} - Z_A\right) = 1000(50 - 30) = 20000 \ Kp / m^2$$

En este caso, las fuerzas sobre el codo debidas a la presión serán:

$$\overrightarrow{F_{p1}} = p_1 A_1 \left(\cos 15^{o} \vec{i} - sen 15^{o} \vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{F_{p1}} = 20000 \frac{\pi\, 0,3^2}{4} \left(\cos 15^{o} \vec{i} - sen 15^{o} \vec{j}\right) = 1365,55\, \vec{i} - 365,90 \vec{j} \;\; (Kp)$$

$$\overrightarrow{F_{p2}} = p_2 A_2 \left(-\cos 30^{o} \vec{i} + sen 30^{o} \vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{F_{p2}} = 20000 \frac{\pi\, 0,3^2}{4} \left(-\cos 30^{o} \vec{i} + sen 30^{o} \vec{j}\right) = -1224,31 \vec{i} + 706,86 \vec{j} \;\; (Kp)$$

Como las velocidades a la entrada y a la salida del codo son nulas, de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento podemos obtener:

$$\overrightarrow{F_{anc}} = -\left(\overrightarrow{F_{p1}} + \overrightarrow{F_{p2}}\right) = -\left[\left(1365,55\, \vec{i} - 365,90 \vec{j}\right) + \left(-1224,31 \vec{i} + 706,86 \vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{F_{anc} = -141,24\, \vec{i} - 340,96 \vec{j} \;\; (Kp)}$$

Vemos que el esfuerzo que deberá realizar el anclaje del codo es mayor cuando el agua está en reposo que cuando está en movimiento. Ello es debido al efecto de las fuerzas de presión, las cuales son mayores con el agua en reposo al no haber pérdidas en la tubería.

PROBLEMA II.7

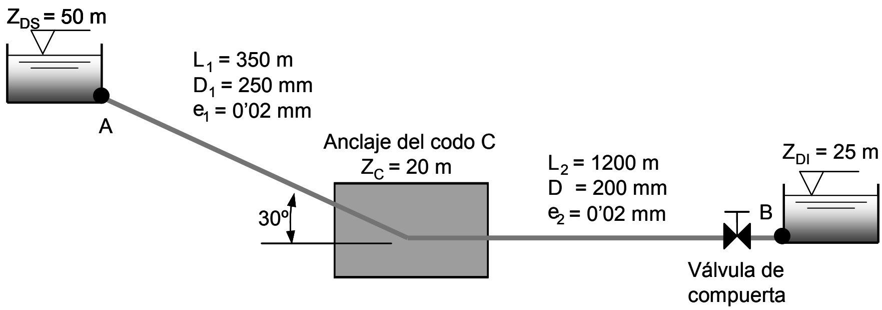
Se pretende trasvasar agua entre dos depósitos, cuyos niveles libres se encuentran respectivamente a las cotas de 50 y 25 m. Para ello se va a instalar una tubería de fundición, de rugosidad absoluta 0,02 mm, con dos tramos de diámetro respectivo 250 y 200 mm como indica la figura. Por las características del terreno sobre el que discurre la tubería el primer tramo, de longitud 350 m, tendrá una inclinación de 30º, y el segundo, de longitud 1200 m, será horizontal. Además, a la entrada del depósito inferior se dispondrá una válvula de compuerta para regular el caudal trasvasado.

En estas condiciones, determinar:

a) **Caudal circulante por la tubería cuando la válvula de compuerta esté completamente abierta. Suponer despreciables en este caso las pérdidas menores de la instalación. La viscosidad cinemática del agua es $1{,}02 \cdot 10^{-6}$ m²/s.**

b) **Componentes de la fuerza necesaria para mantener en su posición el anclaje del codo de unión de los dos tramos de la tubería, para las condiciones de funcionamiento del apartado anterior. Este anclaje se encuentra a la cota 20 m.**

c) **Tiempo de cierre de la válvula de compuerta, a partir de su posición totalmente abierta, si se desea que a la entrada de la misma, las oscilaciones de presión debidas al golpe de ariete no provoquen una presión mínima por debajo de – 5 m. Celeridad de la onda de presión en la tubería a=1100 m/s.**



SOLUCIÓN

a) Para calcular el caudal circulante por las tuberías aplicaremos el teorema de Bernoulli entre los depósitos superior e inferior

$$Z_{DS} = Z_{DI} + \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} Q^2 + \frac{8 f_2 L_2}{\pi^2 g D_2^5} Q^2$$

Dando valores tendremos:

$$50 = 25 + \frac{8 f_1 \cdot 350}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} Q^2 + \frac{8 f_2 \cdot 1200}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} Q^2$$

$$25 = \left(29613{,}47 \cdot f_1 + 309850{,}71 \cdot f_2\right) Q^2$$

Para calcular los factores de fricción **f_1** y **f_2** es necesario determinar, previamente, el número de Reynolds y la rugosidad relativa para cada uno de los dos tramos de tubería:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{4Q}{\pi D_1 \nu} = \frac{4Q}{\pi \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-6}} = 4{,}99 \cdot 10^6\, Q$$

$$\varepsilon_{r1} = \frac{\varepsilon_1}{D_1} = \frac{0{,}02}{250} = 0{,}00008$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{4Q}{\pi D_2 \nu} = \frac{4Q}{\pi \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-6}} = 6{,}24 \cdot 10^6\, Q$$

$$\varepsilon_{r2} = \frac{\varepsilon_2}{D_2} = \frac{0{,}02}{200} = 0{,}0001$$

Conociendo el número de Reynolds y la rugosidad relativa de la tubería, el factor de fricción se calcula con el diagrama de Moody o con la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon_r}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

Como esta ecuación es implícita en f, su resolución se deberá hacer por iteraciones. Sin embargo, se puede utilizar en su lugar la fórmula de Swamee y Jain:

$$f = \frac{0{,}25}{\left[\log_{10}\left(\frac{\varepsilon_r}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\mathrm{Re}^{0'9}}\right)\right]^2}$$

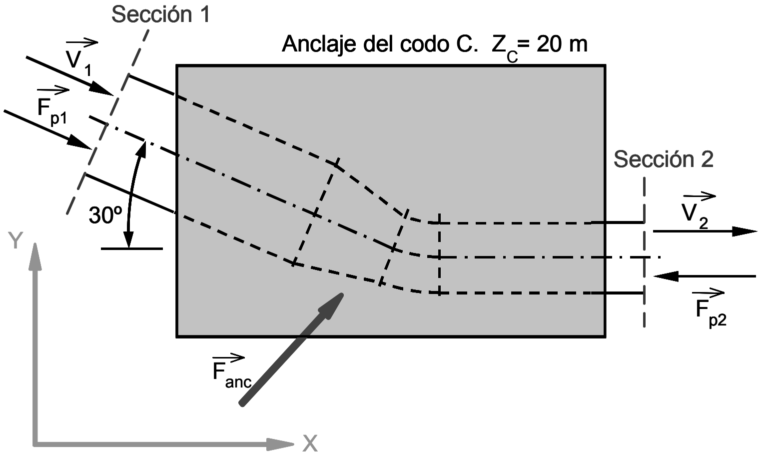
la cual proporciona el valor de f con un error de $\pm 1\%$ respecto de la de Colebrook, con $10^{-6} \leq \varepsilon_r \leq 10^{-2}$ y $5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^8$.

Así, y utilizando esta última expresión para el cálculo de f, el proceso iterativo para calcular el caudal que circula por la instalación se resume en la tabla siguiente.

Q (m^3/s) (sup.)	Re_1	Re_2	f_1	f_2	Q (m^3/s) (calc.)
0,100	$4{,}99 \cdot 10^5$	$6{,}24 \cdot 10^5$	0,0142	0,0141	0,0722
0,0722	$3{,}60 \cdot 10^5$	$4{,}51 \cdot 10^5$	0,0149	0,0146	0,0709
0,0709	$3{,}54 \cdot 10^5$	$4{,}42 \cdot 10^5$	0,0149	0,0147	0,0708
0,0708	$3{,}53 \cdot 10^5$	$4{,}42 \cdot 10^5$	0,0149	0,0147	0,0708

En definitiva, por la tubería circulará un caudal de 70,8 l/s.

b) Para conocer la fuerza necesaria para mantener en su posición el anclaje del codo deberemos hacer uso de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, aplicada en este caso a un volumen de control que incluya dicho codo. Pero para poder aplicar esta expresión tendremos que calcular previamente la velocidad y la fuerza de presión en las secciones de entrada y salida al codo. Por ello tendremos:



$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0708}{\pi \cdot 0{,}25^2} = 1{,}44\ m/s$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0708}{\pi \cdot 0'2^2} = 2{,}25\ m/s$$

$$p_1 = \gamma\left(Z_{DS} - Z_c - \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} Q^2\right) =$$

$$= 9810\left(50 - 20 - \frac{8 \cdot 0{,}0149 \cdot 350}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}0708^2\right) =$$

$$= 272602{,}54\ N/m^2$$

$$p_2 = p_1 + \gamma\left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}\right) = 272602{,}54 + 9810\left(\frac{1{,}44^2}{2g} - \frac{2{,}25^2}{2g}\right)$$

$$p_2 = 271103{,}27\ N/m^2$$

$$F_{p1} = p_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 272602{,}54 \frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{4} = 13381{,}35\ N$$

$$F_{p2} = p_2 \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} = 271103{,}27 \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4} = 8516{,}96\ N$$

Aplicando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento,

$$\overrightarrow{F_{p1}} + \overrightarrow{F_{p2}} + \overrightarrow{F_{anc}} = \rho Q\left(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}\right)$$

y dando valores para este caso, tenemos

$$\begin{aligned} &13381{,}35\left(\cos 30^\circ \vec{i} - sen30^\circ \vec{j}\right) - 8516{,}96\vec{i} + \overrightarrow{F_{anc}} = \\ &= 1000\, 0{,}0708 \cdot \left[2{,}25\vec{i} - 1{,}44\left(\cos 30^\circ \vec{i} - sen30^\circ \vec{j}\right)\right] \end{aligned}$$

De esta expresión podemos obtener la fuerza que deberá ejercer el anclaje del codo para mantenerlo en su posición. Esta fuerza será:

$$\boxed{\overline{F_{anc}} = -3000{,}62\bar{i} + 6741{,}65\bar{j} \quad N}$$

o bien, en módulo, F_{anc} = 7379,27 N.

c) En condiciones de régimen, la velocidad del agua en el punto B será la misma que la de la sección de salida del codo. En estas condiciones, y al no haber pérdidas en la válvula de compuerta completamente abierta, la presión a la entrada de la misma será:

$$\frac{p_B}{\gamma} = Z_{DI} - Z_B - \frac{V_B^2}{2g} = 25 - 20 - \frac{2{,}25^2}{2g} = 4{,}74\ m$$

Si se desea que, por efecto del golpe de ariete por cierre total de la válvula de compuerta, la presión mínima en el punto B no descienda por debajo de – 5 m, la máxima oscilación de presión será:

$$\frac{\Delta p_{máx}}{\gamma} = \frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_{Bmín}}{\gamma} = 4{,}74 - (-5) = 9{,}74\ m$$

Si se admite un cierre lento de la válvula, y que este cierre es tal que consigue una evolución lineal de las velocidades en el punto B, la expresión de Michaud indica

$$\frac{\Delta p_{máx}}{\gamma} = \frac{2LV_0}{gT_c}$$

donde T_c es el tiempo de cierre de la válvula. Para este caso, el tiempo de cierre valdrá

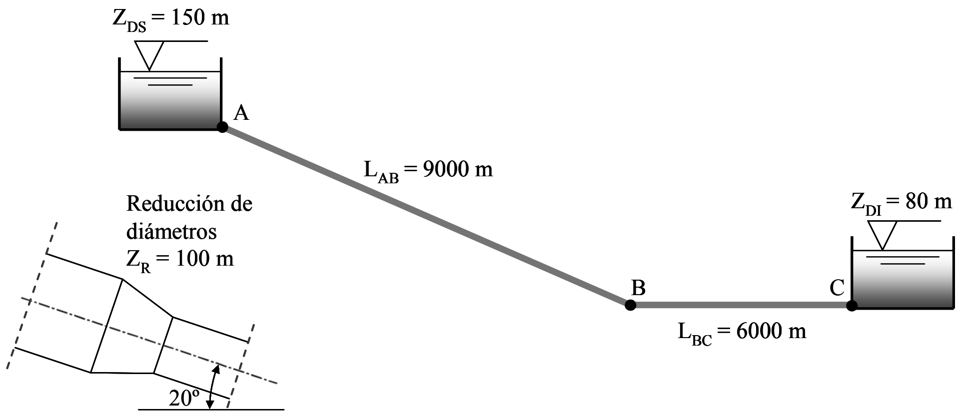
$$T_c = \frac{2LV_B}{\frac{\Delta p_{máx}}{\gamma} g} = \frac{2 \cdot (350 + 1200) \cdot 2{,}25}{9{,}74\, g} = 73{,}0\ s$$

Este cierre es lento, como habíamos supuesto inicialmente, ya que

$$\frac{2L}{a} = \frac{2 \cdot (350 + 1200)}{1100} = 2{,}82\ s < T_c$$

PROBLEMA II.8

Para el trasvase de agua entre dos depósitos, cuyos niveles libres se encuentran respectivamente a las cotas de 150 y 80 m, se va a instalar una tubería de hormigón de rugosidad absoluta 0,20 mm, tal como indica la figura. Por las características del terreno sobre el que discurre la tubería, ésta se puede suponer que estará constituida por dos tramos, el primero de ellos inclinado, de longitud 9000 m, y el segundo horizontal, de longitud 6000 m. Se supondrán despreciables las pérdidas menores de la instalación.



Si se desea trasvasar entre los depósitos un caudal de 600 l/s, determinar:

a) **Diámetro que debería tener la tubería para transportar el caudal deseado.**
b) **Al no ser comercial el diámetro calculado en el apartado a), desdoblar la tubería en los diámetros comerciales anterior y posterior al calculado. Determinar en este caso la longitud de tubería a instalar de cada uno de estos diámetros, suponiendo que el factor de fricción para ambas tuberías es el calculado en el apartado anterior.**
c) **Componentes de la fuerza necesaria para mantener en su posición el anclaje de la reducción a instalar en el punto de unión de ambos diámetros (ver figura). Esta reducción de diámetros se encuentra a la cota de 100 m, con una inclinación de las tuberías de 20º respecto de la horizontal.**

Viscosidad cinemática del agua $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ m²/s

Relación de diámetros comerciales: 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900 mm.

SOLUCIÓN

a) Para calcular el diámetro de la conducción que permita transportar un caudal de 600 l/s disponemos de las siguientes expresiones:

Teorema de Bernoulli entre los depósitos superior e inferior

$$Z_{DS} = Z_{DI} + \frac{8 f_{AC} L_{AC}}{\pi^2 g D_{AC}^5} Q^2$$

y, dando valores,

$$150 = 80 + \frac{8 f_{AC} (9000 + 6000)}{\pi^2 g D_{AC}^5} 0{,}6^2 \quad \rightarrow \quad D_{AC} = 1{,}45 \sqrt[5]{f_{AC}} \ (m)$$

Cálculo del factor de fricción

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re} &= \frac{4Q}{\pi D_{AC} \nu} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{\pi \cdot D_{AC} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-6}} = \frac{6{,}94 \cdot 10^5}{D_{AC}} \\ \varepsilon_r &= \frac{\varepsilon}{D_{AC}} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{D_{AC}} \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \textit{Se obtiene } f_{AC} \textit{ por Colebrook o Moody}$$

Haciendo uso del diagrama de Moody, en la tabla adjunta se indican los resultados obtenidos para el cálculo del diámetro de la tubería.

D_{AC} sup. (m)	Re	ε_r	f_{AC}	D_{AC} calc. (m)
0,500	$1{,}39 \cdot 10^6$	$4{,}00 \cdot 10^{-4}$	0,0162	0,636
0,636	$1{,}09 \cdot 10^6$	$3{,}14 \cdot 10^{-4}$	0,0158	0,633
0,633	$1{,}10 \cdot 10^6$	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$	0,0158	0,633

Luego la tubería debería tener un diámetro interior de 633 mm, para que circulase por la misma el caudal deseado.

b) Como el diámetro calculado para la conducción no es comercial, lo desdoblaremos en un tramo de longitud L_1 y diámetro D_1=700 mm, y otro de longitud L_2 y diámetro D_2=600 mm. Para calcular estas longitudes tenemos las siguientes expresiones:

$$Z_{DS} = Z_{DI} + \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} Q^2 + \frac{8 f_2 L_2}{\pi^2 g D_2^5} Q^2 \quad ; \quad L_1 + L_2 = L_{AC}$$

las cuales, dando valores, quedan:

$$150 = 80 + \frac{8 \cdot 0{,}0158 \cdot L_1}{\pi^2 g\, 0{,}7^5} 0{,}6^2 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot L_2}{\pi^2 g\, 0{,}6^5} 0{,}6^2 \quad ; \quad L_1 + L_2 = 15000\ m$$

La solución de este sistema proporciona

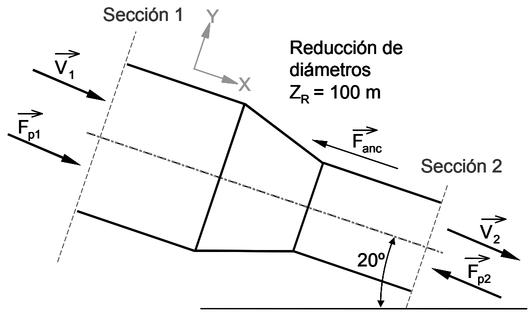
$$\boxed{L_1 = 6361{,}4\ m \quad ; \quad L_2 = 8638{,}6\ m}$$

c) Como la reducción de diámetros en la tubería se realiza sin cambio de dirección, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se puede aplicar en la dirección X indicada en la figura adjunta. En esta dirección irán tanto las fuerzas que actúan sobre la reducción como los vectores velocidad a la entrada y a la salida de la misma.

Las velocidades de entrada y salida serán:

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{\pi \cdot 0{,}7^2} = 1{,}56\ m/s$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{\pi \cdot 0{,}6^2} = 2{,}12\ m/s$$



La presión en la sección de entrada se obtendrá aplicando el teorema de Bernoulli entre el nivel libre del depósito superior y dicha sección,

$$\frac{p_1}{\gamma} = Z_{DS} - Z_R - \frac{V_1^2}{2g} - \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} Q^2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = 150 - 100 - \frac{1{,}56^2}{2g} - \frac{8 \cdot 0{,}0158 \cdot 6361{,}4}{\pi^2 g\, 0{,}7^5} 0{,}6^2 = 32{,}087 \ mca$$

La presión en la sección de salida se obtendrá aplicando el teorema de Bernoulli entre las secciones de entrada y de salida, y suponiendo que en la reducción no existen pérdidas y que toda ella se encuentra a la misma cota,

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = 32{,}087 + \frac{1{,}56^2}{2g} - \frac{2{,}12^2}{2g} = 31{,}982 \ mca$$

Las fuerzas debidas a la presión en las secciones de entrada y salida valen:

$$F_{p1} = \gamma \frac{p_1}{\gamma} \frac{\pi D_1^2}{4} = 1000 \cdot 32{,}087 \frac{\pi \cdot 0{,}7^2}{4} = 12348{,}52 \ Kp$$

$$F_{p2} = \gamma \frac{p_2}{\gamma} \frac{\pi D_2^2}{4} = 1000 \cdot 31{,}982 \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} = 9042{,}70 \ Kp$$

La aplicación de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento a la reducción de diámetro, y en la dirección del eje de la tubería, será

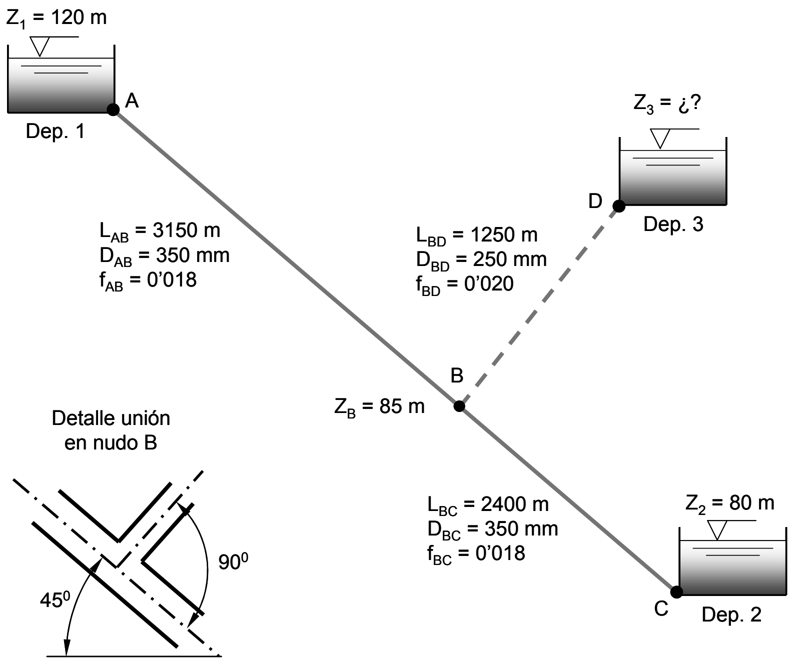
$$F_{p1} - F_{p2} - F_{anc} = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$12348{,}52 - 9042{,}70 - F_{anc} = \frac{1000}{9{,}81} 0{,}6 (2{,}12 - 1{,}56)$$

De aquí resulta $F_{anc} = 3271{,}57\, Kp$, la cual tendrá la dirección y el sentido indicados en la figura anterior.

PROBLEMA II.9

Se dispone de una instalación para transportar agua del depósito 1 al depósito 2, a las cotas respectivas de 120 y 80 m, como se indica en la figura. Esta instalación consta de una tubería ABC, de diámetro 350 mm, factor de fricción 0,018, y longitud de sus respectivos tramos L_{AB}=3150 m y L_{BC}=2400 m. Estando esta instalación en funcionamiento, se piensa construir un nuevo depósito, depósito 3, y conectarlo al punto B de la tubería anterior por medio de la conducción BD de diámetro 250 mm, factor de fricción 0,020, y longitud 1250 m.



Para esta instalación, y despreciando el efecto de las pérdidas menores, determinar:

a) **Caudal circulante por la tubería ABC antes de conectar el depósito 3.**
b) **Cota a la que se deberá ubicar el depósito 3 para que el caudal transportado hacia el mismo, con la instalación ampliada, sea de 50 l/s. Caudal que llegará al depósito 2 en estas nuevas condiciones.**
c) **Fuerza que deberá realizar el anclaje de la unión de tuberías en B, cuando la instalación esté ya ampliada y en funcionamiento.**

SOLUCIÓN

a) Para calcular el caudal circulante por la conducción AC antes de ampliar la instalación, caudal Q_{1-2}, aplicamos el teorema de Bernoulli entre los depósitos 1 y 2:

$$Z_1 = Z_2 + \frac{8 f_{AC} L_{AC}}{\pi^2 g D_{AC}^5} Q_{1-2}^2$$

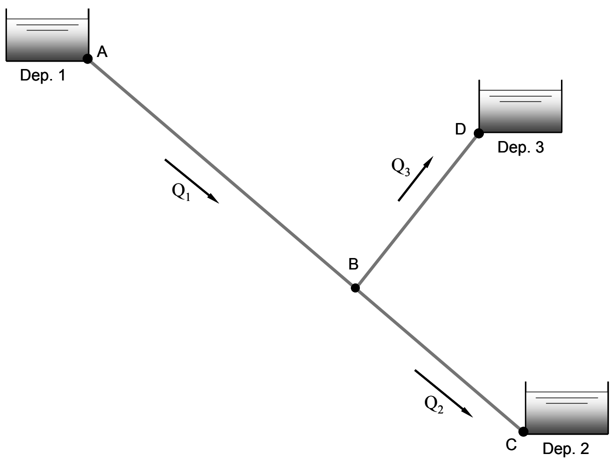
Dando valores a la expresión anterior, resulta:

$$120 = 80 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 5550}{\pi^2 g\, 0{,}35^5} Q_{1-2}^2$$

de donde obtenemos

$$\boxed{Q_{1-2} = 0{,}1595\ m^3/s}$$

b) Una vez ampliada la instalación, los caudales circulantes por las líneas se conocerán aplicando de nuevo el teorema de Bernoulli entre los depósitos 1 y 2:



$$Z_1 = Z_2 + \frac{8 f_{AB} L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_1^2 + \frac{8 f_{BC} L_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_2^2$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad aplicada al nudo B,

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q_2 + 0{,}05$$

De esta manera, y dando valores a la ecuación de Bernoulli,

$$120 = 80 + \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 3150}{\pi^2 g\, 0{,}35^5}\left(Q_2 + 0{,}05\right)^2 + \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 2400}{\pi^2 g\, 0{,}35^5} Q_2^2$$

obtenemos el caudal que llega al depósito 2 con la instalación ampliada, el cual será

$$Q_2 = 0{,}1292\ m^3/s$$

El caudal aportado por el depósito 1 se obtiene a partir de la ecuación de continuidad,

$$Q_1 = 0{,}1292 + 0{,}05 = 0{,}1792\ m^3/s$$

Para determinar la cota del depósito 3 aplicaremos ahora el teorema de Bernoulli entre los depósitos 1 y 3,

$$Z_1 = Z_3 + \frac{8 f_{AB} L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_1^2 + \frac{8 f_{BD} L_{BD}}{\pi^2 g D_{BD}^5} Q_3^2$$

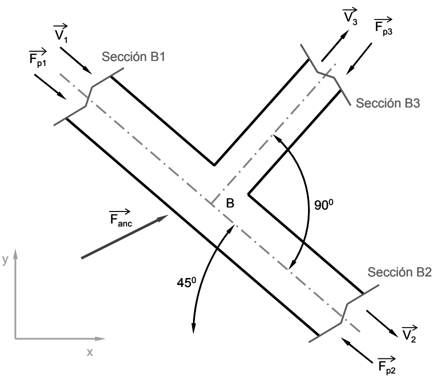
Y dando valores,

$$120 = Z_3 + \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 3150}{\pi^2 g\, 0{,}35^5} 0{,}1792^2 + \frac{8\cdot 0{,}020\cdot 1250}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}05^2$$

de donde obtenemos la cota del depósito 3, la cual será de

$$\boxed{Z_3 = 86{,}07\ m}$$

c)



La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento aplicada a la unión B será:

$$\overrightarrow{F_{p1}}+\overrightarrow{F_{p2}}+\overrightarrow{F_{p3}}+\overrightarrow{F_{anc}}=$$
$$=\rho\left(Q_2\overrightarrow{V_2}+Q_3\overrightarrow{V_3}-Q_1\overrightarrow{V_1}\right)$$

Con el sistema de coordenadas indicado en la figura adjunta, las velocidades en cada una de las secciones de entrada y salida serán las siguientes:

$$\overrightarrow{V_1}=\frac{4Q_1}{\pi D_{AB}^2}\left(\cos 45^\circ\vec{i}-sen 45^\circ\vec{j}\right)=\frac{4\cdot 0{,}1792}{\pi\cdot 0{,}35^2}\left(\cos 45^\circ\vec{i}-sen 45^\circ\vec{j}\right)=$$

$$=1{,}416\left(\vec{i}-\vec{j}\right)\ m/s$$

$$\overrightarrow{V_2}=\frac{4Q_2}{\pi D_{BC}^2}\left(\cos 45^\circ\vec{i}-sen 45^\circ\vec{j}\right)=\frac{4\cdot 0{,}1292}{\pi\cdot 0{,}35^2}\left(\cos 45^\circ\vec{i}-sen 45^\circ\vec{j}\right)=$$

$$=1{,}021\left(\vec{i}-\vec{j}\right)\ m/s$$

$$\overrightarrow{V_3}=\frac{4Q_3}{\pi D_{BD}^2}\left(\cos 45^\circ\vec{i}+sen 45^\circ\vec{j}\right)=\frac{4\cdot 0{,}05}{\pi\cdot 0{,}25^2}\left(\cos 45^\circ\vec{i}+sen 45^\circ\vec{j}\right)=$$

$$=0{,}775\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\ m/s$$

La presión en la sección B1 se obtiene aplicando el teorema de Bernoulli entre el depósito 1 y dicha sección:

$$Z_1=Z_{B1}+\frac{p_{B1}}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+\frac{8f_{AB}L_{AB}}{\pi^2 gD_{AB}^5}Q_1^2$$

$$120 = 85 + \frac{p_{B1}}{\gamma} + \frac{1{,}863^2}{2g} + \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 3500}{\pi^2 g\, 0{,}35^5} 0{,}1792^2$$

$$\frac{p_{B1}}{\gamma} = 6{,}179\ m \quad ; \quad p_{B1} = 6{,}179\gamma = 6{,}179\cdot 1000 = 6179\ Kp/m^2$$

Para conocer la presión en la sección B2 aplicamos el teorema de Bernoulli entre las secciones B1 y B2, teniendo en cuenta que ambas se encuentran prácticamente a la misma cota, y que las pérdidas menores de la unión B son despreciables.

$$\frac{p_{B1}}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_{B2}}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad ; \quad 6{,}179 + \frac{1{,}863^2}{2g} = \frac{p_{B2}}{\gamma} + \frac{1{,}343^2}{2g}$$

$$\frac{p_{B2}}{\gamma} = 6{,}264\ m \quad ; \quad p_{B2} = 6{,}264\gamma = 6{,}264\cdot 1000 = 6264\ Kp/m^2$$

Y de la misma manera, para calcular la presión en B3,

$$\frac{p_{B1}}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_{B3}}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} \quad ; \quad 6{,}179 + \frac{1{,}863^2}{2g} = \frac{p_{B3}}{\gamma} + \frac{1{,}019^2}{2g}$$

$$\frac{p_{B3}}{\gamma} = 6{,}303\ m \quad ; \quad p_{B3} = 6{,}303\gamma = 6{,}303\cdot 1000 = 6303\ Kp/m^2$$

Las fuerzas sobre el volumen de control debidas a la presión en cada una de estas secciones, en Kp, serán:

$$\overrightarrow{F_{p1}} = \frac{\pi D_{AB}^2}{4} p_{B1}\left(\cos 45^\circ \vec{i} - sen 45^\circ \vec{j}\right) =$$

$$= \frac{\pi 0{,}35^2}{4} 6179\left(\cos 45^\circ i - sen 45^\circ j\right) = 420{,}37\left(i - j\right) Kp$$

$$\overrightarrow{F_{p2}} = \frac{\pi D_{BC}^2}{4} p_{B2}\left(-\cos 45^\circ \vec{i} + sen 45^\circ \vec{j}\right) =$$

$$\frac{\pi 0{,}35^2}{4} 6264\left(-\cos 45^\circ i \ + sen 45^\circ \ j\right) = 426{,}15\left(-i \ + j\right) Kp$$

$$\overrightarrow{F_{p3}} = \frac{\pi D_{BD}^2}{4} p_{B3}\left(-\cos 45^\circ \vec{i} \ - sen 45^\circ \vec{j}\right) =$$

$$\frac{\pi 0{,}25^2}{4} 6303\left(-\cos 45^\circ i \ - sen 45^\circ \ j\right) = 218{,}78\left(-i \ - j\right) Kp$$

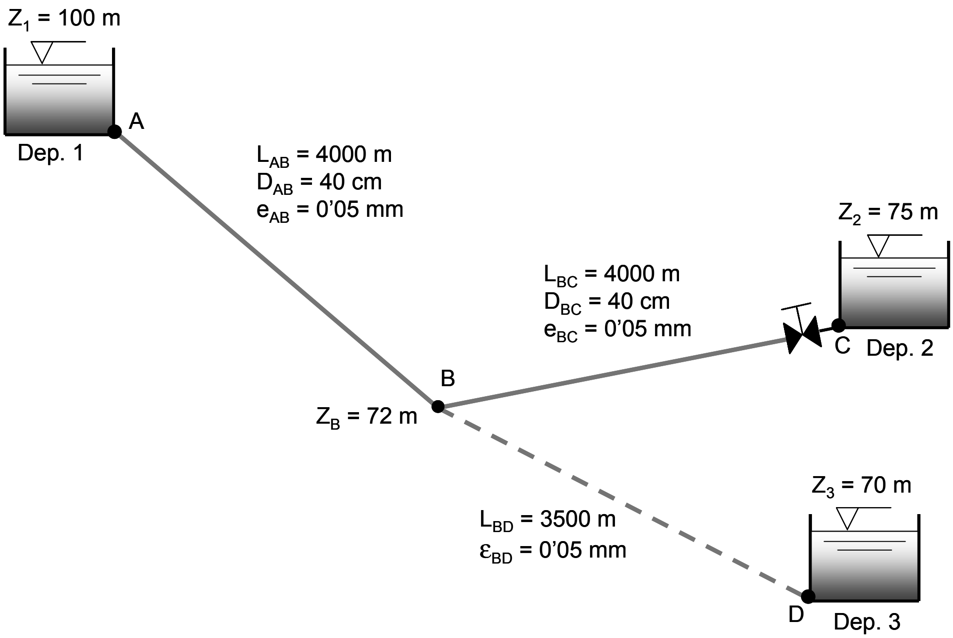
Así, y a partir de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, tenemos:

$$420{,}37\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + 426{,}15\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) + 218{,}78\left(-\vec{i} - \vec{j}\right) + \overrightarrow{F_{anc}} =$$
$$= \frac{1000}{9{,}81}\left[0{,}1292 \cdot 1{,}021\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + 0{,}05 \cdot 0{,}775\left(\vec{i} + \vec{j}\right) - 0{,}1792 \cdot 1{,}416\left(\vec{i} - \vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{anc}} = 216{,}09\vec{i} \ + 229{,}37\vec{j} \ \ Kp}$$

PROBLEMA II.10

Se dispone de una instalación para transportar agua del depósito 1 al depósito 2, a las cotas respectivas de 100 y 75 m, como se indica en la figura. Esta instalación consta de una tubería ABC de longitud total 8000 m, diámetro 40 cm y rugosidad absoluta 0,05 mm, y en cuyo extremo final a la entrada del depósito 2 lleva incorporada una válvula de compuerta. Para esta instalación, determinar:



a) **Coeficiente de pérdidas que debería tener la válvula de compuerta, parcialmente cerrada, para que el caudal transportado hacia el depósito 2 sea de 125 l/s.**

b) **Tiempo después de estar la instalación en funcionamiento, se plantea la necesidad de transportar agua desde el depósito 1 al depósito 3, a la cota 70 m, sin dejar de alimentar al depósito 2. Para ello se propone la solución de instalar una nueva tubería, BD, conectada al punto medio B de la tubería inicial. Determinar, en estas nuevas condiciones, el caudal que se podría transportar al depósito 3 manteniendo el caudal hacia el depósito 2 en 125 l/s, pero abriendo completamente la válvula de compuerta.**

c) **Diámetro que debería tener la tubería BD, de longitud 3500 m y rugosidad absoluta 0,05 mm, para que la instalación funcione en las condiciones del apartado b). Desdoblar diámetros en caso necesario, siendo la relación de diámetros comerciales: 150, 175, 200, 250, 300 y 400 mm.**

Se supondrán despreciables las pérdidas menores de la instalación, excepto las que correspondan a la válvula de compuerta cuando esté parcialmente cerrada. Se despreciará el término cinético en el interior de las tuberías. La viscosidad cinemática del agua es de $1{,}02 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

SOLUCIÓN

a) Vamos a calcular en primer lugar el factor de fricción de las tuberías AB y BC. Para ello tenemos:

$$\mathrm{Re} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \cdot 0{,}125}{\pi \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-6}} = 3{,}9 \cdot 10^{5} \quad ; \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}05}{400} = 0{,}000125$$

Con estos valores, y haciendo uso del diagrama de Moody, obtenemos $f_{AB}=f_{BC}=0{,}01525$.

Aplicando ahora el teorema de Bernoulli entre los depósitos 1 y 2, tenemos:

$$Z_1 = Z_2 + \frac{8 f_{AB} L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 + \frac{8 f_{BC} L_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2 + h_v$$

siendo h_v las pérdidas que se deberían producir en la válvula de compuerta para que el caudal que llegue al depósito 2 sea de 125 l/s. Dando valores a la expresión anterior tendremos:

$$100 = 75 + \frac{8 \cdot 0{,}01525 \cdot 4000}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} 0{,}125^2 + \frac{8 \cdot 0{,}01525 \cdot 4000}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} 0{,}125^2 + h_v$$

de donde obtenemos h_v = 9,62 m.

La velocidad del agua por la tubería BC será:

$$V_{BC} = \frac{4 Q_{BC}}{\pi D_{BC}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}125}{\pi\, 0{,}4^2} = 0{,}995\ m/s$$

y el coeficiente de pérdidas de la válvula de compuerta,

$$\boxed{k_v = \frac{2 g h_v}{V_{BC}^2} = \frac{2 g\, 9{,}62}{0{,}995^2} = 190{,}73}$$

o bien,

$$K_v = \frac{h_v}{Q_{BC}^2} = \frac{9{,}62}{0{,}125^2} = 615{,}60\ m/(m^3/s)^2$$

b) Con la instalación ampliada, y la válvula de compuerta totalmente abierta, el nuevo caudal que circula por la tubería AB lo calcularemos aplicando otra vez el teorema de Bernoulli entre los depósitos 1 y 2,

$$Z_1 = Z_2 + \frac{8 f_{AB} L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 + \frac{8 f_{BC} L_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2$$

siendo ahora, como en el caso anterior, Q_{BC} = 125 l/s.

Dando valores a esta expresión tendremos,

$$100 = 75 + \frac{8 f_{AB} \cdot 4000}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} Q_{AB}^2 + \frac{8 \cdot 0{,}01525 \cdot 4000}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} 0{,}125^2$$

de donde resulta,

$$Q_{AB} = \frac{2{,}316 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{f_{AB}}} \quad m^3/s$$

El valor de Q_{AB} se puede obtener iterando con Re, ε_r y el diagrama de Moody, y teniendo en cuenta la expresión anterior. El proceso iterativo se resume en la tabla siguiente.

f_{AB} (supuesto)	Q_{AB} (m³/s)	Re	ε_r	f_{AB} (calculado)
0,0150	0,189	$5{,}9 \cdot 10^5$	0,000125	0,0145
0,0145	0,192	$6{,}0 \cdot 10^5$	0,000125	0,0145

El caudal circulante por la tubería AB será, pues, de 0,192 m³/s.

El caudal que se puede transportar hacia el depósito 3 vale:

$$Q_{BD} = Q_{AB} - Q_{BC} = 0{,}192 - 0{,}125 = 0{,}067 \; m^3/s$$

c) Para determinar el diámetro de la tubería BD calcularemos primero la altura piezométrica del punto B:

$$H_B = Z_2 + \frac{8 f_{BC} L_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2 = 75 + \frac{8 \cdot 0{,}01525 \cdot 4000}{\pi^2 g \, 0{,}4^5} 0{,}125^2 = 82{,}69 \; m$$

Las pérdidas en la línea BD serán:

$$h_{BD} = H_B - Z_3 = \frac{8 f_{BD} L_{BD}}{\pi^2 g D_{BD}^5} Q_{BD}^2$$

y, dando valores a esta expresión:

$$82{,}69 - 70 = \frac{8 f_{BD} \cdot 3500}{\pi^2 g D_{BD}^5} 0{,}067^2$$

de donde resulta:

$$D_{BD} = 0{,}634 \sqrt[5]{f_{BD}} \quad m$$

Para resolver esta última expresión haremos uso de las expresiones de *Re*, ε_r y del diagrama de Moody. Los resultados que se obtienen en un proceso iterativo son los que se indican en la tabla siguiente.

f_{BD} (supuesto)	D_{BD} (mm)	*Re*	ε_r	f_{BD} (calculado)
0,0150	274	$3{,}05 \cdot 10^5$	0,00018	0,0163
0,0163	278	$3{,}00 \cdot 10^5$	0,00018	0,0163

El diámetro a instalar en la tubería BD debería ser de 278 mm, el cual no es comercial. Por ello vamos a desdoblar el diámetro de esta tubería, con los diámetros comerciales D_{BD1}=300 mm y D_{BD2}=250 mm, y longitudes respectivas de L_1 y L_2.

Para calcular el factor de fricción de cada uno de estos tramos, y a partir del diagrama de Moody, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} Re_1 &= \frac{4Q_{BD}}{\pi D_{BD1}\nu} = \frac{4\cdot 0{,}067}{\pi\cdot 0{,}3\cdot 1{,}02\cdot 10^{-6}} = 2{,}79\cdot 10^5 \\ \varepsilon_{r1} &= \frac{\varepsilon_{BD}}{D_{BD1}} = \frac{0{,}05}{300} = 0{,}00017 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad f_{BD1} = 0{,}0162$$

$$\left.\begin{aligned} Re_2 &= \frac{4Q_{BD}}{\pi D_{BD2}\nu} = \frac{4\cdot 0{,}067}{\pi\cdot 0{,}25\cdot 1{,}02\cdot 10^{-6}} = 3{,}35\cdot 10^5 \\ \varepsilon_{r2} &= \frac{\varepsilon_{BD}}{D_{BD2}} = \frac{0{,}05}{250} = 0{,}0002 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad f_{BD2} = 0{,}0161$$

Aplicando el teorema de Bernoulli entre el nudo B y el depósito 3,

$$H_B = Z_3 + \frac{8 f_{BD1} L_1}{\pi^2 g D_{BD1}^5} Q_{BD}^2 + \frac{8 f_{BD2} L_2}{\pi^2 g D_{BD2}^5} Q_{BD}^2$$

o bien,

$$82{,}69 = 70 + \frac{8\cdot 0{,}0162\cdot L_1}{\pi^2 g\, 0{,}3^5} 0{,}067^2 + \frac{8\cdot 0{,}0161\cdot L_2}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}067^2$$

Por otra parte, a partir de la longitud de la línea BD, tendremos

$$L_{BD} = L_1 + L_2 = 3500\ m$$

Resolviendo simultáneamente las dos últimas expresiones, obtenemos:

$$\boxed{L_1 = 2391{,}5\ m \quad ; \quad L_2 = 1108{,}5\ m}$$

III

DISEÑO DE REDES RAMIFICADAS

PROBLEMA III.1

Se pretende diseñar una red ramificada para el abastecimiento de agua a dos puntos de consumo como se indica en la figura. El agua se toma de un depósito a la cota 120 m, siendo las longitudes de tubería, factor de fricción, cotas de nudos y caudales demandados los indicados. Por las necesidades del suministro, la presión en los nudos de consumo deberá ser como mínimo de 30 m.

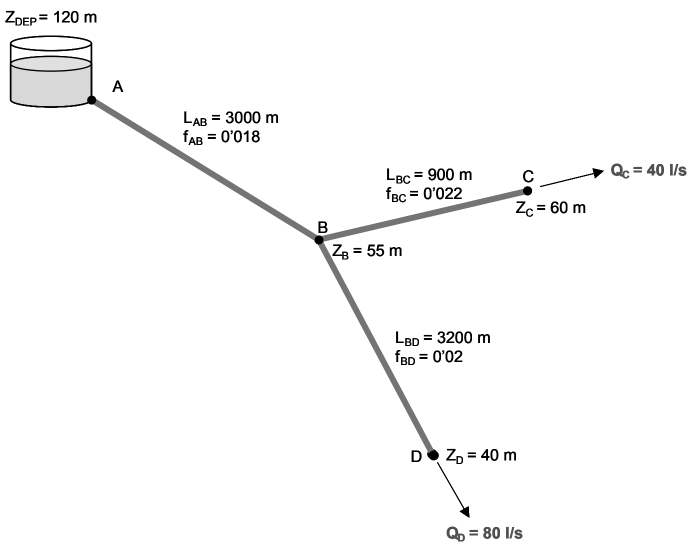
En estas condiciones, determinar:

a) **Diámetro que deberían tener las tuberías aplicando el criterio de Mougnie.**

b) **Diámetro que deberían tener las tuberías aplicando el criterio de la pendiente hidráulica uniforme.**

c) **Diámetros definitivos que deberán tener las tuberías a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. Razonar la respuesta.**

Diámetros comerciales disponibles: 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450 y 500 mm.



SOLUCIÓN

a) El criterio de Mougnie nos indica que las velocidades y caudales máximos circulantes por el interior de las tuberías están relacionados con el diámetro de las mismas, de la forma

$$V_{máx} = 1{,}5\sqrt{D + 0{,}05} \quad ; \quad Q_{máx} = 1{,}5\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{D + 0{,}05}$$

Por ello, y para distintos diámetros comerciales, el caudal máximo aconsejado por Mougnie será el indicado en la tabla siguiente.

D (mm)	$V_{máx}$ (m/s)	$Q_{máx}$ (l/s)
150	0,67	11,85
175	0,71	17,11
200	0,75	23,56
250	0,82	40,33
300	0,89	62,73
350	0,95	91,27
400	1,01	126,45
450	1,06	168,69
500	1,11	218,43

El diseño de las líneas de la red se efectuará, pues, tomando para cada una de estas líneas un diámetro comercial de manera que el caudal circulante por la misma sea igual o menor que el caudal máximo de Mougnie para dicho diámetro. El resultado obtenido es el que se indica en la tabla siguiente.

Línea	Q (l/s)	D (mm)
AB	120	400
BC	40	250
BD	80	350

b) Para aplicar el criterio de pendiente hidráulica uniforme, la pendiente hidráulica admisible entre el depósito y cada uno de los nudos de consumo será:

$$j_{AC} = \frac{Z_{DEP} - \left(Z_C + \frac{p_{mín}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BC}} = \frac{120 - (60 + 30)}{3000 + 900} = 7{,}69 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

$$j_{AD} = \frac{Z_{DEP} - \left(Z_D + \frac{p_{mín}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BD}} = \frac{120 - (40 + 30)}{3000 + 3200} = 8{,}06 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

La ruta crítica será la ABC, el nudo crítico el C, y la pendiente hidráulica crítica $j_{cr}=j_{AC}=7{,}69 \cdot 10^{-3}$ m/m. Para calcular el diámetro de las líneas de la ruta crítica tenemos:

$$D_{AB} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{AB} Q_{AB}^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}12^2}{\pi^2 g \, 7{,}69 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}308 \ m$$

$$D_{BC} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{BC} Q_{BC}^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}022 \cdot 0{,}04^2}{\pi^2 g \, 7{,}69 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}207 \ m$$

Para estas líneas tomaremos los diámetros comerciales D_{AB}=350 mm y D_{BC}=200 mm. Con estos diámetros la altura piezométrica en el nudo B será:

$$H_B = Z_{DEP} - h_{AB} = 120 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 3000}{\pi^2 g \, 0{,}35^5} 0{,}12^2 = 107{,}77 \ m$$

y la presión de suministro en el nudo C:

$$\frac{p_C}{\gamma} = H_B - Z_C - h_{BC} = 107{,}77 - 60 - \frac{8 \cdot 0{,}022 \cdot 900}{\pi^2 g \, 0{,}2^5} 0{,}04^2 = 39{,}59 \ m$$

la cual es superior al valor mínimo indicado.

Para calcular el diámetro de la línea BD consideraremos a ésta como ramal terminal. Así,

$$H_B = Z_D + \frac{p_{mín}}{\gamma} + h_{BD} \quad ; \qquad 107{,}77 = 40 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 3200}{\pi^2 g\, D_{BD}^5} 0{,}08^2$$

de donde obtenemos D_{BD}=0,248 m. Adoptaremos pues el diámetro comercial D_{BD}=250 mm, con lo que la presión en el nudo D resultará:

$$\frac{p_D}{\gamma} = H_B - Z_D - h_{BD} = 107{,}77 - 40 - \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 3200}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}08^2 = 33{,}11\ m$$

mayor que la mínima en nudos de consumo.

c) En la tabla siguiente presentamos como resumen el diseño de las líneas de la red por los criterios de Mougnie y de pendiente hidráulica uniforme.

Línea	Diámetro (mm)	
	Mougnie	Pend. hidr. unif.
AB	400	350
BC	250	200
BD	350	250

Vemos que los diámetros calculados por el criterio de pendiente hidráulica uniforme son menores que los de Mougnie. Si los diámetros definitivos de la red van a ser los que se obtienen del criterio de pendiente hidráulica uniforme, las presiones en los nudos de suministro quedan garantizadas, pero no se consideran las velocidades de circulación del agua por las líneas. En este caso estas velocidades serían:

$$V_{AB} = \frac{4Q_{AB}}{\pi D_{AB}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}12}{\pi \cdot 0{,}35^2} = 1{,}25\ m/s$$

$$V_{BC} = \frac{4Q_{BC}}{\pi D_{BC}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}04}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 1{,}27\ m/s$$

$$V_{BD} = \frac{4Q_{BD}}{\pi D_{BD}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}08}{\pi \cdot 0{,}25^2} = 1{,}63\ m/s$$

Por otra parte, si los diámetros de la red fuesen los que se obtienen por el criterio de Mougnie, las velocidades por las líneas van a ser aceptables, pero no se aseguran las presiones en los nudos de suministro. Con este criterio, dichas presiones serían:

$$\frac{p_C}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_C - h_{AB} - h_{BC}$$

$$\frac{p_C}{\gamma} = 120 - 60 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 3.000}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} 0{,}12^2 - \frac{8 \cdot 0{,}022 \cdot 900}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}04^2 = 51{,}05\ m$$

$$\frac{p_D}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_D - h_{AB} - h_{BD}$$

$$\frac{p_D}{\gamma} = 120 - 40 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 3.000}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} 0{,}12^2 - \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 3.200}{\pi^2 g\, 0{,}35^5} 0{,}08^2 = 67{,}28\ m$$

A la vista de estos resultados, podríamos decir que los diámetros definitivos de la red deberían ser los que se obtienen por el criterio de la pendiente hidráulica uniforme, ya que en este caso se aseguran las presiones en los nudos de suministro y las velocidades en las líneas no resultan excesivas.

El diseño por el criterio de Mougnie, aunque asegura que las velocidades se mantengan por debajo de determinados valores, no garantiza las presiones. En nuestro caso, y para este criterio, las presiones en los nudos de suministro parecen excesivas (mayores de 50 m en ambos nudos, como vemos en las expresiones anteriores), al menos en comparación con la presión mínima de suministro indicada en el enunciado.

PROBLEMA III.2

Se pretende diseñar una red ramificada para abastecer tres centros de consumo como se indica en la figura. El agua se toma de un depósito a la cota 70 m, siendo el trazado, longitudes de tubería y cotas de nudos los indicados. En los nudos de consumo, los caudales demandados son diferentes en horas punta y horas valle, según los valores indicados en la tabla adjunta. En el extremo final de la tubería AB se ha dispuesto una válvula de compuerta que en horas punta de consumo permanece totalmente abierta, sin pérdidas, pero que en horas valle se cierra parcialmente para evitar presiones excesivas en los puntos de suministro. Si el factor de fricción de las tuberías se toma como constante e igual a 0,018, y las presiones en los puntos de suministro C, E y F deben ser como mínimo de 30 m.c.a., determinar:

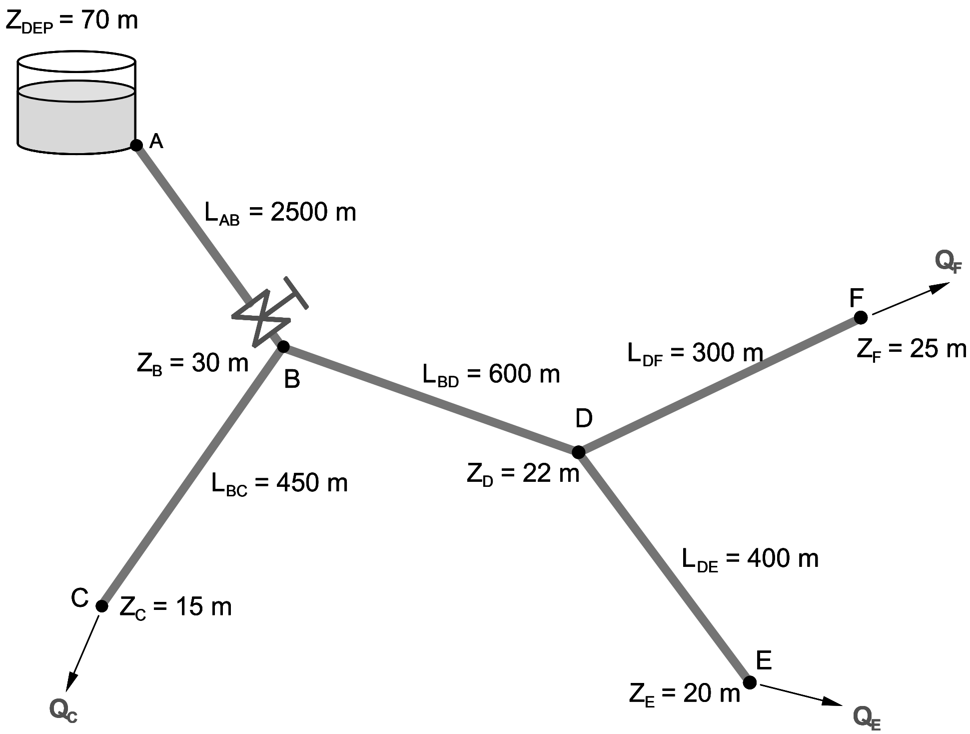
a) **Nudo crítico y ruta crítica que deberán adoptarse para calcular el diámetro de las tuberías por el criterio de pendiente hidráulica uniforme.**

b) **Diámetro de las tuberías calculado con el criterio de pendiente hidráulica uniforme, cuando los centros de consumo demandan los caudales punta indicados y la válvula de compuerta se encuentra totalmente abierta. Con la red diseñada, calcular las presiones de suministro en horas punta.**

c) **Si para el suministro en horas valle se cierra parcialmente la válvula, determinar las pérdidas que deberá provocar esta válvula para que, en este caso, la presión de suministro en el nudo F sea de 30 m.c.a. Determinar también la presión en los otros puntos de suministro.**

Diámetros comerciales disponibles: 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350 y 400 mm.

Nudo	Q_p (l/s)	Q_v (l/s)
C	35	0
E	20	0
F	30	20



SOLUCIÓN

a) Para determinar el nudo crítico y la ruta crítica vamos a calcular primero la pendiente hidráulica permitida entre el depósito de alimentación y cada uno de los nudos de consumo.

$$j_{AC} = \frac{H_{DEP} - \left(Z_C + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BC}} = \frac{70 - (15 + 30)}{2250 + 450} = 8{,}475 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

$$j_{AE} = \frac{H_{DEP} - \left(Z_E + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BD} + L_{DE}} = \frac{70 - (20 + 30)}{2250 + 600 + 400} = 5{,}714 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

$$j_{AF} = \frac{H_{DEP} - \left(Z_F + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BD} + L_{DF}} = \frac{70 - (25 + 30)}{2250 + 600 + 300} = 4{,}412 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

La ruta crítica será, pues, la ABDF, y el nudo crítico el F.

b) Vamos a calcular el diámetro de cada una de las líneas de la red aplicando el método de la pendiente hidráulica uniforme. En este caso la pendiente hidráulica crítica es la pendiente hidráulica permitida correspondiente a la ruta crítica, $j_{cr} = j_{AF} = 4{,}412 \cdot 10^{-3} \, m/m$.

Para los caudales punta circulantes por la red, el diámetro de cada una de las líneas de la ruta crítica será:

$$D_{AB} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{AB}^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}085^2}{\pi^2 g \, 4{,}4121 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}300 \ m$$

$$D_{BD} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{BD}^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}05^2}{\pi^2 g \, 4{,}4121 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}243 \ m$$

$$D_{DF} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{DF}^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}03^2}{\pi^2 g \, 4{,}4121 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}198 \ m$$

Así, los diámetros de la ruta crítica serán los comerciales iguales o inmediatamente superiores a los calculados,

$$D_{AB} = 300\ mm \quad ; \quad D_{BD} = 250\ mm \quad ; \quad D_{DF} = 200\ mm$$

Para este caso no se puede tomar el diámetro comercial inmediatamente inferior para ninguna de estas tres líneas, ya que se tiene que cumplir la presión mínima de suministro en el nudo crítico.

Con estos diámetros, las pérdidas en cada una de las líneas de la ruta crítica serán:

$$h_{AB} = \frac{8 f L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 2.500}{\pi^2 g\, 0{,}3^5} 0{,}085^2 = 11{,}06\ m$$

$$h_{BD} = \frac{8 f L_{BD}}{\pi^2 g D_{BD}^5} Q_{BD}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 600}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}05^2 = 2{,}28\ m$$

$$h_{DF} = \frac{8 f L_{DF}}{\pi^2 g D_{DF}^5} Q_{DF}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 300}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} 0{,}03^2 = 1{,}25\ m$$

y la altura piezométrica en los nudos B y D:

$$H_B = Z_{DEP} - h_{AB} = 70 - 11{,}06 = 58{,}94\ m$$

$$H_D = H_B - h_{BD} = 58{,}94 - 2{,}28 = 56{,}66\ m$$

Las líneas BC y DE se diseñarán como ramales terminales. Para estas líneas tenemos:

$$H_B = Z_C + \frac{p_{mín}}{\gamma} + \frac{8 f L_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2$$

$$58{,}94 = 15 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 450}{\pi^2 g D_{BC}^5} 0{,}035^2 \rightarrow D_{BC} = 0{,}143\ m$$

$$H_D = Z_E + \frac{p_{mín}}{\gamma} + \frac{8\,fL_{DE}}{\pi^2 g D_{DE}^5} Q_{DE}^2$$

$$56{,}66 = 20 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 400}{\pi^2 g D_{DE}^5} 0{,}02^2 \;\rightarrow\; D_{DE} = 0{,}129\ m$$

Para los ramales terminales se mayoran los diámetros, con objeto de cumplir con la presión mínima de suministro. Así, el diámetro comercial para cada una de estas líneas será:

$$D_{BC} = 150\ mm \quad ; \quad D_{DE} = 150\ mm$$

y las pérdidas de carga,

$$h_{BC} = \frac{8\,fL_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 450}{\pi^2 g\, 0{,}15^5} 0{,}035^2 = 10{,}80\ m$$

$$h_{DE} = \frac{8\,fL_{DE}}{\pi^2 g D_{DE}^5} Q_{DE}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 400}{\pi^2 g\, 0{,}15^5} 0{,}02^2 = 3{,}13\ m$$

Con los diámetros comerciales diseñados, la presión en cada uno de los nudos de suministro será:

$$\frac{p_C}{\gamma} = H_B - Z_C - h_{BC} = 58{,}94 - 15 - 10{,}80 = 33{,}14\ m$$

$$\frac{p_E}{\gamma} = H_D - Z_E - h_{DE} = 56{,}66 - 20 - 3{,}13 = 33{,}53\ m$$

$$\frac{p_F}{\gamma} = H_D - Z_F - h_{DF} = 56{,}66 - 25 - 1{,}25 = 30{,}41\ m$$

Como resumen, en las tablas adjuntas se indica el dimensionado definitivo de la red y las condiciones de funcionamiento de la misma.

Línea	Q (l/s)	D (mm)
AB	85	300
BC	35	150
BD	50	250
DE	20	150
DF	30	200

Nudo	Pres. (mca)
C	33,14
E	33,53
F	30,41

c) Durante las horas valle de consumo, solamente el nudo F está suministrando caudal. En este caso, las pérdidas de carga en cada una de las líneas que transportan caudal serán:

$$h_{AB} = \frac{8 f L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 2500}{\pi^2 g\, 0{,}3^5} 0{,}02^2 = 0{,}61\ m$$

$$h_{BD} = \frac{8 f L_{BD}}{\pi^2 g D_{BD}^5} Q_{BD}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 600}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}02^2 = 0{,}37\ m$$

$$h_{DF} = \frac{8 f L_{DF}}{\pi^2 g D_{DF}^5} Q_{DF}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 300}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} 0{,}02^2 = 0{,}56\ m$$

Para conseguir en el nudo F una presión de suministro de 30mca, las pérdidas en la válvula se obtendrán aplicando la ecuación de Bernoulli entre el depósito de cabecera y este nudo,

$$Z_{DEP} = Z_F + \frac{p_F}{\gamma} + h_{AB} + h_{BD} + h_{DF} + h_V$$

$$h_V = Z_{DEP} - Z_F - \frac{p_F}{\gamma} - h_{AB} - h_{BD} - h_{DF} =$$

$$= 70 - 25 - 30 - 0{,}61 - 0{,}37 - 0{,}56 = 13{,}46\ m$$

En horas valle la presión en los otros dos nudos de suministro, para los cuales el caudal demandado es nulo, será:

$$\frac{p_C}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_C - h_{AB} - h_{BC} - h_V =$$

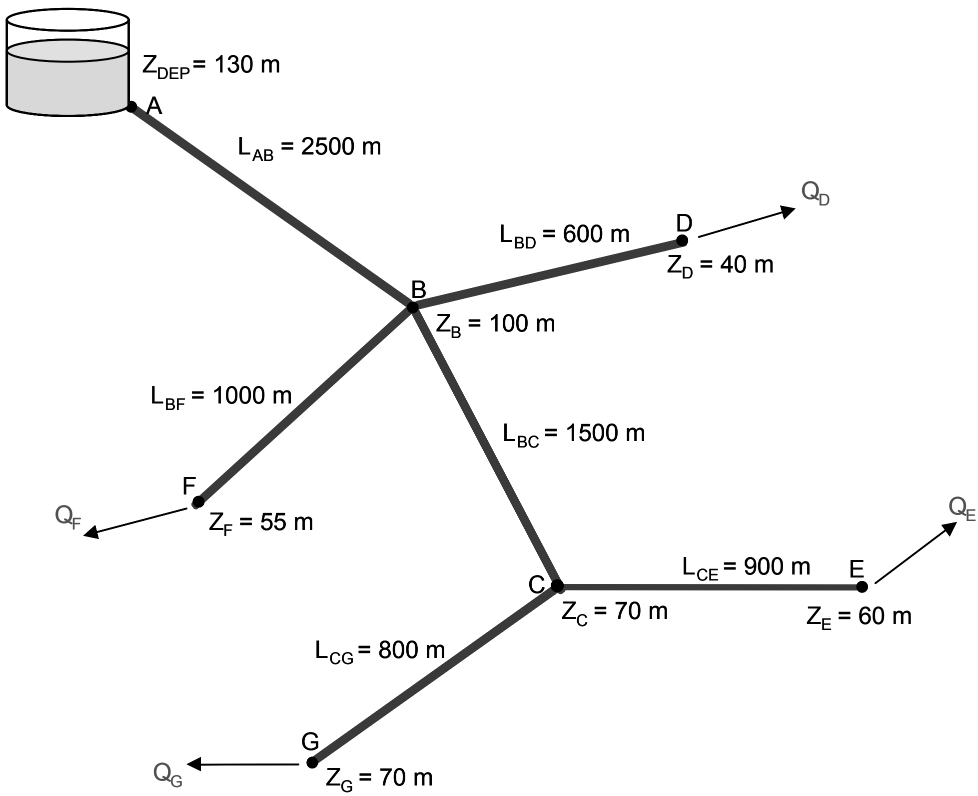
$$= 70 - 15 - 0{,}61 - 0 - 13{,}46 = 40{,}93\ m$$

$$\frac{p_E}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_E - h_{AB} - h_{BD} - h_{DE} - h_V =$$

$$= 70 - 20 - 0{,}61 - 0{,}37 - 0 - 13{,}46 = 35{,}56\ m$$

PROBLEMA III.3

Se pretende diseñar una red ramificada para la distribución general de agua a una zona agrícola en la que se va a instalar el riego por goteo. Para ello, y desde una balsa a la cota 130 m, se dispondrán una serie de tuberías principales como indica la figura adjunta. En este sistema, los nudos considerados de suministro son los D, E, F y G, y desde cada uno de ellos se dispondrán los correspondientes ramales secundarios que alimentarán las entradas a las parcelas de riego. Para conseguir una alimentación adecuada a las parcelas, la presión mínima de suministro en cada uno de estos nudos deberá ser de 30 m.c.a.



El método de riego que se va a adoptar es por tandas, de manera que desde las 6:00 hasta las 11:00 horas (tanda 1), se regarán solamente las parcelas alimentadas desde los nudos D y E, y desde las 16:00 hasta las 21:00 horas (tanda 2) se regarán solamente las parcelas alimentadas por los nudos F y G, estando la instalación parada el resto del tiempo. Los caudales suministrados por cada uno de estos nudos son los que se indican en la siguiente tabla.

Tanda	Q_D (l/s)	Q_E (l/s)	Q_F (l/s)	Q_G (l/s)
1	120	70	0	0
2	0	0	80	60

Si se adopta para todas las tuberías un factor de fricción de valor constante e igual a 0,018, se pide determinar el diámetro que deberá tener cada una de las tuberías principales del sistema representado en la figura, aplicando el criterio de pendiente hidráulica uniforme.

Relación de diámetros comerciales disponibles: 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450 y 500 mm

SOLUCIÓN

Vamos a diseñar la red considerando el funcionamiento de la misma para cada una de las tandas de riego. De esta manera, para las líneas que transporten caudal en ambas tandas se adoptará el mayor de los diámetros calculados.

Para el caso de la primera tanda de riego los nudos de consumo son los D y E, con los caudales consumidos Q_D=120 l/s y Q_E=70 l/s. La pendiente hidráulica admisible entre el depósito de cabecera y cada uno de estos nudos será:

$$j_{AD} = \frac{Z_{DEP} - \left(Z_D + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BD}} = \frac{130 - (40 + 30)}{2500 + 600} = 1{,}94 \cdot 10^{-2} \ m/m$$

$$j_{AE} = \frac{Z_{DEP} - \left(Z_E + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BC} + L_{CE}} = \frac{130 - (60 + 30)}{2500 + 1500 + 900} = 8{,}16 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

La ruta crítica para esta primera tanda es la ABCE, el nudo crítico el E, y la pendiente hidráulica crítica j_{cr1}=8,16·10^{-3} m/m. El cálculo del diámetro para las líneas de esta ruta crítica será:

$$D_{AB} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{AB}^2}{\pi^2 g j_{cr1}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}19^2}{\pi^2 g \, 8{,}16 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}366 \ m$$

$$D_{BC} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{BC}^2}{\pi^2 g j_{cr1}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}07^2}{\pi^2 g \, 8{,}16 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}246 \ m$$

$$D_{CE} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{CE}^2}{\pi^2 g j_{cr1}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}07^2}{\pi^2 g \, 8{,}16 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}246 \ m$$

Respecto de la segunda tanda de riegos, los nudos de consumo son los F y G, con caudales consumidos Q_F=80 l/s y Q_G=60 l/s. Para este caso tendremos:

Pendiente hidráulica admisible para cada ruta de esta tanda

$$j_{AF} = \frac{Z_{DEP} - \left(Z_F + \dfrac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BF}} = \frac{130 - (55+30)}{2500+1000} = 1{,}29 \cdot 10^{-2} \ m/m$$

$$j_{AG} = \frac{Z_{DEP} - \left(Z_G + \dfrac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BC} + L_{CG}} = \frac{130 - (70+30)}{2500+1500+800} = 6{,}25 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

Ruta crítica de la segunda tanda ABCG y pendiente hidráulica crítica j_{cr2}=6,25·10^{-3} m/m.

Determinación de los diámetros de esta ruta

$$D_{AB} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{AB}^2}{\pi^2 g j_{cr2}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}14^2}{\pi^2 g \, 6{,}25 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}342 \ m$$

$$D_{BC} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{BC}^2}{\pi^2 g j_{cr2}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}06^2}{\pi^2 g \, 6{,}25 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}244 \ m$$

$$D_{CG} = \sqrt[5]{\frac{8 f Q_{CG}^2}{\pi^2 g j_{cr2}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}06^2}{\pi^2 g \, 6{,}25 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}244 \ m$$

El diámetro comercial de la línea AB se adoptará mayorando a partir del mayor de los diámetros obtenidos para esta línea en cada una de las tandas de riego. Así tenemos D_{AB}=400 mm. Según este mismo criterio obtendremos D_{BC}=250 mm.

Para las líneas CE y CG vamos a ver si se pueden minorar sus diámetros cumpliendo además con la presión mínima de suministro. Si tomamos D_{CE}=200 mm, para la primera tanda tendremos:

$$h_{AB} = \frac{8 f L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 2500}{\pi^2 g \, 0{,}4^5} 0{,}19^2 = 13{,}11 \ m$$

$$h_{BC} = \frac{8\,fL_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2 = \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 1500}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}07^2 = 11{,}19\ m$$

$$h_{CE} = \frac{8\,fL_{CE}}{\pi^2 g D_{CE}^5} Q_{CE}^2 = \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 900}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} 0{,}07^2 = 20{,}50\ m$$

y la presión en el nudo E,

$$\frac{p_E}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_E - h_{AB} - h_{BC} - h_{CE} = 130 - 60 - 13{,}11 - 11{,}19 - 20{,}50 = 25{,}20\ m$$

que no cumple con la presión mínima de suministro especificada. Por ello adoptaremos D_{CE}=250 mm, y tendremos

$$h_{CE} = \frac{8\,fL_{CE}}{\pi^2 g D_{CE}^5} Q_{CE}^2 = \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 900}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}07^2 = 6{,}72\ m$$

$$\frac{p_E}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_E - h_{AB} - h_{BC} - h_{CE} = 130 - 60 - 13{,}11 - 11{,}19 - 6{,}72 = 38{,}98\ m$$

la cual ya es mayor que presión mínima de suministro.

Para la línea CG adoptaremos inicialmente D_{CG}=200 mm y, de acuerdo con la segunda tanda de riegos, tenemos:

$$h_{AB} = \frac{8\,fL_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 = \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 2500}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} 0{,}14^2 = 7{,}12\ m$$

$$h_{BC} = \frac{8\,fL_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2 = \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 1500}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}06^2 = 8{,}22\ m$$

$$h_{CG} = \frac{8\,fL_{CG}}{\pi^2 g D_{CG}^5} Q_{CG}^2 = \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 800}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} 0{,}06^2 = 13{,}39\ m$$

Y la presión de suministro en el nudo G:

$$\frac{p_G}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_G - h_{AB} - h_{BC} - h_{CG} = 130 - 70 - 7{,}12 - 8{,}22 - 13{,}39 = 31{,}27\ m$$

la cual cumple con el valor mínimo impuesto.

Las líneas BD y BF se considerarán como ramales terminales, cada uno de ellos en referencia con la tanda de riego que sirve. Así, para la línea BD y la primera tanda tenemos:

$$h_{BD} = Z_{DEP} - Z_D - \frac{p_{\min}}{\gamma} - h_{AB} = \frac{8 f L_{BD}}{\pi^2 g D_{BD}^5} Q_{BD}^2$$

Dando valores a esta expresión tenemos

$$130 - 40 - 30 - 13'11 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 600}{\pi^2 g D_{BD}^5} 0{,}12^2$$

resultando D_{BD}=0,194 m. Si adoptamos el diámetro comercial D_{BD}=200 mm, la presión de suministro en el nudo D será

$$\frac{p_D}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_D - h_{AB} - \frac{8 f L_{BD}}{\pi^2 g D_{BD}^5} Q_{BD}^2 =$$

$$= 130 - 40 - 13{,}11 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 600}{\pi^2 g \cdot 0{,}2^5} 0{,}12^2 = 36{,}73\ \mathrm{m}$$

A su vez, para la línea BF y la segunda tanda,

$$h_{BF} = Z_{DEP} - Z_F - \frac{p_{\min}}{\gamma} - h_{AB} = \frac{8 f L_{BF}}{\pi^2 g D_{BF}^5} Q_{BF}^2$$

o, dando valores,

$$130 - 55 - 30 - 7{,}12 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1000}{\pi^2 g D_{BF}^5} 0{,}08^2$$

de donde obtenemos D_{BF}=0,191 m. Adoptaremos el diámetro comercial D_{BF}=200 mm, con lo que la presión en el nudo F será:

$$\frac{p_F}{\gamma} = Z_{DEP} - Z_F - h_{AB} - \frac{8\, f L_{BF}}{\pi^2 g D_{BF}^5} Q_{BF}^2 =$$

$$= 130 - 55 - 7{,}12 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1000}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} 0{,}08^2 = 38{,}13 \text{ m}$$

En resumen, los diámetros comerciales de las líneas, y las presiones de suministro en los nudos de consumo, serán los indicados en la tabla adjunta:

Línea	*D* (mm)
AB	400
BC	250
BD	200
CE	250
BF	200
CG	200

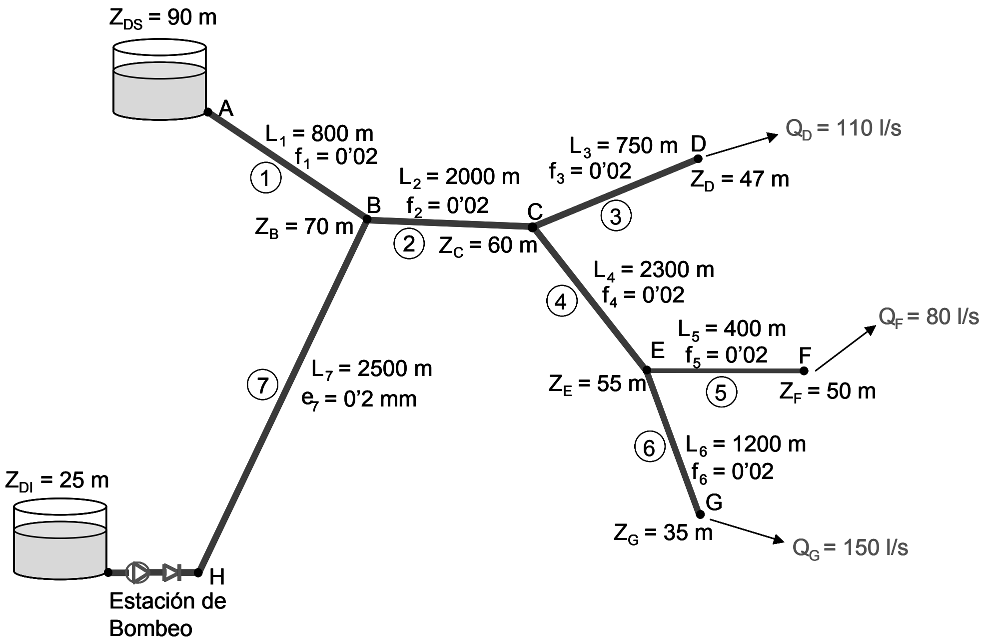
Nudo	Pres. (mca)
D	36,73
E	38,98
F	38,13
G	31,27

PROBLEMA III.4

Se pretende diseñar una red ramificada para la distribución de agua a tres puntos de consumo como se indica en la figura. El funcionamiento previsto de esta red será el siguiente:

Abastecimiento de los puntos de consumo con los caudales reflejados en la figura, durante 12 horas que incluyen las diurnas, estando la estación de bombeo parada y la red alimentándose desde el depósito superior.

Restablecimiento al depósito superior del volumen de agua abastecido durante las 12 horas de consumo. Ello se realizará con la estación de bombeo en marcha, durante 10 horas que incluyen las nocturnas, y en las cuales todos los consumos de la red serán nulos.



Con todo ello, y despreciando las pérdidas menores de la instalación, determinar:

a) **Diámetro que deberá tener cada una de las conducciones que abastecen los puntos de consumo (conducciones de la 1 a la 6) aplicando el criterio de pendiente hidráulica uniforme, si la presión mínima en los puntos de suministro es de 25 mca.**

b) **Caudal y altura que deberá proporcionar la bomba a instalar en la estación de bombeo, y que serán los datos necesarios para la elección de la bomba según información de catálogo. El diámetro de la conducción 7 se deberá calcular utilizando el criterio de Mougnie.**

Diámetros comerciales disponibles: 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 700, 800 y 900 mm.

Viscosidad cinemática del agua: 1,02· 10^{-6} m^2/s

SOLUCIÓN

a) El diseño de las conducciones 1 a 6 se llevará a cabo considerando los caudales abastecidos en las 8 horas diurnas. Para aplicar el criterio de pendiente hidráulica uniforme calcularemos primero la pendiente hidráulica admisible entre el depósito de cabecera y cada uno de los nodos de suministro.

$$j_{AD} = \frac{Z_{DS} - \left(Z_D + \frac{p_{\min}}{\gamma}\right)}{L_1 + L_2 + L_3} = \frac{90 - (47 + 25)}{800 + 2000 + 750} = 5{,}07 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

$$j_{AF} = \frac{Z_{DS} - \left(Z_F + \frac{p_{\min}}{\gamma}\right)}{L_1 + L_2 + L_4 + L_5} = \frac{90 - (50 + 25)}{800 + 2000 + 2300 + 400} = 2{,}73 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

$$j_{AG} = \frac{Z_{DS} - \left(Z_G + \frac{p_{\min}}{\gamma}\right)}{L_1 + L_2 + L_4 + L_6} = \frac{90 - (35 + 25)}{800 + 2000 + 2300 + 1200} = 4{,}76 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

Para el diseño, la ruta crítica es la AF, el nudo crítico el F, y la pendiente hidráulica crítica

$$j_{cr} = j_{AF} = 2{,}73 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

El diámetro de cada una de las líneas de la ruta crítica será:

$$D_1 = \sqrt[5]{\frac{8 f_1 Q_1^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}34^2}{\pi^2 g\, 2{,}73 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}588\ m$$

$$D_2 = \sqrt[5]{\frac{8 f_2 Q_2^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}34^2}{\pi^2 g\, 2{,}73 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}588\ m$$

$$D_4 = \sqrt[5]{\frac{8 f_4 Q_4^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}23^2}{\pi^2 g\, 2{,}73 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}503\ m$$

$$D_5 = \sqrt[5]{\frac{8 f_5 Q_5^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}08^2}{\pi^2 g \, 2{,}73 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}329 \; m$$

Los diámetros comerciales que tomaremos para cada una de estas líneas serán

$$D_1 = D_2 = 600 \; mm \;\; ; \;\; D_4 = 500 \; mm \;\; ; \;\; D_5 = 350 \; mm$$

Al haber minorado el diámetro D_4 deberemos comprobar la presión de suministro en el nudo F. Con estos diámetros, las pérdidas de cada una de las líneas de la ruta crítica serán:

$$h_1 = \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} Q_1^2 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 800}{\pi^2 g \, 0{,}6^5} 0{,}34^2 = 1{,}97 \; m$$

$$h_2 = \frac{8 f_2 L_2}{\pi^2 g D_2^5} Q_2^2 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 2000}{\pi^2 g \, 0{,}6^5} 0{,}34^2 = 4{,}91 \; m$$

$$h_4 = \frac{8 f_4 L_4}{\pi^2 g D_4^5} Q_4^2 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 2300}{\pi^2 g \, 0{,}5^5} 0{,}23^2 = 6{,}43 \; m$$

$$h_5 = \frac{8 f_5 L_5}{\pi^2 g D_5^5} Q_5^2 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 400}{\pi^2 g \, 0{,}35^5} 0{,}08^2 = 0{,}81 \; m$$

y la presión en el nudo F,

$$\frac{p_F}{\gamma} = Z_{DS} - Z_F - h_1 - h_2 - h_4 - h_5 =$$

$$= 90 - 50 - 1{,}97 - 4{,}91 - 6{,}43 - 0{,}81 = 25{,}88 \; m$$

presión de suministro mayor que la mínima admisible.

Nos quedan por diseñar las líneas 3 y 6 como ramales terminales. La altura piezométrica del nudo C será

$$H_C = Z_{DS} - h_1 - h_2 = 90 - 1{,}97 - 4{,}91 = 83{,}12 \; m$$

Las pérdidas admisibles en la línea 3, considerando que en el nudo D la presión vaya a ser la mínima de suministro, será:

$$h_3 = H_C - Z_D - \frac{p_{min}}{\gamma} = \frac{8 f_3 L_3}{\pi^2 g D_3^5} Q_3^2$$

y dando valores

$$83{,}12 - 47 - 25 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 750}{\pi^2 g D_3^5} 0{,}11^2$$

De aquí resulta D_3=0,267 m. Mayorando este diámetro, adoptaremos D_3=300 mm, y la presión de suministro del nudo D será:

$$\frac{p_D}{\gamma} = H_C - Z_D - \frac{8 f_3 L_3}{\pi^2 g D_3^5} Q_3^2 = 83{,}12 - 47 - \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 750}{\pi^2 g 0{,}3^5} 0{,}11^2 = 29{,}95 \ m$$

Para la línea 6, y aplicando el mismo procedimiento de cálculo, tendremos:

$$H_E = H_C - h_4 = 83{,}12 - 6{,}43 = 76{,}69 \ m$$

$$h_6 = H_E - Z_G - \frac{p_{min}}{\gamma} = \frac{8 f_6 L_6}{\pi^2 g D_6^5} Q_6^2$$

$$76{,}69 - 35 - 25 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 1200}{\pi^2 g D_6^5} 0{,}15^2$$

De aquí resulta D_6=0,305 m, el cual se mayora al valor D_6=350 mm. Con ello, la presión en el nudo G será:

$$\frac{p_G}{\gamma} = H_E - Z_G - \frac{8 f_6 L_6}{\pi^2 g D_6^5} Q_6^2 = 76{,}69 - 35 - \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 1200}{\pi^2 g 0{,}35^5} 0{,}15^2 = 33{,}19 \ m$$

En la tabla adjunta se indican los diámetros comerciales de las líneas diseñadas y la presión en cada nudo de suministro.

Línea	D (mm)
1	600
2	600
3	300
4	500
5	350
6	350

Nudo	Pres. (mca)
D	29,95
F	25,88
G	33,19

b) El volumen de agua distribuido en las 12 horas de consumo será

$$\forall = Q_1 t_d = 0{,}34 \cdot 12 \cdot 3600 = 14688\ m^3$$

y para reponer al depósito superior este volumen en las 10 horas de bombeo, el caudal impulsado por la bomba deberá ser de

$$Q_b = \frac{\forall}{t_b} = \frac{14688}{10 \cdot 3600} = 0{,}408\ m^3/s$$

el cual será el mismo que circule por la línea 7 durante el período de bombeo.

Para el diseño de la línea 7 se aplicará el criterio de Mougnie, el cual nos indica la velocidad máxima del agua, o el caudal máximo de agua, por el interior de una conducción de diámetro D. Las expresiones correspondientes a este criterio son:

$$V_{máx} = 1{,}5\sqrt{D+0{,}05} \quad ; \quad Q_{máx} = \frac{\pi D^2}{4} 1{,}5\sqrt{D+0{,}05}$$

Aplicando la fórmula del caudal máximo a diferentes diámetros comerciales, se obtienen los resultados indicados en la tabla adjunta.

D_{com} (mm)	$Q_{máx}$ (m^3/s)
550	0,276
600	0,342
700	0,500
800	0,695

A partir de esta tabla podemos observar que, para transportar por la línea 7 un caudal de 0,408 m^3/s, se necesita en esta línea un diámetro de 700 mm. Así, $D_7 = 700$ mm.

El factor de fricción de la línea 7 se obtendrá a partir del diagrama de Moody,

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}_7 = \dfrac{4Q_7}{\pi D_7 \nu} = \dfrac{4 \cdot 0{,}408}{\pi \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-6}} = 7{,}27 \cdot 10^5 \\ \varepsilon_{r7} = \dfrac{\varepsilon_7}{D_7} = \dfrac{0{,}2}{700} = 2{,}9 \cdot 10^{-4} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f_7 = 0{,}016$$

Y ahora, aplicando el teorema de Bernoulli entre los depósitos inferior y superior,

$$Z_{DI} + H_b = Z_{DS} + \left(\frac{8 f_7 L_7}{\pi^2 g D_7^5} + \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} \right) Q_b^2$$

obtendremos la altura de deberá dar la bomba,

$$H_b = Z_{DS} - Z_{DI} + \left(\frac{8 f_7 L_7}{\pi^2 g D_7^5} + \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} \right) Q_b^2 =$$

$$= 90 - 25 + \left(\frac{8 \cdot 0{,}016 \cdot 2500}{\pi^2 g\, 0{,}7^5} + \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 800}{\pi^2 g\, 0{,}6^5} \right) 0{,}408^2 = 71{,}10\ m$$

Luego el punto de funcionamiento de la bomba para su elección en catálogo será

$$Q_b = 0{,}408\ m^3/s = 1468{,}8\ m^3/h$$

$$H_b = 71{,}10\ m$$

PROBLEMA III.5

La red ramificada representada en la figura se va a utilizar para el abastecimiento de agua a tres puntos de consumo. Esta red se alimenta por medio de un depósito inferior, a la cota 15 m, desde el que aspira una bomba que impulsa el agua al sistema y cuya curva característica es:

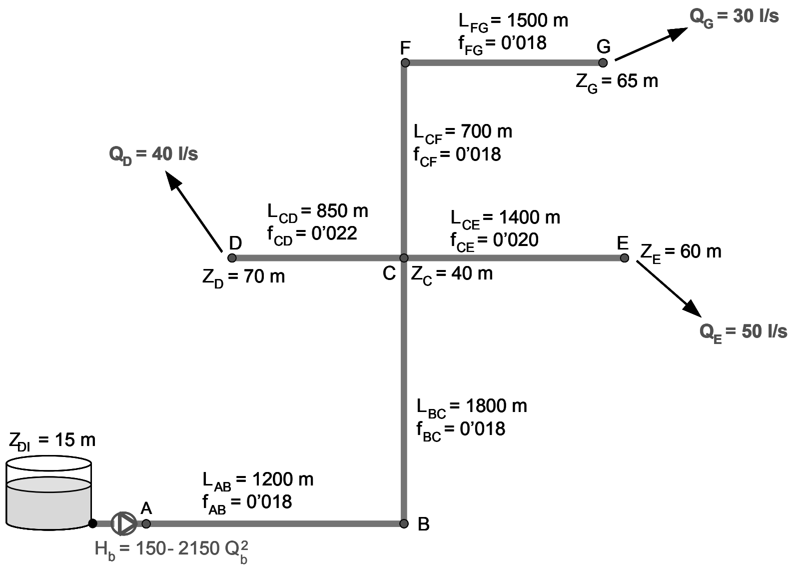
$$H_b = 150 - 2150\, Q_b^2 \qquad (H_b = \text{m},\; Q_b = \text{m}^3/\text{s})$$

Para las características del sistema y los caudales de consumo indicados en la figura, y admitiendo que la presión mínima en los puntos de suministro es de 30 mca, determinar:

a) **Diámetros que deberán tener las tuberías aplicando el criterio de la pendiente hidráulica uniforme.**

b) **Si se desea que la velocidad máxima del agua por las tuberías sea de 1,50 m/s, ¿se deberán modificar algunos de los diámetros determinados en el apartado anterior? ¿Cuáles serían los diámetros definitivos en este caso?**

Diámetros comerciales disponibles: 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450 y 500 mm.



SOLUCIÓN

a) El punto de funcionamiento de la bomba que alimenta la red será:

$$Q_b = Q_D + Q_E + Q_G = 40 + 50 + 30 = 120\ l/s$$

$$H_b = 150 - 2150 Q_b^2 = 150 - 2150 \cdot 0{,}12^2 = 119{,}04\ m$$

Siendo el nudo A el nudo de cabecera de la red, su altura piezométrica vale:

$$H_A = Z_{DI} + H_b = 15 + 119{,}04 = 134{,}04\ m$$

Para el diseño de la red por el método de la pendiente hidráulica uniforme necesitamos conocer la pendiente hidráulica admisible de cada una de las rutas que unen el nudo de cabecera con los nudos de consumo. Tendremos

$$j_{AD} = \frac{H_A - \left(Z_D + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BC} + L_{CD}} = \frac{134{,}04 - (70 + 30)}{1200 + 1800 + 850} = 8{,}84 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

$$j_{AE} = \frac{H_A - \left(Z_E + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BC} + L_{CE}} = \frac{134{,}04 - (60 + 30)}{1200 + 1800 + 1400} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ m/m$$

$$j_{AG} = \frac{H_A - \left(Z_G + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right)}{L_{AB} + L_{BC} + L_{CF} + L_{FG}} =$$

$$= \frac{134{,}04 - (65 + 30)}{1200 + 1800 + 700 + 1500} = 7{,}51 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

La ruta crítica será la que va del nudo A al nudo G, y la pendiente hidráulica crítica $j_{cr} = j_{AG} = 751 \cdot 10^{-3}\,\text{m/m}$. Para calcular el diámetro de las líneas de esta ruta crítica tenemos:

$$D_{ABC} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{ABC} Q_{ABC}^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}12^2}{\pi^2 g\, 7{,}51 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}310\ m$$

$$D_{CFG} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{CFG} Q_{CFG}^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}03^2}{\pi^2 g\, 7{,}51 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}178\ m$$

Para los tramos AB y BC se adoptará el diámetro comercial inmediatamente superior, D_{AB}=D_{BC}=350 mm, y para los tramos CF y FG tomaremos el inmediatamente inferior, D_{CF}=D_{FG}=175 mm. Pero al haber minorado estos últimos tramos se hace necesario calcular la presión de suministro en el nudo G, y comprobar que es igual o mayor que el valor mínimo permitido.

Las pérdidas de carga en cada una de las líneas de la ruta crítica serán:

$$h_{ABC} = \frac{8 f_{ABC} L_{ABC}}{\pi^2 g D_{ABC}^5} Q_{ABC}^2 = \frac{8 \cdot 0'018 \cdot (1200+1800)}{\pi^2 g\, 0{,}35^5} 0{,}12^2 = 12{,}23\ m$$

$$h_{CFG} = \frac{8 f_{CFG} L_{CFG}}{\pi^2 g D_{CFG}^5} Q_{CFG}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot (700+1500)}{\pi^2 g\, 0{,}175^5} 0{,}03^2 = 17{,}94\ m$$

y la presión de suministro en el nudo G:

$$\frac{p_G}{\gamma} = H_A - Z_G - h_{ABC} - h_{CFG} = 134{,}04 - 65 - 12{,}23 - 17{,}94 = 38{,}87\ m$$

mayor que el valor mínimo permitido.

Las líneas CD y CE las dimensionaremos como ramales terminales. Para ello necesitaremos saber la altura piezométrica del nudo C, la cual será:

$$H_C = H_A - h_{ABC} = 134{,}04 - 12{,}23 = 121{,}81\ m$$

Para el tramo CD:

$$H_C = Z_D + \frac{p_{\min}}{\gamma} + \frac{8 f_{CD} L_{CD}}{\pi^2 g D_{CD}^5} Q_{CD}^2 \quad ; \quad 121{,}81 = 70 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}022 \cdot 850}{\pi^2 g D_{CD}^5} 0{,}04^2$$

de donde obtenemos D_{CD}=0,163 m. Adoptaremos el diámetro comercial D_{CD}=175 mm.

Para el tramo CE:

$$H_C = Z_E + \frac{p_{\min}}{\gamma} + \frac{8 f_{CE} L_{CE}}{\pi^2 g D_{CE}^5} Q_{CE}^2 \quad ; \quad 121{,}81 = 60 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 1400}{\pi^2 g D_{CE}^5} 0{,}05^2$$

resultando D_{CE}=0,179m y adoptando el diámetro comercial D_{CE}=200 mm.

Con estos diámetros comerciales, las presiones de suministro en los nudos D y E serán:

$$h_{CD} = \frac{8 f_{CD} L_{CD}}{\pi^2 g D_{CD}^5} Q_{CD}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}022 \cdot 850}{\pi^2 g\, 0{,}175^5} 0{,}04^2 = 15{,}06\ m$$

$$h_{CE} = \frac{8 f_{CE} L_{CE}}{\pi^2 g D_{CE}^5} Q_{CE}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 1400}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} 0{,}05^2 = 18{,}07\ m$$

$$\frac{p_D}{\gamma} = H_C - Z_D - h_{CD} = 121{,}81 - 70 - 15{,}06 = 36{,}75\ m$$

$$\frac{p_E}{\gamma} = H_C - Z_E - h_{CE} = 121{,}81 - 60 - 18{,}07 = 43{,}74\ m$$

siendo estas presiones mayores que la mínima de suministro.

b) Con el criterio de velocidad máxima por las tuberías de 1,5 m/s, el diámetro de cada una de ellas debería ser:

$$D_{ABC} = \sqrt{\frac{4 Q_{ABC}}{\pi V_{\max}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}12}{\pi \cdot 1{,}5}} = 0{,}319\ m$$

$$D_{CFG} = \sqrt{\frac{4 Q_{CFG}}{\pi V_{\max}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}03}{\pi \cdot 1{,}5}} = 0{,}160\ m$$

$$D_{CD} = \sqrt{\frac{4 Q_{CD}}{\pi V_{\max}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}04}{\pi \cdot 1{,}5}} = 0{,}184\ m$$

$$D_{CE} = \sqrt{\frac{4 Q_{CE}}{\pi V_{\max}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 1{,}5}} = 0{,}206\ m$$

Luego habrá que aumentar el diámetro de las líneas CD y CE, pasando a los valores comerciales D_{CD}=200 mm y D_{CE}=250 mm. En definitiva, las velocidades de circulación del agua por cada una de las líneas será:

$$V_{ABC} = \frac{4Q_{ABC}}{\pi D_{ABC}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}12}{\pi \cdot 0{,}35^2} = 1{,}25\ m/s$$

$$V_{CFG} = \frac{4Q_{CFG}}{\pi D_{CFG}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}03}{\pi \cdot 0{,}175^2} = 1{,}25\ m/s$$

$$V_{CD} = \frac{4Q_{CD}}{\pi D_{CD}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}04}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 1{,}27\ m/s$$

$$V_{CE} = \frac{4Q_{CE}}{\pi D_{CE}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 0{,}25^2} = 1{,}02\ m/s$$

Al haber aumentado el diámetro de las líneas CD y DE, las presiones de suministro en los nudos D y E habrán aumentado también. Con estos nuevos diámetros tendremos:

$$h_{CD} = \frac{8 f_{CD} L_{CD}}{\pi^2 g D_{CD}^5} Q_{CD}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}022 \cdot 850}{\pi^2 g\, 0{,}2^5} 0{,}04^2 = 7{,}73\ m$$

$$h_{CE} = \frac{8 f_{CE} L_{CE}}{\pi^2 g D_{CE}^5} Q_{CE}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 1400}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}05^2 = 5{,}92\ m$$

$$\frac{p_D}{\gamma} = H_C - Z_D - h_{CD} = 121{,}81 - 70 - 7{,}73 = 44{,}08\ m$$

$$\frac{p_E}{\gamma} = H_C - Z_E - h_{CE} = 121{,}81 - 60 - 5{,}92 = 55{,}89\ m$$

Como resumen, en las tablas adjuntas se indica el dimensionado definitivo de la red y las condiciones de funcionamiento de la misma.

Línea	D (mm)	V (m/s)
AB	350	1,25
BC	350	1,25
CD	200	1,27
CE	250	1,02
CF	175	1,25
FG	175	1,25

Nudo	Pres. (mca)
D	44,08
E	55,89
G	38,87

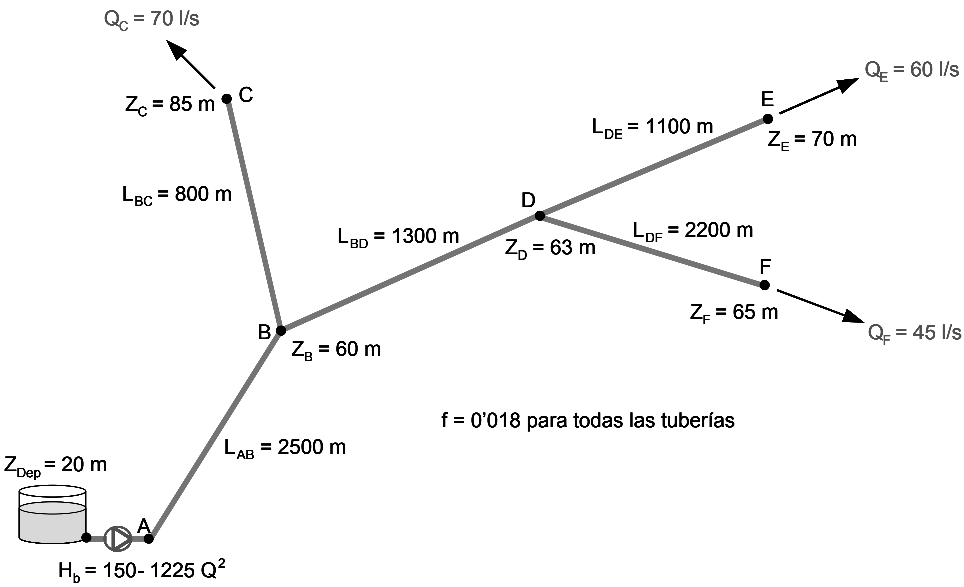
PROBLEMA III.6

La red ramificada representada en la figura se va a utilizar para el abastecimiento de agua a tres puntos de consumo. Esta red se alimenta por medio de un depósito inferior, a la cota 20m, desde el que aspira una bomba que impulsa el agua al sistema y cuya curva característica es:

$$H_b = 150 - 1225\ Q^2 \qquad (H_b = \mathrm{m},\ \ Q = \mathrm{m^3/s})$$

Para las características del sistema y los caudales de consumo indicados en la figura, y admitiendo que la presión mínima en los puntos de suministro es de 30mca, determinar el diámetro que deberá tener cada una de las tuberías aplicando el criterio de la pendiente hidráulica uniforme.

Diámetros comerciales disponibles: 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450 y 500 mm.



SOLUCIÓN

El caudal total abastecido por el depósito es el que circula por la línea AB, el cual será:

$$Q_{AB} = Q_C + Q_E + Q_F = 70 + 60 + 45 = 175 \quad l/s$$

Tomando el nudo A como nudo de cabecera de la red, la altura piezométrica del mismo será:

$$H_A = Z_{Dep} + H_b(Q_{AB}) = 20 + \left(150 - 1225 \cdot 0{,}175^2\right) = 132{,}48 \ m$$

Para determinar la primera ruta crítica, tendremos:

$$j_{AC} = \frac{H_A - \left(Z_C + \frac{p_{mín}}{\gamma}\right)}{L_{AB} + L_{BC}} = \frac{132{,}48 - (85 + 30)}{2500 + 800} = 5{,}298 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

$$j_{AE} = \frac{H_A - \left(Z_E + \frac{p_{mín}}{\gamma}\right)}{L_{AB} + L_{BD} + L_{DE}} = \frac{132{,}48 - (70 + 30)}{2500 + 1300 + 1100} = 6{,}629 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

$$j_{AF} = \frac{H_A - \left(Z_F + \frac{p_{mín}}{\gamma}\right)}{L_{AB} + L_{BD} + L_{DF}} = \frac{132{,}48 - (65 + 30)}{2500 + 1300 + 2200} = 6{,}247 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

La primera ruta crítica será la AC, con $j_{cr1}=j_{AC}=5{,}298 \cdot 10^{-3}$ m/m. Vamos a calcular el diámetro de cada una de las líneas de esta ruta crítica,

$$D_{AB} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{AB} Q_{AB}^2}{\pi^2 g\, j_{cr1}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}175^2}{\pi^2 g\, 5{,}298 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}386 \ m$$

$$D_{BC} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{BC} Q_{BC}^2}{\pi^2 g j_{cr1}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}07^2}{\pi^2 g\, 5{,}298 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}268 \ m$$

Para la línea AB se tomará el diámetro mayorado D_{AB}=400 mm. Si se minora el diámetro de la tubería BC y se toma D_{BC}=250 mm, calcularemos la presión en el nudo de suministro C para comprobar si esta presión es mayor que la mínima.

Con los diámetros indicados, las pérdidas en cada una de las líneas de la ruta AC serán:

$$h_{AB} = \frac{8 f_{AB} L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 2500}{\pi^2 g\, 0{,}4^5} 0{,}175^2 = 11{,}12\ m$$

$$h_{BC} = \frac{8 f_{BC} L_{BC}}{\pi^2 g D_{BC}^5} Q_{BC}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 800}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}07^2 = 5{,}97\ m$$

y la presión en el nudo C,

$$\frac{p_C}{\gamma} = H_A - Z_C - h_{AB} - h_{BC} = 132{,}48 - 85 - 11{,}12 - 5{,}97 = 30{,}39\ m$$

mayor que la presión mínima en los nudos de suministro.

Buscaremos una segunda ruta crítica a partir del nudo B tomado como cabecera. La altura piezométrica de este nudo será:

$$H_B = H_A - h_{AB} = 132{,}48 - 11{,}12 = 121{,}36\ m$$

y la pendiente hidráulica admisible de cada una de las rutas que salen del nudo B,

$$j_{BE} = \frac{H_B - \left(Z_E + \frac{p_{mín}}{\gamma}\right)}{L_{BD} + L_{DE}} = \frac{121{,}36 - (70 + 30)}{1300 + 1100} = 8{,}90 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

$$j_{BF} = \frac{H_B - \left(Z_F + \frac{p_{mín}}{\gamma}\right)}{L_{BD} + L_{DF}} = \frac{121{,}36 - (65 + 30)}{1300 + 2200} = 7{,}531 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

La segunda ruta crítica será la BF, con $j_{cr2}=j_{BF}=7{,}531\cdot10^{-3}$ m/m. El diámetro de cada una de las tuberías de esta ruta se calculará como

$$D_{BD}=\sqrt[5]{\frac{8f_{BD}Q_{BD}^2}{\pi^2 g j_{cr2}}}=\sqrt[5]{\frac{8\cdot 0{,}018\cdot 0{,}105^2}{\pi^2 g\, 7{,}531\cdot 10^{-3}}}=0{,}293\ m$$

$$D_{DF}=\sqrt[5]{\frac{8f_{DF}Q_{DF}^2}{\pi^2 g j_{cr2}}}=\sqrt[5]{\frac{8\cdot 0{,}018\cdot 0{,}045^2}{\pi^2 g\, 7{,}531\cdot 10^{-3}}}=0{,}209\ m$$

Tomaremos D_{BD} =300 mm y D_{DF} =200 mm. Con estos diámetros, las pérdidas en las correspondientes líneas serán

$$h_{BD}=\frac{8f_{BD}L_{BD}}{\pi^2 g D_{BD}^5}Q_{BD}^2=\frac{8\cdot 0{,}018\cdot 1300}{\pi^2 g\, 0{,}3^5}0{,}105^2=8{,}77\ m$$

$$h_{DF}=\frac{8f_{DF}L_{DF}}{\pi^2 g D_{DF}^5}Q_{DF}^2=\frac{8\cdot 0{,}018\cdot 2200}{\pi^2 g\, 0{,}2^5}0{,}045^2=20{,}71\ m$$

y la presión en el nudo F

$$\frac{p_F}{\gamma}=H_B-Z_F-h_{BD}-h_{DF}=121{,}36-65-8{,}77-20{,}71=26{,}88\ m$$

Al minorar el diámetro de la tubería DF la presión del nudo F resulta menor que la mínima en nudos de suministro. Por ello tomaremos D_{DF}=250 mm, siendo ahora las pérdidas en esta línea,

$$h_{DF}=\frac{8f_{DF}L_{DF}}{\pi^2 g D_{DF}^5}Q_{DF}^2=\frac{8\cdot 0{,}018\cdot 2200}{\pi^2 g\, 0{,}25^5}0{,}045^2=6{,}78\ m$$

y para el nudo F,

$$\frac{p_F}{\gamma}=H_B-Z_F-h_{BD}-h_{DF}=121{,}36-65-8{,}77-6{,}78=40{,}81\ m$$

la cual está por encima de la presión mínima.

Para el diseño de la línea DE como ramal terminal, la altura piezométrica en el nudo D será,

$$H_D = H_B - h_{BD} = 121{,}36 - 8{,}77 = 112{,}59\ m$$

y aplicando el teorema de Bernoulli entre los nudos D y E

$$H_D = Z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{8 f_{DE} L_{DE}}{\pi^2 g D_{DE}^5} Q_{DE}^2$$

Como la presión en el nudo E deberá ser al menos la mínima en nudos de suministro, de la expresión anterior tenemos:

$$112{,}59 = 70 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1100}{\pi^2 g D_{DE}^5} 0{,}06^2$$

De donde resulta D_{DE}=0,216m. Al ser la línea DE un ramal terminal, este diámetro no se puede minorar; por ello adoptaremos D_{DE}=250 mm. Así, la presión de suministro en el nudo E será:

$$\frac{p_E}{\gamma} = H_D - Z_E - \frac{8 f_{DE} L_{DE}}{\pi^2 g D_{DE}^5} Q_{DE}^2 =$$

$$= 112{,}59 - 70 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1100}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}06^2 = 36{,}56\ m$$

superior a la mínima exigida.

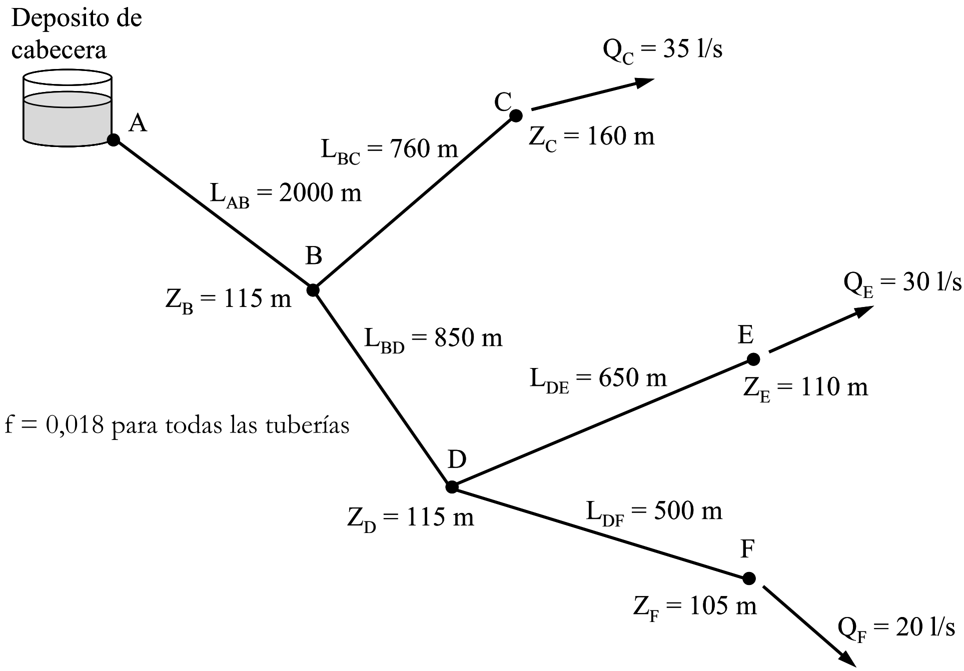
En resumen, los diámetros de las líneas y las presiones en los nudos de suministro serán los que se indican en las tablas adjuntas.

Línea	*D* (mm)
AB	400
BC	250
BD	300
DE	250
DF	250

Nudo	Pres. (mca)
C	30,39
E	36,56
F	40,81

PROBLEMA III.7

Para el abastecimiento de agua a tres puntos de consumo se pretende diseñar la red ramificada mostrada en la figura. Esta red se va a alimentar desde un depósito de cabecera cuya cota está aún por determinar, siendo conocidas las longitudes de tuberías, las cotas de los nudos de la red (excepto el A), los caudales de diseño y el factor de fricción de las tuberías (valores indicados en la figura). Para un funcionamiento correcto del sistema de abastecimiento, la presión mínima en cada uno de los puntos de consumo deberá ser de 30 mca.



Con todo ello, se pide determinar:

a) **Diámetro que deberá tener cada una de las tuberías del sistema aplicando el criterio de Mougnie.**

b) **Cota a la que deberá instalarse el depósito de cabecera para disponer en los puntos de consumo de una presión mínima de 30 mca.**

c) Si durante la fase de proyecto el ayuntamiento remite una disposición indicando que el depósito no se puede instalar a una cota superior a 150 m, ¿qué dispositivo se deberá añadir a la red para tener en los puntos de consumo la presión mínima de 30 mca? Indicar en qué tubería de la red, y junto a qué nudo, se deberá instalar este dispositivo para no afectar innecesariamente a las zonas que tienen suficiente presión. ¿Podrá funcionar el dispositivo con estas presiones?

Diámetros comerciales de tuberías: 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400 y 450 mm.

SOLUCIÓN

a) Para calcular el diámetro de las tuberías del sistema utilizaremos la Fórmula de Mougnie:

$$V_{máx} = 1{,}5\sqrt{D+0{,}05} \quad ; \quad Q_{máx} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot 1{,}5\sqrt{D+0{,}05}$$

La segunda de estas fórmulas, aplicada a los diámetros comerciales, proporciona los caudales máximos indicados en la siguiente tabla:

D (mm)	$Q_{máx}$ (l/s)
150	11,85
175	17,11
200	23,56
250	40,33
300	62,73
350	91,27
400	126,45
450	168,69

A partir de esta tabla, los diámetros comerciales a instalar en el sistema serán:

Línea	Q (l/s)	D (mm)	V (m/s)
AB	85	350	0,88
BC	35	250	0,71
BD	50	300	0,71
DE	30	250	0,61
DF	20	200	0,64

b) Las pérdidas de carga en cada tubería se calculan mediante la siguiente expresión:

$$h_f = \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} Q^2$$

Las pérdidas para cada tubería serán:

Línea	h_f (m)
AB	4,09
BC	1,42
BD	1,30
DE	0,89
DF	0,93

Para garantizar la presión mínima en cada nudo de consumo el nivel del agua en el depósito de cabecera deberá ser:

Nodo C:

$$Z_{Dep} = Z_C + \frac{p_{mín}}{\gamma} + h_{fAB} + h_{fBC} = 160 + 30 + 4{,}09 + 1{,}42 = 195{,}51\ m$$

Nodo E:

$$Z_{Dep} = Z_E + \frac{p_{mín}}{\gamma} + h_{fAB} + h_{fBD} + h_{fDE} = 110 + 30 + 4{,}09 + 1{,}30 + 0{,}89 = 146{,}28\ m$$

Nodo F:

$$Z_{Dep} = Z_F + \frac{p_{mín}}{\gamma} + h_{fAB} + h_{fBD} + h_{fDF} = 105 + 30 + 4{,}09 + 1{,}30 + 0{,}93 = 141{,}32\ m$$

El nivel de agua en el depósito deberá estar como mínimo a la cota 195,51 m.

c) Con una cota de 150 m en el depósito de cabecera, los nudos de consumo E y F tendrán suficiente presión, pero el nodo C no. Por ello habrá que instalar una bomba entre el depósito y el nodo C. Y para no afectar a los nodos E y F, la bomba se instalará en la tubería BC.

El punto de funcionamiento de la bomba será:

$$Q_B = Q_C = 35\, l/s$$

$$H_b = Z_C + \frac{p_{mín}}{\gamma} + h_{fAB} + h_{fBC} - Z_{Dep} = 160 + 30 + 4{,}09 + 1{,}42 - 150 = 45{,}51\ m$$

Si la bomba se instala junto al nudo B, las presiones de entrada y de salida serán:

$$\frac{p_{ent}}{\gamma} = Z_{Dep} + h_{fAB} - Z_B = 150 - 4{,}09 - 115 = 30{,}91\ m$$

$$\frac{p_{sal}}{\gamma} = \frac{p_{ent}}{\gamma} + H_B = 30{,}91 + 45{,}51 = 76{,}42\ m$$

Si la bomba se instala junto al nudo C, tenemos:

$$\frac{p_{ent}}{\gamma} = Z_{Dep} - h_{fAB} - h_{fBC} - Z_C = 150 - 4{,}09 - 1{,}42 - 160 = -15{,}51\ m$$

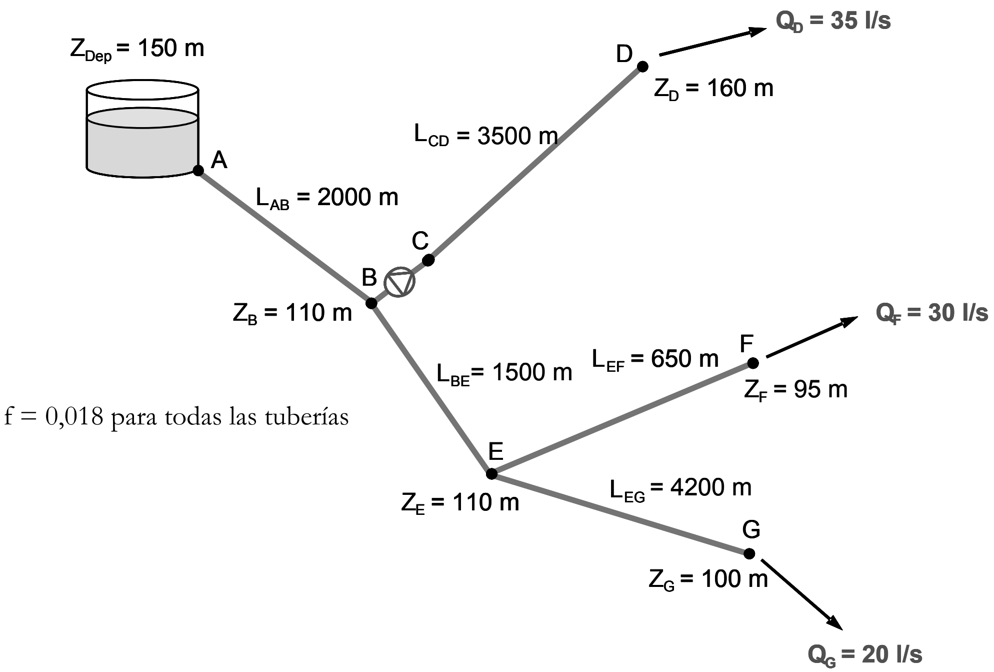
$$\frac{p_{sal}}{\gamma} = \frac{p_{ent}}{\gamma} + H_B = -15{,}51 + 45{,}51 = 30\ m$$

La bomba no se puede instalar junto al nudo C por cuestiones de cavitación y porque no puede tener una presión de entrada menor que el cero absoluto. Se instalará por tanto junto al nudo B.

PROBLEMA III.8

La red ramificada representada en la figura se va a utilizar para el abastecimiento de agua a tres puntos de consumo. Como esta red se alimenta de un depósito a la cota 150 m, y uno de los puntos de consumo, el D, está situado a la cota 160 m, entre los puntos B y C se hace necesario instalar una bomba sobrepresora cuya curva característica es:

$$\mathbf{H_b = 95 - 24490\ Q^2 \qquad (H_b = m,\ \ Q = m^3/s)}$$



Para las características del sistema y los caudales de consumo indicados en la figura, y admitiendo que la presión mínima de suministro en los puntos de consumo es de 40 mca, determinar:

a) **Diámetro que deberá tener cada una de las tuberías aplicando el criterio de Mougnie.**

b) **Con los diámetros obtenidos en el apartado anterior, presión de suministro en cada uno de los puntos de consumo.**

c) Si en alguno de los puntos de consumo la presión de suministro es menor de 40 mca, recalcular los diámetros de las rutas que van desde el depósito hasta cada uno de esos puntos aplicando el criterio de pendiente hidráulica uniforme.

Diámetros comerciales disponibles: 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400 y 450 mm

SOLUCIÓN

a) Fórmula de Mougnie:

$$V_{max} = 1{,}5 \cdot \sqrt{D + 0{,}05} \quad ; \quad Q_{max} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{D + 0{,}05}$$

Para cada diámetro comercial tenemos:

D (mm)	$Q_{máx}$ (l/s)
150	11,85
175	17,11
200	23,56
250	40,33
300	62,73
350	91,27
400	126,45
450	168,69

Y así el diámetro de cada tramo será:

Línea	Q (l/s)	*D* (mm)
AB	85	350
BE	50	300
CD	35	250
EF	30	250
EG	20	200

b) Pérdidas en cada tramo:

$$h_{f_i} = \frac{8\,fL_i}{\pi^2 g D_i^5} Q_i^2$$

Línea	h_f (m)
AB	4,09
BE	2,30
CD	6,53
EF	3,43
EG	7,81

La altura que dará la bomba será:

$$H_b = 95 - 24490\, Q_{BC}^2 = 95 - 24490\, 0{,}035^2 = 65\, mca$$

La presión en cada punto de suministro será:

$$\frac{p_D}{\gamma} = Z_{Dep} + H_b - h_{AB} - h_{CD} - Z_D = 150 + 65 - 4{,}09 - 6{,}53 - 160 = 44{,}38\ m$$

$$\frac{p_F}{\gamma} = Z_{Dep} - h_{AB} - h_{BE} - h_{EF} - Z_F = 150 - 4{,}09 - 2{,}30 - 3{,}43 - 95 = 45{,}18\ m$$

$$\frac{p_G}{\gamma} = Z_{Dep} - h_{AB} - h_{BE} - h_{EG} - Z_G = 150 - 4{,}09 - 2{,}30 - 7{,}81 - 100 = 35{,}80\ m$$

c) Las presiones en los puntos D y F son correctas, pero no en el punto G.

Habrá que recalcular los diámetros de la ruta AG utilizando el método de la pendiente hidráulica uniforme.

$$j_{AG} = \frac{z_{dep} - (z_G + \frac{p_{mín}}{\gamma})}{\sum_{A-G} L} = \frac{150 - (100 + 40)}{2000 + 1500 + 4200} = 1{,}30\, 10^{-3}\, m/m$$

Y el diámetro necesario para cada tramo de la ruta será:

$$D_{AB} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}85^2}{\pi^2 \cdot g \cdot 1{,}30 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}383\, m$$

$$D_{BE} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}05^2}{\pi^2 \cdot g \cdot 1{,}30 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}310\, m$$

$$D_{EG} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}02^2}{\pi^2 \cdot g \cdot 1{,}30 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}215\, m$$

Si se mayoran las tuberías AB y BE, y se minora la tubería EG, tenemos:

$$D_{AB} = 400\, mm \quad ; \quad D_{BE} = 350\, mm \quad ; \quad D_{EG} = 200\, mm$$

Y la presión en G resulta:

$$\frac{p_G}{\gamma} = 150 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 2000}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}4^5} \cdot 0{,}085^2 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1500}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}35^5} \cdot 0{,}05^2 - 7{,}81 - 100 = 39{,}03\, mca$$

No se puede minorar el tramo BE. Por eso, este tramo queda:

$$D_{EG} = 250\, mm$$

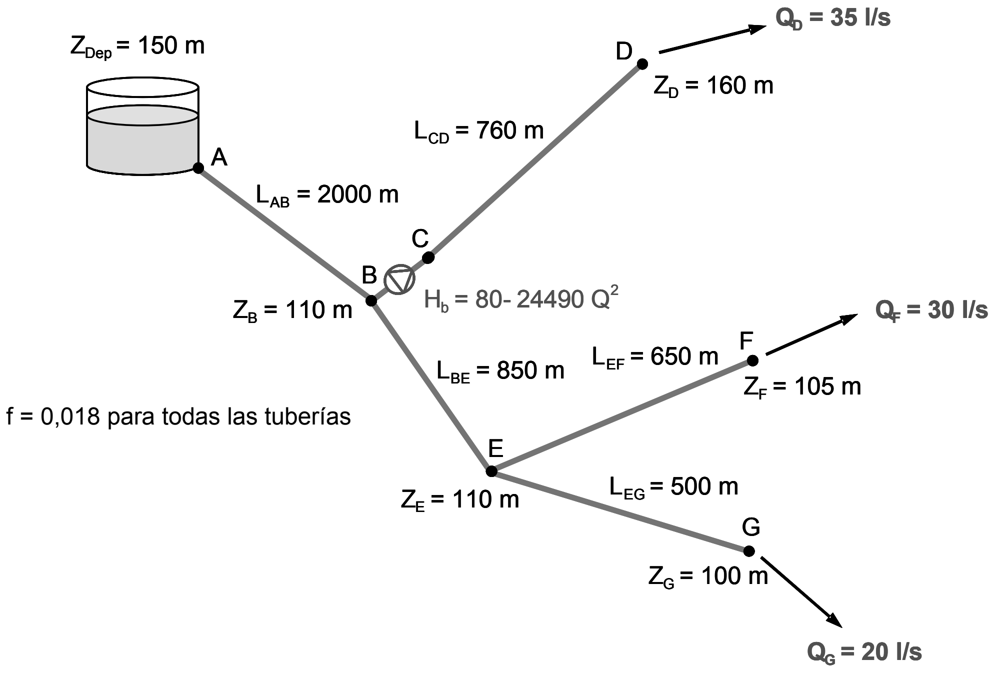
PROBLEMA III.9

La red ramificada representada en la figura se va a utilizar para el abastecimiento de agua a tres puntos de consumo. Como esta red se alimenta de un depósito a la cota 150 m, y uno de los puntos de consumo, el D, está situado a la cota 160 m, entre los puntos B y C se hace necesario instalar una bomba sobrepresora cuya curva característica es:

$$\mathbf{H_b = 80 - 24490\ Q^2 \qquad (H_b = m,\ \ Q = m^3/s)}$$

Para las características del sistema y los caudales de consumo indicados en la figura, y admitiendo que la presión mínima en los puntos de suministro es de 30mca, determinar el diámetro que deberá tener cada una de las tuberías aplicando el criterio de la pendiente hidráulica uniforme.

Diámetros comerciales: 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 350, 400, 450 y 500 mm.



SOLUCIÓN

Vamos a calcular primero la altura creada por la bomba, instalada entre los nudos B y C, para el caudal Q_D que circula por la misma

$$H_b = 80 - 24490 Q_B^2 = 80 - 24490 \cdot 0{,}035^2 = 50{,}0\ m$$

Para aplicar el método de la pendiente hidráulica uniforme necesitamos conocer inicialmente las pérdidas que se pueden admitir entre el nudo de cabecera y cualquiera de los nudos de consumo. De esta manera, y considerando que en cada nudo de suministro deberemos tener al menos la presión mínima de 30mca, tendremos:

$$h_{AD} = Z_A + H_b - \left(Z_D + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right) = 150 + 50{,}0 - (160 + 30) = 10{,}00\ m$$

$$h_{AF} = Z_A - \left(Z_E + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right) = 150 - (105 + 30) = 15{,}00\ m$$

$$h_{AG} = Z_A - \left(Z_G + \frac{p_{\min}}{\gamma} \right) = 150 - (100 + 30) = 20{,}00\ m$$

La pendiente hidráulica admisible de las diferentes rutas del sistema, las cuales unen el nudo de cabecera con cada uno de los nudos de consumo, será la siguiente:

$$j_{AD} = \frac{h_{AD}}{L_{AB} + L_{CD}} = \frac{10}{2000 + 760} = 3{,}62 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

$$j_{AF} = \frac{h_{AF}}{L_{AB} + L_{BE} + L_{EF}} = \frac{15}{2000 + 850 + 650} = 4{,}29 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

$$j_{AG} = \frac{h_{AG}}{L_{AB} + L_{BE} + L_{EG}} = \frac{20}{2000 + 850 + 500} = 5{,}97 \cdot 10^{-3}\ m/m$$

por lo que tenemos una primera ruta crítica que es la ABCD, con la pendiente hidráulica crítica j_{cr1}=3,62·10^{-3} m/m.

Vamos a calcular el diámetro de cada una de las líneas de la ruta crítica. Para ello, y a partir de la definición de pendiente hidráulica, tenemos:

$$D_{AB} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot f_{AB} \cdot Q_{AB}^2}{\pi^2 \cdot g \cdot j_{cr1}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}085^2}{\pi^2 g \, 3{,}62 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}312 \; m$$

$$D_{CD} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot f_{CD} \cdot Q_{CD}^2}{\pi^2 \cdot g \cdot j_{cr1}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}035^2}{\pi^2 g \, 3{,}62 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}219 \; m$$

Para la línea AB tomaremos el diámetro comercial mayorado, D_{AB}=350 mm, y para la línea CD el diámetro comercial minorado, D_{CD}=200 mm. Al minorar este segundo diámetro necesitaremos calcular la presión en el nudo D, con los diámetros comerciales aplicados a la ruta crítica, para comprobar que dicha presión es aún mayor o igual al valor mínimo de 30 mca.

Calcularemos ahora las pérdidas en cada una de las líneas de la ruta crítica.

$$h_{AB} = \frac{8 f_{AB} L_{AB}}{\pi^2 g D_{AB}^5} Q_{AB}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 2000}{\pi^2 g \, 0{,}35^5} 0{,}085^2 = 4{,}09 \; m$$

$$h_{CD} = \frac{8 f_{CD} L_{CD}}{\pi^2 g D_{CD}^5} Q_{CD}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 760}{\pi^2 g \, 0{,}2^5} 0{,}035^2 = 4{,}33 \; m$$

Si aplicamos el teorema de Bernoulli entre el depósito y el nudo D, la presión en este nudo quedará:

$$\frac{p_D}{\gamma} = Z_{Dep} + H_b - Z_D - h_{AB} - h_{CD} = 150 + 50{,}0 - 160 - 4{,}09 - 4{,}33 = 31{,}58 \; m$$

Esta presión es mayor que la presión mínima de suministro. Por ello, los diámetros comerciales dados a las líneas AB y CD son correctos.

Determinaremos ahora una segunda ruta crítica para la subred que queda por dimensionar, y que tiene como nudo de cabecera el B. La altura piezométrica de este nudo será:

$$H_B = Z_{Dep} - h_{AB} = 150 - 4{,}09 = 145{,}91 \; m$$

La pendiente hidráulica admisible de las rutas que salen del nudo B será:

$$j_{BF} = \frac{H_B - \left(Z_F + \frac{p_{min}}{\gamma} \right)}{L_{BE} + L_{EF}} = \frac{145{,}91 - (105 + 30)}{850 + 650} = 7{,}27 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

$$j_{BG} = \frac{H_B - \left(Z_G + \frac{p_{min}}{\gamma} \right)}{L_{BE} + L_{EG}} = \frac{145{,}91 - (100 + 30)}{850 + 500} = 11{,}79 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

La segunda ruta crítica será la BF, y la segunda pendiente crítica la de $7{,}27 \cdot 10^{-3}$ m/m. El diámetro de las líneas de esta segunda ruta crítica será:

$$D_{BE} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{BE} Q_{BE}^2}{\pi^2 g j_{cr2}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}05^2}{\pi^2 g \, 7{,}27 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}220 \ m$$

$$D_{EF} = \sqrt[5]{\frac{8 f_{EF} Q_{EF}^2}{\pi^2 g j_{cr2}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}03^2}{\pi^2 g \, 7{,}27 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}179 \ m$$

Tomaremos los diámetros comerciales D_{BE}=250 mm y D_{EF}=175 mm, y, al minorar este segundo diámetro, deberemos comprobar la presión en el nudo F.

Las pérdidas que tendremos en las líneas BE y EF serán:

$$h_{BE} = \frac{8 f_{BE} L_{BE}}{\pi^2 g D_{BE}^5} Q_{AB}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 850}{\pi^2 g \, 0{,}25^5} 0{,}05^2 = 3{,}24 \ m$$

$$h_{EF} = \frac{8 f_{EF} L_{EF}}{\pi^2 g D_{EF}^5} Q_{EF}^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 650}{\pi^2 g \, 0{,}175^5} 0{,}03^2 = 5{,}30 \ m$$

y la presión en el nudo F:

$$\frac{p_F}{\gamma} = H_B - Z_F - h_{BE} - h_{EF} = 145{,}91 - 105 - 3{,}24 - 5{,}30 = 32{,}37\ m$$

la cual es mayor que el valor mínimo prefijado.

Queda por calcular el diámetro de la línea EG, la cual se va a tratar como ramal terminal. Por ello, y aplicando el teorema de Bernoulli entre los nudos E y G, tenemos:

$$H_E = Z_G + \frac{p_G}{\gamma} + \frac{8 f_{EG} L_{EG}}{\pi^2 g D_{EG}^5} Q_{EG}^2$$

En el nudo G la presión deberá ser igual o mayor que la presión mínima de suministro. Así, y dando valores a la expresión anterior tendremos

$$142{,}67 = 100 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 500}{\pi^2 \mathrm{g} \mathrm{D}_{\mathrm{EG}}^5} 0{,}02^2$$

de donde resulta D_{EG}=0,119 m. Al ser ramal terminal su diámetro no se puede minorar, por lo que se elegirá el diámetro comercial D_{EG}=125 mm. Con este diámetro, la presión de suministro en el nudo G será:

$$\frac{p_G}{\gamma} = H_E - Z_G - \frac{8 f_{EG} L_{EG}}{\pi^2 g D_{EG}^5} Q_{EG}^2 = 142{,}67 - 100 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 500}{\pi^2 g\, 0{,}125^5} 0{,}02^2 = 32{,}92\ m$$

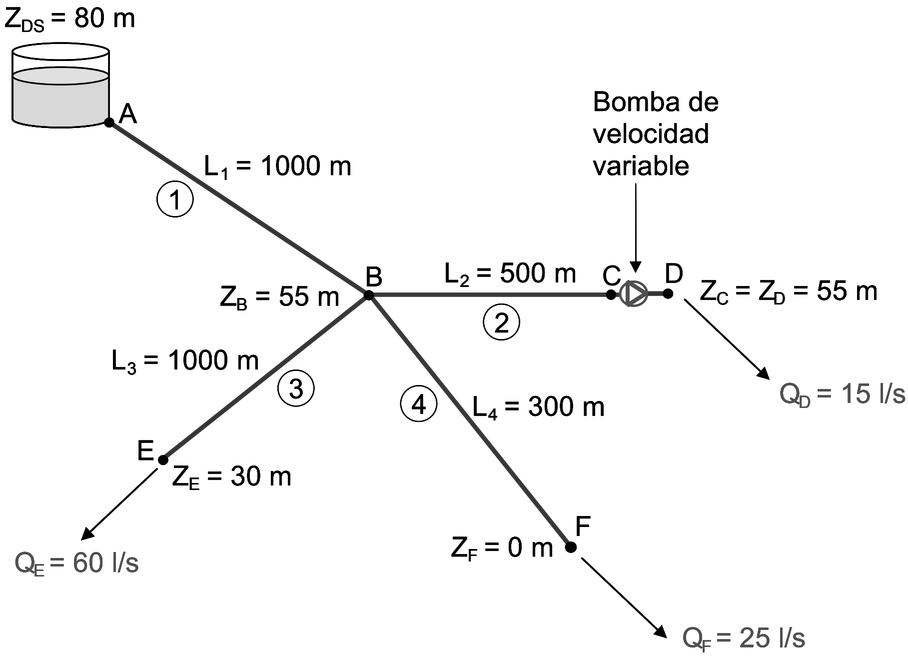
En resumen, los diámetros de las líneas y las presiones en los nudos de suministro serán los que se indican en las tablas adjuntas.

Línea	*D* (mm)
AB	350
CD	200
BE	250
EF	175
EG	125

Nudo	Pres. (mca)
D	31,58
F	32,37
G	32,92

PROBLEMA III.10

La instalación de la figura consta de un depósito que alimenta desde la cota 80 diversos consumos. Las cotas de entrada a cada uno de ellos, así como la longitud de todas las conducciones, aparecen en la figura. En una de las conducciones, la que abastece el nudo D, hay instalada una bomba de velocidad variable para alimentar adecuadamente el correspondiente consumo.



Las especificaciones de funcionamiento, para los consumos indicados en la figura, son las siguientes:

> **Nudo C. Se trata del nudo del que aspira la bomba. Para que lo haga correctamente, en dicho nudo se debe asegurar una presión mínima de 15 mca.**
>
> **Nudos E y F. Son nudos de consumo, con una presión mínima requerida de 30 mca.**
>
> **El factor de fricción de todas las tuberías se considera constante y de valor 0,018.**

Con todo ello, determinar:

a) **Diámetro que deberán tener las conducciones aplicando el criterio de pendiente hidráulica uniforme. Modificar alguno de estos diámetros, si es necesario, considerando que la velocidad máxima de circulación por las mismas es de 2 m/s. Los diámetros comerciales disponibles son de 80, 90, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400 y 450 mm.**

b) **Si la presión máxima que se admite en los nudos E y F es de 50mca, indicar si en alguno de estos nudos se debería instalar una determinada válvula para evitar presiones excesivas. En caso afirmativo, ¿qué tipo de válvula es la que se necesitaría y qué presión de tarado se le debería dar? ¿Cuál es la forma de trabajar de estas válvulas?**

SOLUCIÓN

a) Vamos a determinar la ruta crítica partiendo del nudo de cabecera A. La pendiente hidráulica de las rutas que unen el nudo de cabecera con cada uno de los nudos para los cuales se fija una presión mínima será:

$$j_{AC} = \frac{H_A - \left(Z_C + \dfrac{p_{Cmín}}{\gamma}\right)}{L_1 + L_2} = \frac{80 - (55 + 15)}{1000 + 500} = 6{,}667 \cdot 10^{-3} \ m/m$$

$$j_{AE} = \frac{H_A - \left(Z_E + \dfrac{p_{Emín}}{\gamma}\right)}{L_1 + L_3} = \frac{80 - (30 + 30)}{1000 + 1000} = 1{,}0 \cdot 10^{-2} \ m/m$$

$$j_{AF} = \frac{H_A - \left(Z_F + \dfrac{p_{Fmín}}{\gamma}\right)}{L_1 + L_4} = \frac{80 - (0 + 30)}{1000 + 300} = 3{,}846 \cdot 10^{-2} \ m/m$$

Vemos que la ruta critica es la AC, el nudo crítico el C, y la pendiente hidráulica crítica $j_{cr} = j_{AC}$. El diámetro de cada una de las líneas de la ruta crítica vale:

$$D_1 = \sqrt[5]{\frac{8 f_1 Q_1^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}1^2}{\pi^2 g \, 6{,}667 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}295 \ m$$

$$D_2 = \sqrt[5]{\frac{8 f_2 Q_2^2}{\pi^2 g j_{cr}}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 0{,}015^2}{\pi^2 g \, 6{,}667 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}138 \ m$$

Tomaremos D_1=300 mm y probaremos inicialmente con D_2=100 mm. Para estos diámetros las pérdidas en las correspondientes líneas serán:

$$h_1 = \frac{8 f_1 L_1}{\pi^2 g D_1^5} Q_1^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1000}{\pi^2 g \, 0{,}3^5} 0{,}1^2 = 6{,}12 \ m$$

$$h_2 = \frac{8 f_2 L_2}{\pi^2 g D_2^5} Q_2^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 500}{\pi^2 g\, 0{,}1^5} 0{,}015^2 = 16{,}73\ m$$

y la presión que resulta en el nudo C:

$$\frac{p_C}{\gamma} = Z_{DS} - Z_C - h_1 - h_2 = 80 - 55 - 6{,}12 - 16{,}73 = 2{,}15\ m$$

la cual es inferior al valor mínimo requerido. Por ello mayoraremos el diámetro de la línea 2, de manera que D_2 =150 mm. Con este nuevo diámetro, las pérdidas en la línea 2 y la presión en el nudo C serán:

$$h_2 = \frac{8 f_2 L_2}{\pi^2 g D_2^5} Q_2^2 = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 500}{\pi^2 g\, 0{,}15^5} 0{,}015^2 = 2{,}20\ m$$

$$\frac{p_C}{\gamma} = Z_{DS} - Z_C - h_1 - h_2 = 80 - 55 - 6{,}12 - 2{,}20 = 16{,}68\ m$$

siendo esta presión mayor que el valor mínimo deseado.

Las líneas 3 y 4 se dimensionarán como ramales terminales a partir del nudo B. La altura piezométrica de este nudo será

$$H_B = Z_{DS} - h_1 = 80 - 6{,}12 = 73{,}88\ m$$

Aplicando el teorema de Bernoulli entre los nudos B y E tenemos:

$$H_B = Z_E + \frac{p_{E\,\min}}{\gamma} + h_3 \quad ; \quad 73{,}88 = 30 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1000}{\pi^2 g D_3^5} 0{,}06^2$$

de donde obtenemos D_3=0,208 m. Como en los ramales terminales no se puede minorar el diámetro obtenido, adoptaremos D_3=250 mm.

De la misma manera, entre los nudos B y F:

$$H_B = Z_F + \frac{p_{F\,min}}{\gamma} + h_4 \quad ; \quad 73{,}88 = 0 + 30 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 300}{\pi^2 g D_4^5} 0{,}025^2$$

obteniendo D_4=0,091 m. Al mayorar este diámetro tendremos D_4=100 mm.

Con el diámetro que hemos calculado para cada una de las líneas, vamos ahora a comprobar si la velocidad del agua supera en algún caso los 2 m/s. Para ello tendremos:

$$V_1 = \frac{4Q_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 0{,}3^2} = 1{,}41\ m/s$$

$$V_2 = \frac{4Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}015}{\pi \cdot 0{,}15^2} = 0{,}85\ m/s$$

$$V_3 = \frac{4Q_3}{\pi D_3^2} = \frac{4 \cdot 0{,}06}{\pi \cdot 0{,}25^2} = 1{,}22\ m/s$$

$$V_4 = \frac{4Q_4}{\pi D_4^2} = \frac{4 \cdot 0{,}025}{\pi \cdot 0{,}1^2} = 3{,}18\ m/s$$

Vemos que, con el diseño de la red por pendiente hidráulica uniforme, en la línea 4 la velocidad de circulación del agua sería excesiva. Si adoptásemos para la línea 4 el diámetro de 150 mm, la velocidad del agua por la misma resulta

$$V_4 = \frac{4Q_4}{\pi D_4^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 0{,}15^2} = 1{,}41\ m/s$$

la cual es ya aceptable.

En definitiva, los diámetros a instalar en las líneas, y las velocidades de circulación correspondientes, serán los que se indican en la tabla adjunta.

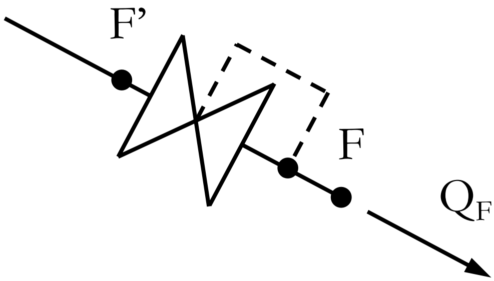
Línea	D (mm)	V (m/s)
1	300	1,41
2	150	0,85
3	250	1,22
4	150	1,41

b) Con la instalación diseñada según el apartado anterior, las presiones en los nudos E y F serán:

$$\frac{p_E}{\gamma} = H_B - Z_E - h_3 = 73{,}88 - 30 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 1000}{\pi^2 g\, 0{,}25^5} 0{,}06^2 = 38{,}40\ m$$

$$\frac{p_F}{\gamma} = H_B - Z_F - h_4 = 73{,}88 - 0 - \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 300}{\pi^2 g\, 0{,}15^5} 0{,}025^2 = 70{,}21\ m$$

Vemos que la presión de suministro en el nudo F es excesiva, y ello es el resultado de haber aumentado el diámetro de la línea 4 para que se cumpla el criterio de velocidad máxima. Por esta razón se dispondrá una válvula reguladora de presión a la entrada del nudo F, como se indica en la figura adjunta, con una presión de tarado entre 30 y 50 m. Tomando por ejemplo una presión de tarado de 40 m, la válvula abriría o cerraría para mantener en el nudo F la presión constante de 40 m, cuando la presión de entrada a la válvula en el nudo F' sea mayor que la de tarado (por ejemplo, 70,21 m en las condiciones de diseño).

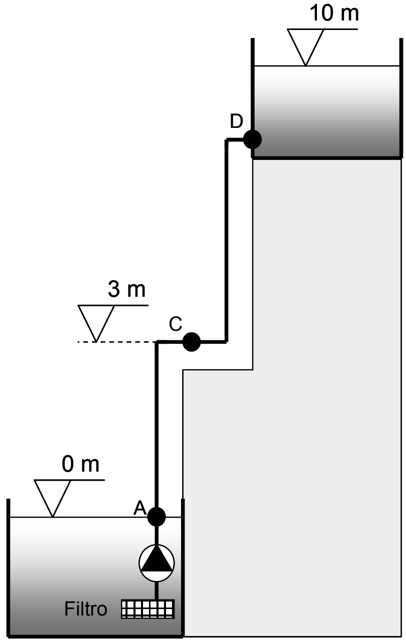


IV

BOMBAS DE ELEVACIÓN

PROBLEMA IV.1

Para la instalación de bombeo de agua representada en la figura, con la bomba sumergida 0,75 m por debajo del nivel libre del agua en el depósito inferior, se conocen los siguientes datos:



Coeficientes de pérdidas:

K_{FILTRO}=500 mca/(m³/s)²

$K_{TUB\ A\text{-}C}$=450 mca/(m³/s)²

$K_{TUB\ C\text{-}D}$=1050 mca/(m³/s)²

Bomba (a 2900 rpm):

$$\left.\begin{array}{l} H_b=40-2000Q^2 \\ \eta=20Q-100Q^2 \\ NPSH_r=2+25Q^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} Q \text{ en } m^3/s \\ H \text{ en mca} \end{array}$$

Presiones absolutas:

P atmosférica: 10,33 mca

P vapor de agua: 0,33 mca

El caudal circulante debe ser de 80 l/s.

Se pide:

a) **Calcular el coeficiente de pérdidas menores que deberá tener una válvula de regulación parcialmente cerrada, a instalar en C, para conseguir el caudal deseado con la bomba funcionando a su velocidad nominal (2900 rpm).**

b) **¿Cómo conseguir el mismo caudal sin válvula de regulación pero variando la velocidad de giro de la bomba? ¿Qué opción es mejor teniendo en cuenta la potencia absorbida por la bomba en cada caso?**

c) **Representar gráficamente en un esquema de curvas (alturas y rendimientos frente a caudal) las dos opciones anteriores.**

Ahora, para Q=80 l/s, con la válvula de regulación en la posición del apartado a) y con la bomba a su velocidad nominal (2900rpm), se pide:

d) Calcular cómo funcionaría mejor la bomba: sumergida donde está o situada en C.

e) Explicar brevemente qué se podría hacer para que la bomba funcionase mejor en el caso más desfavorable de los indicados en el caso anterior

SOLUCIÓN

a) Para toda la instalación:

$$H^m = H_B = 40 - 2000\,Q^2$$
$$H^r = (10-0) + (500+450+1050+K_v)\cdot Q^2$$

Queremos: $Q = 80\ l/s$

$$\Rightarrow H^m = H^r \rightarrow 40 - 2000\,0{,}08^2 = 10 + (2000+K_v)\cdot 0{,}08^2$$

$$\frac{17{,}2}{0{,}08^2} = 2000 + K_v \rightarrow K_v = 687{,}5\ \frac{mca}{\left(m^3/s\right)^2}$$

$$\boxed{h_{m_v} = 687{,}5\,0{,}08^2 = 4{,}4\ mca}$$

b) CON válvula (y los datos del apartado anterior):

$$\left(Pot_a\right)_{con\ válvula} = \frac{\gamma\, Q\, h}{\eta} = \frac{9810\,0{,}08\,(40-2000\,0{,}08^2)}{20\,0{,}08 - 100\,0{,}08^2} = 22236\ W$$

SIN válvula pero a velocidad nominal tendríamos un caudal de:

$$H_m = H_r \rightarrow 40 - 2000\,Q^2 = 10 + 2000\,Q^2 \rightarrow Q = \sqrt{\frac{30}{4000}} = 0{,}087\ m^3/s$$

Observamos que dicho caudal es mayor de lo que nosotros deseamos, por tanto habrá que variar la velocidad de giro de la bomba.

$$(H^r)_{\text{sin}\ valvula} = 10 + 2000\,0{,}08^2 = 22{,}8\ mca$$

En general, cambiando la velocidad de giro de una bomba se tendrá:

$$H'_B = A\cdot\alpha^2 + B\,\alpha\,Q + C\cdot Q^2 = 40\,\alpha^2 - 2000\,0{,}08^2$$

En el punto de funcionamiento:

$$H^r = H^m \rightarrow 22{,}8 = 40\,\alpha^2 - 2000\cdot 0{,}08^2 \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{35{,}6}{40}} = 0{,}943$$

Nueva velocidad de giro necesaria:

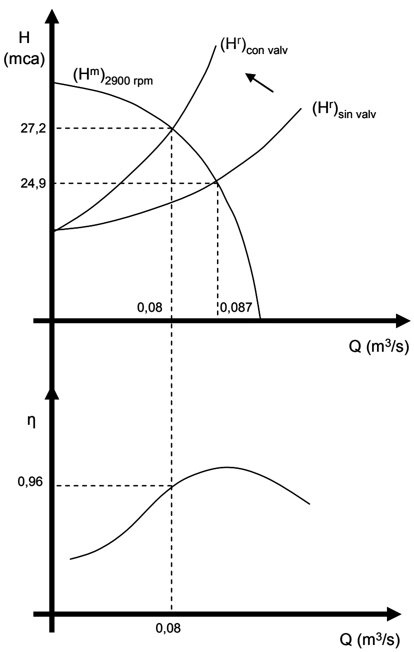
$$N' = \alpha\, N = 2735\ rpm$$

$$\eta' = \frac{D}{\alpha}\cdot Q + \frac{E}{\alpha^2}\cdot Q^2 = \frac{20}{0{,}943}\cdot 0{,}08 - \frac{100}{0{,}943^2}\cdot 0{,}08^2 = 0{,}977$$

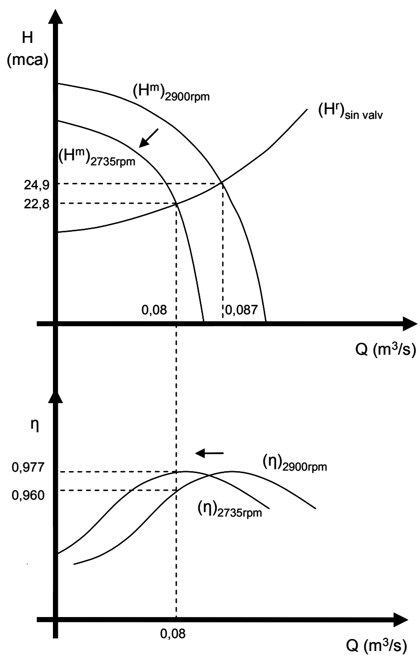
$$\left(Pot_a\right)_{\sin valvula} = \frac{\gamma\, 0{,}08\cdot 22{,}8}{0{,}977} = 18314\, W$$

Así, es mejor la segunda opción (cambiando la velocidad de giro y sin válvula) ya que la potencia consumida es menor.

c) Gráficas para el apartado a)



Gráficas para el apartado b)



d) En general:

$$NPSH_r = 2 + 25 \cdot Q^2$$

$$NPSH_d = \left(\frac{p^*_{atm}}{\gamma} \right) - \left(\frac{p^*_v}{\gamma} \right) - h_A - \sum h_{perd.aspiración}$$

Bomba sumergida:

$$NPSH_r = 2 + 25 \cdot 0{,}08^2 = 2{,}16 \; mca$$

$$NPSH_d = 10{,}33 - 0{,}33 - (-0{,}75) - 500 \cdot 0{,}08^2 = 7{,}55 \; mca$$

$$NPSH_r < NPSH_d \Rightarrow NO\ CAVITA$$

Bomba en C (antes de la válvula):

$$NPSH_r = 2{,}16 \; mca$$

$$NPSH_d = 10{,}33 - 0{,}33 - 3 - (500 + 450) \cdot 0{,}08^2 = 0{,}92 \; mca$$

$$NPSH_r > NPSH_d \Rightarrow CAVITA$$

La bomba funcionará mejor sumergida ya que no cavita.

e) Para evitar la cavitación en el caso de querer ubicar la bomba en el punto C, sería necesario, sobre todo, reducir las pérdidas en la aspiración: cambiando el filtro (o incluso la tubería) por otros que ofreciesen menos resistencia hidráulica al paso del agua.

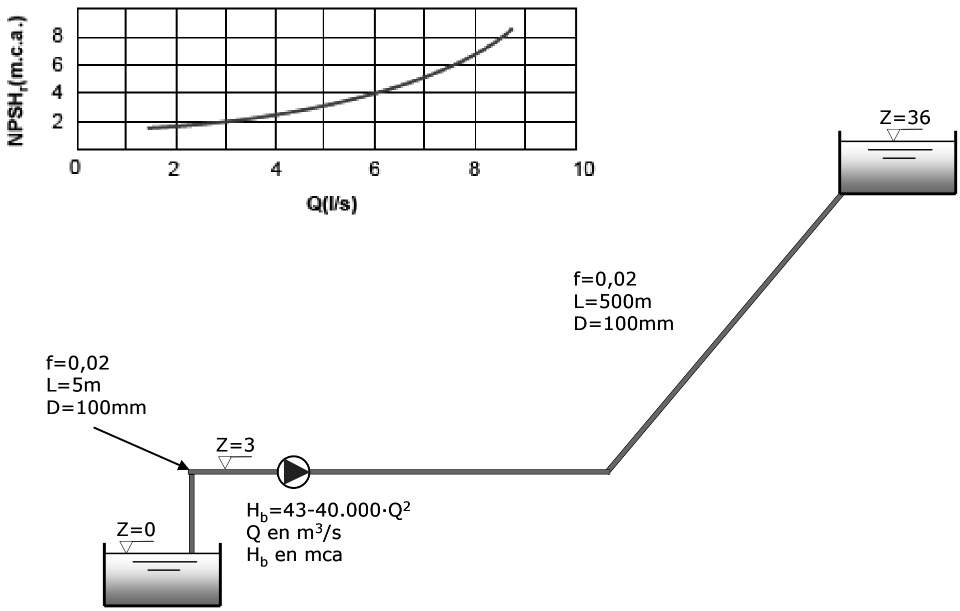
PROBLEMA IV.2

Con los datos de la figura determinar:

a) **El caudal circulante por la conducción y la altura que da la bomba en las condiciones de funcionamiento del problema.**

b) **Potencia (en kW) si el rendimiento de la misma es de 0,7. Si la bomba funciona durante 10 horas al día, calcular el consumo energético diario de la misma y el coste del mismo (precio de la energía: 0,09 €/kWh).**

c) **Si la Tv es de 0,4 m, ¿existirán problemas de cavitación? Si el diámetro de la aspiración se redujese a 50 mm y el caudal circulante no cambiase, ¿mejoraría el problema? Calcular el mínimo diámetro que puede instalarse, para el mismo caudal circulante.**



SOLUCIÓN

a) Calculando la curva resistente:

$$H_r = \left[\frac{8\cdot 0{,}02\cdot 500}{\pi^2\cdot 0{,}1^5\cdot g} + \frac{8\cdot 0{,}02\cdot 5}{\pi^2\cdot 0{,}1^5\cdot g}\right]\cdot Q^2 + 36$$

$$H_r = H_B \Rightarrow 83623\cdot Q^2 + 36 = 43 - 40000\cdot Q^2$$

$$\boxed{Q = 7{,}52\cdot 10^{-3}\, m^3/s}$$

$$\boxed{H_B = 43 - 40000\cdot\left(7{,}52\cdot 10^{-3}\right)^2 = 40{,}73\, m}$$

b)

$$\boxed{P = \frac{\gamma\cdot Q\cdot H}{\eta} = \frac{9800\cdot 7{,}52\cdot 10^{-3}\cdot 40{,}73}{0{,}7} = 4{,}29\, kW}$$

$$E = P\cdot t = 4{,}29\cdot 10 = 42{,}9 kWh/día$$

Coste diario: $\boxed{C = 42{,}9\cdot 0{,}09 = 3{,}86 €/día}$

c)

$$NPSH_d = \left(\frac{P_{atm}}{\gamma} - T_v - h_a\right) - k_{asp.}\cdot Q^2$$

$$T_v = 0{,}4 m \quad ; \quad k_{asp.} = \frac{8\cdot 0{,}02\cdot 5}{\pi^2\cdot g\cdot 0{,}1^5} = 827{,}95$$

$$NPSH_d = 10{,}33 - 0{,}4 - 3 - 827{,}95\cdot\left(7{,}52\cdot 10^{-3}\right)^2 = 6{,}88\, m$$

De la gráfica $\quad Q = 7{,}52\, l/s \quad \Rightarrow NPSH_r = 6\, m$

Como: $NPSH_d > NPSH_r \Rightarrow$ NO CAVITA

Si el diámetro pasa a ser 50mm:

$$k_{asp.} = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 5}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}05^5} = 26494{,}4$$

$$NPSH_d = 10{,}33 - 0{,}4 - 3 - 26494{,}4 \cdot \left(7{,}52 \cdot 10^{-3}\right)^2 = 5{,}43\,m$$

$$NPSH_d < NPSH_r \Rightarrow \text{CAVITA}$$

Con el diámetro mínimo tendremos la k_{asp} máxima:

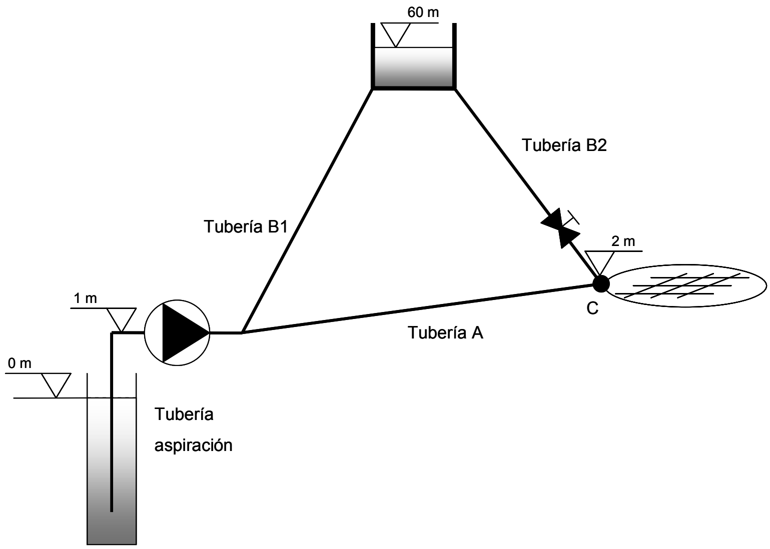
$$NPSH_d = 10{,}33 - 0{,}4 - 3 - k_{asp.} \cdot \left(7{,}52 \cdot 10^{-3}\right)^2 = 6{,}93 - k_{asp.} \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-5}$$

$$6 = 6{,}93 - k_{asp.} \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-5} \quad \rightarrow \quad k_{asp._{\max}} = 16607 \frac{mca}{(m^3/s)^2}$$

$$16607 = \frac{8 \cdot 0{,}02 \cdot 5}{\pi^2 \cdot g \cdot D^5} \quad \rightarrow \quad \boxed{D = 54{,}89\,mm}$$

PROBLEMA IV.3

La población de la figura consume 3000 m³ de agua a lo largo de todo el periodo diurno, necesitando el nudo C una presión constante de 20 mca. Durante el periodo nocturno no hay consumo. Para el suministro, se dispone de la bomba indicada que aspira el agua de un pozo.



a) **Caso 1. Se bombea directamente a la población a través de la tubería A el volumen necesario a lo largo del periodo diurno, con la posibilidad de ajustar para ello la velocidad de giro de la bomba si es preciso. Para este caso se pide: coste del funcionamiento de la bomba.**

b) **Caso 2. Durante el periodo nocturno, se bombea el volumen necesario al depósito a través de la tubería B1. Durante el periodo diurno, la bomba está parada, la tubería B1 está cerrada y la población se abastece del volumen necesario por gravedad a través de la tubería B2. Para este caso se pide: coste del funcionamiento de la bomba y pérdidas que debe producir la válvula para ajustar la presión en C a la indicada más arriba.**

c) **Si se opta por el caso 2, calcular la cota mínima que puede llegar a alcanzar el agua en el pozo antes de que se produzca cavitación en la bomba (suponiendo que el caudal se mantiene constante).**

Periodo	Horario	Euros/kWh
Diurno	8:00-22:00	0,10
Nocturno	22:00-8:00	0,05

Tubería	K
Aspiración	250 mca/(m^3/s)^2
A	1250 mca/(m^3/s)^2
B1	200 mca/(m^3/s)^2
B2	6500 mca/(m^3/s)^2

$h_B=90-3000\cdot Q^2$ $\eta=25\cdot Q-160\cdot Q^2$ $NPSH_r=3+12\cdot Q^2$	$P^*_{atm}/\gamma = 10{,}33$ mca (absoluta) $P^*_{vapor}/\gamma = 0{,}33$ mca (absoluta)

SOLUCIÓN

a) Caudal circulante por la tubería

$$Q = \frac{3000}{14 \cdot 3600} = 0{,}06\ m^3/s$$

Con ello tendremos que la altura resistente será:

$$h^{(r)} = (20+2) + (250+1250) \cdot Q^2 = 22 + 1500 \cdot Q^2 = 27{,}4\ mca$$

Y así, la variación de velocidad de giro habrá de ser:

$$h^{(r)} = h^{(m)} = 90\alpha^2 - 3000Q^2 \Rightarrow \alpha = 0{,}651$$

$$Pot_a = \frac{\gamma \cdot Q \cdot h}{\eta} = \frac{9810 \cdot 0{,}06 \cdot 27{,}4}{\frac{25}{0{,}651} \cdot 0{,}06 - \frac{160}{0{,}651^2} \cdot 0{,}06^2} = 17{,}066\ kW$$

$$\boxed{Coste = 17{,}066 \cdot 14 \cdot 0{,}1 = 23{,}89\ €}$$

b)

$$h^{(m)} = 90 - 3000\ Q^2$$

$$h^{(r)} = 60 + (250+200) \cdot Q^2 = 60 + 450 \cdot Q^2$$

Igualando alturas obtendremos el punto de funcionamiento:

$$h^{(m)} = h^{(r)} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{30}{3450}} = 0{,}093 \frac{m^3}{s} \Rightarrow h^{(m)} = h^{(r)} = 63{,}89\ mca$$

$$Pot_a = \frac{\gamma \cdot Q \cdot h}{\eta} = \frac{9810 \cdot 0{,}093 \cdot 63{,}89}{25 \cdot 0{,}093 - 160 \cdot 0{,}093^2} = 61{,}94\ kW$$

Del volumen del depósito y el caudal trasegado obtendremos el tiempo que la bomba está en funcionamiento:

$$t = \frac{3000}{0{,}093} = 32258 \ \textit{segundos} = 8{,}96 \ \textit{horas}$$

$$\boxed{Coste = 61{,}94 \cdot 8{,}96 \cdot 0{,}05 = 27{,}75 \ €}$$

Pérdidas en la válvula:

$$\left.\begin{array}{l} 60 = (20+2) + 6500 \cdot Q^2 + h_{m_V} \\ Q = \dfrac{3000}{14 \cdot 3600} = 0{,}06 \ m^3/s \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h_{m_V} = 14{,}6 \ mca} \rightarrow K = 4056 \ \frac{mca}{\left(m^3/s\right)^2}$$

c) Para obtener la cota bastará con igualar las expresiones de $NPSH_r$ con $NPSH_d$ y determinar el punto límite donde aún no se produce cavitación. Así:

$$NPSH_r = 3 + 12 \cdot 0{,}093^2 = 3{,}104 \ mca$$

$$NPSH_d = \frac{P^*_{atm}}{\gamma} - \frac{P^*_{vapor}}{\gamma} - h_A - \sum h_{aspiración} =$$

$$= 10{,}33 - 0{,}33 - h_A - 250 \cdot Q^2 = 7{,}838 - h_A$$

$$NPSH_r = NPSH_d \Rightarrow 3{,}104 = 7{,}838 - h_A$$

$$h_A = 4{,}734 \ m$$

Teniendo en cuenta que la bomba está a una cota de 1 m, la cota mínima a la que puede llegar el agua antes de que aparezca la cavitación será de:

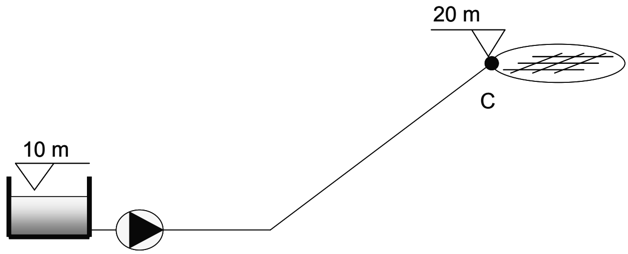
$$\boxed{z_{asp.mínima} = 1 - 4{,}734 = -3{,}734 \ m}$$

PROBLEMA IV.4

El nudo C que aparece en la figura representa un punto de consumo de agua que necesita (exactamente) un caudal de 70 l/s y una presión de 10 mca. Para abastecer este consumo se piensa en bombear dicho caudal desde un depósito cercano a través de una tubería.

En el almacén se tienen dos bombas diferentes B1 y B2. A cualquiera de ellas se le puede cambiar la velocidad de giro, recortar el rodete o, incluso si se considerase necesario, se pueden conectar en serie o en paralelo.

Tubería $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f=0{,}017} \\ \mathbf{D=250\ mm} \\ \mathbf{L=1000\ m} \end{array} \right.$



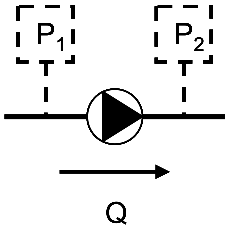
$$\left(\begin{array}{ll} \mathbf{B1:\ h_B = 35\text{-}3500 \cdot Q^2} & \mathbf{Q\ en\ m^3/s} \\ \mathbf{B2:\ h_B = 48\text{-}3000 \cdot Q^2} & \mathbf{h_b\ en\ mca} \end{array} \right)$$

Sabiendo que esta instalación admite varias soluciones válidas, se pide:

a) **Proponer una solución de bombeo para suministrar exactamente el caudal necesario en C a la presión requerida. Para ello, tras realizar los cálculos pertinentes hay que decir qué bomba utilizar, si es preciso variar de alguna forma su funcionamiento nominal y, en tal caso, cuantificar dicha variación.**

b) **Comentar brevemente y de forma razonada al menos otra más de las soluciones posibles.**

Por otra parte, se decide ensayar en un laboratorio la bomba B1 para comprobar sus curvas de altura y rendimiento. Para ello se monta con dos manómetros tal como muestra la figura, y se toman los datos de varios puntos de funcionamiento (en la tabla adjunta).



Punto nº	Q (l/s)	P1 (bares)	P2 (bares)	Potencia absorbida (kW)
1	30	-0,20	2,92	11,75
2	40	-0,22	2,66	12,65
3	50	-0,25	2,33	13,55
4	60	-0,28	1,92	14,46

Sabiendo que los diámetros de las tuberías de aspiración e impulsión son iguales, se pide:

c) Mediante los cálculos adecuados, calcular la altura de bombeo y el rendimiento correspondientes a cada uno de los puntos de funcionamiento que figuran en la tabla.

d) Justificar si los puntos de funcionamiento obtenidos se corresponden con la curva altura/caudal para la bomba B1, o si por el contrario, hay que asumir que el ensayo ha sido erróneo.

SOLUCIÓN

a) Curva resistente:

$$h^r = (20+10) - 10 + \frac{8 \cdot 0{,}017 \cdot 1000}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}25^5} \cdot Q^2 = 20 + 1438{,}4 \cdot Q^2$$

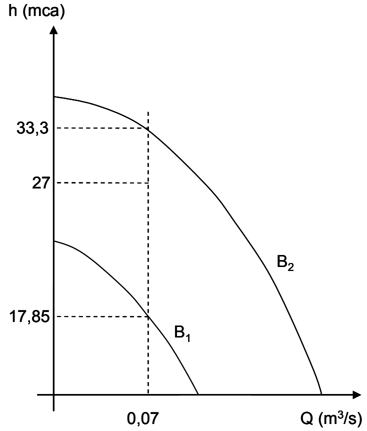
Punto de funcionamiento necesario:

$$Q = 0{,}07 m^3 / s$$

$$h = 20 + 1438{,}4 \cdot 0{,}07^2 = 27 \ mca$$

La bomba B1 aportaría una altura de: h(0,07)= 17,85 mca y quedaría por debajo.

La bomba B2 aportaría una altura de: h(0,07)= 33,3 mca y quedaría por encima.



Posibles soluciones:

- solución 1: acelerar la bomba B1
- solución 2: decelerar la bomba B2
- solución 3: recortar el rodete de la bomba B2 (irreal en la práctica)

Para contestar este apartado a) basta con resolver numéricamente sólo una de las tres soluciones:

Solución 1:

$$27 = 35 \cdot \alpha^2 - 3500 \cdot 0{,}07^2 \rightarrow \alpha = 1{,}12 \rightarrow \textit{Valor aceptable}$$

Aumentar la velocidad de B1 un 12%

Solución 2:

$$27 = 48 \cdot \alpha^2 - 3000 \cdot 0{,}07^2 \rightarrow \alpha = 0{,}93 \rightarrow \textit{Valor aceptable}$$

Bajar la velocidad de B2 un 7%

Solución 3:

$$27 = 48 \cdot \lambda^2 - \frac{3000}{\lambda^2} \cdot 0{,}07^2 \rightarrow \lambda^2 = 0{,}9 \rightarrow \lambda = 0{,}95 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Valor aceptable $\rightarrow$ Recortar el r_2 de B2 un 5%

b) En este apartado basta con indicar una de las otras dos soluciones que no se hayan calculado numéricamente.

c) Para obtener la altura de bombeo, según la ecuación de Bernoulli:

$$B_1 + h_{B_1} = B_2 \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + h_B = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

Como $v_1=v_2$ y $z_1=z_2$, se anulan mutuamente: $\boxed{h_B = \frac{(p_2 - p_1)}{\gamma}}$

Para el rendimiento:

$$Pot_B = \gamma \cdot Q \cdot h_B$$

$$\boxed{\eta = \frac{\gamma \cdot Q \cdot h_B}{Pot_a}}$$

A partir de las expresiones recuadradas, y teniendo cuidado con las unidades:

Puntos	H_B(mca)	η
1	31,8	0,8
2	29,4	0,91
3	26,3	0,95
4	22,4	0,91

d) Puntos de funcionamiento obtenidos en el ensayo:

Puntos	Q(m^3/s)	h_B(mca)
1	0,03	31,8
2	0,04	29,4
3	0,05	26,3
4	0,06	22,4

Si sustituimos para cada punto el valor de Q en la ecuación $h_B = 35 - 3500 \cdot Q^2$ resulta el valor de h_B mostrado en la tabla anterior, por tanto concluimos que el ensayo está bien hecho.

PROBLEMA IV.5

La estación de bombeo de la figura cuenta con dos bombas idénticas con las características que se indican (Q en m³/s, h_B en mca y η en tanto por uno):

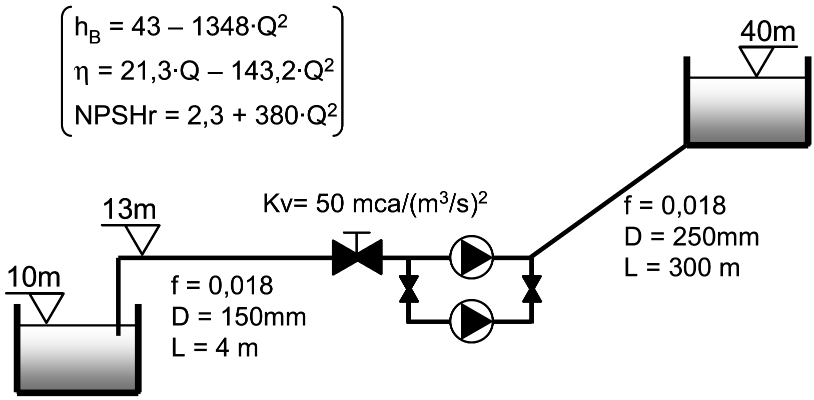
Se pide:

a) **Calcular la potencia que consume una bomba si funciona sola.**

b) **Si sigue funcionando una sola bomba, calcular si se produce cavitación en la misma (presión de vapor de agua = 0,33 mca).**

c) **Calcular la potencia total que consumen las dos bombas funcionando en paralelo.**

d) **Calcular qué coeficiente de pérdidas debería haber en la válvula (es decir, cuánto debería abrirse) para que el caudal impulsado por las dos bombas en paralelo fuese el doble que el que impulsaba una sola en el apartado a). ¿Es posible abrir tanto la válvula?**



SOLUCIÓN

a) En el caso de una bomba:

$$H_r = \left[\frac{8 f_2 L_1}{\pi^2 D^5 g} + \frac{8 f_2 L_2}{\pi^2 D^5 g} + K\right] \cdot Q^2 + (40 - 10) =$$

$$= \left[\frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 4}{\pi^2 \cdot 0{,}15^5 \cdot g} + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 300}{\pi^2 \cdot 0{,}25^5 \cdot g} + 50\right] \cdot Q^2 + 30 =$$

$$= [78{,}42 + 457{,}36 + 50] \cdot Q^2 + 30 = 585{,}78 \cdot Q^2 + 30$$

$$H_r = 585{,}78 \cdot Q^2 + 30 \qquad\qquad H_B = 43 - 1348 Q^2$$

$$30 + 585{,}78 \cdot Q^2 = 43 - 1348 \cdot Q^2 \qquad\qquad Q = 8{,}2 \cdot 10^{-2}\ m^3/s$$

$$H_B = 43 - 1348 \cdot (8{,}2 \cdot 10^{-2}) = 33{,}94\ m$$

$$\eta = 21{,}3 \cdot (8{,}2 \cdot 10^{-2}) - 143{,}2 \cdot (8{,}2 \cdot 10^{-2}) = 0{,}784$$

$$P = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H}{\eta} = \frac{9800 \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 33{,}94}{0{,}784} = 34{,}79\ kW$$

$$\boxed{P = 34{,}79\ kW}$$

b)

$$Q = 0{,}082 \quad \rightarrow \quad NPSH_r = 4{,}86\ mca$$

$$NPSH_d = \frac{p_{atm}}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} - h_A - h_{f_{asp}} = 10{,}33 - 0{,}33 - 3 - \left[\frac{8\,0{,}0184}{\pi^2 \cdot g\,0{,}15^5} + 50\right] 0{,}082^2 = 6{,}14\ mca$$

$$NPSH_d > NPSH_d \quad \Rightarrow \quad NO\ CAVITA$$

c) Funcionando en paralelo:

$$H_B = 43 - 1348\left(\frac{Q}{2}\right)^2 = 43 - 337Q^2$$

$$\eta = 21{,}3\cdot\left(\frac{Q}{2}\right) - 143{,}2\cdot\left(\frac{Q}{2}\right)^2 = 10{,}65Q - 35{,}8Q^2$$

Punto de funcionamiento:

$$30 + 585{,}78\cdot Q^2 = 43 - 337\cdot Q^2 \qquad Q = 0{,}118\, m^3/s$$

$$H_B = 43 - 337\cdot(0{,}118)^2 = 38{,}25\, mca$$

$$\eta = 10{,}65\cdot 0{,}118 - 35{,}8\cdot 0{,}118^2 = 0{,}758$$

$$P = \frac{\gamma\cdot Q\cdot H}{\eta} = \frac{9800\cdot 0{,}118\cdot 38{,}25}{0{,}758} = 58{,}35\, kW$$

$$\boxed{P = 58{,}35\, kW}$$

d)

$$Q_{apartado\, a)} = 0{,}082\, m^3/s$$

$$Q_{necesario\, apartado\, d)} = 0{,}164\, m^3/s$$

$$h_{2B} = 43 - 337\cdot Q^2 = 30 + \left[\frac{8\cdot 0{,}018\cdot 4}{\pi^2\cdot g\, 0{,}15^5} + \frac{8\cdot 0{,}018\cdot 300}{\pi^2\cdot g\, 0{,}25^5} + K_v\right]\cdot Q^2 = h_r$$

Si Q = 0,164 $\Rightarrow$ K_v = -389,28 mca/(m^3/s)^2

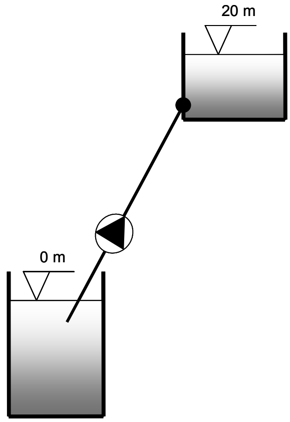
Resulta $K_v < 0$ y eso, en la práctica, es imposible.

No es que sea imposible abrir tanto la válvula, sino que una $K_v < 0$ indica que el sistema necesita altura adicional de bombeo para cumplir los requerimientos planteados.

PROBLEMA IV.6

Se desea llenar un depósito de 6000 m³ desde un pozo mediante una tubería de características:

L=4500 m ; D=300 m ; f=0,018



Para ello se cuenta con dos bombas iguales, siendo las curvas características para cada una de ellas las siguientes:

$H_b=45-1500 \cdot Q^2$ (H en mca, Q en m³/s)

$\eta=20 \cdot Q-110 \cdot Q^2$ (η en tanto por uno, Q en m³/s)

La tarifación de la energía eléctrica aparece en la tabla:

Periodos	Horario	Precio (€/kWh)
Valle	0:00-8:00	0,05
Punta	8:00-17:00	0,10
Llano	17:00-24:00	0,07

a) Alternativa A: ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito si se utiliza una sola bomba de forma ininterrumpida a partir de las 0:00 horas?

b) Alternativa B: ¿Cuánto tiempo tardará ahora si durante el periodo valle (0:00-8:00 h) funcionan las dos bombas en paralelo, pero a partir de las 8:00 h se deja sólo una en marcha hasta que termine de llenar-se el depósito?

c) Calcular cuál de las dos alternativas indicadas en los apartados a) y b) resulta más barata

SOLUCIÓN

a) Curva resistente:

$$H^r = 20 + \frac{8 \cdot f \cdot L}{\pi^2 \cdot g \cdot D^5} \cdot Q^2 = 20 + \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 4500}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}3^5} \cdot Q^2 = 20 + 2754{,}2 \cdot Q^2$$

Punto de funcionamiento (1 bomba):

$$20 + 2754{,}2 \cdot Q^2 = 45 - 1500 \cdot Q^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q = 0{,}0767\ m^3/s \\ H = 36{,}18\ mca \end{array} \right.$$

$$t = \frac{6000\ m^3}{0{,}0767\ m^3/s} = 78227\ segundos = \boxed{21{,}73\ horas}\ \text{para la alternativa A}$$

b) Periodo valle:

$$H_{2B} = 45 - 1500 \left(\frac{Q}{2} \right)^2 = 45 - 375 \cdot Q^2$$

Punto de funcionamiento (2 bombas):

$$20 + 2754{,}2 \cdot Q^2 = 45 - 375 \cdot Q^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q = 0{,}0894\ m^3/s \\ H = 42\ mca \end{array} \right.$$

Volumen llenado por las 2 bombas durante el periodo valle:

$$\forall_1 = 0{,}0894 \cdot 8 \cdot 3600 = 2574{,}72\ m^3$$

Volumen que falta por llenar:

$$\forall_2 = 6000 - 2574{,}72 = 3425{,}28\ m^3$$

Tiempo que tarda 1 sola bomba en llenar $\forall_2$:

$$t = \frac{3425{,}28}{0{,}0767} = 44658\ segundos = 12{,}4\ horas$$

Tiempo total que tarda el depósito en llenarse:

$$t_T = 8 + 12{,}4 = \boxed{20{,}4\ horas}\ \text{para la alternativa B}$$

c) Coste alternativa A:

$$Pot_{1B} = \frac{\gamma\, Q\, H}{\eta} = \frac{9810 \cdot 0{,}0767 \cdot 36{,}18}{20 \cdot 0{,}0767 - 110 \cdot 0{,}0767^2} = 30{,}69\ kW$$

Periodo	Horas	kWh	€/kWh	€ a pagar
Valle	8	245,52	0,05	12,28
Punta	9	276,21	0,1	27,62
Llano	4,73	145,16	0,07	10,16
TOTAL	21,73	666,89		50,06

Coste alternativa B:

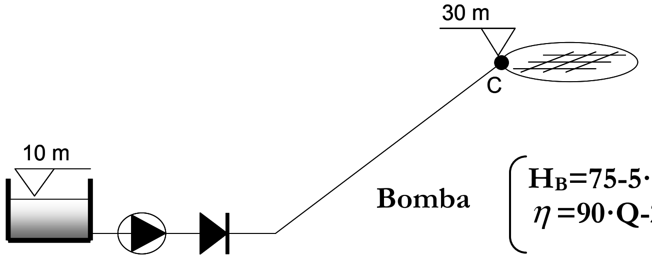
$$Pot_{2B} = 2 \cdot \frac{\gamma\, Q\, H}{\eta} = 2 \cdot \frac{9810 \cdot 0{,}0447 \cdot 42}{20 \cdot 0{,}0447 - 110 \cdot 0{,}0447^2} = 54{,}63\ kW$$

Periodo	Nº Bombas	Horas	kWh	€/kWh	€ a pagar
Valle	2	8	437,04	0,05	21,85
Punta	1	9	276,21	0,1	27,62
Llano	1	3,41	104,65	0,07	7,33
TOTAL		20,41	817,9		56,80

Resulta más barata la alternativa A, con un ahorro de 6,74 €/día.

PROBLEMA IV.7

En el punto de consumo C se necesita un caudal situado entre 80 l/s y 90 l/s, mientras que la presión en el mismo debe ser (exactamente) de 25 mca. Para ello se dispone de un total de 6 bombas iguales, mostrándose en la figura las ecuaciones características de una de ellas a su velocidad nominal (2900 rpm).



Bomba $\left\{ \begin{array}{ll} H_B = 75 - 5 \cdot 10^4 \cdot Q^2 & H_B \text{ en mca} \\ \eta = 90 \cdot Q - 2200 \cdot Q^2 & Q \text{ en m}^3/\text{s} \end{array} \right\}$

Válvula retención $\left\{ \begin{array}{l} k = 5{,}22 \\ D = 275 \text{ mm} \end{array} \right.$ **Tubería** $\left\{ \begin{array}{l} f = 0{,}016 \\ D = 275 \text{ mm} \\ L = 1100 \text{ m} \end{array} \right.$

Se pide:

a) **Calcular cuántas bombas hay que poner a funcionar en paralelo para cumplir las condiciones del punto C. ¿Caudal, altura de bombeo y potencia consumida por el conjunto de todas las bombas en paralelo? ¿Caudal, altura de bombeo y potencia consumida por cada una de las bombas mientras todas están funcionando en paralelo?**

b) **Si se pretende ahora suministrar el mismo caudal total a la misma altura de bombeo del apartado a), pero dejando en funcionamiento una sola bomba y modificando su velocidad de giro, ¿a qué velocidad debería girar? Comentar el resultado.**

c) **Representar sobre unos únicos ejes altura-caudal el funcionamiento del sistema en los dos apartados anteriores.**

SOLUCIÓN

a) La curva resistente será:

$$h^r = (55-10) + K_T \cdot Q^2 = 45 + K_T \cdot Q^2$$

Calcularemos cuánto vale el coeficiente K_T:

$$Válvula: \quad h_{m_v} = K \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{K}{2 \cdot g} \cdot \frac{Q^2}{A^2} = \frac{K \cdot Q^2}{2 \cdot g \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right)^2} = \frac{16 \cdot K \cdot Q^2}{2 \cdot g \cdot \pi^2 \cdot D^4}$$

$$h_{m_v} = \frac{8 \cdot K}{g \cdot \pi^2 \cdot D^4} Q^2$$

$$Tubería: \quad h_f = \frac{8 \cdot f \cdot L}{\pi^2 \cdot g \cdot D^5} Q^2$$

Así:

$$K_T = \frac{8K}{g\pi^2 D^4} + \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} = \frac{8 \cdot 5{,}22}{g \cdot \pi^2 0{,}275^4} + \frac{8 \cdot 0{,}016 \cdot 1100}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}275^5} \cong 1000 \frac{mca}{(m^3/s)^2}$$

Por tanto, la curva resistente queda: $h^r = 45 + 1000 \cdot Q^2$

Veamos ahora cuántas bombas en paralelo son necesarias:

2 bombas: $h^m = 75 - \frac{5 \cdot 10^4}{4} Q^2$ que con h^r proporciona un caudal de:

$Q = 0{,}047 \; m^3/s$

3 bombas: $h^m = 75 - \frac{5 \cdot 10^4}{9} Q^2$ que con h^r proporciona un caudal de:

$Q = 0{,}067 \; m^3/s$

4 bombas: $h^m = 75 - \frac{5 \cdot 10^4}{16} Q^2$ que con h^r proporciona un caudal de:

$Q = 0{,}085 \; m^3/s$

5 bombas: $h^m = 75 - \frac{5 \cdot 10^4}{25} Q^2$ que con h^r proporciona un caudal de:

$Q = 0{,}1\ m^3/s$

La solución es, por tanto: 4 bombas.

$$\begin{cases} h_{4b} = 45 + 1000 \cdot 0{,}085^2 = 75 - 3125 \cdot 0{,}085^2 = 52{,}225\ mca \\ Q_{4b} = 0{,}085\ m^3/s \end{cases}$$

Potencia que consumen las 4 bombas en total:

$$\boxed{Pot_{4b} = \frac{\gamma \cdot 0{,}085 \cdot 52{,}225}{90 \cdot \frac{0{,}085}{4} - 2200 \cdot \frac{0{,}085^2}{16}} = 47383\ W}$$

$$\begin{cases} h_{1b} = 52{,}225\ mca \\ Q_{4b} = \frac{Q_{4b}}{4} = 0{,}022\ m^3/s \end{cases}$$

Potencia que consume cada una de las bombas cuando las 4 están funcionando en paralelo:

$$\boxed{Pot_{1b} = \frac{Pot_{4b}}{4} = 11846\ W}$$

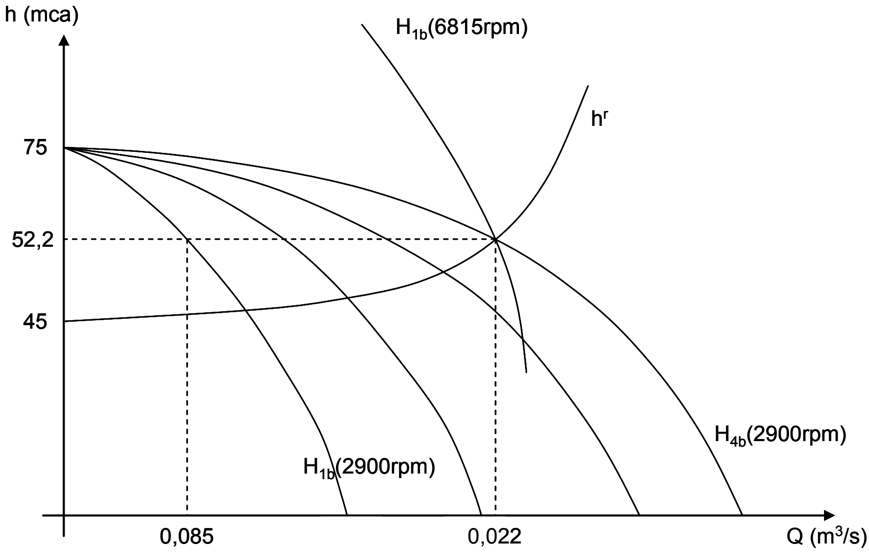
b) Debiendo ser el punto de funcionamiento:

$$Q = 0{,}085\ m^3/s \quad ; \quad h = 52{,}225\ mca$$

$$h_b = 75 \cdot \alpha^2 - 5 \cdot 10^4 \cdot Q^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{52{,}225 + 5 \cdot 10^4 \cdot 0{,}085^2}{75}} = 2{,}35$$

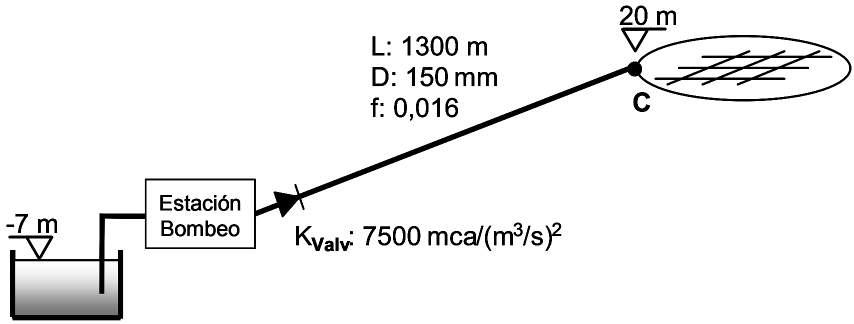
Un valor de $\alpha = 2{,}35$ es inaceptable (es decir, un aumento de la velocidad de giro de un 235%, lo que serían 6815 rpm). La alternativa del cambio de velocidad de giro no se puede tomar en consideración.

c)


h (mca)
H1b(6815rpm)
hr
75
52,2
45
H4b(2900rpm)
H1b(2900rpm)
0,085
0,022
Q (m3/s)

PROBLEMA IV.8

La figura muestra una instalación con la que se quiere elevar un caudal exacto de 15 l/s de agua desde el depósito inferior hasta el nudo de consumo C, en el que debe asegurarse una presión, también exacta, de 25 mca.



Falta equipar la estación de bombeo. Para ello, se dispone de hasta 3 ejemplares de cada uno de los 5 modelos de bomba, cuyas características se indican a continuación. Todas las bombas son de velocidad variable.

$$\textbf{Modelo 1}\begin{bmatrix} h_B = 25 - 70\cdot 10^3\cdot Q^2 \\ \eta = 192\cdot Q - 10818\cdot Q^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{Modelo 2}\begin{bmatrix} h_B = 47 - 100\cdot 10^3\cdot Q^2 \\ \eta = 150\cdot Q - 8000\cdot Q^2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Modelo 3}\begin{bmatrix} h_B = 68 - 2\cdot 10^6\cdot Q^2 \\ \eta = 567\cdot Q - 94444\cdot Q^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{Modelo 4}\begin{bmatrix} h_B = 78 - 21667\cdot Q^2 \\ \eta = 53{,}3\cdot Q - 889\cdot Q^2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Modelo 5}\begin{bmatrix} h_B = 72 - 2{,}35\cdot 10^5\cdot Q^2 \\ \eta = 183\cdot Q - 10444\cdot Q^2 \end{bmatrix}$$

(en todos los casos: Q en m^3/s, h_B en mca y η en tanto por uno)

Se pide:

Apoyándose en los cálculos necesarios, proponer dos soluciones distintas para subir el caudal deseado hasta el nudo C, con la presión deseada en el mismo.

SOLUCIÓN

Curva resistente: $$h^r = [(20+25)-(-7)] + K_{perd} \cdot Q^2$$

$$h^r = 45 + 7 + \left[\frac{8 \cdot 0{,}016 \cdot 1300}{\pi^2 g\, 0{,}15^5} + 7{,}5 \cdot 10^3\right] \cdot Q^2 = 52 + 30132 \cdot Q^2$$

Caudal deseado: 0,015 m³/s

Punto de funcionamiento de la Estación de Bombeo:

$$Q_B = 0{,}015\, m^3/s \quad ; \quad h_B = 52 + 30132 \cdot 0{,}015^2 = 58{,}8\, mca$$

Revisión de los bombeos disponibles:

B1 y B2 no llegan al h_B deseado ni aún a caudal cero.

Veamos el funcionamiento de B3:

$$68 - 2 \cdot 10^6 \cdot Q^2 = 52 + 30132 \cdot Q^2 \quad \rightarrow \quad Q = 0{,}0028\, m^3/s$$

Este caudal es insuficiente. Ni aún con las 3 bombas en paralelo se podría llegar al caudal deseado.

Veamos el funcionamiento de B4:

$$78 - 21667 \cdot Q^2 = 52 + 30132 \cdot Q^2 \quad \rightarrow \quad Q = 0{,}022\, m^3/s$$

Este caudal resulta excesivo. Estudiemos una disminución de la velocidad de giro:

$$78 \cdot \alpha^2 - 21667 \cdot 0{,}015^2 = 52 + 30132 \cdot 0{,}015^2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0{,}9 \quad ACEPTABLE$$

Veamos su rendimiento:

$$\eta = \frac{53{,}3}{0{,}9} \cdot 0{,}015 - \frac{889}{0{,}9^2} \cdot 0{,}015^2 = 0{,}64 \qquad \text{ACEPTABLE}$$

Esta constituye, por tanto, una **1ª solución válida**: **Poner a funcionar una de las bombas B4, disminuyendo por tanto su velocidad de giro en un 10%.**

Buscaremos ahora otra solución. Veamos el funcionamiento de B5:

$$72 - 2{,}35 \cdot 10^{5} \cdot Q^{2} = 52 + 30132 \cdot Q^{2} \quad \rightarrow \quad Q = 0{,}0087\, m^{3}/s$$

Este caudal es insuficiente. Es algo más de la mitad del deseado. Si probamos a poner 2 bombas B5 en paralelo:

$$72 - 2{,}35 \cdot 10^{5} \cdot \frac{Q^{2}}{4} = 52 + 30132 \cdot Q^{2} \quad \rightarrow \quad Q = 0{,}015\, m^{3}/s \quad \text{EXACTO}$$

Veamos su rendimiento:

$$\eta = 183 \frac{0{,}015}{2} - 10444 \frac{0{,}015^{2}}{4} = 0{,}79 \quad \text{ACEPTABLE}$$

Por tanto, ésta sería una **2ª solución: Poner a funcionar 2 de las bombas B5 en paralelo, a su velocidad nominal.**

PROBLEMA IV.9

Un depósito C, cuyo nivel de agua se encuentra a la cota 52,50 m, se alimenta bien desde el depósito A, a la cota 43,30 m, o bien desde un pozo, a la cota del agua de 30 m, como indica la figura. La estación de bombeo desde el depósito A está dotada de dos bombas horizontales BH iguales, acopladas en paralelo, con una válvula de retención VR1 a la salida de cada una de ellas, y una válvula de pie VP al inicio del colector de aspiración común. Las curvas características de cada una de las bombas BH tienen la siguiente forma (Q=m³/s):

$$\left.\begin{array}{l} H_b=27{,}50-2120\cdot Q^2 \\ \eta_g=31\cdot Q-300\cdot Q^2 \end{array}\right\} \quad NPSH_r=1{,}5+854{,}5\cdot Q^2$$

Por otra parte, en el pozo se ha instalado una bomba multicelular de pozo, BP, dotada de 5 rodetes iguales acoplados en serie, con una válvula de retención VR2 a la salida de esta bomba. Las curvas características de cada uno de estos rodetes son (Q=m³/s):

$$\left.\begin{array}{l} H_b=12{,}50-1188{,}80\cdot Q^2 \\ \eta_g=28{,}05\cdot Q-263{,}40\cdot Q^2 \end{array}\right\}$$

Los coeficientes de pérdidas menores de la instalación son:

$K_{VP}=72{,}6\ m/(m^3/s)^2$ $\quad K_{VR1}=120\ m/(m^3/s)^2$ $\quad K_{VR2}=80\ m/(m^3/s)^2$

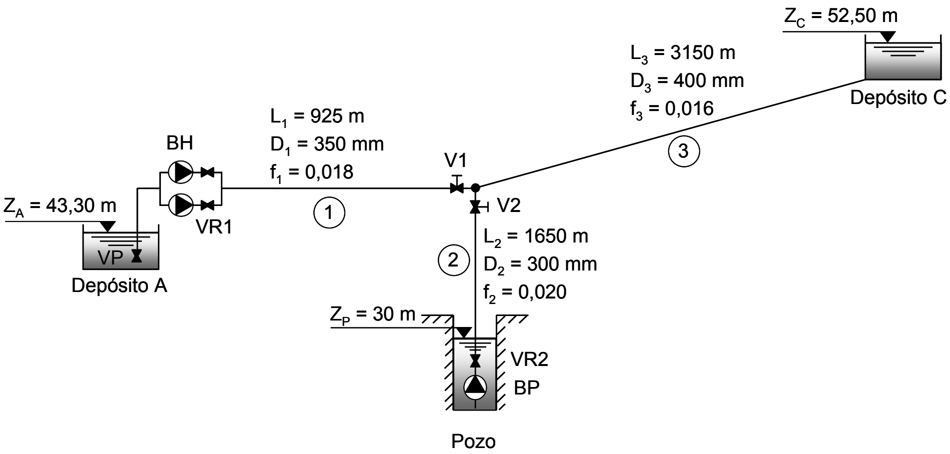
En estas condiciones, determinar:

a) **Caudal impulsado al depósito C, y potencia consumida, cuando solamente funciona la bomba de pozo, con V1 cerrada y V2 abierta (V2 no produce pérdidas menores). En este caso las dos BH estarán paradas.**

b) **Caudal impulsado al depósito C, y potencia total consumida, cuando funcionan simultáneamente las dos bombas BH, con V1 abierta (V1 no produce pérdidas menores) y V2 cerrada. En este caso la BP estará parada.**

c) **Cota máxima a la que se deberán instalar las dos BH para evitar la cavitación en las mismas, cuando funcionan según el apartado anterior. Guardar 1,5 m de seguridad frente a la cavitación.**

Despreciar las pérdidas en las válvulas V1 y V2 cuando se encuentren abiertas.



SOLUCIÓN

Coeficiente de pérdidas de cada tramo de tubería:

$$K_1 = \frac{8 \cdot f_1 \cdot L_1}{\pi^2 \cdot g \cdot D_1^5} = \frac{8 \cdot 0{,}018 \cdot 925}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}35^5} = 261{,}93\, m/(m^3/s)^2$$

$$K_2 = \frac{8 \cdot f_2 \cdot L_2}{\pi^2 \cdot g \cdot D_2^5} = \frac{8 \cdot 0{,}020 \cdot 1650}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}3^5} = 1122{,}09\, m/(m^3/s)^2$$

$$K_3 = \frac{8 \cdot f_3 \cdot L_3}{\pi^2 \cdot g \cdot D_3^5} = \frac{8 \cdot 0{,}016 \cdot 3150}{\pi^2 \cdot g \cdot 0{,}4^5} = 406{,}68\, m/(m^3/s)^2$$

a) Caudal impulsado cuando solamente funciona la bomba de pozo:

$$H_{BP} = Z_C - Z_P + (K_{VR2} + K_2 + K_3) \cdot Q_{23}^2$$

$$5 \cdot (12{,}50 - 1188{,}80 \cdot Q_{23}^2) = 52{,}5 - 30 + (80 + 1122{,}09 + 406{,}68) \cdot Q_{23}^2$$

De dónde resulta:

$$Q_{23} = 72{,}77\, l/s$$

$$H_{BP} = 5 \cdot (12{,}50 - 1188{,}80 \cdot 0{,}07277^2) = 31{,}02\, m$$

$$\eta_{BP} = 28{,}05 \cdot 0{,}07277 - 263{,}40 \cdot 0{,}07277^2 = 0{,}646$$

Potencia de accionamiento de la bomba de pozo:

$$P_{acc_{BP}} = \frac{\gamma \cdot Q_{23} \cdot H_{BP}}{\eta_{BP}} = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}07277 \cdot 31{,}02}{0{,}646} = 34{,}26\, kW$$

b) Caudal impulsado cuando funcionan las BH:

$$H_{BH} = Z_C - Z_A + (K_{VP} + K_1 + K_3) \cdot Q_{13}^2 + K_{VR1} \cdot \left(\frac{Q_{13}}{2}\right)^2$$

$$27{,}50 - 2120 \cdot \left(\frac{Q_{13}}{2}\right)^2 = 52{,}50 - 43{,}30 + (72{,}6 + 261{,}93 + 406{,}68) \cdot Q_{13}^2 + 120 \cdot \left(\frac{Q_{13}}{2}\right)^2$$

De dónde resulta:

$$Q_{13} = 118{,}6\, l/s$$

$$Q_{BH} = \frac{Q_{13}}{2} = 59{,}3\, l/s$$

$$H_{BH} = 27{,}50 - 2120 \cdot 0{,}0593^2 = 20{,}05\, m$$

$$\eta_{BH} = 31 \cdot 0{,}0593 - 300 \cdot 0{,}0593^2 = 0{,}783$$

Potencia de accionamiento de cada una de las bombas horizontales:

$$P_{acc_{BH}} = \frac{\gamma \cdot Q_{BH} \cdot H_{BH}}{\eta_{BH}} = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}0593 \cdot 20{,}05}{0{,}783} = 14{,}89\, kW$$

c) Cota máxima de las BH:

$$NPSH_{r_{BH}} = 1{,}5 + 854{,}5 \cdot 0{,}0593^2 = 4{,}50\, m$$

$$NPSH_{d_{BH}} = 10{,}33 - h_{a_{BH}} - 0{,}33 - 72{,}6 \cdot 0{,}1186^2 = 8{,}98 - h_{a_{BH}}$$

Para que no haga cavitación, $NPSH_{d_{BH}} \geq NPSH_{r_{BH}} + 1{,}5$, de donde resulta:

$$h_{a_{BH}} \leq 2{,}98\, m$$

Y así,

$$Z_{BH} \leq 43{,}30 + h_{a_{BH}} = 46{,}28\, m$$

PROBLEMA IV.10

Se tiene una instalación con la curva resistente $H_r = 20+60 \cdot Q^2$ (H_r en mca y Q en m^3/s), y que necesita un caudal de $Q = 0,6\ m^3/s$.

Por otro lado, se tienen 3 bombas iguales. Cada una de ellas presenta las siguientes características:

> **$H_b = 90-300 \cdot Q^2$ (H_b en mca y Q en m^3/s)**
>
> **$\eta = 8 \cdot Q-17 \cdot Q^2$ (η en tanto por uno y Q en m^3/s)**
>
> **Velocidad nominal: 2900 rpm**
>
> **Caudal nominal: $0,23\ m^3/s$**

a) Si para alimentar la instalación se colocan sólo 2 bombas en paralelo:

- **¿Hará falta añadir una válvula a la entrada de la instalación para disminuir el caudal total impulsado por las 2 bombas hasta los $0,6\ m^3/s$? ¿Por qué?**
- **Si es así, calcular las pérdidas de carga (en mca) que se producen en la válvula y el coeficiente de pérdidas de la válvula, en $mca/(m^3/s)^2$**

b) Calcular cuál es la potencia total consumida por las 2 bombas funcionando del modo indicado en el apartado anterior.

c) Si ahora de prefiere colocar las 3 bombas disponibles en paralelo pero variando la velocidad de giro de las mismas para ajustar el caudal total impulsado hasta los $0,6\ m^3/s$. Se pide:

- **Calcular cuál es la potencia total que consumen las tres bombas funcionando así.**
- **Justificar qué solución es mejor: la de los apartados a) y b) o la del apartado c).**

SOLUCIÓN

a) Curva de 2 bombas en paralelo:

$$\mathrm{h}_{2B} = 90 - 300\left[\frac{Q}{2}\right]^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{h}_{2B} = 90 - 75 \cdot Q^2$$

Sin válvula, el punto de funcionamiento se sitúa en un caudal de:

$$20 + 60 \cdot Q^2 = 90 - 75 \cdot Q^2 \quad \rightarrow \quad 135 \cdot Q^2 = 70 \quad \rightarrow \quad Q = 0{,}72\, m^3/s$$

0,72 m^3/s es mayor que los 0,6 m^3/s deseados, por tanto sí hace falta una válvula a la entrada de la instalación para disminuirlo.

Para 0,6 m^3/s, la curva resistente requiere:

$$h^r = 20 + 60 \cdot 0{,}6^2 = 41{,}6\, mca$$

Y la curva motriz proporciona:

$$h^m = h_{2B} = 90 - 75 \cdot 0{,}6^2 = 63\, mca$$

La diferencia:

$63 - 41{,}6 = 21{,}4\, mca$ son las pérdidas que debe producir la válvula

Cálculo del coeficiente de la válvula:

$$h_{mv} = K_v \cdot Q^2 \quad \rightarrow \quad K_v = \frac{h_{mv}}{Q^2} = \frac{21{,}4}{0{,}6^2} = 59{,}4 \frac{mca}{(m^3/s)^2}$$

b) Potencia consumida por 1 bomba cuando está en paralelo con otra:

$$Pot_{1B} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot h}{\eta} = \frac{9810 \cdot 0{,}3 \cdot 63}{8 \cdot 0{,}3 - 17 \cdot 0{,}3^2} = 213114\, W$$

Potencia total consumida por las 2 bombas en paralelo:

$$Pot_{2B} = 2 \cdot 213114 = 426228\, W$$

c) Curva de 1 bomba variando su velocidad:

$$h'_{1B} = 90\,\alpha^2 - 300\,Q^2$$

Curva de 3 bombas iguales en paralelo variando su velocidad:

$$h'_{3B} = 90\,\alpha^2 - 300\left(\frac{Q}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h'_{3B} = 90\,\alpha^2 - 33{,}3\,Q^2$$

Punto de funcionamiento (ahora sin válvula):

$$20 + 60\,0{,}6^2 = 90\,\alpha^2 - 33{,}3\,0{,}6^2 \quad \rightarrow \quad 41{,}6 = 90\,\alpha^2 - 12 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0{,}77$$

Potencia consumida por 1 bomba cuando está en paralelo con 2 más:

$$Pot_{1B} = \frac{\gamma\,Q\,h}{\eta} = \frac{9810\,0{,}2\,41{,}6}{\frac{8}{0{,}77}\cdot 0{,}2 - \frac{17}{0{,}77^2}\cdot 0{,}2^2} = 87666\,W$$

Potencia total consumida por las 3 bombas en paralelo:

$$Pot_{3B} = 3\,87666 = 262998\,W$$

Con solamente estos valores, es mejor la solución del apartado c) porque la potencia consumida en el bombeo es menor. Sin embargo, para mayor seguridad habrá que comprobar tiempos de funcionamiento y tarifa de la energía eléctrica en cada caso.