

*Análisis Modal de Cavidades Rectangulares con Postes
Metálicos*

Autor: Jose Luis Garcia Garcia
Director: Vicente Boria Esbert

November 28, 2007

Abstract

Este trabajo tiene por objeto la caracterización modal de cavidades rectangulares con postes metálicos, de sección transversal circular y altura variable, situados en posiciones arbitrarias de la cavidad.

Para la resolución del problema, se ha aplicado un método híbrido que combina integración de contorno y expansión en serie de modos resonantes de la cavidad rectangular. Dicho método conduce a una ecuación integral, cuya resolución se ha llevado a cabo mediante el Método de los Momentos.

Se pretende emplear los resultados obtenidos en el análisis electromagnético de dispositivos pasivos a emplear en aplicaciones de alta frecuencia (comunicaciones espaciales, móviles, etc).

Contents

1	Introducción	4
1.1	Motivación y estado del arte	4
1.2	Estructura de la tesina	6
2	Revisión del método BIRME-3D	7
2.1	Introducción	7
2.2	Desarrollo para estructuras 3D arbitrarias	8
2.3	Modos Resonantes de la Cavidad	15
2.4	Matriz de Admitancias Generalizada en forma de Series	15
3	Funciones base RWG (Rao-Wilton-Glisson)	17
3.1	Introducción	17
3.2	Desarrollo de Funciones Base	17
3.3	Propiedades de las funciones base RWG	18
3.4	Aproximación de la corriente mediante funciones base RWG	19
4	Análisis modal de cavidades rectangulares con postes metálicos	22
4.1	Introducción	22
4.2	Cavidad con poste cilíndrico	22
4.3	Cavidad con poste cilíndrico y tornillo de sintonía	24
4.4	Cavidad con poste en forma de vaso	24
4.5	Cavidad con poste en forma de vaso y tornillo de sintonía	26
5	Obtención de los parámetros S	28
5.1	Introducción	28
5.2	Dispositivo con cavidad con poste cilíndrico	28
5.3	Dispositivo con cavidad en forma de vaso	29
6	Conclusiones	33
7	Bibliografía	34



Figure 1: Satélite de telecomunicaciones que hace uso de filtros de microondas

1 Introducción

1.1 Motivación y estado del arte

El análisis de estructuras pasivas de microondas con gran precisión constituye uno de los temas de mayor interés en los últimos tiempos, debido a la tendencia actual de construir sistemas de telecomunicación a frecuencias más altas y con mayores anchos de banda. Este incremento en la frecuencia de operación supone un menor margen de tolerancias en el proceso de fabricación, y por lo tanto una mayor necesidad de poder predecir el alcance de ciertas limitaciones inherentes a la fabricación de dispositivos reales.

En particular, el estudio de estructuras compuestas por secciones de guía rectangular con postes conductores u otros obstáculos de sección cilíndrica (por ejemplo postes con reentrantes) ha cobrado importancia en los últimos años, debido a su utilización práctica en la construcción de diversos tipos de filtros, tales como combline, interdigitales o de modo evanescente, donde los postes se sitúan a lo largo de una cavidad rectangular, generando cada uno de ellos un polo en la respuesta electromagnética del filtro [1]. En algunos filtros, se puede hacer uso también de los postes como tornillos de sintonía, que en este caso no son los elementos principales del filtro, sino que se usan para regular la respuesta de éste.

Finalmente, otra aplicación importante de los postes es su inclusión en filtros de modo dual como tornillos horizontales, verticales e inclinados, que permiten ajustar la respuesta en frecuencia de dichos filtros y conseguir el acoplo necesario en los mismos.

En la mayoría de los casos, debido a la reducida distancia entre los obstáculos conductores y los puertos de la sección de guía bajo estudio, resulta necesario obtener una representación multimodal para caracterizar el bloque mediante algún tipo de matriz gene-

ralizada (por ejemplo de dispersión, admitancias o impedancias). A la hora de calcular esta matriz, podemos hacer uso de algún código basado en métodos estrictamente numéricos que emplean una discretización espacial (Finite Element Method, FEM) o temporal (Finite Difference Time Domain, FDTD) [2, 3, 4], los cuales se basan en mallados tridimensionales que suelen emplear elevados tiempos de cálculo y requisitos de memoria. Por este motivo, y a pesar de su gran versatilidad, estos métodos no son prácticos para herramientas de diseño asistido por ordenador (CAD), sobre todo cuando en dichos procesos se necesita realizar repetidos cálculos con un elevado número de puntos en frecuencia. Resulta por tanto preferible usar métodos de análisis más especializados que eviten mallados volumétricos y cálculos en frecuencia punto a punto.

El primer requisito se satisface mediante el uso de la técnica de adaptación modal (Mode-Matching, MM), cuya implementación, sin embargo, depende de cada estructura en particular (por ejemplo, un poste cilíndrico en una guía rectangular [5, 6, 7] o un poste reentrante [8]). Para superar la falta de flexibilidad de este método se puede utilizar un método híbrido de integral de contorno y adaptación modal (Boundary Integral - Mode Matching, BI-MM) [9], el cual se puede aplicar para estructuras de simetría radial con forma arbitraria. Sin embargo, en este método (al igual que sucede con la adaptación modal) se precisa la resolución de ecuaciones que contienen funciones trascendentes que dependen de la frecuencia, por lo que es necesario resolver el problema frecuencia a frecuencia. Este inconveniente supone esfuerzos computacionales elevados, especialmente cuando se precisa de soluciones en grandes anchos de banda con mucha resolución frecuencial.

Con el uso de métodos que trabajan en el dominio de Laplace [10], se evita tener que realizar los cálculos para cada punto en frecuencia. Con estos métodos, la matriz generalizada buscada se puede obtener en forma de expansión de polos en el dominio de Laplace, lo cual permite el cálculo de la respuesta en frecuencia dentro de una banda amplia y con la resolución deseada en tiempos de cálculo prácticamente despreciables. Dentro de este tipo de métodos, los más interesantes están basados en la formulación en el dominio espacial de los sistemas de ecuaciones, que permiten determinar macro-modelos de orden reducido para dispositivos de microondas utilizando técnicas de subespacio de Krylov de gran eficiencia y robustez [11, 12]. Por este motivo, en [13], [14] se han usado las técnicas del subespacio de Krylov en combinación con las citadas técnicas FEM y FDTD, solventado en parte la ineficiencia de estos métodos para el diseño de dispositivos de microondas con geometrías tridimensionales complejas. Una mejora aún mayor se propone en [15], donde la necesidad de un mallado más fino alrededor del obstáculo se ha reducido al representar el obstáculo como un “macro-elemento”, representado en el dominio de Laplace por una matriz generalizada de inmitancias (admitancias o impedancias).

La necesidad de un mallado tridimensional en los métodos del dominio de Laplace puede evitarse mediante el uso de una formulación espacial de las ecuaciones de los campos electromagnéticos en forma integral. Esta posibilidad se recoge en un método híbrido que combina la técnica de ecuación integral con expansión modal resonante (Boundary-

Integral Resonant Mode Expansión, BI-RME), el cual ya se ha aplicado al cálculo de la matriz de admitancias generalizada (en inglés GAM) de componentes en guías de ondas con geometrías arbitrarias en dos y tres dimensiones [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Las reducidas dimensiones del problema obtenido siguiendo esta técnica, y la posibilidad de encontrar la expansión de polos para la GAM mediante la resolución de un problema lineal de autovalores, supone una gran ventaja en cuanto a tiempos de cálculo y requisitos de memoria.

La aplicación del método BI-RME a la estructura particular que estudiamos en la presente tesina presenta varias ventajas: en primer lugar, el campo electromagnético producido por la presencia del obstáculo conductor puede considerarse como el campo generado por las corrientes inducidas en el obstáculo situado dentro de una cavidad resonante rectangular, lo que reduce el número de incógnitas del problema; en segundo lugar, la función de Green presente en el método BI-RME se puede calcular de forma muy eficiente mediante el uso de las series obtenidas aplicando el método de Ewald [23, 24].

1.2 Estructura de la tesina

En el segundo capítulo presentamos el desarrollo del método BIRME-3D (Boundary Integral - Resonant Mode Expansion) para resolver de forma eficiente problemas electromagnéticos mediante la resolución de un problema de autovalores y autovectores. Para el método que desarrollaremos en este capítulo necesitamos definir una serie de funciones base que nos ayudan a modelar la corriente superficial que existe en un conductor.

En el tercer capítulo se describen las funciones base elegidas (funciones base RWG). En este capítulo se hace un rápido repaso del porque de su elección, de sus propiedades y demostramos brevemente como son capaces de ayudarnos a representar la corriente que fluye por una superficie conductora.

En el cuarto capítulo se presenta un resultado comparativo. En este apartado, comparamos las frecuencias de resonancia modales de una cavidad perturbada obtenidas mediante nuestro método BIRME-3D implementado en Fortran con las obtenidas mediante el uso de una aplicación comercial de simulación electromagnética (HFSS 10.0).

En el quinto capítulo volvemos a comprobar la exactitud del método desarrollado comparando con la misma herramienta comercial. Sin embargo, esta vez no comparamos frecuencias de resonancia, sino que vamos más allá y obtenemos los parámetros S de la conexión en cascada de varias de estas cavidades perturbadas, emulando la construcción de filtros de microondas para aplicaciones de comunicaciones espaciales.

Finalmente, en el capítulo sexto se presentan las conclusiones a las que ha dado lugar este trabajo.

2 Revisión del método BIRME-3D

2.1 Introducción

El método BI-RME (Boundary Integral - Resonant Mode Expansion) es una técnica eficiente para la solución numérica de problemas electromagnéticos mediante su formulación en términos de problemas lineales de autovalores y autovectores.

Este método fue introducido inicialmente para el cálculo de modos en guías de sección transversal arbitraria [25]. Siguiendo las líneas del BEM (Boundary Element Method) [26], las frecuencias de corte y las corrientes en las paredes de la guía se encontraban resolviendo una ecuación de autovalores, obtenida imponiendo la condición de cortocircuito al campo eléctrico generado en la sección transversal por las corrientes incógnitas de las paredes.

A diferencia del BEM, sin embargo, las corrientes se consideraron dentro del resonador 2D rectangular o circular, y el campo eléctrico se representó de forma híbrida, análoga a la representación descrita en [22] para cavidades resonantes. Esta representación híbrida, consistente en integrales de contorno (BI) y expansión en serie de modos resonantes (RME) de convergencia rápida, permitió transformar el problema de autovalores no lineal, partiendo de una integración de contorno, en un problema lineal. Esta transformación se hizo introduciendo un número limitado de variables auxiliares (las amplitudes modales), además de las variables involucradas en la representación de la corriente sobre las paredes. La desventaja del incremento en el número de variables fue compensada ampliamente por la ventaja de evitarse tener que resolver un complejo y a veces inviable problema no lineal de autovalores obtenido usando el tradicional BEM.

Más recientemente (ver [27] y [28]), el método BI-RME fue considerado desde un punto de vista diferente, como la solución por el Método de los Momentos (MoM) de un par de ecuaciones integrales lineales de autovalores, derivadas directamente del problema diferencial original. Esta aproximación se adapta mejor a la descripción de la naturaleza matemática del problema, y proporciona una mejor comprensión de las aproximaciones numéricas.

Aunque la teoría del método BI-RME es más compleja que la teoría del tradicional método BEM, la implementación numérica del nuevo método es sólo ligeramente más complicada.

En cualquier caso, la eficiencia, flexibilidad y fiabilidad de los programas basados en el método BI-RME compensan esta pequeña desventaja, al igual que sucede también al compararlos con otros métodos más populares, tales como el Método de los Elementos Finitos (FEM) (ver comparación recogida en [28]).

Los mismos conceptos se encuentran en la extensión del método BI-RME al estudio de los modos resonantes de cavidades con forma arbitraria [17, 18, 19, 20, 21, 22]. En

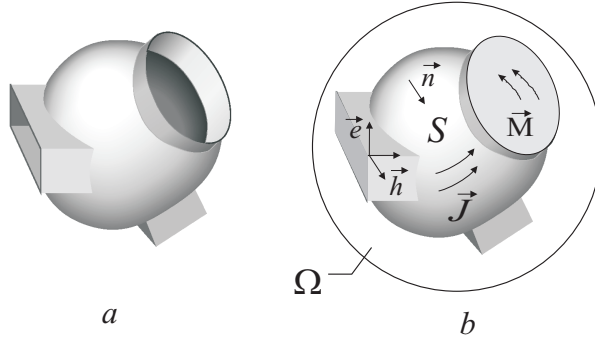


Figure 2: Bloque de un circuito en guía de onda (a); el mismo bloque con puertos cortocircuitados y dentro de un resonador externo.

este caso las corrientes sobre las paredes se consideran dentro de una cavidad con forma canónica (esférica, rectangular, cilíndrica,...).

En este capítulo describimos un algoritmo unificado, basado en la representación BI-RME del campo electromagnético, que conduce a ecuaciones de variable de estado, igual que en los métodos de Diferencias Finitas (FD) y FEM, y que fue presentado originalmente en [22]. El número de variables de estado involucradas en este método (equivalente al orden de las matrices) es en comparación con dichos métodos mucho más pequeño, y además el mallado sólo se realizará en este caso en dos dimensiones (sobre la superficie), en lugar de sobre todo el volumen de la estructura. Como consecuencia, este método tiene ventajas desde el punto de vista de los requisitos de memoria y de eficiencia computacional.

2.2 Desarrollo para estructuras 3D arbitrarias

En la Fig. 2a podemos ver un bloque de un circuito en guía de ondas. El medio, isótropo, homogéneo y sin pérdidas, lo representamos mediante constantes reales ε, μ . El contorno S coincide parcialmente con la superficie del conductor perfecto y también con la sección de las guías a través de las cuales este bloque se conecta al resto de la estructura. En general, el campo en estas secciones lo representamos a través de una combinación de modos, por encima y por debajo de la frecuencia de corte. Considerando que tenemos un total de N modos, el bloque se puede representar por una matriz de admitancias generalizada (GAM) de $N \times N$ elementos, relacionando las corrientes modales i_1, i_2, \dots, i_N a las tensiones modales v_1, v_2, \dots, v_N de la siguiente forma

$$Y_{m,n} = \frac{i_m}{v_n}; \quad v_i = 0 \quad \forall i \text{ con } i \neq n \quad (1)$$

Definimos por \mathbf{e}_n y $\mathbf{h}_n = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_n$ los vectores modales eléctricos y magnéticos normalizados, respectivamente, del n -ésimo modo de cada sección de la guía (\mathbf{n} es el vector normal unitario entrante en S). La relación de normalización es

$$\int_{S_p} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n dS = \int_{S_p} \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{h}_n dS = \delta_{mn} \quad (2)$$

donde S_p representa la sección transversal de los puertos y δ_{mn} es la delta de Kronecker

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (3)$$

Para simplificar la notación, extendemos la definición de estos vectores a toda la superficie S , asumiendo que son cero fuera de la sección de su correspondiente guía de ondas. Con esta definición, el campo eléctrico tangencial sobre el contorno lo representamos como

$$\mathbf{E}_T = \sum_{n=1}^N v_n \mathbf{e}_n \quad (4)$$

y las corrientes modales están relacionadas con el campo magnético tangencial \mathbf{H}_T a través de la ecuación

$$i_n = \int_S \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{H}_T dS \quad (5)$$

Para determinar la GAM tenemos que encontrar la relación funcional entre las amplitudes i_n y v_n .

Según [22], el campo en una región finita sin fuentes se puede representar como el efecto de distribuciones de corriente eléctrica y magnética sobre la superficie

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) &= \frac{\eta}{jk} \nabla_s \int_S g^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' - \left(jk\eta \int_S \overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \right. \\ &\quad \left. + \int_S \nabla \times \overline{\mathbf{G}}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \right)_T + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_T(\mathbf{r}) &= \frac{1}{jk\eta} \nabla_s \int_S g^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' - \left(\frac{jk}{\eta} \int_S \overline{\mathbf{G}}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \right. \\ &\quad \left. - \int_S \nabla \times \overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \right)_T + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (7)$$

donde \mathbf{r} y \mathbf{r}' denotan posiciones genéricas en S , $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ es el número de onda a la frecuencia ω ; $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ es la impedancia del medio; \mathbf{J} y \mathbf{M} son las densidades superficiales de corriente eléctrica y magnética; g^e y g^m son las funciones de Green para el potencial escalar eléctrico y magnético, respectivamente; $\overline{\mathbf{G}}^A$ y $\overline{\mathbf{G}}^F$ son las funciones diádicas de Green para el potencial vector eléctrico y magnético; ∇_s es el gradiente superficial. En nuestro problema la fuente magnética viene dada por

$$\mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_T = -\mathbf{n} \times \sum_{n=1}^N v_n \mathbf{e}_n = -\sum_{n=1}^N v_n \mathbf{h}_n \quad (8)$$

y tenemos que encontrar la corriente eléctrica como solución de la “Ecuación Integral del Campo Eléctrico” (EIFE), o la “Ecuación Integral del Campo Magnético” (MFIE), obtenida imponiendo las condiciones de contorno apropiadas en (6) ó (7).

En el Método de la Integral de Contorno (BIM), la densidad de corriente se considera en espacio libre, de tal modo que se emplean las funciones de Green para espacio libre. En el método BI-RME, intentando buscar un problema de autovalores lineal, consideramos la densidad de corriente dentro de una cavidad resonante Ω , tal y como podemos ver en la Fig. 2b, de tal modo que tendremos que usar las funciones de Green correspondientes a esta cavidad. Hay que tener en cuenta que las paredes de esta cavidad no afectan a la solución, ya que el campo generado por éstas es cero en la región de interés, donde viene definido por la condiciones de la superficie S .

En la teoría de cavidades resonantes, el campo puede expresarse como la suma de modos solenoidales e irrotacionales [29]. En términos de potenciales, esta división se corresponde con el uso del contraste de Coulomb, donde los potenciales escalares se corresponden con los potenciales estáticos generados por cargas eléctricas y magnéticas y los potenciales vector son solenoidales. Usando estos potenciales (ver [30]), g^e es independiente de la frecuencia y representa la función de Green para el potencial electrostático dentro de la cavidad; además, $\overline{\mathbf{G}}^A$ se puede representar como

$$\overline{\mathbf{G}}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_m(\mathbf{r})\mathbf{E}_m(\mathbf{r}')}{k_m^2 - k^2} \approx \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{E}_m(\mathbf{r})\mathbf{E}_m(\mathbf{r}')}{k_m^2(k_m^2 - k^2)} \quad (k \leq k_{max}; k_M \leq \zeta k_{max} < k_{M+1}) \quad (9)$$

donde $\overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función diádica independiente de la frecuencia, k_1, k_2, \dots, k_M son los primeros M números de onda resonantes de la cavidad Ω , $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_M$ son los vectores modales resonantes eléctricos solenoidales, considerando la condición de normalización $\int_{\Omega} |\mathbf{E}_m|^2 d\Omega = 1$, k_{max} es el número de onda de la frecuencia más alta en la banda de interés, y ζ es un parámetro numérico mayor que 1 (en la práctica un valor en torno a 4-5 suele ser suficiente). Hay que tener en cuenta que ζ juega un papel de "factor de precisión", ya que el número de modos incluidos en el sumatorio aumenta cuando crece este factor.

Las funciones magnéticas de Green de la cavidad son duales con respecto a las eléctricas: g^m es independiente de la frecuencia y representa la función de Green para el potencial magnetoestático en la cavidad; $\overline{\mathbf{G}}^F$ lo podemos representar como

$$\overline{\mathbf{G}}^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_m(\mathbf{r})\mathbf{H}_m(\mathbf{r}')}{k_m^2 - k^2} \approx ; \overline{\mathbf{G}}_0^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{H}_m(\mathbf{r})\mathbf{H}_m(\mathbf{r}')}{k_m^2(k_m^2 - k^2)} \quad (k \leq k_{max}; k_M \leq \zeta k_{max} < k_{M+1}) \quad (10)$$

donde $\mathbf{H}_m = k_m^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_m$ es el vector magnético del m-ésimo modo resonante solenoidal.

Considerando una cavidad Ω de forma canónica (esférica, rectangular, ...), podemos conocer de forma analítica las funciones de Green y los vectores modales (los vectores

modales normalizados podemos encontrarlos en numerosos libros de texto, por ejemplo en [31]) que son reales en todos los casos. Por tanto, en el método BI-RME el núcleo de las integrales de contorno es real, suponiendo una clara ventaja respecto al método BIM.

Introduciendo los desarrollos en serie de las funciones de Green, así como (8), en (6) y (7), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_T(\mathbf{r}) &= \frac{\eta}{jk} \nabla \int_S g^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N v_n \mathbf{e}_n \\
&- \left(jk\eta \int_S \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' + jk^3\eta \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{E}_m(\mathbf{r})}{k_m^2(k_m^2 - k^2)} \int_S \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} dS' \right)_T \\
&+ \sum_{n=1}^N v_n \left(\int_S \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_0^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS' + k^2 \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{E}_m(\mathbf{r})}{k_m(k_m^2 - k^2)} \int_S \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{h}_n dS' \right)_T
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_T(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} - \frac{1}{jk\eta} \sum_{n=1}^N v_n \nabla_s \int_S g^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS' \\
&+ \left(\int_S \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' + k^2 \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{H}_m(\mathbf{r})}{k_m(k_m^2 - k^2)} \int_S \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} dS' \right)_T \\
&+ \frac{jk}{\eta} \sum_{n=1}^N v_n \left(\int_S \overline{\mathbf{G}}_0^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS' + k^2 \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{H}_m(\mathbf{r})}{k_m^2(k_m^2 - k^2)} \int_S \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{h}_n dS' \right)_T
\end{aligned} \tag{12}$$

y forzando en (11) la condición (4), e introduciendo en (11) y (12) la siguiente definición de amplitudes modales

$$a_m = \frac{1}{k_m^2(k_m^2 - k^2)} \left(jk\eta \int_S \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} dS - k_m \sum_{n=1}^N v_n \int_S \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{h}_n dS \right) \tag{13}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta}{jk} \nabla_s \int_S g^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' - \left(jk\eta \int_S \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' + k^2 \sum_{m=1}^M a_m \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \right)_T \\
&= \sum_{n=1}^N v_n \left[\frac{\mathbf{e}_n(\mathbf{r})}{2} - \left(\int_S \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_0^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS' \right)_T \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\mathbf{H}_T(\mathbf{r}) = \left(\int_S \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' - \frac{jk}{\eta} \sum_{m=1}^M a_m k_m \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) \right)_T$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} - \frac{1}{jk\eta} \sum_{n=1}^N v_n \nabla_s \int_S g^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_s' \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS' \\
& + \frac{jk}{\eta} \sum_{n=1}^N v_n \left(\int_S \overline{\mathbf{G}}_0^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS' - \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{H}_m(\mathbf{r})}{k_m^2} \int_S \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{h}_n dS' \right) \quad (15)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (14) y (15) contienen integrales de contorno (BI) con núcleos independiente de la frecuencia y expansiones en series de modos resonantes (RME). Esta estructura es característica del método BI-RME.

La ecuación (14) la resolvemos mediante el Método de los Momentos (MoM), usando las amplitudes modales como variables auxiliares y representando el vector incógnita de la densidad superficial de corriente como

$$\mathbf{J} = -\frac{jk}{\eta} \sum_{p=1}^P b_p \mathbf{V}_p \quad (16)$$

donde \mathbf{V}_p son conjuntos completos de funciones base vectoriales sobre S linealmente independientes y tangentes a la superficie, y b_p son los coeficientes incógnita que debemos resolver. Estas funciones base cumplen las siguientes propiedades:

1. \mathbf{V}_p son continuas sobre las regiones continuas de S .
2. Las funciones \mathbf{V}_p son no solenoidales

$$\nabla_s \cdot \mathbf{V}_p = u_p \neq 0 \quad (17)$$

3. Las funciones u_p son linealmente independientes.

Como consecuencia de (16)-(17), tenemos

$$-\frac{\eta}{jk} \nabla_s \cdot \mathbf{J} = \sum_{p=1}^P b_p u_p \quad (18)$$

y debido a la propiedad 3, el lado derecho de la ecuación (18) sólo puede ser cero si todos los coeficientes b_p son cero.

La discretización del MoM la implementamos multiplicando e integrando (14) con las funciones \mathbf{V} (Método de Galerkin). De este modo obtenemos dos sistemas de ecuaciones algebraicas, que podemos escribir de forma matricial

$$-\mathbf{S}\mathbf{b} + k^2(\mathbf{V}\mathbf{b} + \mathbf{R}'_T \mathbf{a}) = \mathbf{L}'\mathbf{v} \quad (19)$$

En estas ecuaciones \mathbf{a} y \mathbf{b} son los vectores con los coeficientes a , b y c , mientras que \mathbf{v} es el vector de las tensiones aplicadas (ver (4)). El resto de matrices, cuyos elementos se definen en la Tabla 1, no dependen de la frecuencia.

Tabla 1:
DEFINICIÓN DE MATRICES

$$\begin{aligned}
S_{rp} &= \int_S \int_S \nabla_s \cdot \mathbf{V}_r(\mathbf{r}) g^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{V}_p(\mathbf{r}') dS dS' & V_{rp} &= \int_S \int_S \mathbf{V}_r(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{V}_p(\mathbf{r}') dS dS' \\
G_{\ell n} &= \int_S \int_S \nabla_s \cdot \mathbf{h}_\ell(\mathbf{r}) g^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS dS' & T_{\ell n} &= \int_S \int_S \mathbf{h}_\ell(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}}_0^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS dS' \\
R'_{mp} &= \int_S \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{V}_p dS & F_{mn} &= \int_S \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{h}_n dS \\
L'_{rn} &= \int_S \int_S \mathbf{V}_r(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_0^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{r}') dS dS' - \int_S \frac{\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{e}_n}{2} dS \\
\ell, n &= 1, 2, \dots, N & m &= 1, 2, \dots, M & r, p &= 1, 2, \dots, P
\end{aligned}$$

Para llegar a la ecuación (19) tenemos que considerar las siguientes relaciones vectoriales

$$\mathbf{V} \cdot \nabla_s g^e = \nabla_s \cdot (g^e \mathbf{V}) - (\nabla_s \cdot \mathbf{V}) g^e \quad (20)$$

Entonces, usando el teorema de la divergencia superficial y observando que $g^e = 0$ en el contorno de la cavidad Ω , o tomando un contorno infinitesimal sobre S en caso de que esta superficie no toque en la cavidad, tenemos

$$\int_S \mathbf{V}_i \cdot \nabla_s \int_S g^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{V}_j(\mathbf{r}') dS' dS = - \int_S \int_S g^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_s \cdot \mathbf{V}_i(\mathbf{r}) \nabla'_s \cdot \mathbf{V}_j(\mathbf{r}') dS' dS \quad (21)$$

Por lo tanto, multiplicando por \mathbf{V}_i e integrando en S obtenemos los términos $S_{ij} b_j$.

El siguiente paso es obtener una nueva ecuación sustituyendo (16) en (13), multiplicando por la expresión $k_m^2(k_m^2 - k^2)$. La ecuación resultante es

$$\mathbf{K}^4 \mathbf{a} - k^2(\mathbf{K}^2 \mathbf{a} + \mathbf{R}' \mathbf{b}) = -\mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{v} \quad (22)$$

donde $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_M\}$ y \mathbf{F} es una matriz independiente de k , definida en la Tabla 1. Además, las matrices \mathbf{S} y \mathbf{V} son simétricas y definidas positivas (ver [19]).

Las ecuaciones (19) y (22) se pueden expresar en forma matricial, obteniendo el sistema

$$(\mathbf{A} - k^2 \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (23)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}\mathbf{F} \\ -\mathbf{L}' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^2 & \mathbf{R}' \\ \mathbf{R}'_t & \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Para todos aquellos valores de k para los cuales $(\mathbf{A} - k^2\mathbf{B})$ no sea singular, podemos despejar el vector incógnita

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - k^2\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{v} \quad (24)$$

e introduciendo (16) en (15), y usando (5) obtenemos el vector de corriente

$$\mathbf{i} = \frac{1}{jk\eta}\mathbf{G}\mathbf{v} + \frac{jk}{\eta}((\mathbf{T} - \mathbf{F}_T\mathbf{K}^{-2}\mathbf{F})\mathbf{v} - \mathbf{L}'_T\mathbf{b} - \mathbf{F}_T\mathbf{K}\mathbf{a}) \quad (25)$$

Para llegar a esta expresión, hacemos uso de la relación vectorial

$$\mathbf{h} \cdot \nabla_s g^m = \nabla_s \cdot (g^m \mathbf{h}) - (\nabla_s \cdot \mathbf{h})g^m \quad (26)$$

e integrando en S y aplicando el teorema de la divergencia superficial al primer término, tenemos

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \nabla_s g^m = \int_\Gamma (g^m \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_S (\nabla_s \cdot \mathbf{h})g^m dS \quad (27)$$

siendo Γ el contorno de la superficie S , y \mathbf{n} el vector normal al contorno. Teniendo en cuenta que la superficie S corresponde a los puertos de acceso a la estructura, el campo magnético \mathbf{h} será paralelo al contorno, por lo que el primer término será cero. Por lo tanto, podemos escribir

$$\int_S \mathbf{h}_i \cdot \nabla \int_S g^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{h}_j(\mathbf{r}') dS' dS = - \int_S \int_S g^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_s \cdot \mathbf{h}_i(\mathbf{r}) \nabla'_s \cdot \mathbf{h}_j(\mathbf{r}') dS' dS \quad (28)$$

La expresión (25) la podemos reescribir a partir de la matriz \mathbf{C} definida en (23) y del vector incógnita \mathbf{x} (24), para obtener finalmente

$$\mathbf{i} = (1/jk\eta)\mathbf{G}\mathbf{v} + (jk/\eta)[(\mathbf{T} - \mathbf{F}_T\mathbf{K}^{-2}\mathbf{F})\mathbf{v} + \mathbf{C}_T\mathbf{x}] \quad (29)$$

donde las nuevas matrices \mathbf{G} y \mathbf{T} (ver Tabla 1) son también independientes de k . Sustituyendo (23) en (29) obtenemos finalmente la relación $\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v}$, donde la GAM buscada viene dada por

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{jk\eta}\mathbf{G} + \frac{jk}{\eta}[(\mathbf{T} - \mathbf{F}_T\mathbf{K}^{-2}\mathbf{F}) + \mathbf{C}_T(\mathbf{A} - k^2\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}] \quad (30)$$

2.3 Modos Resonantes de la Cavidad

La matriz $(\mathbf{A} - k^2\mathbf{B})$ es singular cuando k es un autovalor del problema de autovalores generalizado

$$(\mathbf{A} - k^2\mathbf{B})\mathbf{x} = 0 \quad (31)$$

Este problema es idéntico al que hay que resolver para la determinación de los modos resonantes de la cavidad Ω , cuando todas las tensiones aplicadas son cero y \mathbf{E}_T vale cero en toda la superficie S . Algunas de estas frecuencias coinciden con las frecuencias de resonancia de la cavidad para nuestra estructura cuando cortocircuitamos los puertos, mientras que las otras corresponden a las frecuencias de resonancia de la cavidad complementaria, limitada por la superficie Ω y por S . El hecho de que las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} sean definidas positivas (ver [19]) da lugar a autovalores reales positivos y autovectores $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(P+M)}$ reales. La condición de normalización asumida es $\mathbf{x}_T^{(i)} \mathbf{B} \mathbf{x}^{(i)} = 1$.

Una vez resuelto el problema de autovalores para los modos de la cavidad cortocircuitada, es posible también el cálculo de los campos eléctricos y magnéticos dentro de la cavidad para cada uno de los modos resonantes. Usando (11), (16) y (18), obtenemos el i -ésimo autovector eléctrico de la cavidad con la fórmula

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=1}^P b_{ni} (\mathbf{F}_n(\mathbf{r}) - k_i^2 \mathbf{A}'_n(\mathbf{r})) - k_i^2 \sum_{m=1}^M a_{mi} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \quad (32)$$

donde a_{mi}, b_{ni} son elementos de los vectores $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ y

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{r}) = -\nabla \int_S g^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_n(\mathbf{r}') dS' \quad (33)$$

$$\mathbf{A}'_n(\mathbf{r}) = \int_S \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{V}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (34)$$

Para el campo magnético, teniendo en cuenta la relación $\mathbf{H}_i = \nabla \times \mathbf{E}_i / k_i$ podemos escribir

$$\mathbf{H}_i = -k_i \sum_{n=1}^P b_{ni} \mathbf{B}'_n(\mathbf{r}) - k_i \sum_{m=1}^M a_{mi} k_m \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) \quad (35)$$

donde

$$\mathbf{B}'_n(\mathbf{r}) = \int_S \nabla \times \overline{\mathbf{G}}_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{V}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (36)$$

Las ecuaciones (32) y (35) nos permiten calcular el campo electromagnético de los modos resonantes de la cavidad cortocircuitada.

2.4 Matriz de Admitancias Generalizada en forma de Series

La matriz de los autovectores $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(P+M)})$ permite la ortonormalización de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B}

$$\mathbf{X}_T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(k_1^2, k_2^2, \dots, k_{P+M}^2) \quad \mathbf{X}_T \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{1} \quad (37)$$

Usando esta expresión se puede verificar fácilmente que

$$(\mathbf{A} - k^2\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{X}(\mathbf{\Lambda} - k^2\mathbf{1})^{-1}\mathbf{X}_T = \sum_{i=1}^{P+M} \frac{\mathbf{x}^{(i)} \mathbf{x}_T^{(i)}}{k_i^2 - k^2} \quad (38)$$

Sustituyendo en (30) encontramos la expansión polar de la GAM en el dominio de k .

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{jk\eta} \mathbf{Y}^A + \frac{jk}{\eta} \mathbf{Y}^B + \frac{jk}{\eta} \sum_{i=1}^{P+M} \frac{\mathbf{y}^{(i)} \mathbf{y}_T^{(i)}}{k_i^2 - k^2} \quad (39)$$

donde

$$\mathbf{Y}^A = \mathbf{G} \quad \mathbf{Y}^B = \mathbf{T} - \mathbf{F}_T \mathbf{K}^{-2} \mathbf{F} \quad \mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{C}_T \mathbf{x}^{(i)} \quad (40)$$

Los primeros autovalores del problema generalizado (31) los podemos calcular utilizando librerías matemáticas (por ejemplo LAPACK) en tiempos de cálculo razonablemente cortos.

Tener en cuenta que, a pesar de las aproximaciones del método numérico, esta expresión cumple todos los requisitos físicos de una matriz de admitancias generalizada para un circuito recíproco y sin pérdidas, esto es

- es simétrica;
- es imaginaria pura;
- es una función impar con la frecuencia;
- en los elementos de la diagonal los residuos de todos los polos son positivos.

Además, la ecuación (39) tiene la forma correcta para ser utilizada con el algoritmo descrito en [32], que permite encontrar la expansión polar de la matrix de admitancias de un circuito complejo a partir de la matrix de admitancias de los diferentes bloques.

3 Funciones base RWG (Rao-Wilton-Glisson)

3.1 Introducción

En el capítulo anterior ya se mencionó que para representar el vector incógnita de la densidad superficial de corriente (J) necesitamos conjuntos completos \mathbf{V}_p de funciones base vectoriales sobre S linealmente independientes y tangentes a la superficie.

Para la construcción de las funciones debemos discretizar las superficies. Para modelar superficies de forma arbitraria hemos elegido un mallado en forma de triángulos (ver figura 3) ya que estos son capaces de ajustarse de forma muy exacta a cualquier geometría. Por otra parte, existen paquetes informáticos (como el software GID 8.0 usado en nuestros desarrollos) que automatizan el mallado de una superficie en triángulos, permiten cambiar la densidad de mallado de forma rápida y permiten la implementación de una interfaz con programas desarrollados en Fortran.

Así pues, hemos elegido una serie de funciones base, denominadas *RWG basis functions* que como veremos a continuación son adecuadas para nuestro caso de mallar superficies mediante figuras triangulares.

3.2 Desarrollo de Funciones Base

Como ya hemos mencionado, asumiremos que se ha modelado la superficie con una serie de triángulos definidos por caras, vertices y lados, tal y como se puede ver en la figura 3.

Cada función base se asocia con el lado interior entre dos triángulos y su valor es 0 en toda la superficie excepto en esos dos triángulos que definen el lado interior. En la figura 4 se pueden ver dichos triángulos (T_n^+ y T_n^-) que corresponden al lado n de dicha

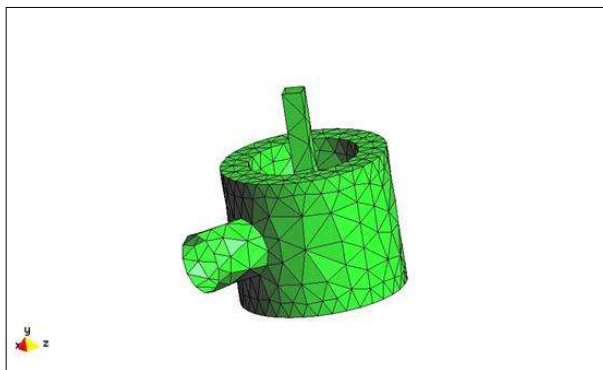


Figure 3: Superficie mallada mediante triángulos

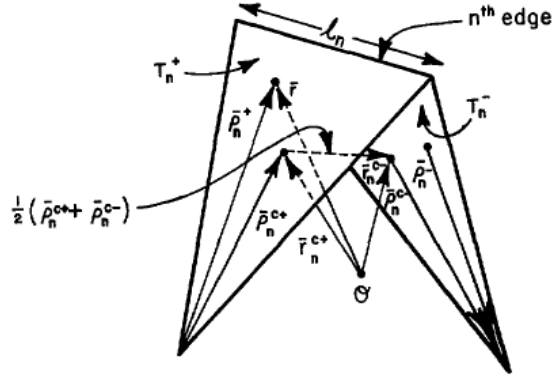


Figure 4: Par de triángulos y parámetros geométricos asociados con su lado interior

distribución triangular de superficie.

Los puntos en el interior de T_n^+ se referencian mediante el vector de posición r definido con respecto a O o mediante el vector de posición p_n^+ definido con respecto al vertice libre de T_n^+ . Se podría hacer la misma definición para el vector p_n^- excepto que este se dirige hacia el vértice libre de T_n^- . La elección positiva o negativa de los triángulos se determina por la elección de una dirección de corriente positiva para el lado n .

Así pues, se define la función base asociada al lado n como:

$$F_n(r) = \begin{cases} \frac{l_n p_n^+}{2A_n^+}, & \text{con } r \text{ en } T_n^+ \\ \frac{l_n p_n^-}{2A_n^-}, & \text{con } r \text{ en } T_n^- \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (41)$$

donde l_n es la longitud del lado y A_n es el área del triángulo T_n .

3.3 Propiedades de las funciones base RWG

Las funciones base F_n se usan para aproximar la corriente superficial y las propiedades que cumplen son:

- La corriente no tiene componentes normales al borde (incluyendo los lados comunes) de la superficie formada por el par de triángulos T_n^+ y T_n^- , y por tanto no existen líneas de carga a lo largo de estos bordes.
- La componente normal de la corriente al borde n es constante y continua a lo largo de este borde como puede verse con la ayuda de la figura 5, la cual nos muestra

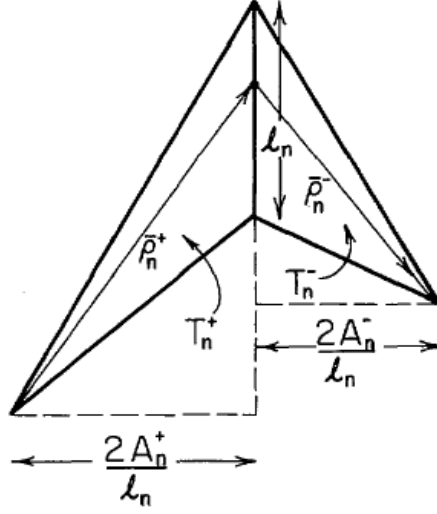


Figure 5: Geometría para la construcción de la componente normal al borde de la función base

que la componente normal de p_n a lo largo del lado n es justamente la altura del triángulo T_n con el borde n como base y la altura expresada como $(2A_n)/l_n$. Este factor es el que normaliza a F_n de tal forma que la densidad de flujo normal al borde n es unitario, asegurándonos la continuidad de la corriente normal al borde. Este resultado, conjuntamente con la propiedad anterior, implica que todos los lados de T_n^+ y que T_n^- están libres de líneas de carga.

- La divergencia superficial de F_n , la cual es proporcional a la densidad de carga superficial asociada con el elemento base, es:

$$\nabla_s f_n = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^+}, & \text{con } r \text{ en } T_n^+ \\ \frac{-l_n}{A_n^-}, & \text{con } r \text{ en } T_n^- \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (42)$$

Por tanto, la densidad de carga se mantiene constante en cada triángulo y la carga total asociada con el par de triángulos T_n^+ y T_n^- es cero.

3.4 Aproximación de la corriente mediante funciones base RWG

La corriente en la superficie S se puede aproximar con N funciones base, donde N es el número de lados interiores (lados de triángulos que no forman parte del borde exterior

de S), de tal forma que se cumple:

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N I_n F_n \quad (43)$$

Cada función base está asociada con cada lado que no forma parte del borde exterior de S , por tanto, existen hasta 3 funciones base que tienen valor no nulo para cada triángulo. Sin embargo, en un determinado lado, solo las funciones base asociadas con ese lado tienen una componente de corriente normal a ese lado (como ya se explicó en la primera propiedad), mientras que las otras corrientes base en triángulos adyacentes son paralelas al lado.

Además, como la componente normal de F_n en el lado n es unitaria, cada coeficiente I_n puede ser interpretado como la componente normal de la densidad de corriente fluyendo a través del lado n . Por otra parte, podemos ver que las funciones base son independientes en cada triángulo ya que la normal de la corriente en el lado n , I_n , es una cantidad independiente. En los bordes de la superficie, la suma de las componentes normales de la corriente en lados opuestos de la superficie se cancela a causa de la continuidad de corriente. Además, tampoco se suman contribuciones de posibles funciones base asociadas con estos bordes ya que no se construyen.

A causa de la considerable variación de la dirección de las líneas de flujo de F_n en el interior de un triángulo, no es obvio a simple vista que una superposición lineal de funciones base sea capaz de representar un flujo de corriente constante fluyendo en una dirección arbitraria en el interior de un triángulo.

De todas formas, el que esto sea posible, lo podemos observar con la ayuda de la figura 6, la cual muestra un triángulo T_q cuyos lados hemos nombrado arbitrariamente como 1, 2 y 3. Si usamos los vectores p_1 , p_2 y p_3 tal como se muestra, las funciones base en T_q son $f_i = (l_i/2A_q)p_i$, $i = 1,2,3$, donde A_q es el área del triángulo y donde, por simplicidad, las direcciones de las corrientes se definen salientes al triángulo en cada uno de sus bordes.

Así pues, es posible deducir de la figura y de la definición de f_i que la combinación lineal $l_2f_1 - l_1f_2$ y $l_3f_1 - l_1f_3$ son vectores constantes para cada punto r en T_q y son paralelos a los lados 3 y 2, respectivamente. Por tanto, como las dos combinaciones son linealmente independientes (es decir, no paralelos), podemos sintetizar un vector constante de una dirección y magnitud arbitraria en el interior de T_q con una combinación lineal apropiada.

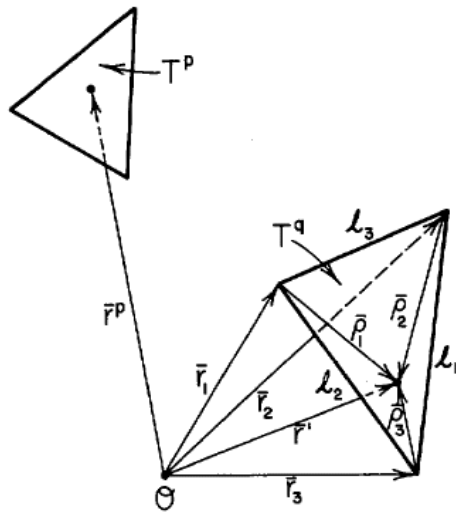


Figure 6: Coordenadas locales y lados para el triángulo T^q con punto de observación en el triángulo T^p

4 Análisis modal de cavidades rectangulares con postes metálicos

4.1 Introducción

En este capítulo mostraremos una serie de ejemplos de análisis donde podremos ver las diferentes estructuras que se pueden analizar con la teoría desarrollada. Por ser la motivación de esta tesina, nos centraremos única y exclusivamente en el análisis modal de postes metálicos que contactan de forma directa con el vivo del coaxial que conecta con la cavidad. Aunque debemos destacar que con este tipo de funciones base y la teoría desarrollada se podrían simular cavidades con cualquier tipo de elemento metálico en su interior.

Para cada una de las estructuras analizadas, compararemos los resultados aquí obtenidos (modos de la cavidad perturbada) con los proporcionados por un programa comercial (HFSS 10.0) basado en el método de los elementos finitos (Finite Elements Method, FEM).

Con el citado programa HFSS, se ha realizado un mallado adaptativo de la estructura hasta que hemos conseguido una buena convergencia dentro de las posibilidades del ordenador empleado. En cualquier caso, el error que se mostrará en todos los casos es un error con respecto a estas simulaciones, que aunque bastante precisas, pueden tener también un cierto margen de error. Debido a que en general, la convergencia del programa comercial es en sentido contrario a la que tenemos en BI-RME (con HFSS las frecuencias crecen con cada paso, mientras que con BI-RME disminuyen al aumentar la precisión) el hecho de obtener resultados muy parecidos con configuraciones de alta precisión sin que estos lleguen nunca a cruzarse, nos da una buena muestra de la fiabilidad de las simulaciones, haciendo suponer que la solución exacta esté en un punto intermedio al resultado obtenido con ambos métodos.

En todos los resultados que serán presentados tanto en este capítulo como en el siguiente, se ha utilizado un mismo ordenador para realizar todos los cálculos, compuesto por un ordenador portátil con procesador Intel Centrino Mobile a 1,7 GHz y con memoria RAM de 1 Gb.

4.2 Cavidad con poste cilíndrico

Se ha tomado como ejemplo una cavidad de dimensiones: $a \times b \times c = 22.15 \times 47.55 \times 25.4$ mm (siendo a la anchura, b la altura y c la longitud de la cavidad).

En su interior se ha situado un poste cilíndrico vertical de altura $h = 37.37$ mm y radio $r = 3.3$ mm. Este poste cilíndrico está conectado a la cavidad mediante otro poste cilíndrico horizontal (emulando el vivo de un coaxial que entra dentro de la cavidad) situado a 25 mm de altura y con radio de 2 mm. El conjunto poste-cavidad puede verse en la figura 7.

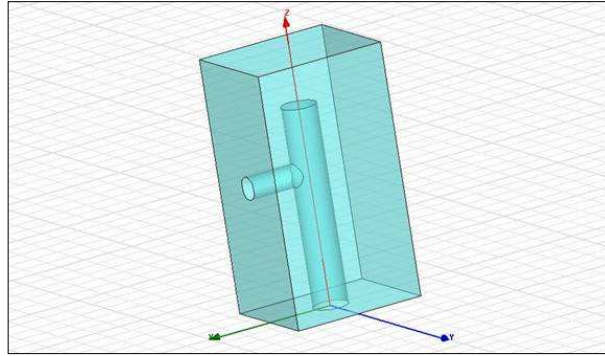


Figure 7: Cavity alargada con poste cilíndrico centrado sin tornillo de sintonía

En la tabla 2 se presenta una comparativa entre las frecuencias de resonancia para los 5 primeros modos de la cavidad perturbada, así como para el décimo y el vigésimo modo.

Podemos observar la gran exactitud que se consigue con el método BIRME 3D, ya que la máxima desviación en frecuencia que se presenta respecto a HFSS apenas es de un 0,2 % (en el décimo modo que pasa de 10.8973 GHz en HFSS a 10.9218 GHz con BIRME 3D).

Por otra parte, mientras que con el software comercial HFSS se ha tardado 43 minutos y 5 segundos, con nuestro código BIRME 3D implementado en Fortran, tan sólo se ha tardado 4 minutos y 31 segundos. Además, con HFSS el número máximo de modos que se pueden obtener en este tipo de simulaciones (llamada Eigenmode) es de 20, frente a los 471 modos que hemos obtenido con el método BIRME 3D (usando una frecuencia máxima de 40 GHz).

MODOS	BIRME 3D	HFSS
1	2.8493 GHz	2.8574 GHz
2	5.4860 GHz	5.4810 GHz
3	6.1805 GHz	6.1657 GHz
4	7.6758 GHz	7.6626 GHz
5	8.2167 GHz	8.2018 GHz
10	10.9218 GHz	10.8973 GHz
20	14.5641 GHz	14.5556 GHz

Tabla 2: Comparación de resultados para los 5 primeros modos, el décimo modo y el vigésimo modo para el caso de una cavidad con poste cilíndrico

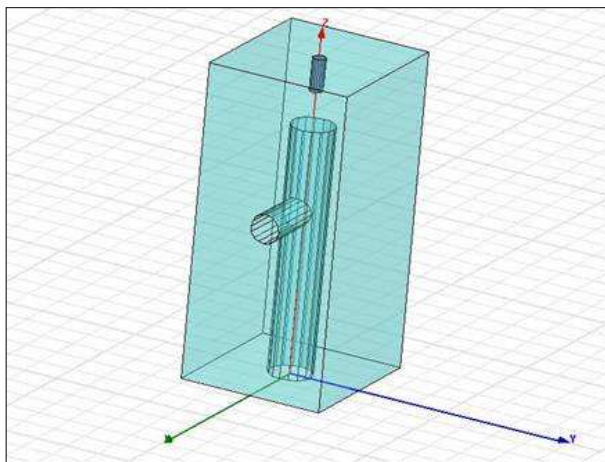


Figure 8: Cavity alargada con poste cilíndrico centrado con tornillo de sintonía

4.3 Cavity con poste cilíndrico y tornillo de sintonía

Para este ejemplo se ha vuelto a tomar como ejemplo una cavidad de dimensiones: $a \times b \times c = 22.15 \times 47.55 \times 25.4$ mm y en su interior se ha vuelto a situar un poste cilíndrico vertical de altura $h = 37.37$ mm y radio $r = 3.3$ mm conectado a la cavidad mediante otro poste cilíndrico horizontal situado a 25 mm de altura y con radio de 2 mm.

En esta ocasión se ha dispuesto un tornillo de sintonía en la parte superior de la cavidad. Estos tornillos de sintonía se utilizan en el diseño de filtros y componentes para sistemas de comunicaciones espaciales para compensar las posibles desviaciones de la respuesta en frecuencia debido a posibles defectos de fabricación. Este tornillo es de longitud 5 mm y de radio 1 mm. Esta configuración puede verse en la figura 8.

En la tabla 3 se presenta una comparativa entre las frecuencias de resonancia para los 5 primeros modos de la cavidad perturbada, así como para el décimo y el vigésimo modo.

Una vez más, podemos observar la gran exactitud que se consigue con el método BIRME 3D, ya que la máxima desviación en frecuencia que se presenta respecto a HFSS apenas vuelve a ser de un 0,2 %. Además podemos volver a observar el considerable ahorro de tiempo de la simulación con BIRME 3D implementado en Fortran (4 minutos y 57 segundos) frente a la simulación con HFSS (45 minutos y 33 segundos).

4.4 Cavity con poste en forma de vaso

Para este ejemplo se ha tomado como ejemplo una cavidad de dimensiones: $a \times b \times c = 30 \times 15 \times 20$ mm (siendo a la anchura, b la altura y c la longitud de la cavidad).

MODOS	BIRME 3D	HFSS
1	2.8318 GHz	2.8340 GHz
2	5.4378 GHz	5.4203 GHz
3	6.1824 GHz	6.1694 GHz
4	7.6262 GHz	7.6004 GHz
5	8.2208 GHz	8.2133 GHz
10	10.9087 GHz	10.8966 GHz
20	14.3807 GHz	14.3776 GHz

Tabla 3: Comparación de resultados para los 5 primeros modos, el décimo modo y el vigésimo modo para el caso de una cavidad con poste cilíndrico y tornillo de sintonía

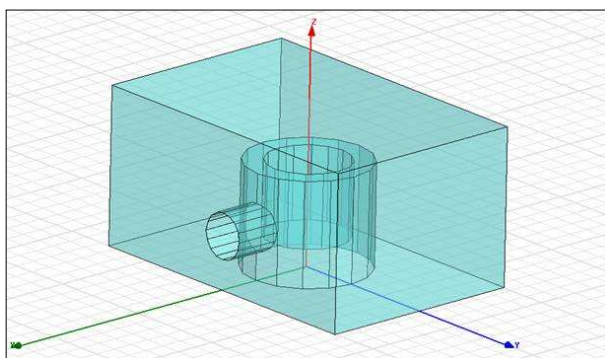


Figure 9: Cavidad con poste en forma de vaso centrado sin tornillo de sintonía

En su interior se ha situado un poste vertical en forma de vaso de altura total $h = 10$ mm, radio interior $r_1 = 4$ mm, radio exterior $r_2 = 6$ mm y cuyo fondo del vaso se sitúa a 3 mm de altura. Además, este poste en forma de vaso conecta de nuevo con la cavidad con un poste cilíndrico horizontal situado a 5 mm de altura y de radio 2.2 mm. La configuración descrita puede verse en la figura 9.

Al igual que en los ejemplos anteriores, en la tabla 4 se presenta una comparativa entre las frecuencias de resonancia para los 5 primeros modos de la cavidad perturbada, así como para el décimo y el vigésimo modo.

Al igual que pasaba con los ejemplos anteriores, podemos ver como no existen apenas desviaciones entre las frecuencias de resonancia de la cavidad obtenidos con BIRME 3D y HFSS, mientras que sí que existen grandes diferencias entre los tiempos de cálculo (4 minutos y 29 segundos frente a 31 minutos y 47 segundos) a favor de BIRME 3D. Además, nuevamente, con BIRME 3D se pueden obtener 513 modos (fijando la frecuencia máxima en 60 GHz) mientras que con HFSS tan sólo se puede obtener un máximo de 20 modos como ya se mencionó anteriormente.

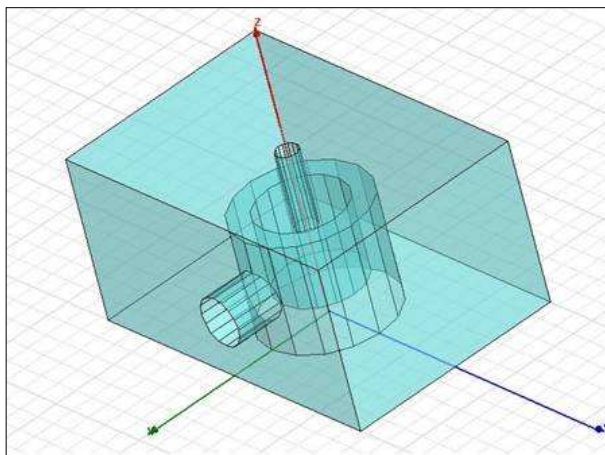


Figure 10: Cavity with post in the shape of a vase with a tuning screw

MODOS	BIRME 3D	HFSS
1	5.3485 GHz	5.3575 GHz
2	9.6861 GHz	9.6853 GHz
3	10.0583 GHz	10.0715 GHz
4	12.5543 GHz	12.5495 GHz
5	13.8023 GHz	13.7920 GHz
10	16.8972 GHz	16.8849 GHz
20	21.0517 GHz	21.0388 GHz

Tabla 4: Comparación de resultados para los 5 primeros modos, el décimo modo y el vigésimo modo para el caso de una cavidad con poste en forma de vaso

4.5 Cavity with post in the shape of a vase and tuning screw

In this example, the previous cavity has been taken with dimensions: $a \times b \times c = 30 \times 15 \times 20$ mm and inside it a vertical post in the shape of a vase with total height $h = 10$ mm, inner radius $r_1 = 4$ mm, outer radius $r_2 = 6$ mm and whose bottom of the vase is located at 3 mm of height. This post with the cavity with a horizontal cylindrical post located at 5 mm of height and of radius 2.2 mm. In addition, this example presents a tuning screw in the upper part of the cavity with a radius of 1 mm and a length of 7 mm. The cavity and its metallic perturbing post can be seen in figure 10.

As in the previous examples, in table 5 a comparative is presented between the resonance frequencies for the 5 first modes of the perturbed cavity, as well as

para el décimo y el vigésimo modo.

Al igual que pasaba con los ejemplos anteriores, podemos ver como no existen apenas desviaciones entre las frecuencias de resonancia de la cavidad obtenidos con BIRME 3D y HFSS, mientras que sí que existen grandes diferencias entre los tiempos de cálculo (5 minutos y 13 segundos frente a 34 minutos y 14 segundos) a favor de BIRME 3D, y si existen diferencias en el número de modos obtenibles (510 modos frente a 20 modos).

MODOS	BIRME 3D	HFSS
1	4.5364 GHz	4.5285 GHz
2	9.0153 GHz	9.0127 GHz
3	9.7321 GHz	9.7494 GHz
4	10.8336 GHz	10.8434 GHz
5	16.0223 GHz	16.007 GHz
10	19.9746 GHz	19.9982 GHz
20	21.0517 GHz	21.0388 GHz

Tabla 5: Comparación de resultados para los 5 primeros modos, el décimo modo y el vigésimo modo para el caso de una cavidad con poste en forma de vaso y tornillo de sintonía

5 Obtención de los parámetros S

5.1 Introducción

Los elementos vistos en el capítulo anterior (diferentes tipos de cavidades con postes metálicos en su interior) se utilizan para la implementación de diferentes dispositivos de microondas. El uso más típico que se hace de ellos es el diseño de diferentes tipos de filtros, tales como pueden ser: filtros de modo evanescente, filtros en guía con tornillo de sintonía, filtros de modo dual o giradores de polarización. Adicionalmente, la formulación y el tipo de funciones base utilizados, nos permite que estos filtros estén conectados con otros dispositivos mediante cables coaxiales, soldando el vivo del coaxial al poste interior de la cavidad.

Sin embargo, la formulación implementada no sirve por sí sola para realizar el análisis de este tipo de dispositivos, ya que éstos suelen incluir también saltos entre guías, por lo que es necesario combinarlo junto con otras rutinas que analizan estas uniones y después realizan la conexión en cascada de los resultados obtenidos para cada sección. Para el análisis de los saltos entre guías utilizamos un módulo Fortran basado en el método de la ecuación integral [33]. No entraremos en el desarrollo de estas rutinas, ya que va más allá del objeto de estudio de esta tesis.

Por tanto, el método implementado en esta tesis se ha integrado con módulos existentes que implementan el método de la ecuación integral y que realizan la conexión en cascada de diversos dispositivos, de tal forma que se ha caracterizado la respuesta en frecuencia mediante la obtención de sus parámetros S . Así pues, mediante la validación de parámetros S para estructuras con más de una cavidad podremos demostrar la exactitud del método desarrollado una vez más.

Esta validación, al igual que la realizada en la obtención de los modos de la cavidad, se hará comparando el código Fortran con simulaciones de estructuras empleando el programa comercial HFSS. Para ello hemos simulado dos ejemplos simples en un ordenador portátil con procesador Intel Centrino Mobile a 1,7 GHz y con memoria RAM de 1 Gb. Por otra parte, la banda simulada va de 8 a 17 GHz, habiéndose tomado 90 puntos en frecuencia para HFSS y 180 para nuestro código BI-RME 3D (cuyo nombre de proyecto es HITO6). Sin embargo, a pesar de tomar el doble de puntos en frecuencia, mientras nuestro código ha tardado alrededor de 4 minutos, HFSS ha necesitado alrededor de 20 horas para una simulación de suficiente precisión para los ejemplos que se mostrarán a continuación.

5.2 Dispositivo con cavidad con poste cilíndrico

Se ha tomado como primer ejemplo una cavidad con un poste metálico soldada al vivo del coaxial que la alimenta, conectada a una segunda cavidad con otro poste metálico en su interior mediante una guía rectangular. La estructura implementada puede verse en la

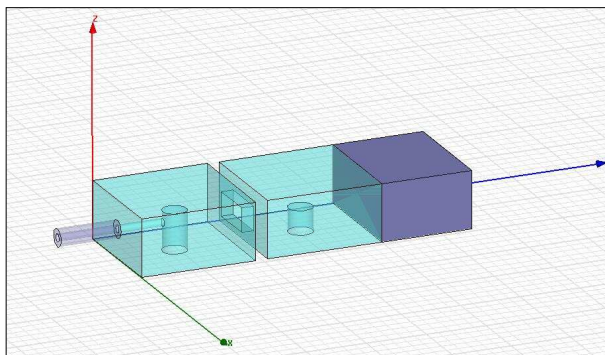


Figure 11: Estructura con 2 cavidades conectadas, una de las cuales está conectada al coaxial de entrada

figura 11.

Para este ejemplo se han elegido dos cavidades iguales de dimensiones: $a \times b \times c = 19.05 \times 9.525 \times 19.05$ mm (siendo a la anchura, b la altura y c la longitud de la cavidad). En el interior de ambas cavidades se han situado postes cilíndricos verticales de altura $h = 6.5$ mm y radio $r = 2$ mm. En la primera cavidad, el poste cilíndrico está conectado con otro poste cilíndrico horizontal (vivo de un coaxial que entra dentro de la cavidad) situado a 4.7625 mm de altura (a mitad de altura de la cavidad) y con radio de 0.635 mm (ejemplo del radio interior típico para un coaxial). Ambas cavidades están conectadas mediante la guía rectangular mencionada, de medidas $8 \times 4 \times 2$ mm.

En las figuras 12 y 13 se puede ver una comparativa entre las magnitudes de los parámetros S_{11} y S_{12} obtenidos con HFSS y con nuestro código implementado en Fortran en la banda que va de los 8 a los 17 GHz. Podemos observar que para el parámetro S_{11} ambas curvas son exactamente iguales.

Por otra parte, al comparar los resultados obtenidos para el parámetro S_{12} , podemos observar una pequeña diferencia de un máximo de apenas 1 dB (alrededor de los 11 GHz), siendo esta también despreciable si la comparamos con los -35 dB de nivel que marca el S_{12} en ese punto en frecuencia.

5.3 Dispositivo con cavidad en forma de vaso

Como segundo ejemplo hemos tomado una cavidad con un poste metálico en forma de vaso soldado al coaxial que la alimenta, conectada nuevamente mediante guía rectangular a una segunda cavidad con un poste cilíndrico en su interior. Esta estructura puede verse en la figura 14.

Las cavidades elegidas son de dimensiones: $a \times b \times c = 19.05 \times 9.525 \times 19.05$ mm

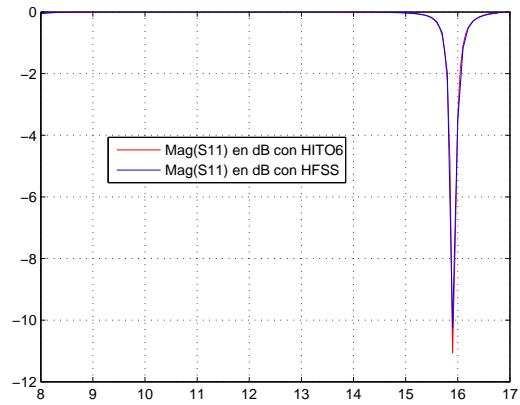


Figure 12: Comparativa del módulo del S_{11} entre el código implementado en Fortran (denominado HITO6) y HFSS en la banda 8 a 17 GHz.

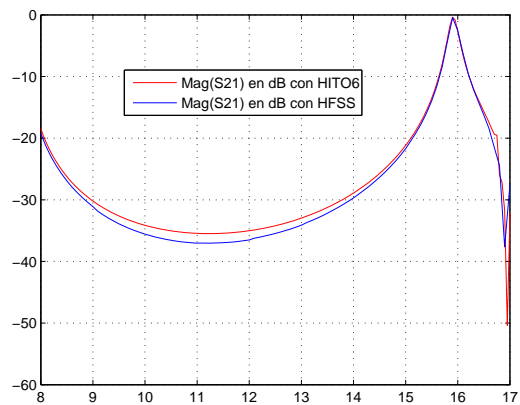


Figure 13: Comparativa del módulo del S_{12} entre el código implementado en Fortran (denominado HITO6) y HFSS en la banda 8 a 17 GHz.

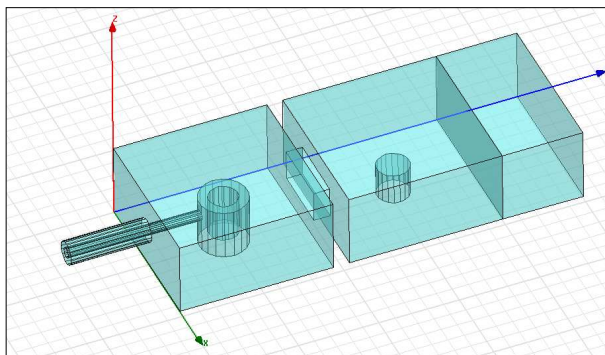


Figure 14: Estructura con 2 cavidades conectadas, una de las cuales contiene un poste metálico en forma de vaso y está conectada al coaxial de entrada

(siendo a la anchura, b la altura y c la longitud de la cavidad). En el interior de la primera cavidad se ha situado un poste vertical en forma de vaso de altura total $h = 5$ mm, radio interior $r_1 = 4$ mm, radio exterior $r_2 = 6$ mm y cuyo fondo del vaso se sitúa a 3 mm de altura. Además, este poste en forma de vaso conecta de nuevo con la cavidad con un poste cilíndrico horizontal situado a 5 mm de altura y de radio 2.2 mm. Por otra parte, la segunda cavidad presenta un poste cilíndrico centrado en su interior de radio $r = 2$ mm y de altura $h = 4$ mm y esta conectada a la primera mediante una guía rectangular de dimensiones $8 \times 4 \times 2$ mm.

En las figuras 15 y 16 se puede ver una comparativa entre las magnitudes de los parámetros S_{11} y S_{12} obtenidos con HFSS y con nuestro código implementado en Fortran en la banda que va de los 8 a los 17 GHz. Podemos observar que para el parámetro S_{11} ambas curvas son exactamente iguales, salvo en una pequeña banda alrededor de 16 GHz donde existe una pequeña variación de apenas 0.5 dB, la cual es despreciable.

Por otra parte, al comparar los resultados obtenidos para el parámetro S_{12} , podemos observar una pequeña diferencia de un máximo de apenas 2 dB (alrededor de los 11 GHz), siendo esta también despreciable si la comparamos con los -30 dB de nivel que marca el S_{12} en ese punto en frecuencia.

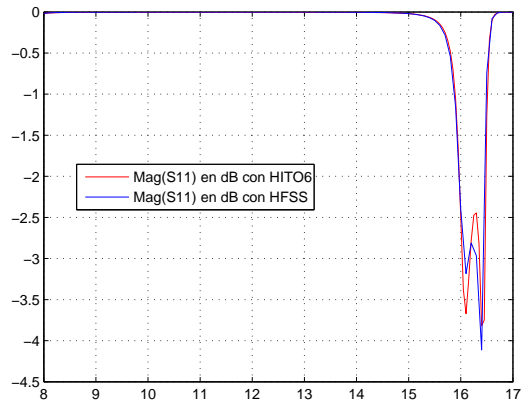


Figure 15: Comparativa del módulo del S_{11} entre el código implementado en Fortran (denominado HITO6) y HFSS en la banda 8 a 17 GHz.

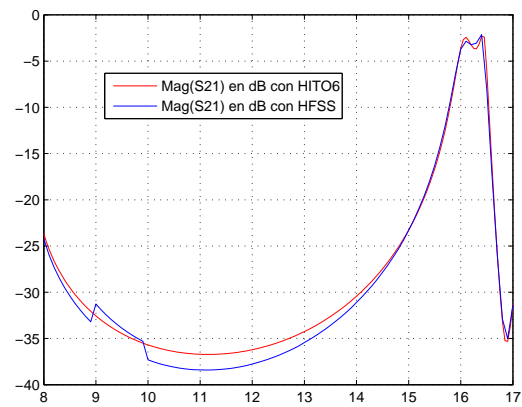


Figure 16: Comparativa del módulo del S_{12} entre el código implementado en Fortran (denominado HITO6) y HFSS en la banda 8 a 17 GHz.

6 Conclusiones

En esta tesina hemos mostrado el desarrollo del método BIRME 3D, aplicandolo al análisis modal de cavidades rectangulares con postes metálicos encerrados en su interior. Sin embargo, a diferencia de otros trabajos que versan sobre el mismo tema, hemos conseguido una solución válida para cualquier tipo de poste metálico, incluidos los que estan unidos a la cavidad o a un coaxial exterior.

Adicionalmente, se han estudiado una serie de funciones base necesarias para la implementación del método BIRME y su construcción se ha integrado con una herramienta de mallado comercial para poder ser utilizadas en nuestro código.

La validez del método ha sido demostrada mediante el análisis comparativo de los modos obtenidos para diferentes ejemplos de cavidades perturbadas con elementos metálicos en su interior. Asi pues, hemos demostrado que con nuestro código podemos obtener similar precisión a una herramienta comercial de uso muy extendido en un tiempo hasta 10 veces menor e incluso obteniendo 20 veces más modos de los que dicho software nos puede proporcionar.

Finalmente se ha vuelto a demostrar la validez de nuestro código integrandolo con otros módulos programados en Fortran para obtener parámetros S . Esto se ha hecho con el proposito de comparar parámetros S obtenidos con BIRME con los obtenidos mediante el uso de una herramienta de software comercial. Así pues, en el capítulo 5 hemos vuelto a demostrar la precisión de BIRME 3D, así como su eficiencia (ya que la diferencia de coste computacional es abismal a favor del código desarrollado).

7 Bibliografía

References

- [1] R. Levy, R. V. Snyder, G. Matthaei, "Design of microwave filters", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-50, no. 3, pp. 783-793, March 2002.
- [2] P. Silvester and G. Pelosi, Finite Elements for Wave Electromagnetics, IEEE Press, 1994.
- [3] J. Jin, The Finite Elements Method in Electromagnetics, New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [4] A. Taflove, Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time Domain Method, Artech House, 1995.
- [5] R. Levy, H. W. Yao, K. A. Zaki, "Transitional combline/evanescent-mode microwave filters", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-45, no. 12, pp. 2094-2099, Dec. 1997.
- [6] H. W. Yao, K. A. Zaki, A. E. Atia, R. Hershtig, "Full wave modeling of conducting posts in rectangular waveguides and its application to slot coupled combline filters", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-43, no. 12, pp. 2824-2830, Dec. 1995.
- [7] A. Boettger, T. Sieverding, P. Krauss and F. Arndt, "Fast boundary contour mode-matching method for the CAD of circular post coupled resonator filters", in Proceedings of the 28th European Microwave Conference, Amsterdam, Oct. 1998, vol. 1, pp. 712-715.
- [8] K.-L. Wu, R. R. Mansour, H. Wang, "A full wave analysis of a conductor post insert reentrant coaxial resonator in rectangular waveguide combline filters", in IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest, San Francisco, CA, June 1996, pp. 1639-1642.
- [9] G. G. Gentili, "Multiport analysis of arbitrary circular-rod insets in rectangular waveguide by the generalized admittance matrix", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-49, no. 8, pp. 731-733, Aug. 2001.
- [10] J. E. Braken, D. Sun, Z. J. Cendes, "S-domain methods for the simultaneous time and frequency characterization of electromagnetic devices", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-46, no. 11, pp. 1277-1290, Nov. 1998.
- [11] R. W. Freund, "Reduced-order modeling techniques based on Krylov subspaces and their use in circuit simulation", Numerical Analysis Manuscript no. 98-3-02, Bell laboratories, Murray Hill, N.J., Feb. 1998. Available on WWW at <http://cm.bell-labs.com/cs/doc/98>.
- [12] R. W. Freund, "Passive reduced-order modeling via Krylov-subspace methods", Numerical Analysis Manuscript no. 00-3-02, Bell laboratories, Murray Hill, N.J., March. 2000. Available on WWW at <http://cm.bell-labs.com/cs/doc/00>.

- [13] A. C. Cangellaris and L. Zhao, "Model order reduction techniques for electromagnetic macromodelling based on finite methods", *Int. Journal of Numerical Modelling, Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 13, no. 2/3, March-June 2000, pp. 181-197.
- [14] J. Rubio, J. Arroyo, J. Zapata, "SFELo - An efficient methodology for microwave circuit analysis", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-49, no. 3, pp. 509-516, March 2001.
- [15] Y. Zhu, A. C. Cangellaris, "Macro-elements for efficient FEM simulation of small geometric features in waveguide components", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-48, no. 12, pp. 2254-2260, Dec. 2000.
- [16] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, L. Perregrini, "Generalized Y-matrix of arbitrary H-plane waveguide junctions by the BI-RME method", in *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, Denver, CO, June 1997, vol. 1, pp. 211-214.
- [17] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, L. Perregrini, "A fast algorithm for the wideband analysis of 3-D waveguide junctions", *Proc. of the Second Int. Conf. on Computation in Electromagnetics*, 12-14 April 1994, Nottingham, UK.
- [18] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, "Generalized admittance matrix of arbitrary E-plane waveguide junctions by the BI-RME method", in *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, Anaheim, CA, June 1999, vol. 4, pp. 1699-1702.
- [19] P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, "A new boundary integral approach to the determination of the resonant modes of arbitrarily shaped cavities", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-43, no. 9, pp. 1848-1855, Aug. 1995.
- [20] P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, "On the evaluation of the double surface integrals arising in the application of the boundary integral method to 3-D problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-45, no. 3, pp. 436-439, March 1997.
- [21] P. Arcioni, M. Bozzi, M. Bressan, L. Perregrini, "A novel CAD tool for the wideband modeling of 3D waveguide components", *International Journal of RF and Microwave Computer Aided Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 183-189, May 2000.
- [22] P. Arcioni, M. Bozzi, M. Bressan, G. Conciauro, L. Perregrini, "Frequency/Time-Domain modeling of 3D waveguide structures by a BI-RME approach", *International Journal on Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 15, no. 3, pp. 3-21, 2002.
- [23] P. P. Ewald, "Die berechnung optischer und electrostatischer gitterpotentiale", *Ann. der Physik*, vol. 64, pp. 253-287, 1921.
- [24] K. E. Jordan, G. R. Richter, P. Sheng, "An efficient numerical evaluation of the Green's function for the Helmholtz operator on periodic structures", *J. Comp. Phys.*, vol. 63, 1986, pp. 222-235.

- [25] G. Conciauro, M. Bressan and C. Zuffada, “Waveguide modes via integral equation leading to a linear matrix eigenvalue problem”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-32, no. 11, pp. 1495-1504, Nov. 1984.
- [26] B. E. Spielman and R. F. Harrington, “Waveguide of arbitrary cross-section by the solution of a non-linear integral eigenvalue problem”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-20, no. 9, pp. 575-578, Sept. 1972.
- [27] G. Conciauro, P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, “Wideband modeling of arbitrarily shaped H-plane waveguide junctions by the 'Boundary Integral - Resonant Mode Expansion' Method”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-44, no. 7, pp. 1057-1066, July 1996.
- [28] P. Arcioni, M. Bressan, G. Conciauro, L. Perregrini, “Wideband modeling of arbitrarily shaped E-plane waveguide junctions by the 'Boundary Integral - Resonant Mode Expansion' Method”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-44, no. 11, pp. 2083-2092, Nov. 1996.
- [29] Robert E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, IEEE Press, 1991.
- [30] G. Conciauro, M. Guglielmi, R. Sorrentino, *Advanced Modal Analysis*, J. Wiley & Sons, 2000.
- [31] J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, Hemisphere , Wasington, 1985.
- [32] P. Arcioni, G. Conciauro, “Combination of generalized admittance matrices in the form of pole expansions”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-47, no. 10, pp. 1990-1996, Oct. 1999.
- [33] G. Gerini, M. Guglielmi, and G. Lastoria, “Efficient integral equation formulation for impedance of admittance representation of planar waveguide junction”, in *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, Baltimore, MD, June 1998, pp. 1747-1750.