



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

Trabajo Fin de Grado

**Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y
Automática**

Autor: Francisco Javier Morell Mirasol

Tutor: Vicente Casanova Calvo

Curso 2018 / 2019

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

Resumen

El péndulo invertido es un problema clásico de la teoría de control que consiste en un sistema subactuado cuya misión es mantener en equilibrio un péndulo mediante la acción de un motor. En este trabajo vamos a mostrar desde un punto de vista práctico cómo es un péndulo invertido y los problemas que alberga. Para ello hemos diseñado nuestro propio péndulo invertido el cual vamos a montar y analizar en profundidad. En primer lugar se ha hecho una simulación del mismo mediante Simscape Multibody y Simulink, y con el fin de estudiar su funcionamiento y sus limitaciones lo expondremos a seguimientos de referencias, perturbaciones y ruido. Por otro lado, hemos realizado una implementación física de este mismo péndulo, el cual se ha intentado que sea de pequeño tamaño y de bajo precio económicamente hablando. También se va a mostrar de forma detallada cómo se ha montado tanto la simulación como el péndulo real. Por último, se ha propuesto una segunda versión del péndulo invertido con el fin de facilitar su control y estabilización, la cual veremos tanto en simulación como en físico mediante ciertas modificaciones en el péndulo real.

Palabras clave: péndulo invertido, simulación, diseño, montaje, control.

Abstract

The inverted pendulum is a classic problem of control theory that consists of an under-rated system whose mission is to maintain a pendulum in equilibrium through the action of a motor. In this work we will show from a practical point of view how an inverted pendulum is and the problems it harbors. For this we have designed our own inverted pendulum which we will assemble and analyze in depth. In the first place, a simulation has been done by means of Simscape Multibody and Simulink, and in order to study its operation and its limitations we will expose it to reference tracking, perturbations and noise. On the other hand, we have made a physical implementation of this same pendulum, which has been tried to be small and economically low price. It will also show in detail how both the simulation and the real pendulum have been mounted. Finally, a second version of the inverted pendulum has been proposed in order to facilitate its control and stabilization, which we will see both in simulation and in physics through certain modifications in the real pendulum.

Keywords : inverted pendulum, simulation, design, mounting, control.

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

Tabla de contenidos

1. Introducción	7
1.1. Objeto.....	7
1.2. Antecedentes.....	7
1.3. Objetivos	8
2. Péndulo Invertido.....	9
2.1. Descripción.....	9
2.2. Tipos de péndulos	9
2.3. Aplicaciones	10
3. Modelo matemático	11
4. Diseño	14
5. Simulación	19
5.1. Desarrollo de la simulación.....	19
5.1.1. Simscape Multibody.....	20
5.1.2. Simulink.....	24
5.2. Diseño del regulador.....	30
5.3. Resultados de la simulación	34
5.4. Respuesta ante ruido.....	48
5.5. Simulación del péndulo modificado.....	52
6. Montaje experimental.....	59
6.1. Desarrollo del montaje.....	59
6.2. Péndulo modificado	65
6.3. Presupuesto	68
7. Anexo	69
8. Bibliografía.....	81

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

1. Introducción

1.1. Objeto

Este trabajo tiene como objeto el diseño, la simulación y el montaje de un péndulo invertido rotacional o péndulo de Furuta. Pretendemos llegar a la creación de un péndulo invertido que tenga como principal misión la de que pueda llegar a ser utilizado en el ámbito académico con fines didácticos. Bajo este pretexto, es necesario que el péndulo tenga un coste económico de fabricación lo más bajo posible, con la idea siempre en mente de que el péndulo debe llegar a tener un funcionamiento correcto.

1.2. Antecedentes

Este proyecto se inició con la idea de poder apoyar en el ámbito académico en las asignaturas de automática.

Durante la carrera los estudiantes pasamos por diferentes asignaturas relacionadas con la automática y el control, la primera de estas asignaturas la encontramos en el 2º curso y se llama “automática básica”, asignatura en la cual el alumno aprende sus primeras nociones sobre automática. Al contrario que otras materias como las matemáticas o la física, la mayoría de los estudiantes nunca hemos entrado en contacto con el mundo de la automática antes de llegar a la universidad, y cabe añadir que de primeras la asignatura puede resultar algo abstracta, ya que trata muchos temas nuevos para el alumno que a primera vista no convergen con ningún punto de la realidad. Es preciso decir que a medida que se va avanzando en la carrera y se empiezan a asentar conocimientos, las cosas que se han aprendido en estas asignaturas empiezan a cobrar sentido.

Con esto queremos decir que para los estudiantes la primera toma de contacto con la automática resulta muchas veces confusa y el problema en parte reside en se

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional nos enseña desde un punto de vista muy teórico y muy poco práctico. Tener un péndulo invertido u otros dispositivos parecidos a este desde el punto de vista de la automática, podrían ayudar a la asignatura a darle un aspecto más práctico, el problema reside en que suelen ser de precio muy elevado como para poder llenar una clase con ellos, y debido a esto las prácticas quedan reducidas a estar delante del ordenador trabajando con programas como Matlab, lo cual para el alumno sigue siendo un aprendizaje teórico de la asignatura.

Hemos elegido el péndulo invertido en vez de otros dispositivos automáticos porque nos parece el mecanismo que mejor representa de forma intuitiva y fácil de entender el concepto de la “automática”.

En conclusión, podríamos decir que la motivación de este trabajo reside en intentar que el alumno entienda mejor la automática, e incluso aumentar su motivación por esta, ofreciéndole un ejemplo práctico con el que pueda interactuar y aprender con ello.

1.3. Objetivos

En primer lugar se pretende realizar una simulación por Matlab del funcionamiento y comportamiento del péndulo invertido. Una vez realizada la simulación nos apoyaremos en ella para hacer el diseño y el montaje de un péndulo real. Esto quiere decir que intentaremos montar el péndulo a semejanza del de la simulación, no obstante el montaje físico cuenta con más limitaciones que en la simulación, por lo que si fuera necesario modificaremos la simulación para que se parezca lo máximo posible a nuestro péndulo de verdad a medida que lo vamos montando. Con esto nos podemos hacer una idea aproximada de cuál va a ser el comportamiento de nuestro péndulo. Gracias a la simulación podemos diseñar el control del péndulo real desde un punto de vista más práctico, prescindiendo así del modelo matemático del péndulo. La idea de la simulación es ser lo más realista posible.

2. Péndulo Invertido

2.1. Descripción

El péndulo invertido es considerado uno de los problemas más conocidos e importantes de la automática. Es así en parte por su relativa simplicidad comparado con otros problemas de la automática, y porque es un muy buen ejemplo práctico y visual que deja claros los principios básicos de la automática, como el bucle abierto y el bucle cerrado o la necesidad de un regulador para obtener un control adecuado y como varía el comportamiento del péndulo en función al regulador.

El mecanismo consiste en una estructura con partes fijas y partes móviles, que debe encargarse de mantener en equilibrio a un péndulo tanto en una situación de reposo como ante estímulos externos que intenten perturbar el equilibrio. Se asemeja a la típica experiencia de intentar sujetar una escoba en la palma de la mano haciendo los movimientos necesarios para evitar que se caiga. Si no actuáramos sobre el péndulo su propia naturaleza haría que se cayera por la propia fuerza de la gravedad, para evitar esto la idea es mover un brazo sobre el que se sujeta el péndulo mediante un motor, para contrarrestar la propia naturaleza del péndulo, que es caerse. Como acabamos de ver, el péndulo invertido se trata de un sistema inestable y no lineal.

2.2. Tipos de péndulos

Existen diferentes tipos de péndulos invertidos. Cabe mencionar que no todos ellos tienen un “péndulo” como tal, más bien podríamos decir que el concepto de péndulo invertido es el nombre que se da a los diferentes sistemas cuya misión es mantener algo en equilibrio mediante la automática. Un ejemplo de esto podría ser el sistema viga-bola, que sigue los mismos principios pero su misión es mantener en equilibrio una bola en vez de un péndulo. Todos intentan solucionar el mismo problema pero cada uno tiene sus propias características, lo cual también implica que la forma de abordar el problema no es exactamente igual. Los dos más conocidos son el péndulo invertido lineal y el péndulo invertido rotacional. Son muy similares, la

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional
diferencia es que en el primero el péndulo y la estructura que lo sujeta solo se desplazan de forma lineal, mientras tanto el segundo se desplaza describiendo un movimiento circular.



Imagen 1: Péndulo invertido lineal



Imagen 2: Péndulo invertido rotacional

Este trabajo va a tratar sobre un péndulo invertido rotacional, también conocido con el nombre de “péndulo de furuta”.

2.3. Aplicaciones

El concepto de péndulo invertido se encuentra presente en diversas aplicaciones en el mundo real. Como hemos dicho antes cualquier proceso que requiera mantener algo en equilibrio va a basarse en los mismos principios y va a seguir pasos similares a los del control de un péndulo invertido convencional. Podemos encontrar ejemplos de ellos en diferentes campos científicos. Por ejemplo, en el sector aeroespacial durante el despegue de un cohete debemos mantenerlo a este en posición vertical, para ello tendremos que controlar su ángulo de inclinación. Otros ejemplos de aplicaciones más comunes podrían ser el *segway*, vehículo de dos ruedas que tiene que mantenerse constantemente en equilibrio para que el piloto que lo conduce no se caiga, o en el campo de la robótica cualquier robot que tenga que mantener el equilibrio ya sea porque tiene que caminar de forma bípeda, sujetarse sobre una rueda, etc.

3. Modelo matemático

Hay que tener en cuenta que el propósito de este trabajo es abordar el problema del péndulo invertido desde un ámbito práctico y no teórico. A pesar de esto, hemos incluido un desarrollo matemático mediante el cual obtenemos una representación en espacio de estados del modelo de nuestro péndulo. La razón por la que no hemos querido basarnos en el modelo matemático para nuestro péndulo es porque hay muchas de las variables que usamos en las ecuaciones de las que no sabemos sus valores y puede ser muy difícil obtenerlos. Es fácil por ejemplo obtener la longitud de nuestro péndulo, pero no tanto obtener los valores de la resistencia interna del motor, el coeficiente viscoso dinámico o los rozamientos y fricciones de nuestro péndulo. Obtener estos datos requeriría muchos recursos y tiempo que no tenemos, por lo que este desarrollo matemático no va a tener valores numéricos que nos ayuden al futuro desarrollo de nuestro péndulo invertido. Igualmente no nos va a hacer falta, ya que tanto el péndulo de la simulación como el real los vamos a montar y diseñar de forma experimental. Dicho esto comencemos con las matemáticas.

El siguiente esquema nos ayuda a ver y entender varios parámetros relevantes que vamos a emplear en nuestras futuras ecuaciones:

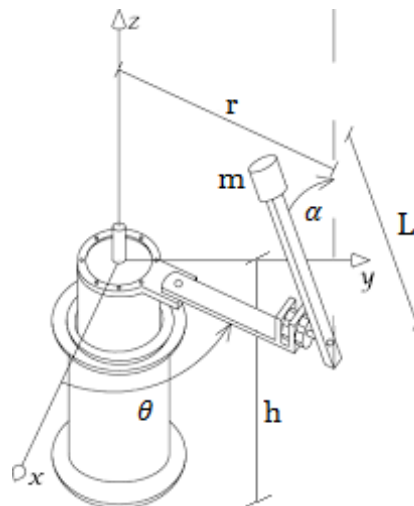


Imagen 3: Parámetros del péndulo - Esquema

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

L = Longitud hasta el centro de gravedad del péndulo

m = Masa del brazo del péndulo

r = Longitud del brazo

h = Distancia entre el péndulo y el suelo

J_p = Inercia del péndulo sobre su centro de gravedad

V_x = Velocidad del centro de gravedad del péndulo en la dirección x

V_y = Velocidad del centro de gravedad del péndulo en la dirección y

θ = Ángulo de inclinación del péndulo (radianes)

α = Ángulo de rotación del brazo (radianes)

Vamos a comenzar por la cinemática del péndulo. Las ecuaciones de velocidad de nuestro péndulo son las siguientes:

$$V_x = r \theta' - L \cos(\alpha)$$

$$V_y = -L \sin(\alpha)$$

Con estas ecuaciones podemos sacar las ecuaciones de la energía potencial y cinética del péndulo:

$$E_p = U = m g h = m g L \cos(\alpha)$$

$$E_c = T = \frac{1}{2} [(\theta' r + \alpha' L \cos(\alpha))^2 + (\alpha' L \sin(\alpha))^2 + J_b \theta'^2 + J_p \alpha'^2]$$

Una vez tenemos estas expresiones formulamos el Lagrangiano y linealizamos sobre $\alpha = 0$ para obtener las siguientes ecuaciones diferenciales del sistema:

$$(Jb + m r^2) \theta'' + m L r \alpha'' = T_{out} - B e q \theta'$$

$$\frac{4}{3} m L^2 \alpha'' - m L r \theta'' - m g L \alpha = 0$$

Sabemos que el par de salida en la carga del motor es:

$$T_{out} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g (V_m - K_g K_m \theta')}{R_m}$$

Combinando pues las ecuaciones diferenciales con esta última obtenemos la siguiente representación en espacio de estados de nuestro sistema completo:

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ \alpha' \\ \theta'' \\ \alpha'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b d}{E} & \frac{-c G}{E} & 0 \\ 0 & \frac{a d}{E} & \frac{-b G}{E} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \theta' \\ \alpha' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m E} \\ b \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m E} \end{bmatrix} \cdot V_m$$

Donde a, b, c, d, E y G corresponden a:

$$a = Jb + m r^2$$

$$E = a c - b^2$$

$$b = m L r$$

$$c = \frac{4}{3} m L^2$$

$$G = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_m K_g^2 + B e q R_m}{R_m}$$

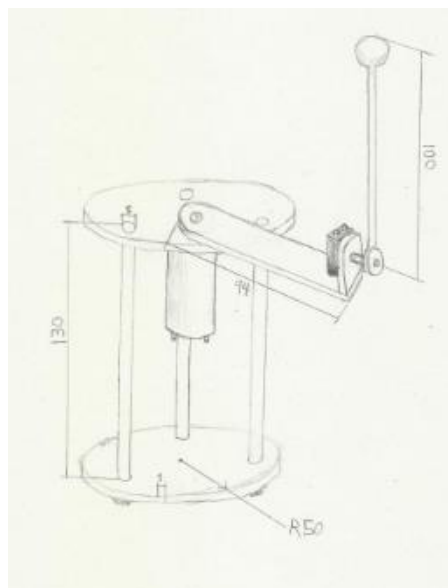
$$d = m g L$$

4. Diseño

Pensando en el montaje real, nuestra prioridad principal es que el precio de fabricación del péndulo resulte barato, sin embargo también tenemos otras prioridades que tenemos que tener en mente, como que el péndulo sea de tamaño relativamente pequeño y sus piezas de densidad ligera, con el fin de que sea portátil y poder desplazarlo con facilidad. Cabe mencionar que en parte hemos elegido hacer un péndulo de furuta por esta última razón, ya que la estructura que necesita da pie a que la podamos diseñar de tamaño reducido.

Se ha decidido por lo tanto que se las piezas van a ser de plástico y serán fabricadas mediante una impresora 3D. La impresora 3D es un invento relativamente nuevo que permite construir mediante capas de plástico piezas volumétricas a través de un diseño previo de estas por ordenador. Se ha decidido emplear una impresora 3D debido a que se trata de una tecnología nueva y puntera; la universidad te facilita su uso para fines académicos; al ser de plástico las piezas serán ligeras y podemos hacerlas del tamaño que queramos, sumado a que el coste de la impresión de las piezas es muy barato; al diseñar las piezas a ordenador tenemos más opciones para diseñar las piezas del péndulo como nosotros queramos, y debido a que nuestras piezas no van a ser muy complejas su diseño a ordenador no será muy complicado.

Debido a que el péndulo invertido ya es algo que se ha hecho en numerosas ocasiones en la vida real y que su estructura es muy simple, no se ha podido innovar mucho en su diseño. Este fue el boceto previo con algunas medidas de cómo quedaría el péndulo en la simulación y el montaje:



El programa que se usamos para el diseño y modelado de las piezas es el SolidWorks. Posteriormente los archivos de estas piezas los usaremos para imprimir las piezas en 3D para el montaje real, y para emplearlos en la simulación.

Las piezas que se van a imprimir en 3D van a ser las 2 piezas de la base, los 3 pilares y el brazo que sujeta al péndulo. El péndulo en sí no lo imprimiremos porque no nos conviene que sea de plástico en el montaje, sin embargo también lo vamos a diseñar en el programa para luego poder usar su archivo en la simulación. Se optó por hacer la base circular (tanto de arriba como de abajo) tal y como aparece en el boceto, ya que al ser de tamaño reducido una base cuadrada podría haber dado problemas innecesarios con las esquinas. No obstante, después de diseñar los pilares y el brazo como aparecen en el boceto fue conveniente rediseñarlos pensando en el montaje real. Los pilares los hicimos de forma cuadrada en vez de cilíndrica por si el hecho de que tuvieran un contorno circular daba algún problema a la hora de imprimirlos, y el brazo robot lo tuvimos que imprimir con la base inferior más gruesa para facilitar el montaje. Por último, para poder unir el péndulo con el brazo hizo falta diseñar e imprimir una última pieza con este propósito llamada en el SolidWorks “pieza unión”. En la simulación se utilizaron los primeros modelos de los pilares y el brazo basados en el boceto, sin embargo son cambios que pueden considerarse despreciables ya que si usáramos las otras piezas el comportamiento de la simulación apenas variaría.

Estos fueron los diseños de las piezas hechos con el SolidWorks que se usaron para la simulación:

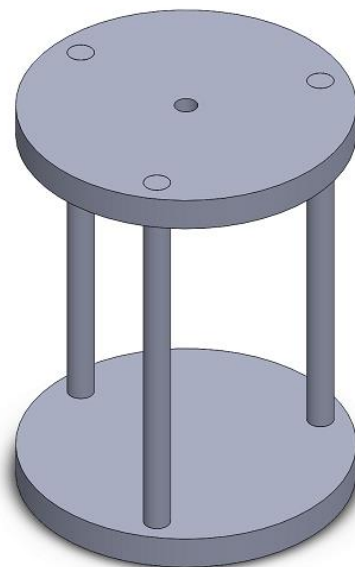


Imagen 5: Estructura - Simulación

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

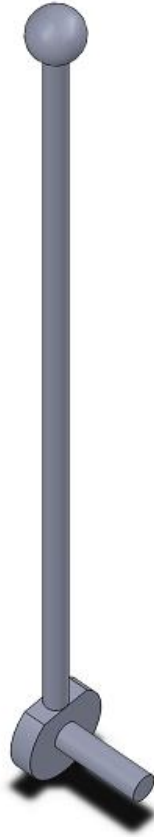


Imagen 6: Péndulo – Simulación

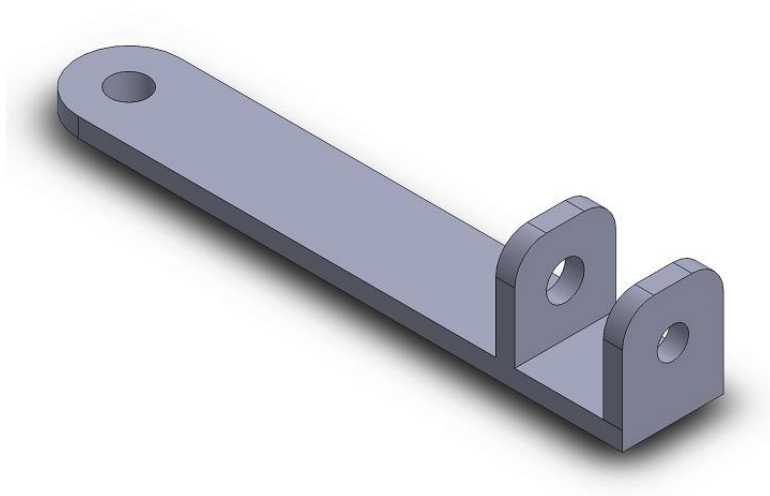


Imagen 7: Brazo - Simulación

Y estas son las piezas que se imprimieron con la impresora 3D pensando en el montaje real del péndulo invertido:

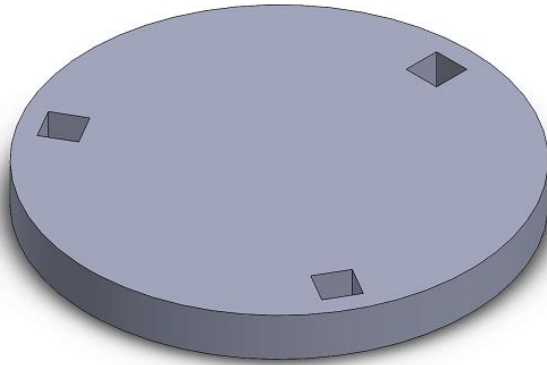


Imagen 8: Base 1 - Montaje

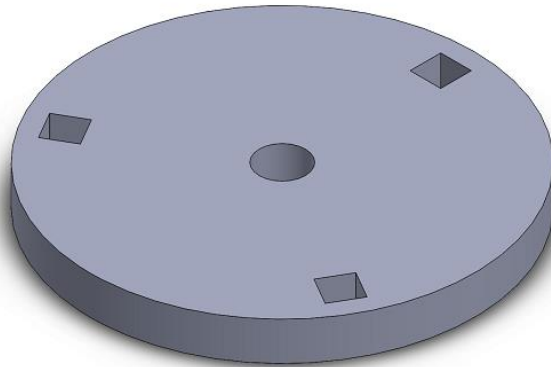


Imagen 9: Base 2 - Montaje

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

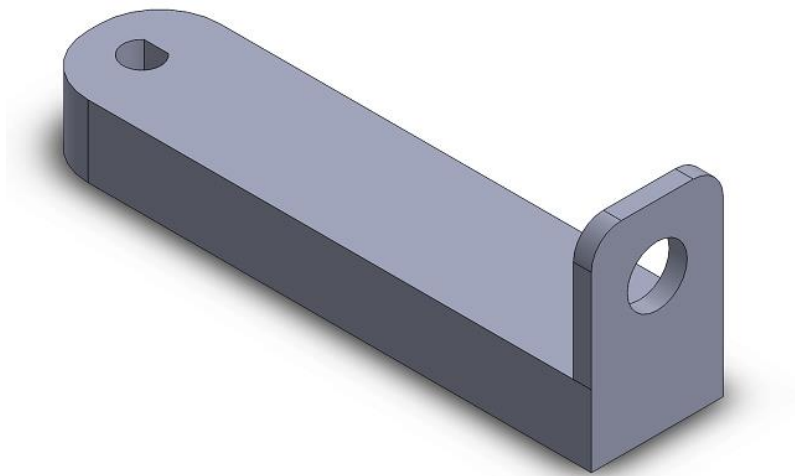


Imagen 10: Brazo robot - Montaje

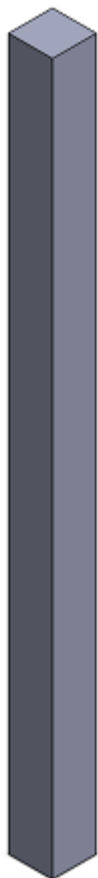


Imagen 11: Pilar cuadrado - Montaje

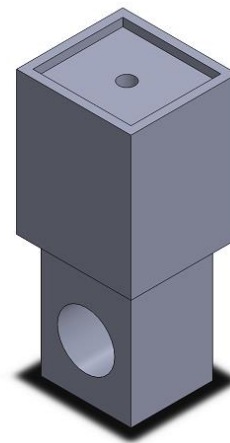


Imagen 12: Pieza unión - Montaje

5. Simulación

5.1. Desarrollo de la simulación

Para realizar la simulación vamos a utilizar un producto de Matlab llamado Simscape Multibody. Es un producto de Matlab que ya existía hace tiempo pero era un poco tedioso y difícil de manejar, sin embargo ha conseguido actualizarse hasta modernizarse y conseguir resultar un programa de simulación muy efectivo, completo y más sencillo de usar. Consiste en un entorno de simulación para sistemas mecánicos en 3D. Te permite modelar sistemas “multicuerpo” utilizando bloques que sirven de cuerpos, uniones, restricciones, elementos de fuerzas y sensores. Puedes crear cuerpos sencillos desde el mismo programa, como cubos o esferas, sin embargo el programa te permite cargar archivos CAD para que formen parte de la simulación como cuerpos sólidos. Simscape Multibody reconoce la geometría de la pieza importada y puede matematizar y resolver las ecuaciones de cuál sería su comportamiento en el entorno en el que la simulas, además permite cambiar parámetros de esta como su densidad, su peso, su rozamiento o su color. Una vez ya tienes cargadas todas las piezas formando tu mecanismo, el programa genera automáticamente una animación en 3D donde puedes visualizar la dinámica del sistema.

Simscape Multibody es una herramienta muy útil para desarrollar sistemas de control y estudiar su comportamiento. Esto es debido en parte a que puedes conectar Simscape Multibody con Simulink mediante unos bloques especiales, lo cual te permite desarrollar en Simulink un diagrama de bloques con su regulador que estará conectado a tu sistema 3D en Simscape Multibody y con el que podrás controlar su comportamiento.

5.1.1. Simscape Multibody

Como hemos dicho, en Simscape Multibody puedes crear un mecanismo en 3D mediante la unión de diferentes bloques que pueden representar cuerpos sólidos, uniones, fuerzas, etc. Para crear un modelo 3D de nuestro péndulo hemos usado las piezas diseñadas en SolidWorks que íbamos a usar para la simulación, las hemos cargado en Simscape Multibody como bloques de cuerpos sólidos y las hemos conectado entre ellas mediante sus respectivas uniones. Este es el resultado final:

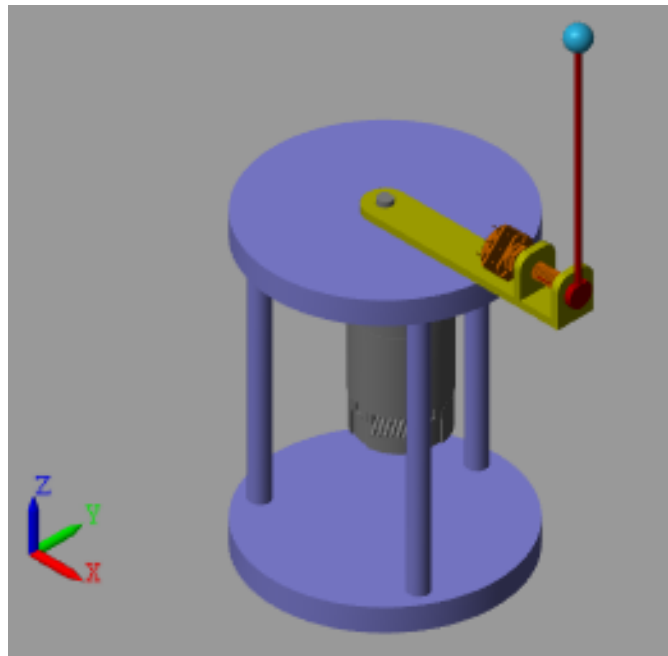


Imagen 13: Péndulo completo - Simscape Multibody

A parte de las piezas diseñadas en SolidWorks, hemos descargado de internet dos archivos CAD: el primero de un motor con encoder incluido que aparece en la imagen de color gris y el segundo de un potenciómetro que aparece en la imagen de color naranja. La esfera azul que aparece al final del péndulo, el cual está pintado de color rojo, se añadió desde Simscape debido a que necesitábamos que el péndulo pesara más, ya al principio el péndulo era demasiado ligero y eso dificultó el control para que se mantuviera de pie.

Vamos a explicar ahora sin detallar mucho como se ha montado el péndulo en Simscape Multibody, para que nos podamos hacer una idea de cómo funciona este programa.

Este es el esquema de cómo está montado el péndulo:

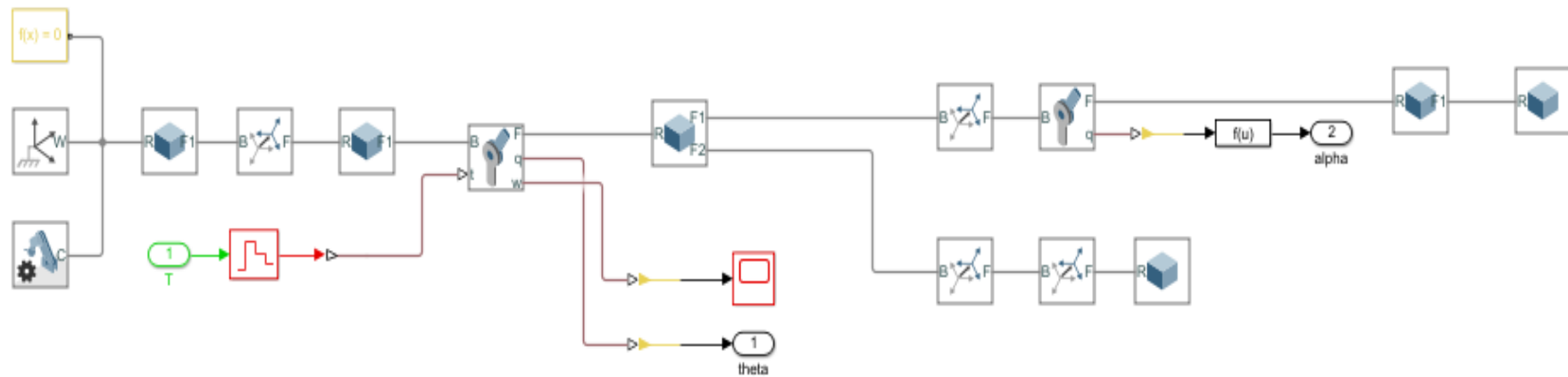


Imagen 14: Esquema péndulo - Simscape Multibody

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

Los bloques que tienen un cubo azul son los bloques que representan los cuerpos sólidos que conforman el péndulo en su totalidad. En la siguiente imagen se muestra a que parte del péndulo corresponde cada bloque:

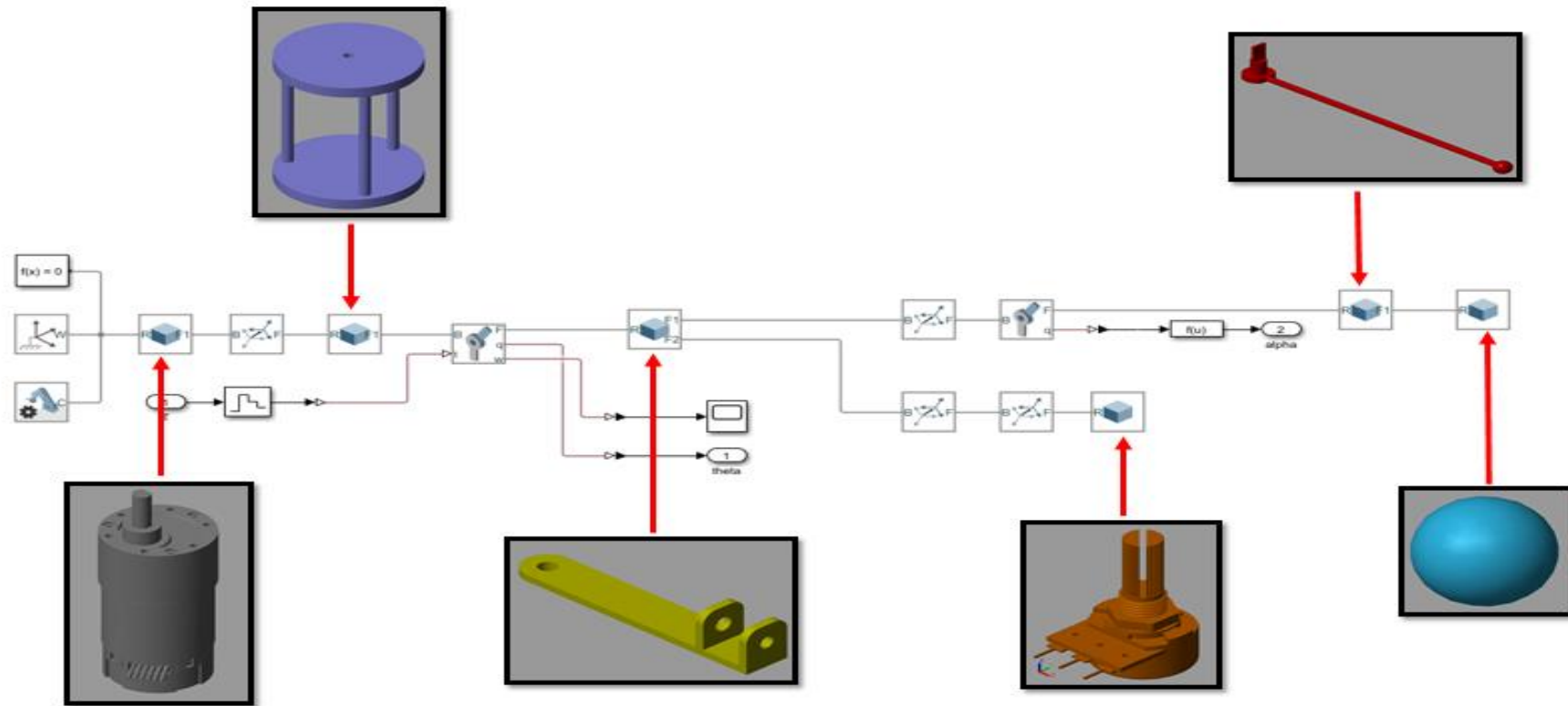


Imagen 15: Partes del péndulo – Simscape Multibody

Los primeros bloques que vemos a la izquierda aparecen siempre que queremos iniciar un nuevo proyecto. Son siempre el punto de partida. De forma simplificada, indican una referencia respecto al entorno en el que vamos a trabajar desde cero y establecen los parámetros mecánicos, de cálculo y de simulación que se aplican a la máquina a la que están conectados los bloques.

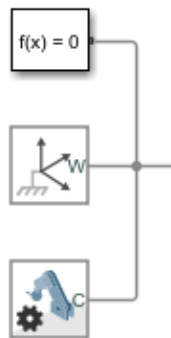


Imagen 16: Bloques iniciales– Simscape Multibody

La orientación de una pieza está definida por los ejes de coordenadas propios de la pieza. Para conectar piezas entre sí como a nosotros nos interesa, podemos modificar estos ejes para poder definir la orientación y la distancia de la siguiente pieza que vayamos a encajar respecto a la pieza anterior. El bloque con el que podemos transformar los ejes de coordenadas es el siguiente:



Imagen 17: Bloque ejes de referencia– Simscape Multibody

Para determinar qué tipo de unión tienen las piezas entre sí necesitamos hacer uso de los bloques de unión. Si dos piezas van unidas entre sí de forma rígida no hará falta poner ningún bloque de unión entre ellas y el programa entiende que ambas piezas son solidarias entre sí. Este es el caso del motor y la estructura; del potenciómetro y el brazo; y de la esfera azul con el propio péndulo. Pensando en las piezas que sí que tienen como objeto moverse, tendremos que establecer dos uniones de revolución, la primera entre el motor y el brazo, y la segunda entre el brazo y el propio péndulo. Esto permite que el brazo pueda girar libremente sobre el eje del motor como si estuviera sujeto a él y que la pieza del péndulo pueda girar libremente

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional en el plano vertical como si estuviera sujeto al extremo del brazo. A estas uniones, en este caso de revolución, les podemos añadir rozamiento para hacer más realista la simulación. El bloque con el que podemos establecer uniones de revolución es el siguiente:



Imagen 18: Bloque unión de revolución– Simscape Multibody

A estos puntos de unión les podemos añadir “entradas” y “salidas”. Añadirle una entrada significa que podemos introducirle una fuerza a la revolución para que gire o hacer girar la pieza directamente como nosotros queramos con una exactitud total (lo cual no sería realista). Añadirle una salida significa que podemos “sensorizar” algún aspecto del movimiento de la pieza, como la posición en la que se encuentra mientras gira o la velocidad de giro. Tanto las entradas como las salidas serán controladas desde Simulink, y desde Simulink las introduciremos en Simscape Multibody. Esto es posible gracias a que existen bloques que nos permiten unir Simulink con Simscape Multibody:



Imagen 19: Bloque Convertidor de Simulink - Simscape Multibody

5.1.2. Simulink

Ya tenemos montado el mecanismo del péndulo en Simscape Multibody, sin embargo no tenemos de momento ninguna acción que actúe sobre él, por lo que al no recibir ningún estímulo externo el péndulo va a hacer lo que haría por naturaleza, caerse. Desde Simulink le propiciaremos al péndulo las entradas necesarias para hacer que el motor se mueva. Antes de llegar a esto, es preciso mencionar que en la simulación vamos a intentar dos cosas con respecto a la entrada que va a recibir el motor. La primera es levantar el péndulo desde una posición de reposo en la que el

péndulo se halle mirando hacia abajo y la segunda es una vez que el péndulo ya está arriba intentar mantenerlo sin que se caiga.

El esquema de Simscape Multibody del péndulo invertido (imagen 14) está comprimido dentro del siguiente bloque de subsistema con el que vamos a trabajar desde Simulink:

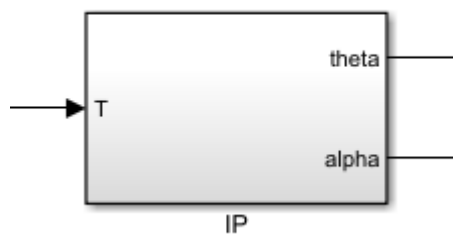


Imagen 20: Subsistema - Simulink

Le hemos puesto el nombre de IP que son las iniciales de “Inverted Pendulum”. Como podemos observar, tiene una entrada (T) y dos salidas (theta y alpha). La entrada T es la señal que le vamos a enviar al motor para actuar sobre él. En cuanto a las salidas, theta es la posición angular de nuestro motor y alpha la posición angular del péndulo, que son las dos señales que debemos monitorear y controlar para poder hacer el control.

Si volvemos al esquema del mecanismo del péndulo (imagen 14) podemos ver que la unión de revolución que controla el eje del motor, tiene una salida “q”. Esta salida “q” hace referencia a la posición angular, que está luego conectada a un bloque convertidor de Simulink y luego a un bloque de salida “theta”. En esa misma unión de revolución también tiene una salida “w” que hace referencia a la velocidad angular de giro del motor, la cual hemos conectado a un “scope” por si nos interesa poder verla en una gráfica en algún momento. Si vemos la segunda unión de revolución que está conectada al propio péndulo, vemos como también tiene una salida “q” para poder medir la posición angular del péndulo, que está conectada a un convertidor de Simulink y luego a un bloque de salida “alpha”. De esta forma es como si tuviéramos sensores que nos miden en todo momento en qué posición está el motor y en qué posición está péndulo, medidas que utilizaremos para poder monitorear en todo momento el proceso y poder establecer la acción de control correcta que le tendremos que aplicar al motor.

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

LEVANTAMIENTO DEL PÉNDULO

Como hemos dicho, la primera fase que vamos a realizar es la del levantamiento del péndulo. Para ello lo que vamos a hacer es meterle al motor varios impulsos rápidos, consecutivos y de sentido contrario para que el péndulo se tambalee de un lado hacia el otro y empiece a ganar cada vez más altura. Mientras que el péndulo se tambalea debemos medir su posición angular en todo momento. La posición de equilibrio de nuestro péndulo es cuando el péndulo estuviera arriba del todo, lo más vertical posible (correspondería a 0°). La idea es que cuando el péndulo esté ya muy próximo a su posición de equilibrio ($\pm 10^\circ$) conmutamos del proceso encargado de levantar el péndulo al proceso encargado de que se mantenga en equilibrio una vez ya esté arriba. Esto de conmutar de un proceso a otro lo vamos a hacer mediante un “switch”:

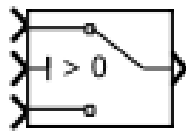


Imagen 21: Switch - Simulink

Switch se puede traducir al español como “interruptor”. Este bloque tiene 3 entradas y una salida. La entrada de abajo y la de arriba son dos acciones diferentes y la de en medio va a ser la condición que se tiene que cumplir para conmutar de una acción a la otra. En nuestro caso, el interruptor empezará conectado a la acción de abajo, que será la del levantamiento del péndulo. La condición que se debe cumplir es que el péndulo se halle cerca de su posición de equilibrio, y cuando esta condición se dé el switch conmuta a la acción de arriba que es la de mantener al péndulo en equilibrio una vez ya está elevado. La salida del switch irá conectada a “T”, es decir, al motor. Se nos quedaría de la siguiente forma:

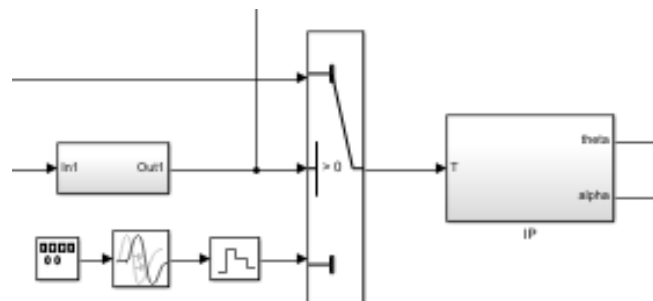


Imagen 22: Switch conectado al sistema - Simulink

La segunda entrada del switch está conectada a la lectura de la posición angular del péndulo, para que podamos saber cuándo se cumple que el péndulo esté cerca de la posición de equilibrio.

Como ya hemos dicho, la entrada de abajo es la encargada de introducir los impulsos al motor encargados de levantar al péndulo. La señal que introducimos es una señal cuadrada que va alternando entre impulsos positivos y negativos, con el fin de zarandear al péndulo. No obstante, no nos vale cualquier impulso, porque el péndulo no va a alcanzar la altura necesaria con cualquier impulso, necesitamos uno que tenga las características adecuadas. Con esto nos referimos a cuál va a ser la amplitud y la frecuencia adecuada de la onda cuadrada que puedan hacer que el péndulo llegue a levantarse hasta la posición de equilibrio. Estos dos parámetros se han determinado en la simulación a base de ensayo y error tras varias pruebas. Hemos determinado que con una amplitud de 0.4 y una frecuencia de 1.12 para nuestra onda cuadrada, podemos realizar el levantamiento de forma adecuada. Una vez ya terminada la fase del levantamiento del péndulo, pasamos a la fase del control del péndulo una vez ya esté elevado.

CONTROL DEL PÉNDULO

El péndulo invertido es un sistema subactuado e inestable. Que un sistema sea subactuado quiere decir que tiene más grados de libertad que actuadores, en nuestro caso tenemos una sola entrada o actuador, que es nuestro motor, y con el debemos controlar dos parámetros a la vez, la posición del brazo y la posición del péndulo. Esta característica es una de las cosas que hace que el péndulo invertido sea un problema de la teoría de control difícil de abordar.

Nuestro objetivo ahora va a ser estabilizar el sistema haciendo que trabaje en bucle cerrado. Esto implica que nuestro sistema tendrá una realimentación constante a partir de la cual estableceremos la acción de control necesaria que hay que aplicarle al motor para que se mantenga estable el péndulo. Como tenemos 2 señales de salida que hay que controlar (la posición del brazo/del eje del motor y la posición del péndulo) necesitamos 2 reguladores, uno para cada señal. Como reguladores vamos a hacer uso del mítico PID, debido a su sencillez, facilidad de implementación y su gran eficacia. El cómo hemos diseñado los PIDs lo trataremos en el siguiente apartado del trabajo.

El primer PID lo aplicaremos al proceso propio del motor. El motor tendrá tanto una entrada como una salida, ya que nosotros le decimos al motor cómo debe girar pero también tenemos que estar midiendo constantemente en qué posición se encuentra para saber cómo debemos hacerlo girar, por lo que la posición angular del motor la retroalimentaremos a la señal de entrada que le introducimos al motor. De esta forma tenemos un control en bucle cerrado con el que establecemos un control de posición del motor. La idea de esto es poder meterle al sistema una referencia, por ejemplo, de una onda cuadrada que haga ir al motor de 45° a -45° . Como tenemos la

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

información de la posición angular en la que se encuentra el motor en todo momento, podemos meterle al motor una acción de control que dependa de la referencia y de la posición del motor. Esta acción de control irá cambiando en cada instante de muestreo teniendo en cuenta constantemente la referencia y la posición del motor para seguir la referencia lo máximo posible en el tiempo que le establezcamos. Esta señal de control vendrá también determinada por el PID que le pongamos al proceso del motor.

Con lo de antes tenemos un control de posición de nuestro motor, sin embargo, necesitamos incluir la medida de la posición del péndulo, para que el motor pueda saber cómo tiene que girar para que el péndulo no se caiga. Mientras que el motor tenía una entrada y una salida, el péndulo solo tiene una salida, ya que no tenemos ningún actuador aplicado directamente al péndulo. Esto implica que a nuestro péndulo no se le aplica ninguna “referencia” como sí que hacemos antes con el motor. La salida del péndulo es la medición de su posición angular para saber en qué ángulo de inclinación se encuentra en todo momento. Esta señal también tendrá su propio PID.

La acción de control final que hay que aplicarle al motor para mantener el péndulo en equilibrio, sale de la suma de estas dos señales. Por un lado la señal del motor resultante del control de posición que le hemos establecido, y por el otro la señal de la medida de posición del péndulo. Combinando ambas señales obtenemos la acción de control que se le debe aplicar al motor en cada momento para que el péndulo se mantenga estable.

El siguiente boceto ayuda a entender mejor de forma visual todo lo explicado anteriormente:

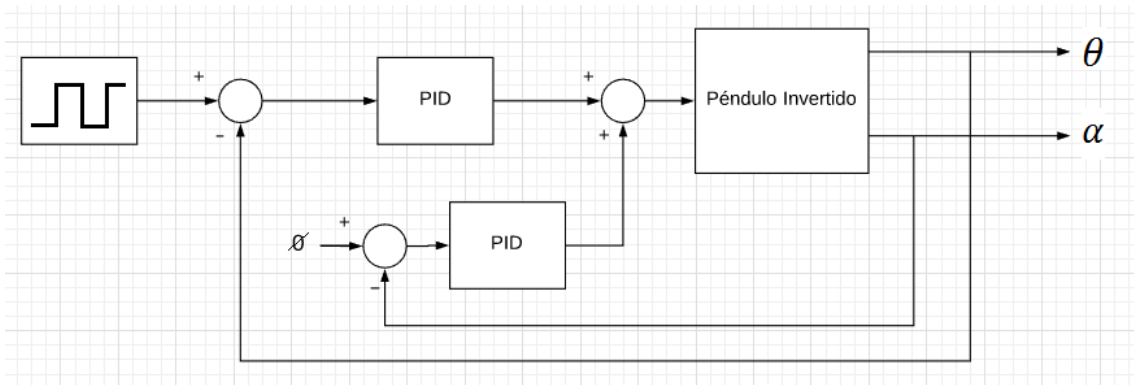


Imagen 23: Boceto montaje regulador

Hay que tener en cuenta que este regulador lo conectaremos al switch y no directamente al péndulo, como aparece en el boceto. Teniendo esto en cuenta, el circuito resultante en Simulink se nos queda de la siguiente forma:

Auto eréctil

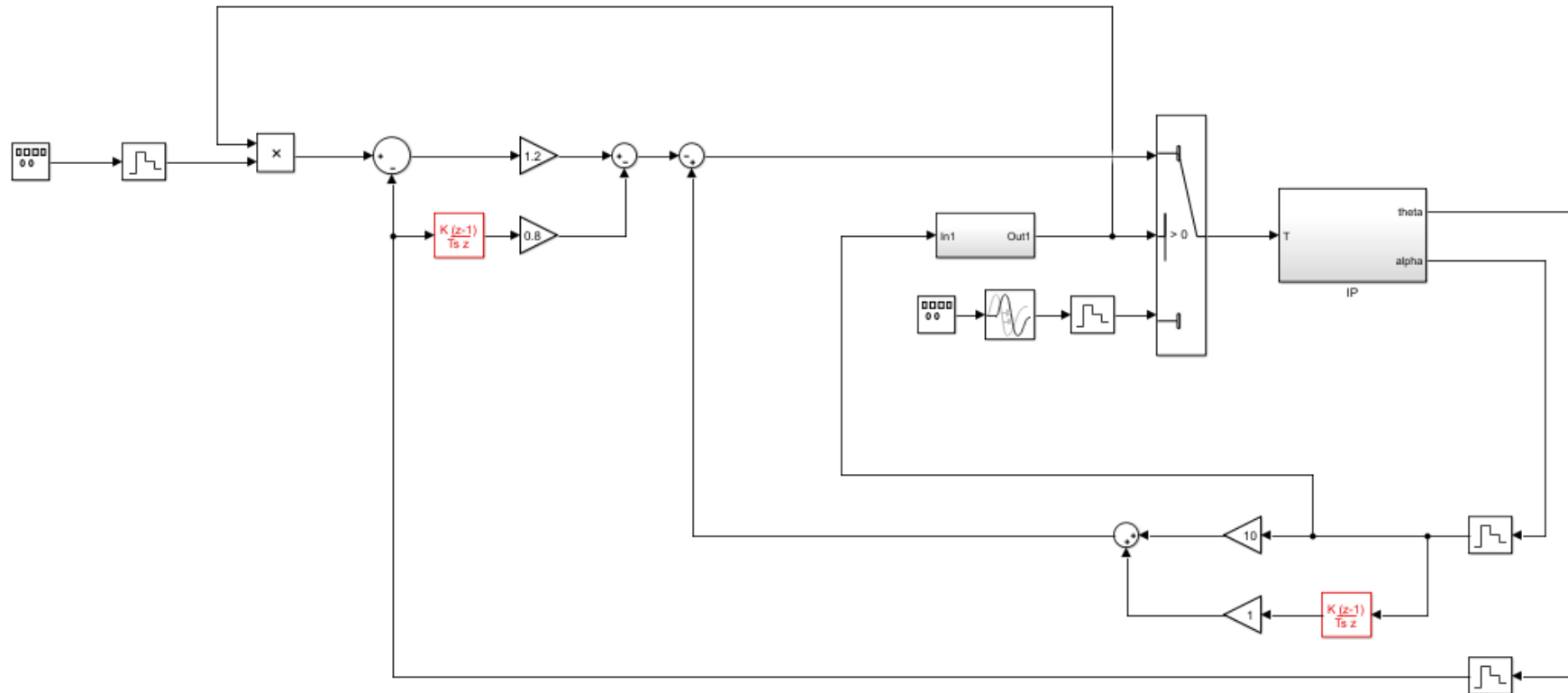


Imagen 24: Sistema de levantamiento y control del péndulo - Simulink

5.2. Diseño del regulador

En este apartado vamos a centrarnos en cómo hemos hecho los dos reguladores PD de nuestro esquema de Simulink de antes. En primer lugar, es fácil ver en el esquema que no hemos terminado implementando reguladores PID tal cual, sino que hemos omitido la acción integral y nos hemos quedado con la proporcional y la derivada, o sea, un regulador PD. La acción integral nos ayudaría si quisiéramos forzar que nuestro error de posición fuera nulo, pero a cambio el sistema se vuelve más inestable. No hemos querido incluirla porque nuestro error de posición es de por sí bastante pequeño y no necesitamos que sea completamente nulo, por lo que no nos renta meterle acción integral al regulador. En cambio, sí que hemos introducido acción derivada en ambos reguladores para poder atenuar las posibles sobreoscilaciones que podamos tener tanto en el motor como en el péndulo. No tener sobreoscilaciones va a ser de gran ayuda para mejorar la calidad de nuestras señales. La parte derivada también provoca que el sistema sea más lento, por ello pondremos solo la cantidad de acción derivada necesaria para eliminar las sobreoscilaciones.

Otra cosa que llama la atención, es como está montado el primer regulador. Con esto nos referimos a que la acción derivada está conectada a la medida de la posición del motor y no a la referencia, donde sí que está conectada la acción proporcional. Hemos hecho esto así a causa de que cuando la referencia tiene forma de escalón/onda cuadrada, lo cual va a ser habitual cuando probemos la simulación, al derivar esta onda obtenemos un pico en la acción derivada muy alto que no nos interesa. En la teoría, esto se debe a que si derivamos una asíntota vertical tenderíamos a ir a infinito, lo cual ocurriría en nuestra onda cuadrada cuando la onda cambia instantáneamente de una amplitud a otra. Este problema se conoce como “set-point kick” o “derivate kick”, y lo resolvemos conectando la acción derivada a la medida del motor θ en vez de a la referencia, lo cual no es un inconveniente ya que en teoría la señal de referencia y la señal de medida del motor deberían ser muy parecidas. Debido a que θ la tenemos que realimentar negativamente, nuestra acción derivada también tendrá signo negativo, lo cual solucionaremos poniendo otro menos al final de la acción derivada para que se contrarresten los signos negativos y podamos sumar la acción derivada con la proporcional.

La última cosa se debe tratar antes de pasar a hablar de las ganancias de los reguladores, es que si nos fijamos, la acción de control resultante del PD del motor y la acción de control resultante del PD del péndulo no se suman entre sí, como podríamos interpretar de la imagen 21, sino que se restan. Esto es así porque el movimiento del motor y del péndulo podríamos decir que son contrarios entre sí, es decir, si por ejemplo quieres mover el motor con el brazo que sujeta el péndulo hacia la derecha el

péndulo lo que haría sería inclinarse hacia la izquierda, y si el motor se moviera hacia la izquierda el péndulo tendería a caerse por la derecha. Si sumáramos ambas señales de control eso querría decir que si el motor se mueve hacia la derecha el péndulo también se debería inclinar hacia la derecha, lo cual no ocurre en la vida real. Digamos para aclararlo mejor, que si el péndulo está inclinado hacia la derecha y el motor se mueve hacia la derecha para corregirlo e intentar que se ponga recto el péndulo, lo que está haciendo el movimiento del motor es quitarle ángulo de inclinación al péndulo, o dicho de otra forma, restándoselo.

Las ganancias de los PDs las hemos obtenido de forma experimental haciendo uso de la simulación. Si fuéramos rigurosos estos parámetros tendríamos que obtenerlos de un estudio matemático del péndulo, pero obtener las ecuaciones necesarias es un proceso muy costoso y que puede resultar complicado. Por suerte, la simulación nos permite hacer mucha prueba y error, ya que cambiar y probar cosas nos cuesta muy poco tiempo, por lo que hemos decidido ser más prácticos y desarrollar reguladores que funcionen directamente en la práctica, en vez de llegar a ellos a través de la teoría. Para saber los valores aproximados que deben tener las ganancias de ambos PDs es necesario entender qué conseguimos con cada acción de cada regulador.

Empecemos pues con el primer PD, el que controla la posición del motor. Este regulador tiene como señal de entrada la referencia que le ponemos al motor para que intente seguirla, y está realimentado negativamente con la posición angular del motor (θ). La acción proporcional es la ganancia que se encarga de que el motor siga la referencia, podemos decir que la K_p según su valor le da más o menos importancia al hecho de alcanzar la referencia lo mejor posible. Si por ejemplo nuestra referencia es una onda cuadrada, ante los cambios de pulso nuestro motor tarda un tiempo en llegar a la referencia como bien sabemos. Si subimos el valor de K_p se le va a dar más importancia a que alcance la referencia cuanto antes y si hacemos por ejemplo que nuestra K_p sea igual a cero, el motor directamente se va a quedar quieto ya que no va a intentar molestarse en seguir la referencia. Mientras tanto la K_d de este regulador sencillamente se va a encargar de que el motor no tenga sobreoscilaciones cuando se desplaza.

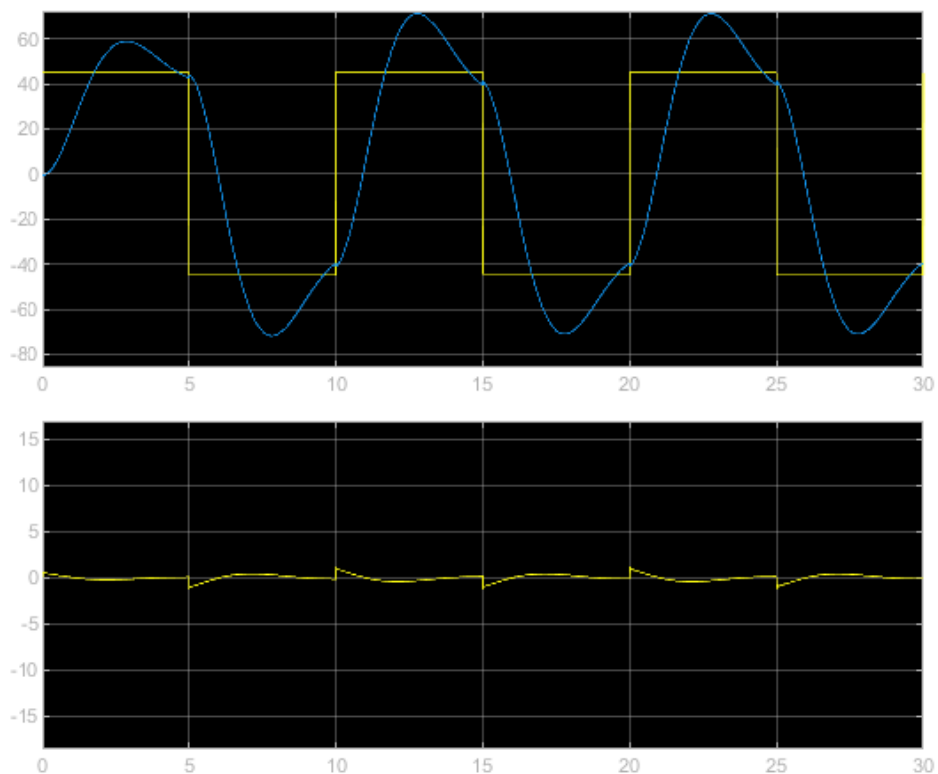
Respecto al segundo PD, este se va a encargar de monitorear la posición del péndulo. Este regulador no tiene entrada, o podemos pensar que tiene una entrada de referencia igual a 0, y tiene como realimentación la posición angular del péndulo. Esto se puede entender mejor en el boceto de la imagen 23 antes que en el esquema de Simulink de la imagen 24. Si la K_p del regulador del motor daba importancia a que el motor siguiera la referencia, la K_p de este regulador da importancia a intentar mantener la posición del péndulo en cero grados. Mientras, la K_d se encargará de procurar que el péndulo no tenga sobreoscilaciones al moverse.

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

Sabiendo todo esto, podemos hacernos una idea aproximada de que relación van a tener las ganancias. Lo más importante que hay que tener en cuenta es que la K_p del regulador del péndulo ha de tener más peso que la K_p del regulador del motor, ya que de esta forma le estamos dando más importancia a que el péndulo se mantenga en equilibrio sobre que el motor siga la referencia establecida. Si fuera al revés el sistema priorizaría que el motor cumpliera la referencia lo mejor posible aunque eso supusiera que el péndulo se cayera durante el camino. Respecto a las K_d de ambos reguladores, hay que tener en cuenta que si les damos un valor alto ralentizarán el sistema, lo cual también puede suponer que este no pueda responder lo suficiente rápido para mantener al péndulo estable. Las K_d con un valor relativamente pequeño ya tienen suficiente como para eliminar las sobreoscilaciones, que al fin y al cabo es su propósito, por lo que ambas K_d tendrán valores pequeños e incluso intentaremos minimizarlos dentro de lo posible.

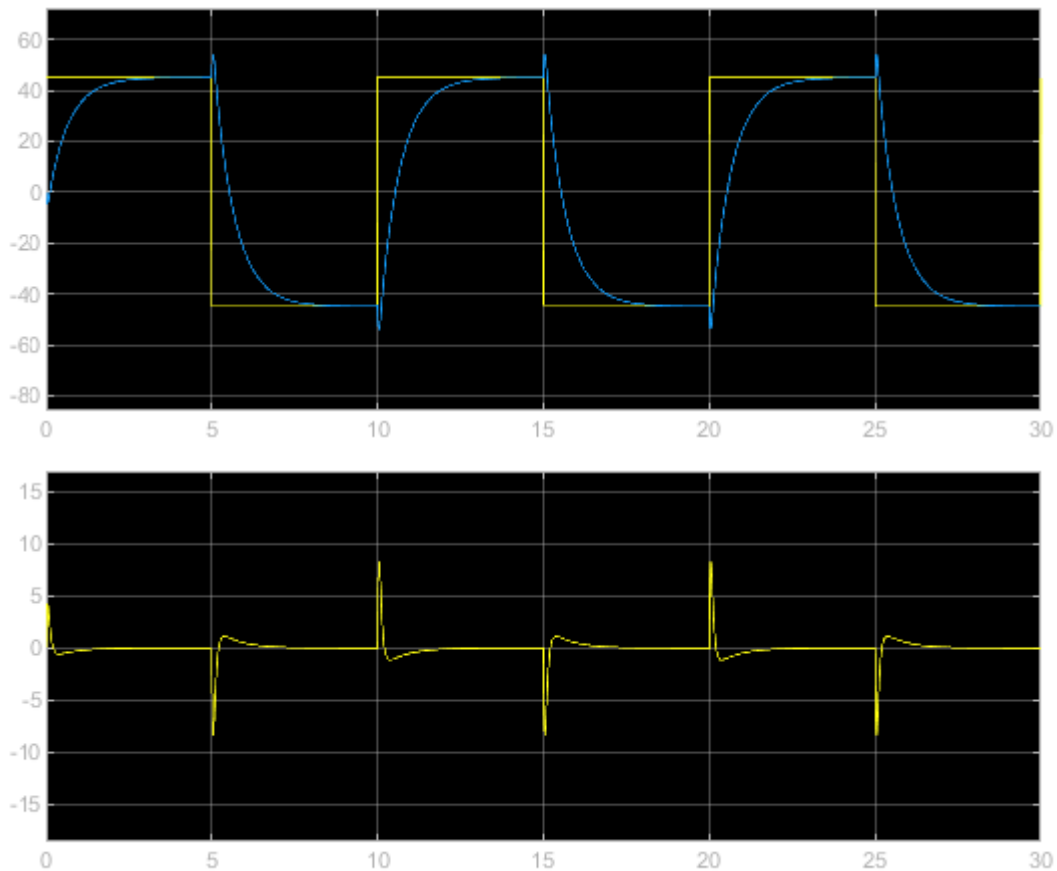
Teniendo en mente lo que hemos razonado, empezamos a hacer pruebas con una K_p del motor bajita y una K_p del péndulo bastante más alta, para asegurarnos que si el sistema no funcionaba no fuera por culpa de las acciones proporcionales, sino de las derivadas. Tras varios intentos de prueba y error determinamos que con los siguientes valores de las acciones derivadas ya podíamos estabilizar el péndulo: K_d del motor = 0.8 y K_d del péndulo = 1. Para determinar la relación que debían de tener las K_p entre sí, pusimos un valor bajito a la K_p del motor y uno bastante alto a la K_p del péndulo y fuimos bajando este último. Estos fueron los primeros resultados:

• **K_p _motor: 1, K_p _péndulo: 100**



La primera gráfica representa la posición del motor (en azul) junto a su referencia (en amarillo) y la segunda representa la posición del péndulo. Como vemos, al tener la K_p del péndulo un valor tan alto el péndulo apenas se mueve del cero, sin embargo esto ocurre a cambio de que el motor no sigue nada bien a la referencia.

• K_p _motor: 1, K_p _péndulo: 10



Acabamos determinando que la K_p del péndulo tenía que ser aproximadamente 10 veces mayor a la del motor. De esta forma ya se consigue que el péndulo se mantenga estable y que el motor pueda seguir la referencia de una manera aceptable. Tras alguna prueba más para redondear mejor los parámetros, acabamos fijando los siguientes valores para las ganancias de los reguladores:

PD motor: $K_p= 1.2$ y $K_d= 0.8$

PD péndulo: $K_p= 10$ y $K_d= 1$

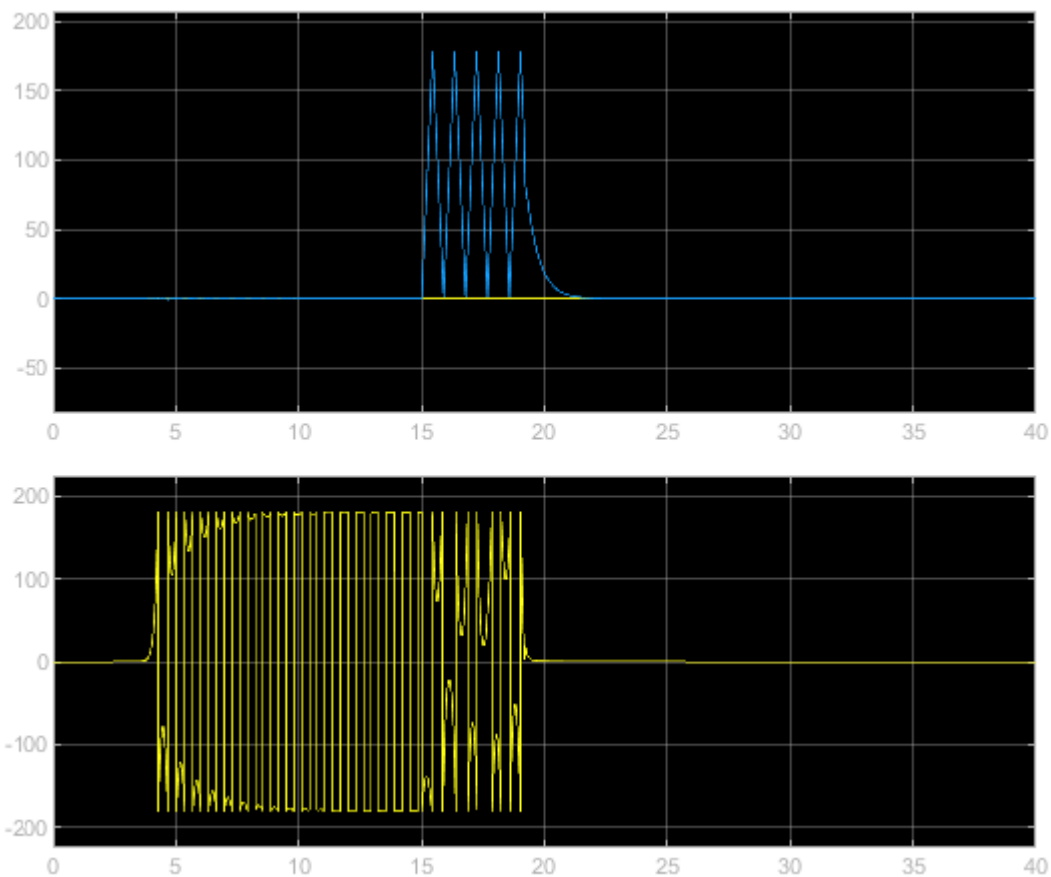
5.3. Resultados de la simulación

Una vez llegados a este punto donde ya tenemos toda la simulación lista, vamos a estudiar y a observar gráficamente los resultados obtenidos.

Al ser una simulación, todo es teórico e ideal. Un ejemplo donde esto se puede ver es que si el péndulo ya se encuentra arriba, el brazo es capaz de encontrar una situación de equilibrio perfecta, y no es necesario que el motor haga mover el brazo ya que con estar quieto el péndulo ya se mantiene en equilibrio. En la realidad sería más complicado de que encontráramos una situación de equilibrio tan perfecta. Por ello, no vamos limitarnos a que el péndulo se mantenga en equilibrio en la misma posición todo el rato y que el brazo no se tenga ni que mover, sino que vamos a introducir algún estímulo externo. Una de las cosas que vamos a hacer es que el motor tenga que moverse siguiendo la referencia que nosotros le indiquemos a la vez que sujeta al péndulo. La siguiente será ver cómo se comporta el sistema si no le hacemos al motor seguir ninguna referencia pero introducimos pequeñas perturbaciones que intenten volcar al péndulo. Antes de estas dos cosas, vamos a ver gráficamente como se da lugar el levantamiento del péndulo desde abajo.

LEVANTAMIENTO DEL PÉNDULO

Hay que mencionar que al principio de la simulación el péndulo parte inicialmente de su posición de equilibrio (cero grados), es decir, que se encuentra ya arriba. Lo que hacemos es que el motor no empieza a actuar hasta el segundo 15, y le damos así tiempo al péndulo a caerse y a dejar de moverse, para que podamos levantarlo desde abajo del todo en reposo. Una vez llegados al segundo 15, el motor empieza a moverse con impulsos consecutivos con una amplitud de 0.4 y una frecuencia de 1.12, los cuales cesarán cuando el péndulo se encuentre muy cerca de su posición de equilibrio. La gráfica resultante es la siguiente:



La gráfica de arriba corresponde a la posición angular del motor y la de abajo la posición angular del péndulo. Como vemos el péndulo pierde el equilibrio y se cae sobre el segundo 4, mientras tanto el motor se mantiene quieto hasta el segundo 15 donde empieza a intentar levantar el péndulo.

La gráfica del péndulo conviene explicarla un poco ya que puede dar lugar a confusión. Si hemos dicho que cuando el péndulo está arriba esa es la posición de equilibrio y corresponde con 0 grados, cuando el péndulo se encuentra abajo corresponde con 180 o -180 grados. Al caerse por la propia naturaleza de la gravedad, el péndulo oscila de un lado para el otro hasta que cada vez pierde más su energía cinética y más o menos parece mantenerse quieto. La cosa es que el péndulo no supera gráficamente los 180° o los -180°. Si en la realidad por ejemplo el péndulo está en 185° se interpreta como que está en la zona negativa y se tendrá en cuenta como que está en -175°, y en el caso contrario ocurriría lo mismo. Es por esto que vemos como en la gráfica del péndulo hay tantos saltos entre 180 y -180 y no da la sensación de que el péndulo se haya quedado quieto en ningún momento, porque de hecho el péndulo no se llega a quedar completamente quieto, sino que cuando parece que ya se ha parado se sigue moviendo inapreciablemente y está constantemente atravesando los $\pm 180^\circ$. En el segundo 15 vemos como empieza a moverse de forma diferente debido a los impulsos que le está metiendo el motor, sin embargo estas

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional
oscilaciones del péndulo no alcanzan los 0° hasta el segundo 19. Una vez alcanzada la posición de equilibrio, el péndulo ya se encuentra arriba y deja de moverse junto con el motor, ya que encuentran fácilmente un equilibrio ideal para el péndulo.

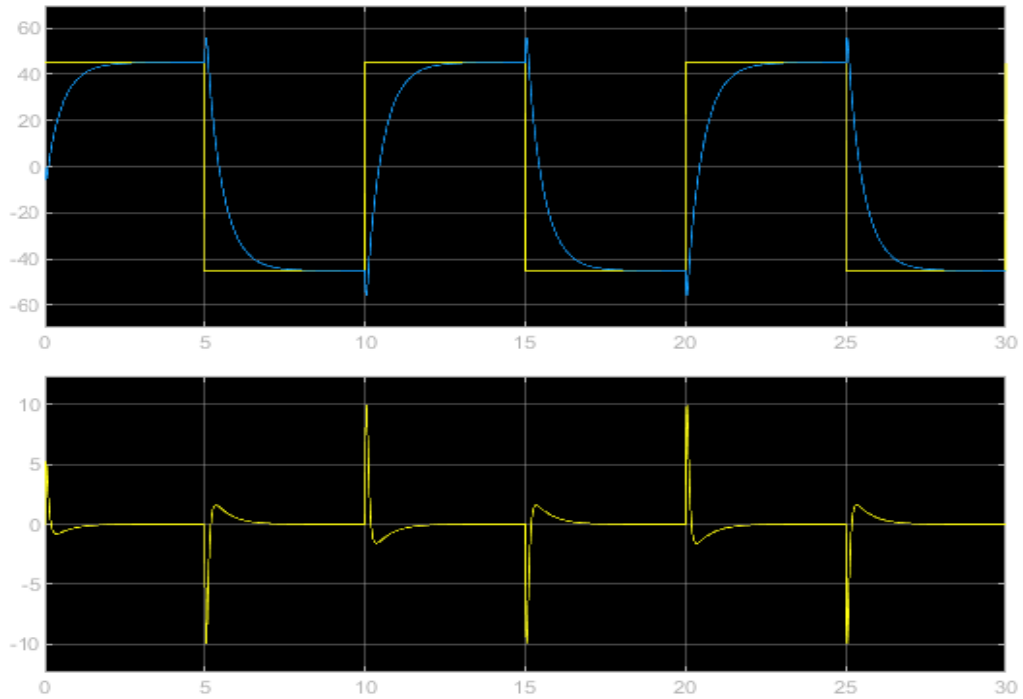
SEGUIMIENTO DE REFERENCIA

Ahora, como ya hemos dicho antes, el motor va a tener que seguir una referencia, es decir, va a tener que moverse como nosotros le digamos a la vez que mantiene el péndulo en equilibrio. A continuación pues, vamos a observar el comportamiento del sistema para referencias de distintas características.

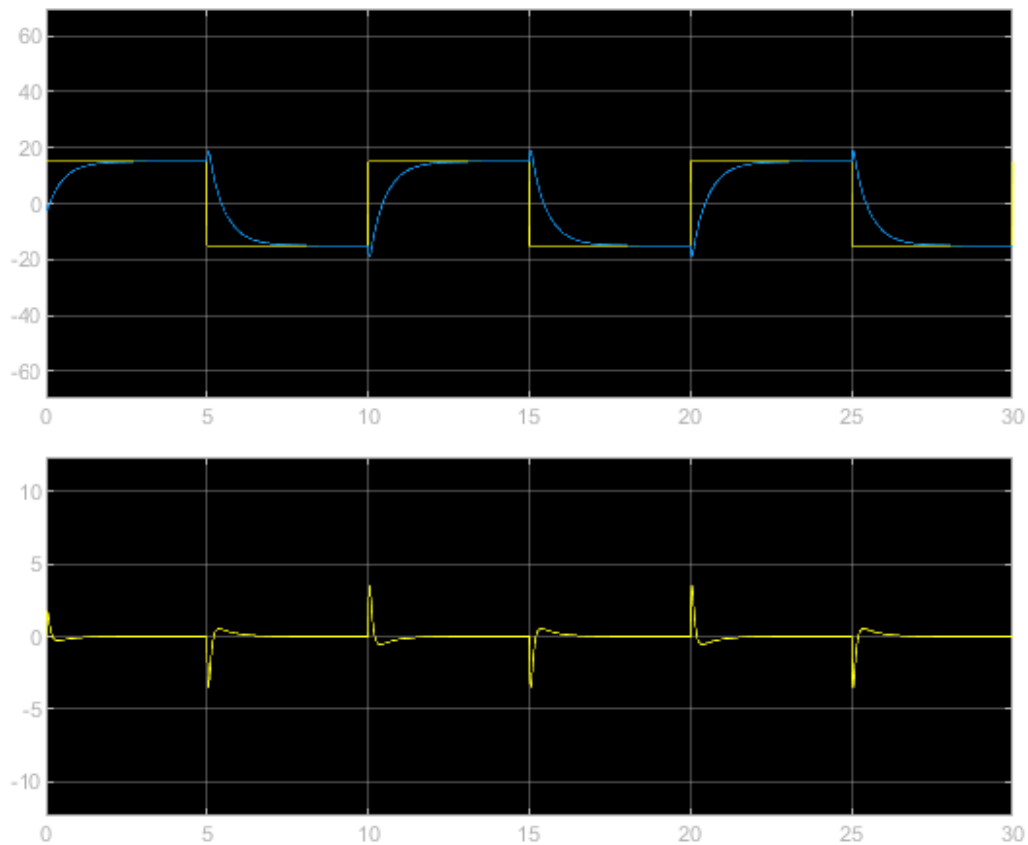
Estamos graficando las señales del motor y del péndulo a la vez igual que la gráfica de antes. En la gráfica de arriba la onda amarilla va a corresponder a la referencia y la azul a la posición angular del motor, y respecto a la gráfica de abajo, como el péndulo no tiene que seguir ninguna referencia solamente tenemos la posición angular del péndulo en amarillo.

Vamos a empezar viendo que pasa si cambiamos la amplitud de la onda de referencia, luego veremos el comportamiento del sistema ante referencias con diferentes formas de onda (cuadrada, senoidal y diente de sierra), y por último, variaremos el periodo de la señal de referencia para ver hasta dónde puede llegar nuestro sistema.

• Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 45^\circ$, Periodo: 10s

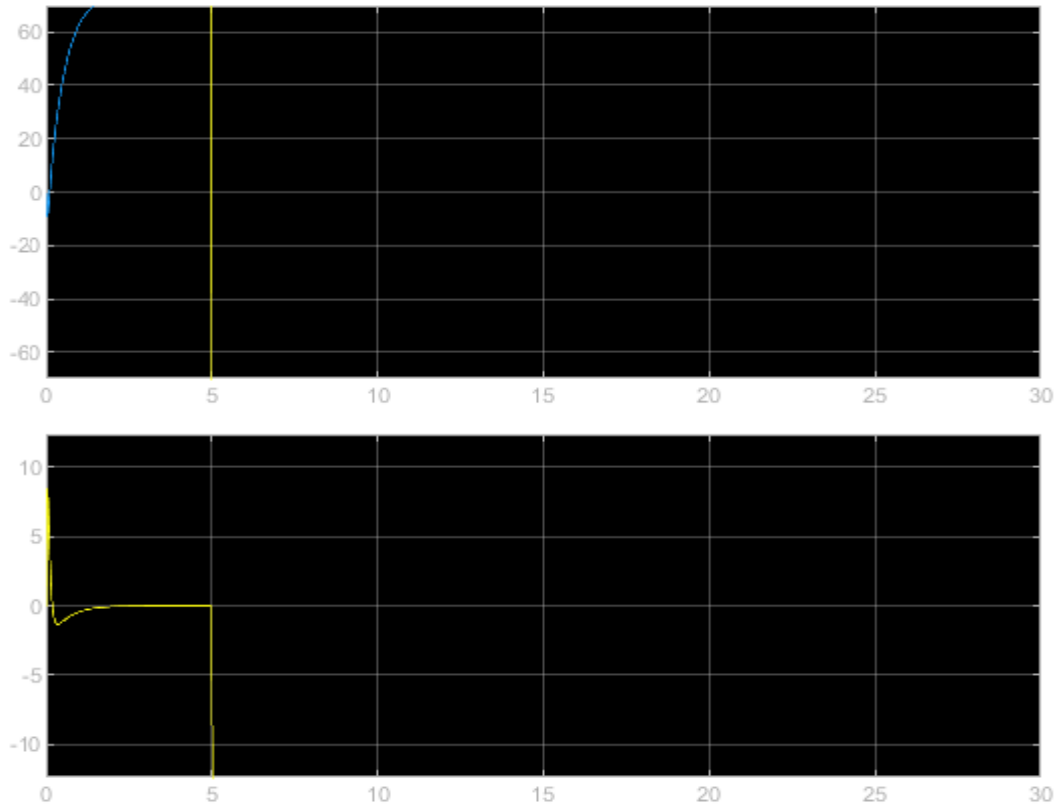


• Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 15^\circ$, Periodo: 10s



Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

· Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 75^\circ$, Periodo: 10s

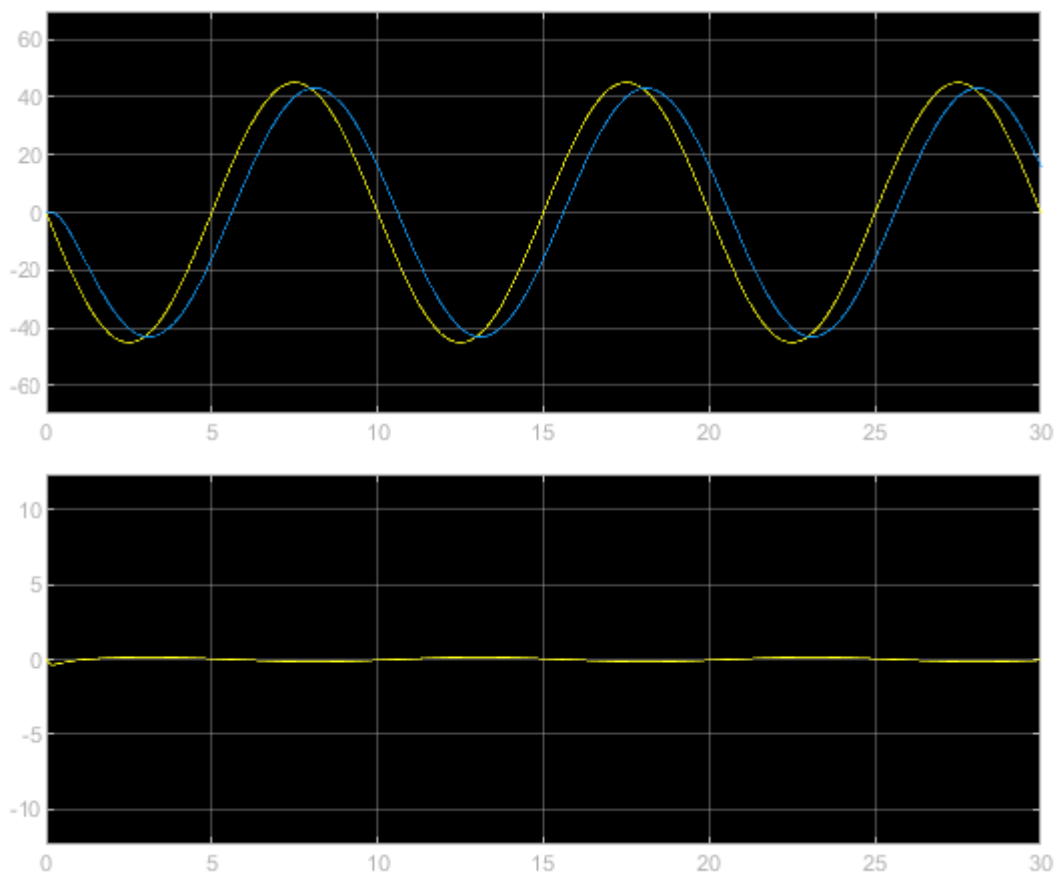


En el caso de las ondas cuadradas de 45° y 15° de amplitud vemos que el motor alcanza la referencia sin problemas y en un tiempo razonable. Es interesante fijarse en el instante en el que la onda referencia cambia. Vemos que se producen dos picos tanto en el motor como en el péndulo. Esto se debe a que para mover al péndulo de un punto al otro pero sin que se caiga, el motor mueve al brazo robot al principio un poco en la dirección contraria para que el péndulo se incline un poco hacia la dirección a la que se va a mover. Si no hiciéramos esto, durante el desplazamiento el péndulo tendería a inclinarse hacia el lado contrario al que nos movemos y podría llegar a caerse. Este, es un movimiento que hace el motor para anteponerse a este problema y mantener el equilibrio del péndulo durante el desplazamiento.

No ocurre lo mismo en la última gráfica, donde la referencia va desde 75° a -75° . Hasta los 5 primeros segundos, el brazo va de 0° a 75° y el péndulo se mantiene en equilibrio. Sin embargo, en el segundo 5 el péndulo debería ir hasta -75° desde los 75° , o sea, que tiene que recorrer 150° . Lo que ocurre es que la simulación asume que no se puede recorrer esa distancia en el mismo tiempo en el que hemos tardado en los dos casos anteriores sin que el péndulo se caiga. Podemos ver en la gráfica de abajo como en el segundo 5 el péndulo se caería. Hemos comprobado que 75° es la

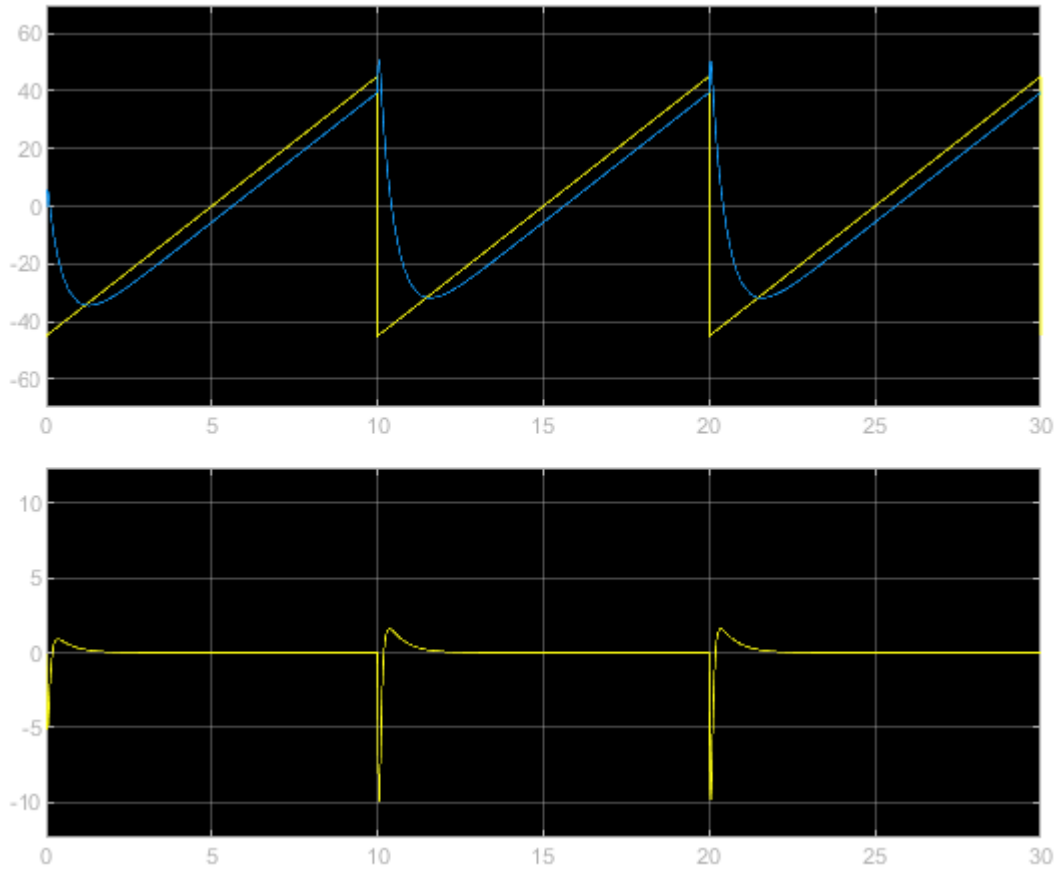
distancia límite que le podemos dar a la onda cuadrada de referencia; si la amplitud de la onda es mayor o igual a 75° el péndulo no se podrá mantener en equilibrio. No obstante esto no supone un problema. El hecho de que todo el mecanismo de nuestro péndulo sea de tamaño reducido y que el propio péndulo no sea muy largo hace que el sistema sea más difícil de estabilizar. Si fuera más largo el péndulo la dinámica del sistema sería más lenta y sería más difícil que se pudiera caer el péndulo. Esto lo hemos tenido en cuenta en todo momento y sabíamos que nuestro péndulo iba a tener limitaciones como éstas debido a su tamaño. Aclarado esto, podemos determinar que nuestro péndulo no va a estar hecho para recorrer grandes distancias, con que pueda moverse en un abanico de $\pm 70^\circ$ aproximadamente ya es más que suficiente. Podríamos intentar solucionar este problema cambiando los parámetros de nuestro regulador, pero como ya hemos dicho no vamos a hacerlo, simplemente vamos a asumir sin problemas que el péndulo tiene esta limitación de movimiento.

- Onda senoidal, Amplitud: $\pm 45^\circ$, Periodo: 10s



Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

- Onda diente de sierra, Amplitud: $\pm 45^\circ$, Periodo: 10s



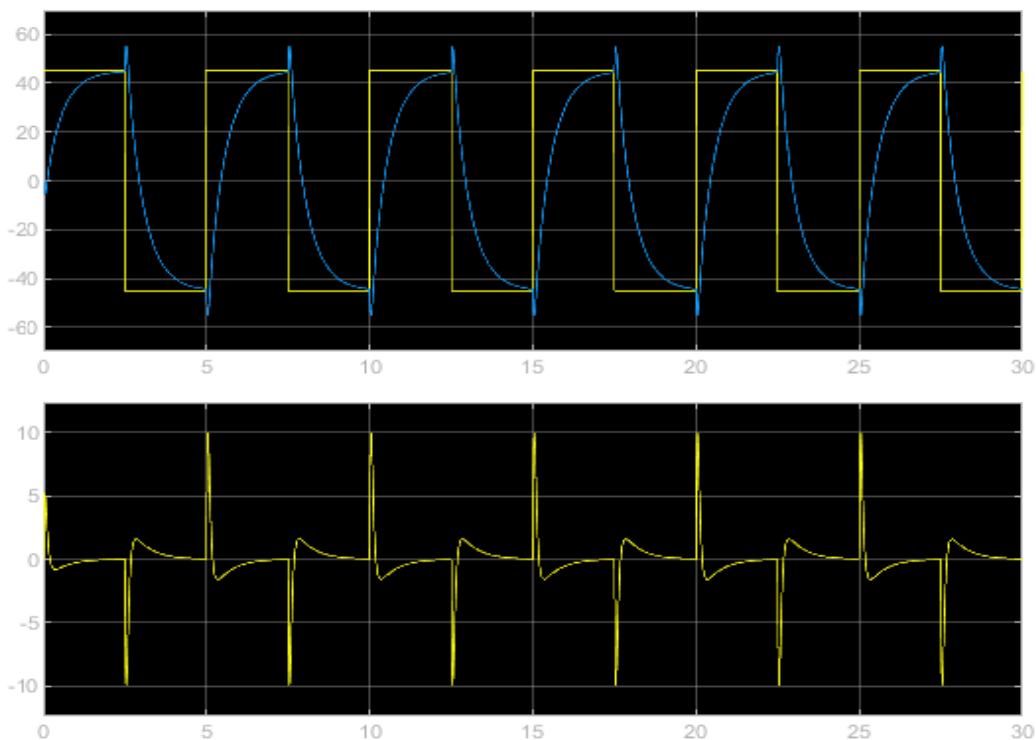
Tanto en caso de que la referencia sea una onda senoidal como una de diente de sierra, la situación cambia completamente respecto a cuando era cuadrada. El problema de la onda cuadrada es que exigía una velocidad de respuesta muy rápida por parte del sistema, es decir, de repente en el mismo instante de tiempo la señal pasaba de estar de 45° a -45° y el motor debía llegar de un punto al otro lo más rápido posible, lo cual hacía que el movimiento fuera más precipitado y difícil de ejecutar.

En el caso de una onda senoidal, el motor sigue la referencia muy correctamente con un pequeño *delay* o retraso, y el péndulo se mantiene prácticamente todo el tiempo sobre su posición de equilibrio sin riesgo alguno de caerse. Se debe a que el brazo se puede mover de un punto al otro a una velocidad bastante moderada sin tener la necesidad dar grandes acelerones como en la onda cuadrada. Como el movimiento ocurre a una velocidad bastante lenta es muy fácil que el péndulo se desplace de forma estable sin muchos problemas. En este caso no tenemos la limitación de los $\pm 75^\circ$ que teníamos antes con la onda cuadrada, de hecho podemos abarcar recorridos de incluso $\pm 360^\circ$, no obstante los movimientos que va a

tener que hacer el péndulo real no van a ser tan lentos y va a tener en muchos casos que reaccionar de forma rápida. Con esto queremos decir que la referencia con forma de onda senoidal es una buena forma de comprobar la dinámica del sistema cuando para mantener el péndulo en equilibrio bastara con realizar movimientos lentos. Es necesario tener en cuenta que nuestro péndulo real no va a ser de naturaleza tan estable como el de la simulación y va a necesitar hacer movimientos más rápidos, por lo que no tomaría muy en cuenta como referente a la onda senoidal para el caso real.

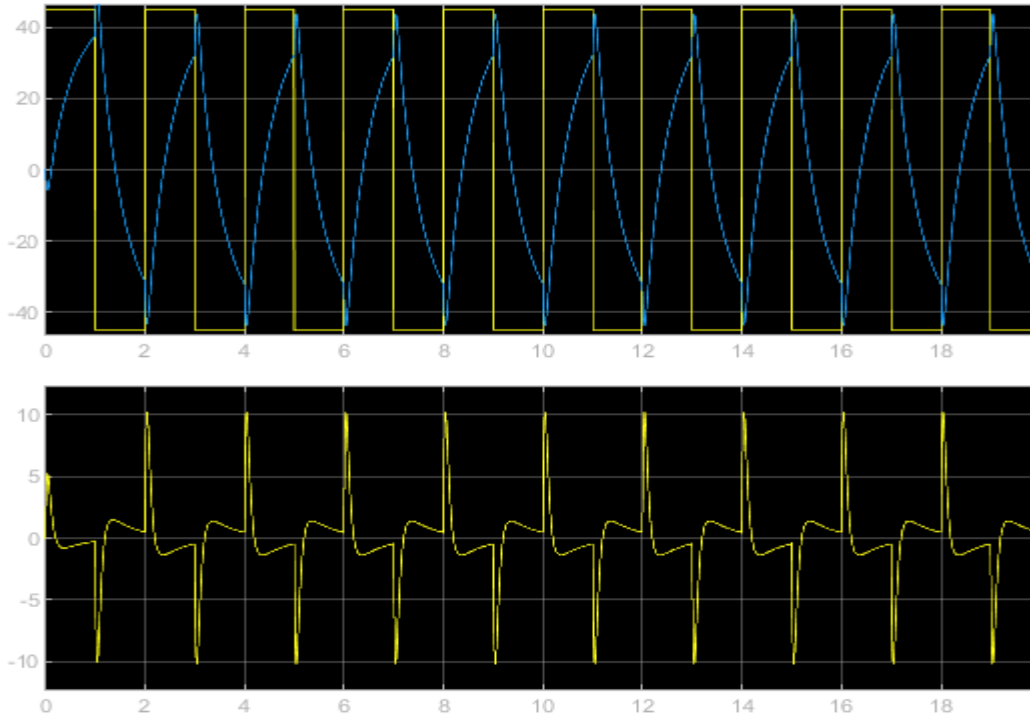
Respecto a la onda de diente de sierra, podríamos decir que la respuesta del sistema es como la combinación de la onda senoidal y la onda cuadrada. Por un lado, mientras que la referencia tiene forma de rampa ocurre lo mismo que en la onda senoidal: podemos desplazar el péndulo de un punto a otro a una velocidad muy lenta y sin ningún problema de que se nos caiga, eso sí, con un ligero retraso. Por el otro lado, cuando llegamos a los 10 segundos ocurre lo mismo que con la onda cuadrada: hay un cambio muy brusco de 45° a -45° y el motor tiene que reaccionar rápidamente. Como es lógico, también podemos observar los mismos picos, tanto en la posición angular del motor como en la del péndulo, que nos salían en la onda cuadrada para compensar la brusquedad del movimiento y evitar que se nos cayera el péndulo durante el desplazamiento. Debido a estos picos idénticos a los que se han dado en la onda cuadrada, en este caso también tendríamos una limitación de $\pm 75^\circ$ ante movimientos de carácter rápido.

- Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 45^\circ$, Periodo: 5s

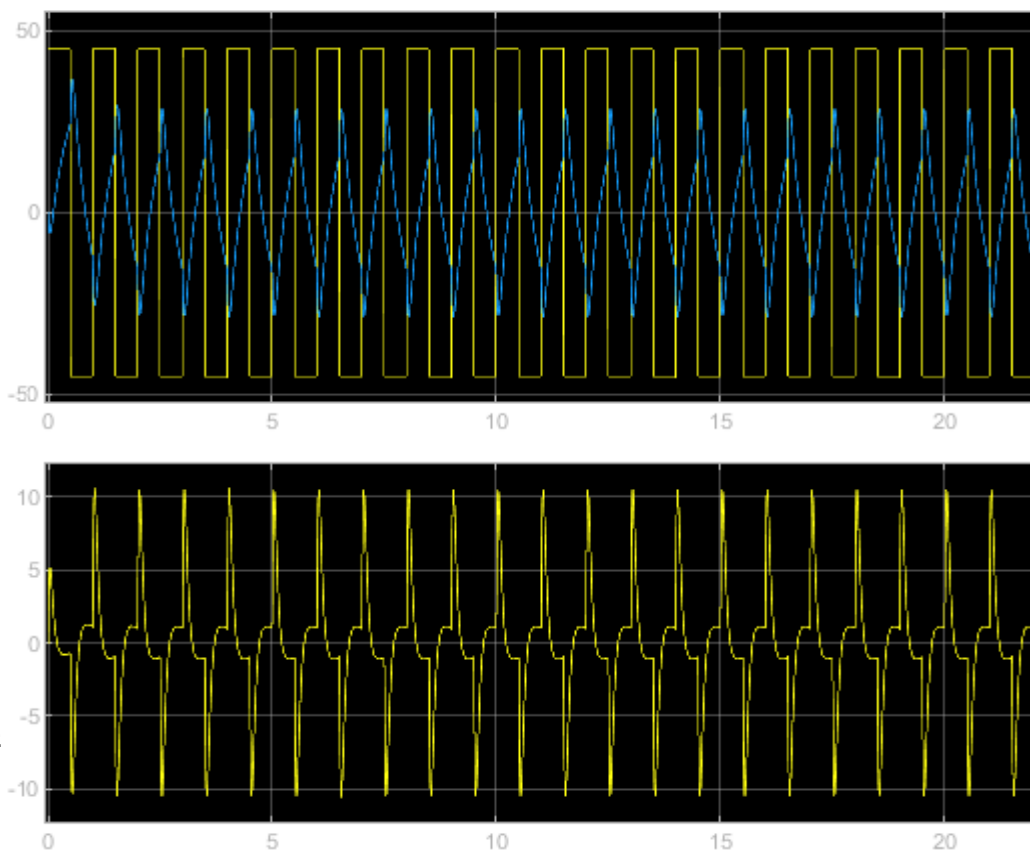


Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

- Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 45^\circ$, Periodo: 2s



- Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 45^\circ$, Periodo: 1s



En estas gráficas hemos seguido manteniendo la forma de onda cuadrada para la referencia y hemos comprobado el comportamiento del sistema al cambiar el periodo a uno menor, ya que con 10 segundos de periodo ya veíamos que no había problema ninguno para seguir la referencia.

Con la mitad de tiempo, es decir, 5 segundos, vemos que el motor es todavía capaz de llegar a tiempo a la señal de referencia. No pasa lo mismo con las dos siguientes gráficas, más concretamente, si bajamos $T=5s$ ya no alcanzamos la señal de referencia. Con $T=4s$ y $T=3s$ no alcanzamos la referencia por muy poco y no es un problema muy grande, sin embargo, con $T=2s$ y $T=1s$ ya empieza a ser más problemático. En $T=2s$ aún podemos ver como la señal del motor alcanzaría la referencia cuando se produce el pico que necesita el motor para emprender el movimiento, sin embargo esto no se puede valorar como alcanzar la referencia. Como vemos en las gráficas, al motor no le da tiempo a llegar a la referencia estipulada ($\pm 45^\circ$) y tiene que cambiar de dirección antes de llegar constantemente antes de llegar a los 45° o a los -45° . Si el motor girara lo suficientemente rápido como para alcanzar estas referencias en el poco tiempo que le estamos dando, seguramente esto supondría que el péndulo se cayera. El sistema está diseñado para que se priorice que no se caiga el péndulo a que se llegue a la referencia con exactitud, por ello el sistema renuncia a poder llegar a referencias muy exigentes con tal de mantener de pie al péndulo.

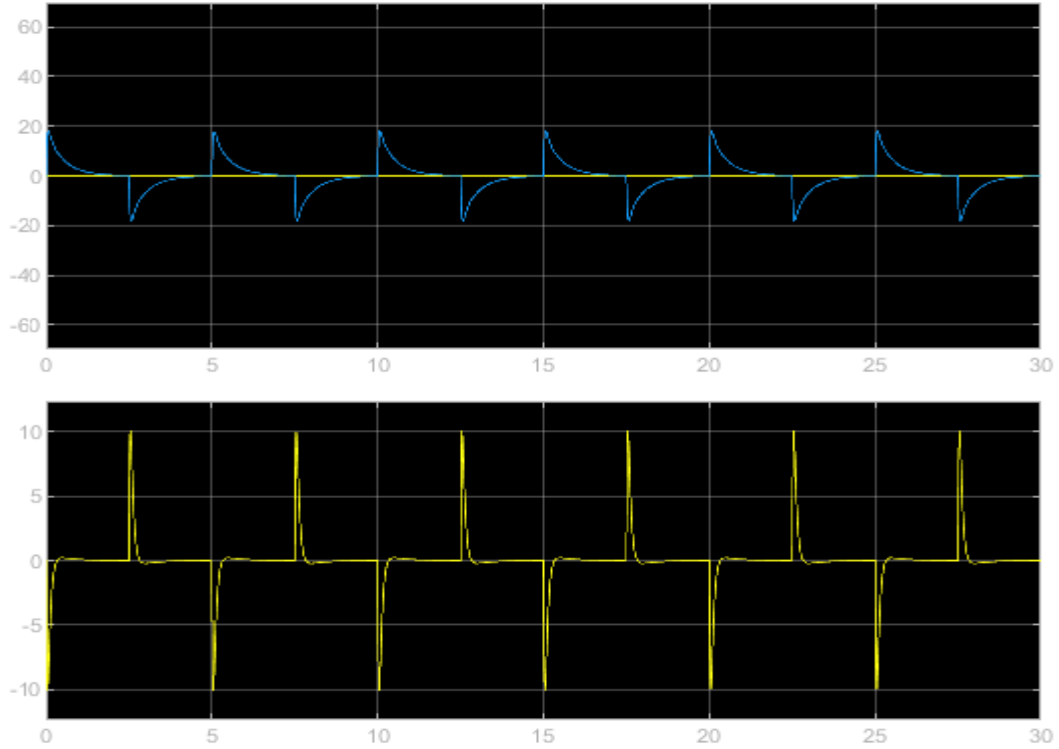
RESPUESTA ANTE PERTURBACIONES

En este apartado vamos a introducir perturbaciones que intenten volcar al péndulo. El motor no va a tener que moverse a una referencia, solo se moverá para evitar que se caiga el péndulo.

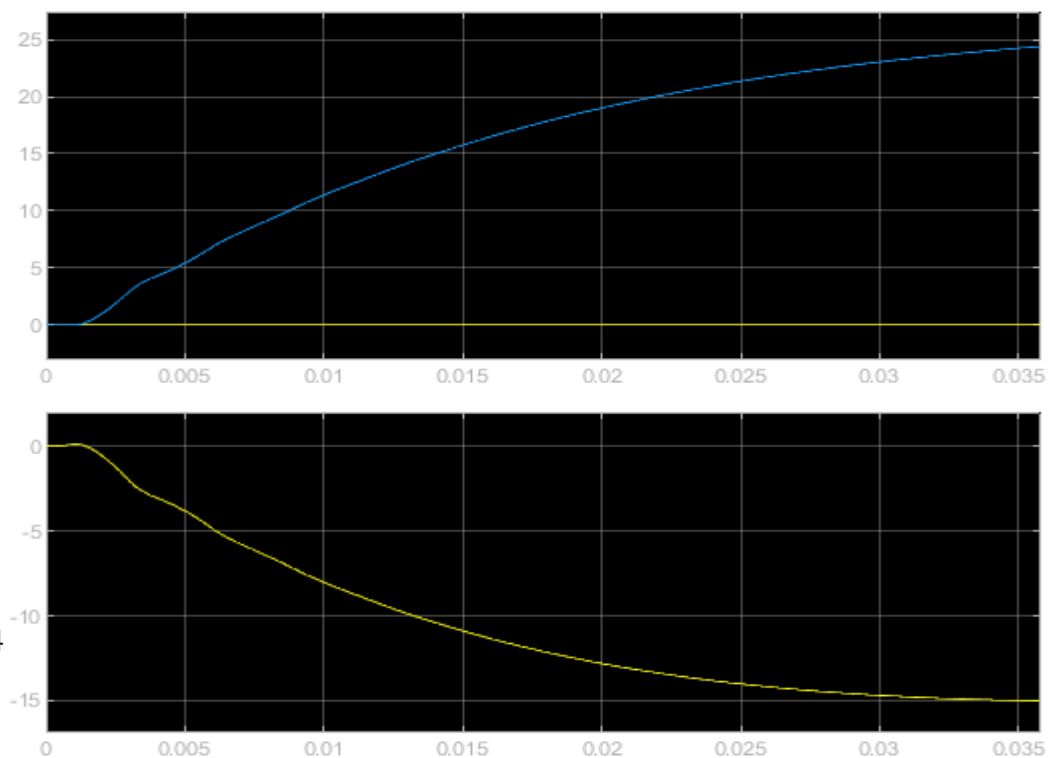
Vamos a introducir dos perturbaciones de signo contrario que van a actuar cada 5 segundos, pero desfasadas 2.5 segundos entre sí. Iremos subiendo la amplitud de estas perturbaciones para comprobar hasta donde es capaz de aguantar el péndulo sin caerse. Hay que tener en cuenta que estas perturbaciones actúan en la parte más alta del péndulo, donde este tiene forma de esfera. Es como si manualmente le diéramos nosotros mismos golpecitos al péndulo en la parte de arriba para que se cayera.

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

• Perturbaciones, Amplitud: 1, Periodo: 5s



• Perturbaciones, Amplitud: 1.75, Periodo: 5s



Ante perturbaciones de una amplitud de 1 el motor es capaz de corregir el movimiento a tiempo y mantener al péndulo de pie. Como vemos en la primera gráfica el péndulo, debido a las perturbaciones, llega a inclinarse hasta $\pm 10^\circ$ pero es capaz de retornar a la posición de equilibrio. Podemos observar que el motor se mueve en dirección contraria a la que se inclina péndulo para contrarrestar dicha inclinación.

Hemos comprobado que una perturbación de amplitud mayor o igual a 1.75 consigue volcar al péndulo, como se puede ver en la segunda gráfica. Vemos también que la máxima inclinación que péndulo es capaz de soportar es 15° , es decir, si diéramos de golpe a nuestro péndulo real un empujón que lo dejara con una inclinación de 15° , al motor ya no le da tiempo a contrarrestarlo y volver a equilibrar al péndulo.

Como vemos nuestro péndulo no puede tolerar perturbaciones que no sean de pequeña amplitud. Esto es debido como ya hemos explicado con anterioridad, a que nuestro péndulo invertido tiene un tamaño pequeño, lo cual hace que su dinámica sea más rápida y provoca que el péndulo se caiga con mayor facilidad ante cambios bruscos como este. Cuanto más grande sea el péndulo más grandes son las perturbaciones que podrá aguantar.

SEÑALES DEL REGULADOR

Como hemos visto en la sección de “diseño del regulador” (apartado 5.2.), tenemos 2 señales resultantes de cada uno de los PD, las cuales vamos a llamar acciones de control. Una es la resultante del proceso que controla la posición del motor y la otra la resultante del proceso de control del péndulo. La combinación de ambas acciones de control dará como resultado la acción de control final que se le aplica al motor para que este se mueva para estabilizar al péndulo.

Es también interesante además de ver las señales de posición del péndulo y del motor como hemos hecho hasta ahora, ver también las acciones de control de los dos reguladores que hemos diseñado, que al fin y al cabo son las responsables del movimiento del motor. Para ver estas tres acciones de control (la del motor, la del péndulo y la suma de ambas) vamos a medir con un scope la señal al final de cada uno de los PD y la señal resultante de la combinación de los PD. El scope quedará conectado en nuestro esquema de la siguiente forma:

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

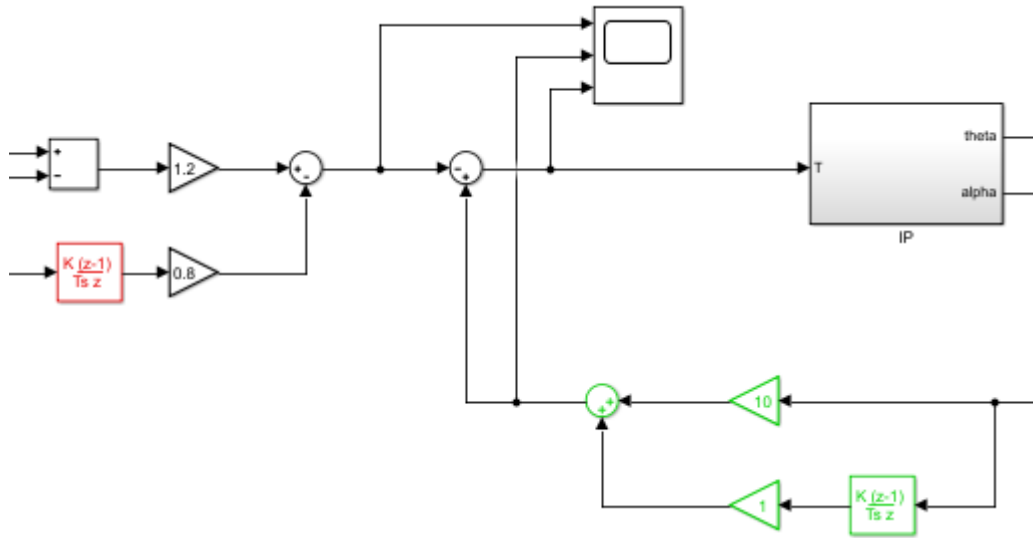
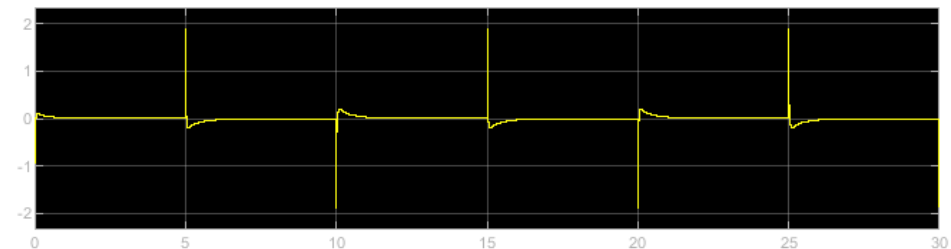
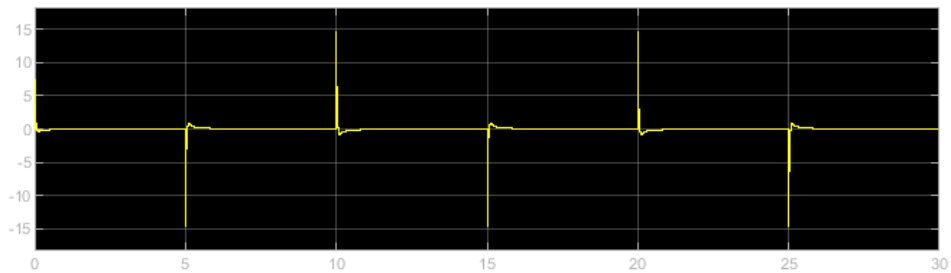
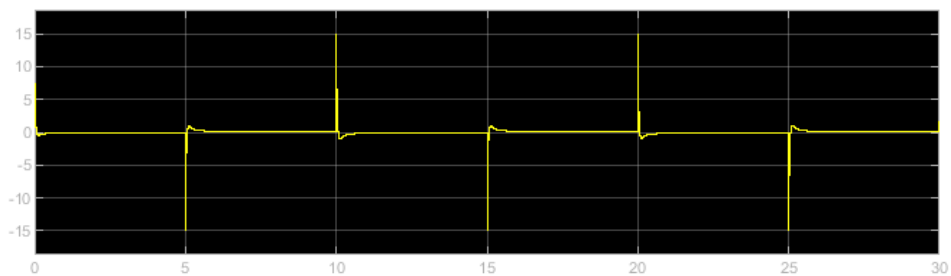


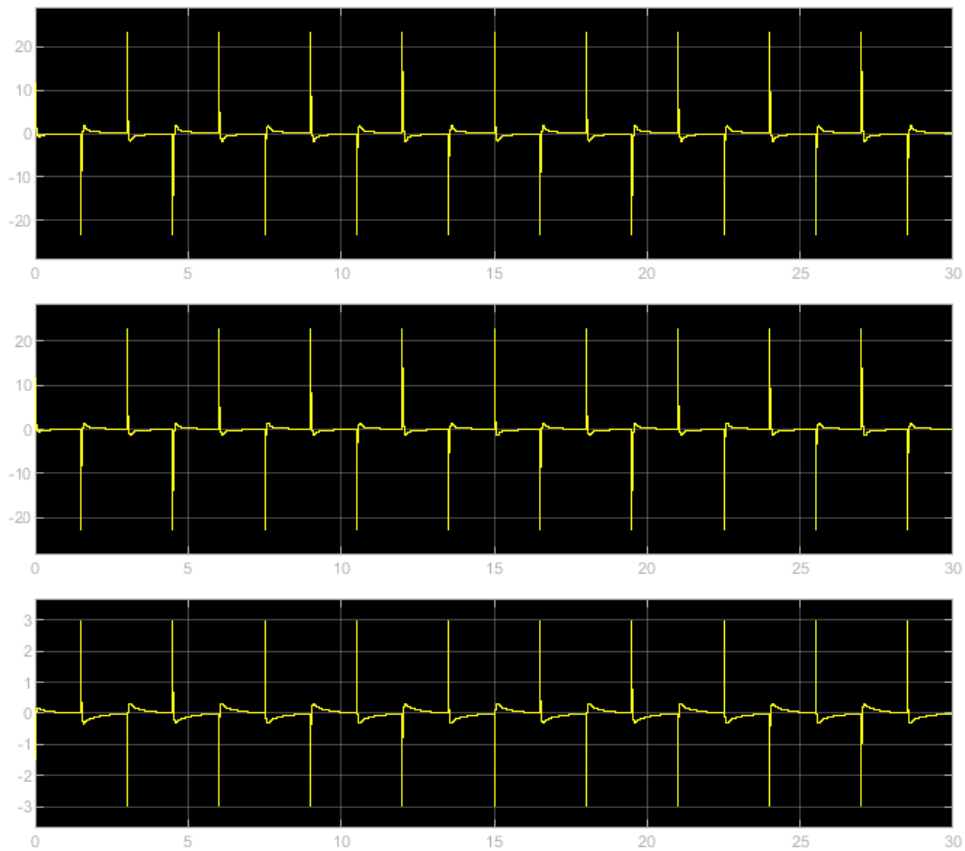
Imagen 25: Medición de las acciones de control

Obtendremos pues las siguientes gráficas, donde la primera corresponde a la acción de control a la del motor, la segunda a la del péndulo y la tercera a la combinación de ambas, especificándose arriba de la gráfica las características de la referencia que debe seguir el motor:

- Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 45^\circ$, Periodo: 10s



- Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 70^\circ$, Periodo: 3s



Como hemos visto antes en el apartado de diseño del regulador, las acciones de control no se suman entre sí, sino que se restan. Así pues, la última señal de cada gráfica resulta de la resta de la primera señal con la segunda. Como las dos acciones de control son bastante parecidas la acción de control total tiene unos valores muy bajitos, llegando a alcanzar como mucho una amplitud de 3.

Si comparamos las dos gráficas las cuales tienen aplicadas referencias distintas, podemos ver que si aumentamos la amplitud de la referencia también aumenta la amplitud de las señales de control, como es lógico ya que para alcanzar una referencia mayor el motor necesitará más energía. También podemos ver que al reducir el periodo de la referencia las acciones de control comprimen más.

5.4. Respuesta ante ruido

A continuación, vamos a analizar como se comportaría nuestro sistema si tuvieramos ruido en las señales de medición, concretamente en la de la posición angular del péndulo (la señal de salida *alpha*). Este apartado se ha decidido llevar a cabo por un motivo, y es que en el montaje real de nuestro péndulo invertido vamos a tener un problema con la lectura del péndulo. Durante el montaje nos daremos cuenta de que la medida de la posición angular del péndulo va a tener ruido, el cual nos va a molestar para utilizar la señal para nuestro propósito. Este puede ser un problema muy grave a la hora de realizar un control del sistema, por lo que hemos decidido ver en la simulación que ocurre si mezclamos la señal de medida de la posición del péndulo con ruido. Para ello utilizaremos un bloque de simulink que produce ruido blanco y lo uniremos a la señal *alpha* mediante un sumador, resultando en nuestro esquema de simulink de la siguiente forma:

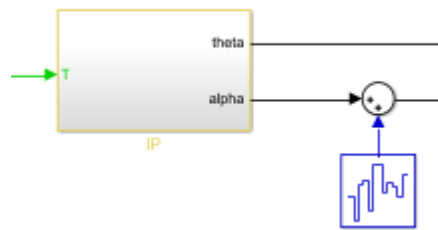
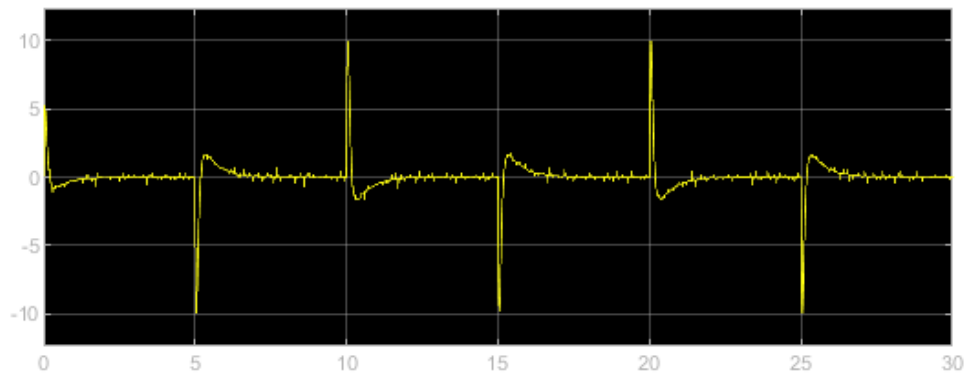
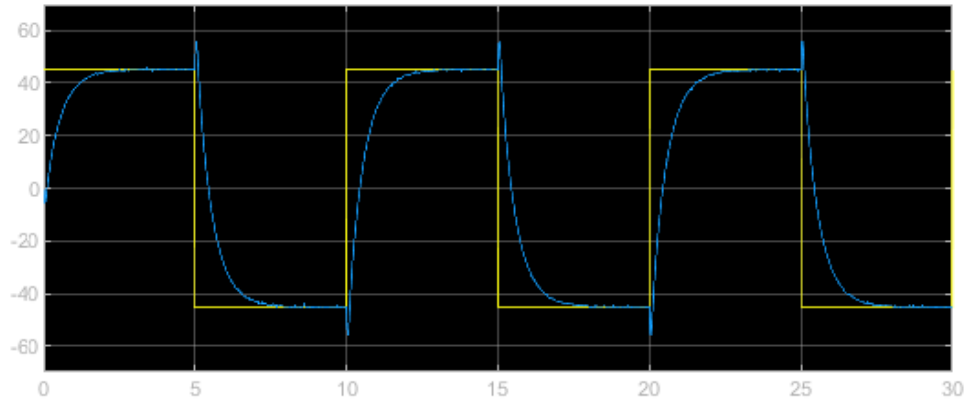


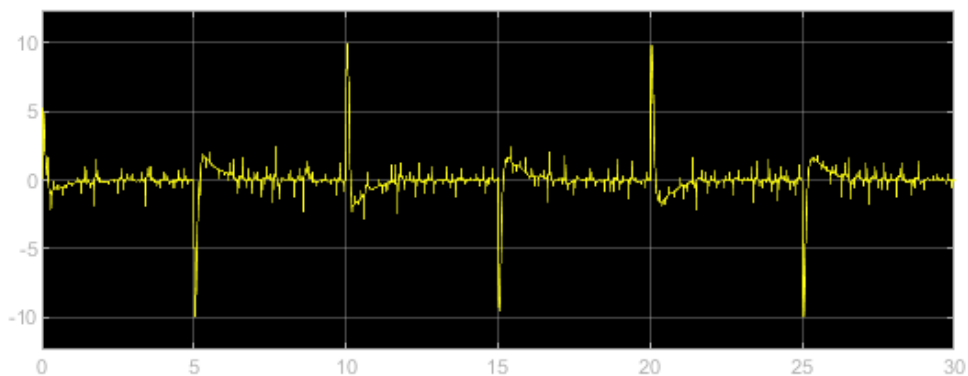
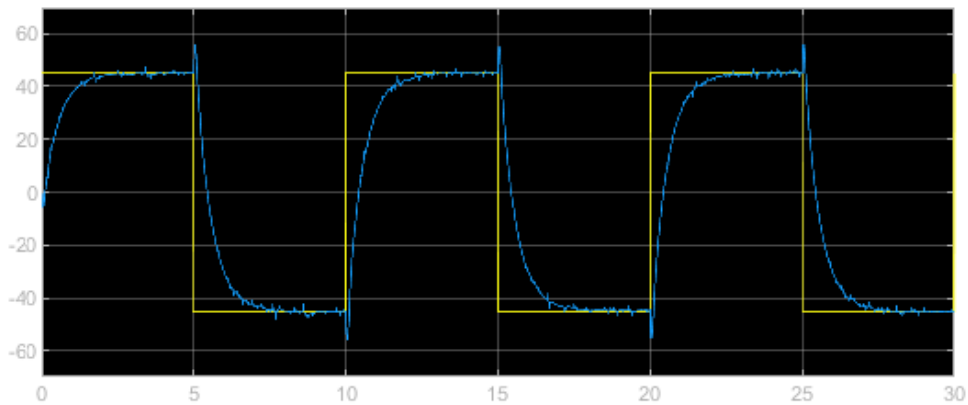
Imagen 26: Medida de la posición del péndulo con ruido

Empezaremos con valores de ruido pequeños y lo iremos aumentando para ver hasta donde es capaz de aguantar la simulación sin que se caiga el péndulo.

· Poder del ruido: 1×10^{-8}

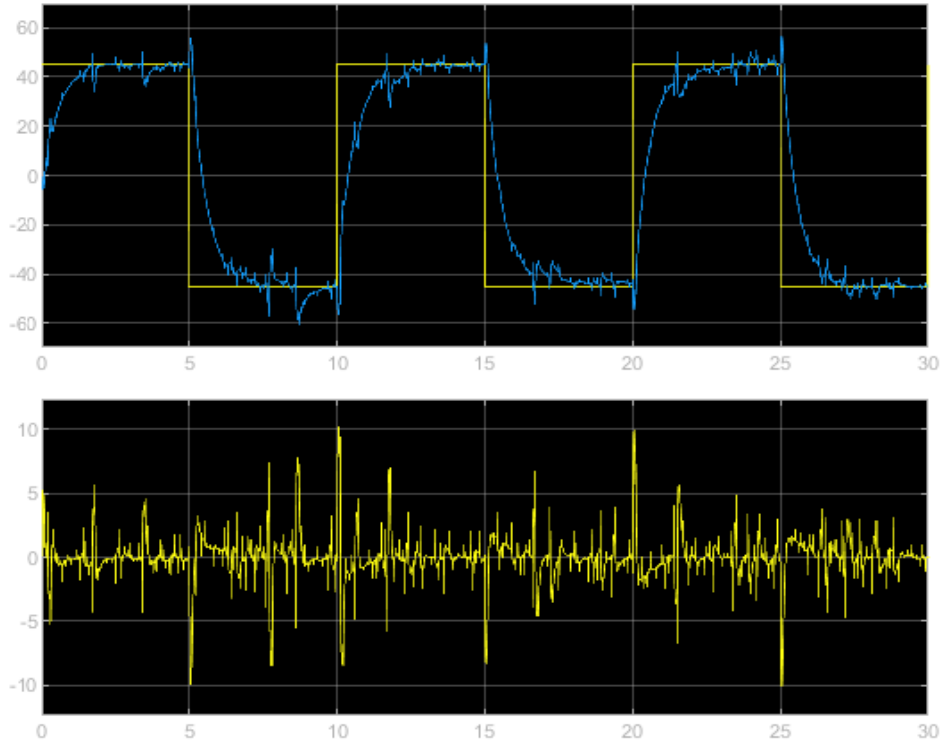


· Poder del ruido: 1×10^{-7}

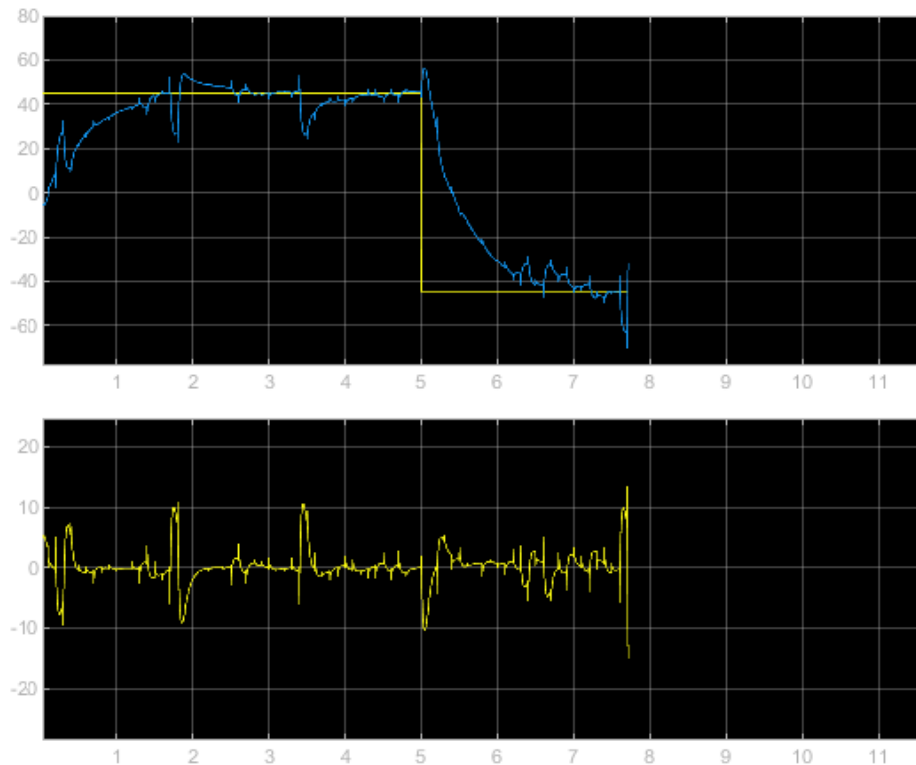


Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

· Poder del ruido: 5×10^{-7}



· Poder del ruido: 1×10^{-6}



Podemos ver a medida que avanzamos en las gráficas como el ruido cada vez hace más ilegible la señal del péndulo. Como vemos, el ruido que le hemos metido a la medida del péndulo repercute en el movimiento del motor, aunque obviamente se nota mucho más en la gráfica del péndulo que en la del motor. El ruido afecta al motor ya que, como ya hemos dicho anteriormente, estamos en un sistema subactuado y los movimientos que ejecute el motor van a depender directamente de la posición en la que se encuentre el péndulo, o más bien dicho, en la medida que hacemos de la posición del péndulo.

Con el ruido de 1×10^{-7} ya se empieza a notar el ruido considerablemente en la gráfica del péndulo, pero la señal aún es lo suficientemente buena como para que el motor mantenga al péndulo estable. Con el doble de ruido que antes, es decir 5×10^{-7} , la señal de la segunda gráfica ya empieza a ser muy poco legible y no se entiende ya bien, no obstante el motor aún es capaz de aguantar la situación. Si vemos la animación de la simulación, se ve que tanto el brazo como el péndulo tienen muchos “temblores”, para ser francos un ruido como este en el péndulo real creemos que sería suficiente para que el péndulo no se pueda mantener en equilibrio, ya que no creemos que el motor del péndulo invertido real pueda responder tan rápido como responde el de la simulación. Ya para acabar, en la última gráfica observamos como ya con un ruido de 1×10^{-6} la medida del péndulo es demasiado mala como para poder hacer un control efectivo del péndulo, no pudiendo así mantenerlo en equilibrio. Más concretamente, la simulación es capaz de aguantar un ruido de hasta 7.5×10^{-7} como máximo.

En nuestro péndulo real, con un ruido de valor más bajo ya va a ser suficiente para que no podamos hacer un control válido. Obviamente, en la simulación podemos eliminar el ruido si queremos, pero en el péndulo que montaremos este es un problema que deberemos resolver, ya que no podemos permitirnos tener una medida tan mala de algo tan importante para afectar el control en bucle cerrado. Igualmente, cómo vamos a abordar el problema del ruido lo veremos más adelante en el apartado del proyecto correspondiente al montaje real del péndulo invertido.

5.5. Simulación del péndulo modificado

Durante el montaje del péndulo se propuso un experimento que requería de hacer modificaciones en el péndulo, las cuales consisten en poner otro péndulo que fuera solidario al nuestro pero estuviera mirando hacia abajo en vez de hacia arriba, teniendo ambos péndulos entre sí 180° . Cada péndulo tendría su propio peso, los cuales podemos desplazar a la distancia que queramos sobre sus ejes. Para entender este apartado y obtener más información sobre que suponen estos cambios en el comportamiento de nuestro sistema y por qué decidimos hacer estas modificaciones, sugerimos leer antes el apartado 6.2. donde explicamos estas cuestiones desde el punto de vista del montaje. La cuestión es que antes de montarlo en la realidad decidimos probar estos cambios en la simulación para ver cómo se comportaba el péndulo simulado. Así es como quedó nuestro péndulo invertido en la simulación después de las modificaciones:

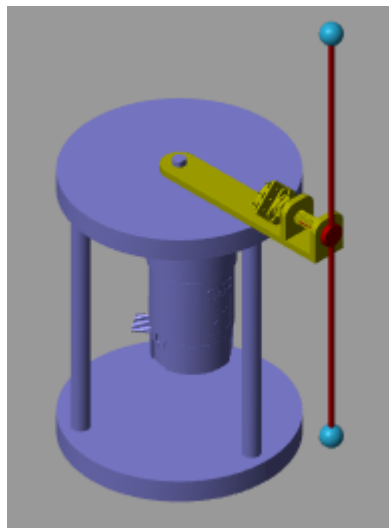


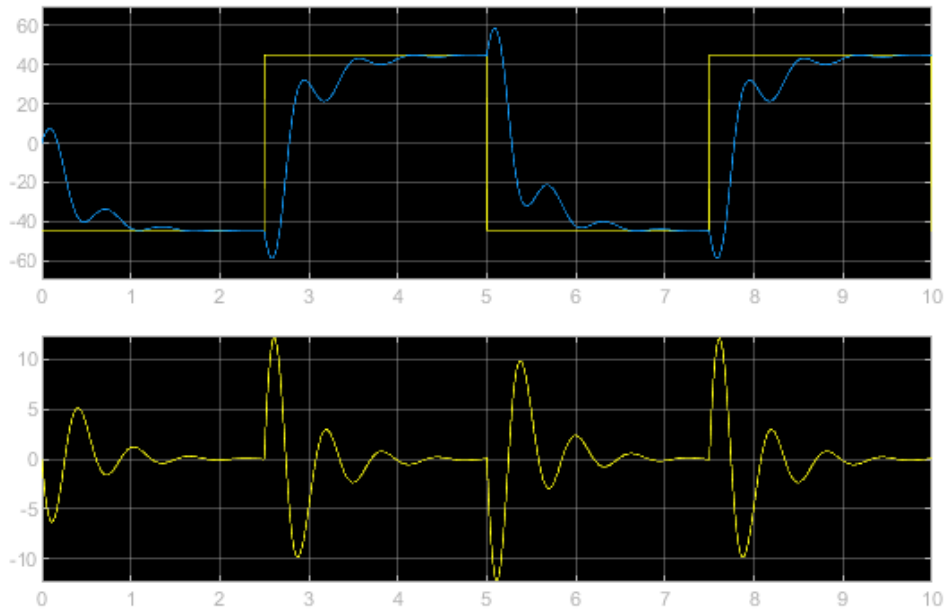
Imagen 27: Péndulo modificado - Simulación

Como hemos explicado en el apartado 6.2. estas modificaciones tienen como objetivo hacer más estable al péndulo por naturaleza, es decir, que le cueste más desequilibrarse y caer. Para ver si este nuevo modelo es más estable que el anterior vamos a exponerlo a los límites que presentaba nuestro anterior modelo, refiriéndonos al ruido, las perturbaciones o las referencias que era capaz de alcanzar como máximo sin caerse. Si es capaz de superar los límites de antes sin caerse significará que hemos conseguido que el péndulo sea de naturaleza más estable.

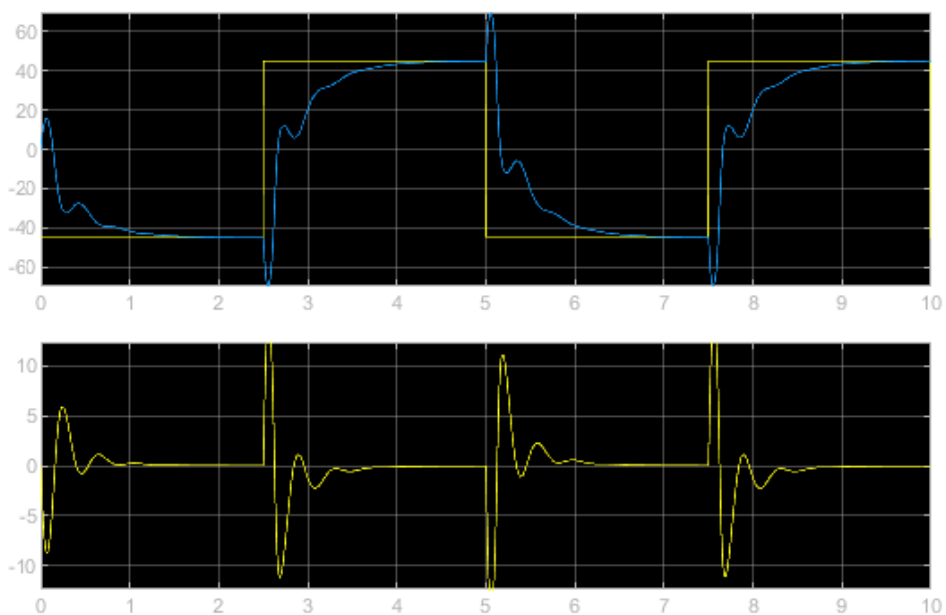
Comenzaremos de la siguiente forma: el peso del péndulo de arriba va a permanecer en el extremo superior de su eje lo más alejado posible del centro, y el

peso del péndulo de abajo va a empezar lo más cerca posible del centro y luego vamos a ir bajando. Tener en cuenta que ambos ejes miden 10 cm y vamos a considerar que el centro donde ambos péndulos se unen son los 0 cm. Aplicaremos a estos primeros ejemplos la misma referencia con forma de onda cuadrada de amplitud $\pm 45^\circ$ y 5s de periodo.

• **Peso 1: 10 cm desde el centro, Peso 2: 0 cm desde el centro**



• **Peso 1: 10 cm desde el centro, Peso 2: 2,5 cm desde el centro**

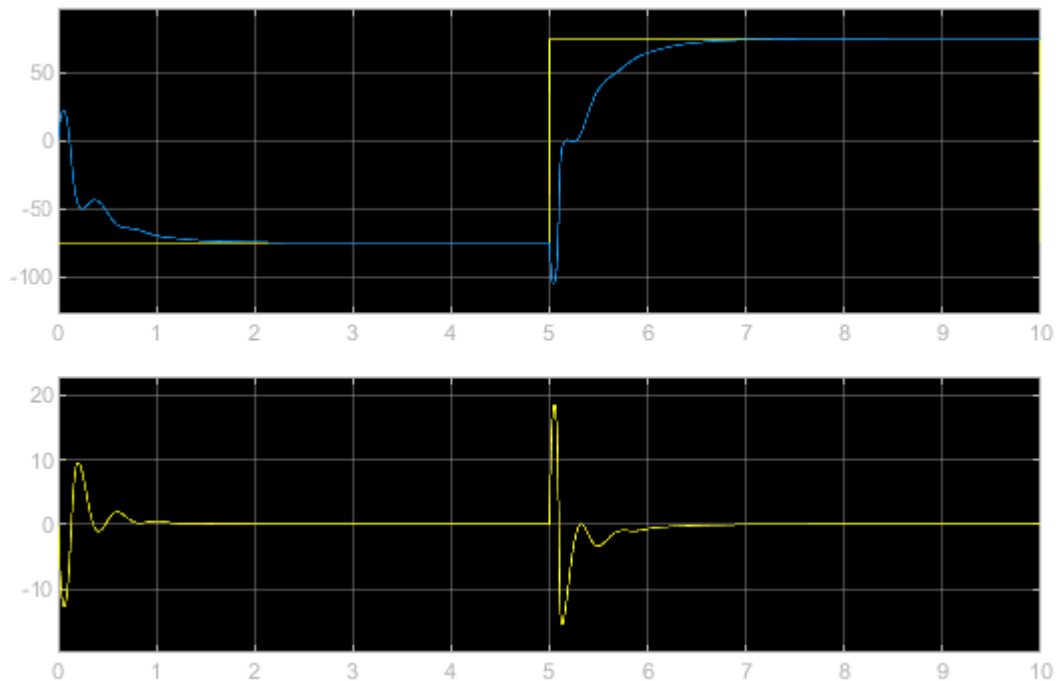


Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

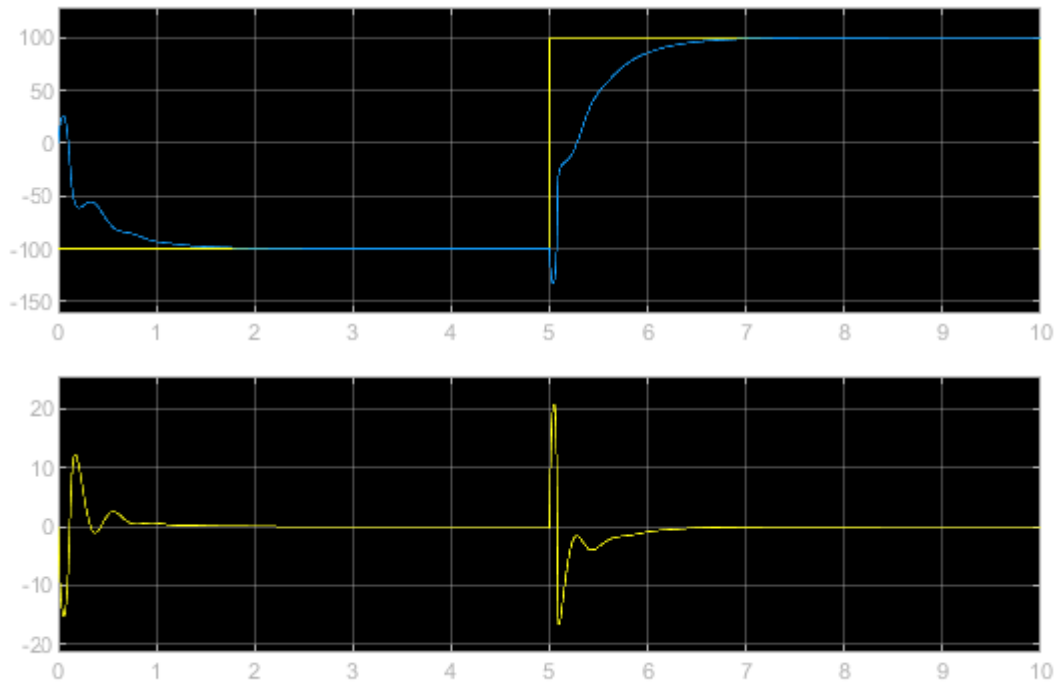
Observamos pues que si bajamos el peso del segundo péndulo el sistema sobreoscila menos y tiene una mayor estabilidad. Hemos explicado en el apartado 6.2. que los pesos de ambos péndulos no pueden estar a distancias muy parecidas del centro. Dicho esto hemos comprobado que mediante la simulación que, dejándolo el peso del primer péndulo en el extremo de su eje, lo máximo que podemos distanciar el segundo peso del centro son 3,3 cm para que siga funcionando el sistema.

Podemos ver que el péndulo oscila mucho más que en nuestro modelo anterior y le cuesta más encontrar el equilibrio y permanecer en los 0° , lo cual también se ve reflejado en el motor que tiene que titubear más para mantener al péndulo equilibrado. Sin embargo que oscile más no quiere decir que sea más inestable y se vaya a caer con más facilidad. Vamos ahora a exponer a nuestro sistema a referencias más exigentes, recordando que la máxima referencia con forma de onda cuadrada que podía soportar nuestro anterior modelo tenía una amplitud de $\pm 75^\circ$ y un periodo de 10s. Para los siguientes experimentos que vamos a hacer a partir de aquí vamos a dejar el peso 1 a 10 cm del centro y el peso 2 a 2,5 cm.

- Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 75^\circ$, Periodo: 10s



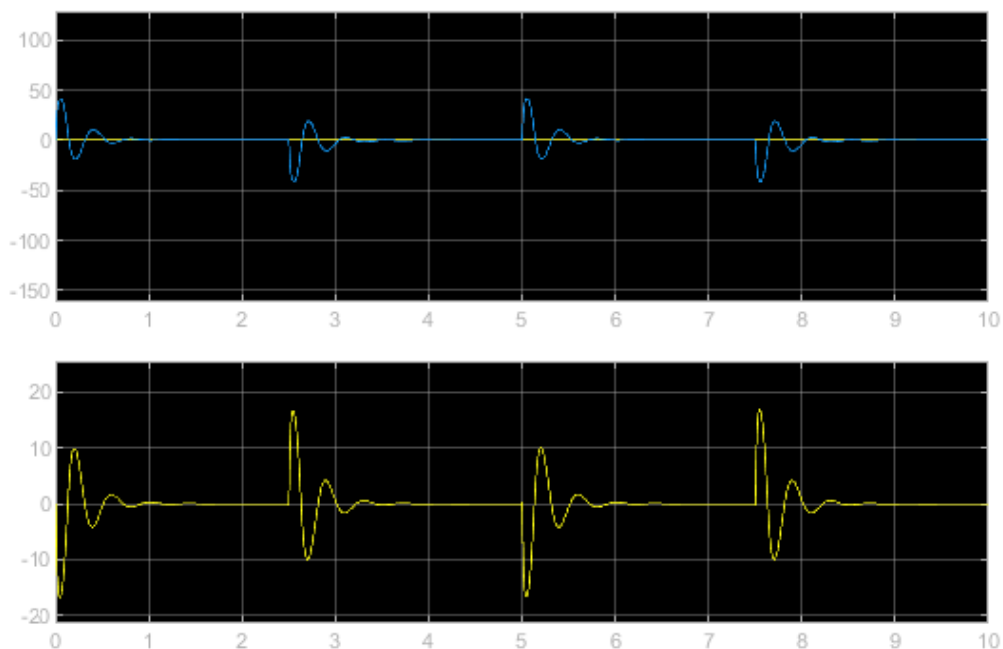
- Onda cuadrada, Amplitud: $\pm 100^\circ$, Periodo: 10s



Como podemos comprobar este modelo es capaz de alcanzar referencias de amplitud mucho mayores que nuestro anterior modelo, llegando como máximo hasta alcanzar una onda cuadrada de $\pm 130^\circ$.

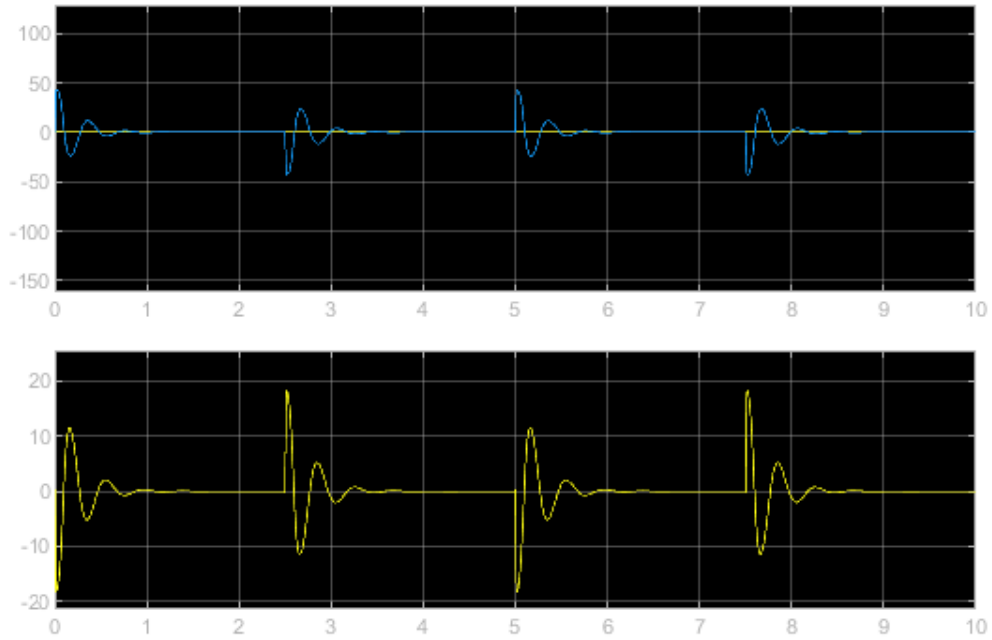
Vamos a exponer ahora a nuestro sistema a perturbaciones, recordando que el anterior modelo aguantaba como máximo una perturbación de valor 1,75. Para ver las perturbaciones la referencia será nula.

- Perturbaciones, Amplitud: 1.75, Periodo: 5s

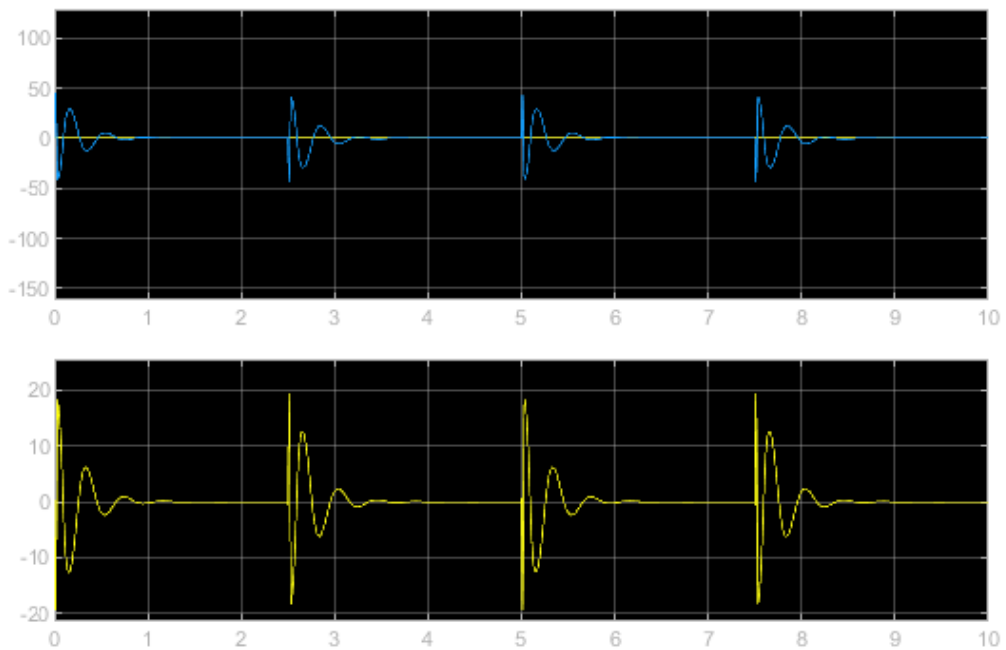


Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

• Perturbaciones, Amplitud: 5, Periodo: 5s



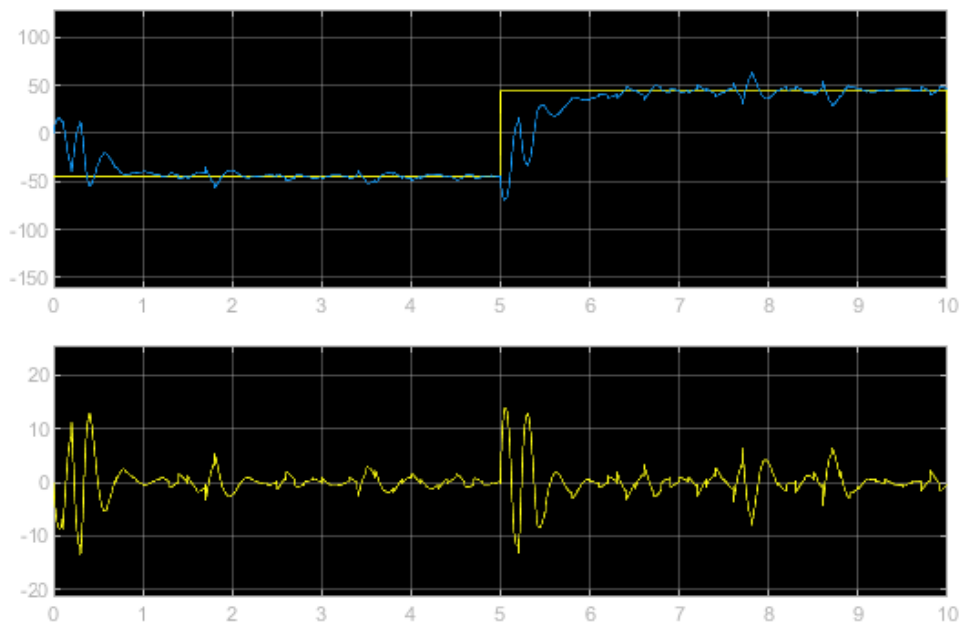
• Perturbaciones, Amplitud: 7, Periodo: 5s



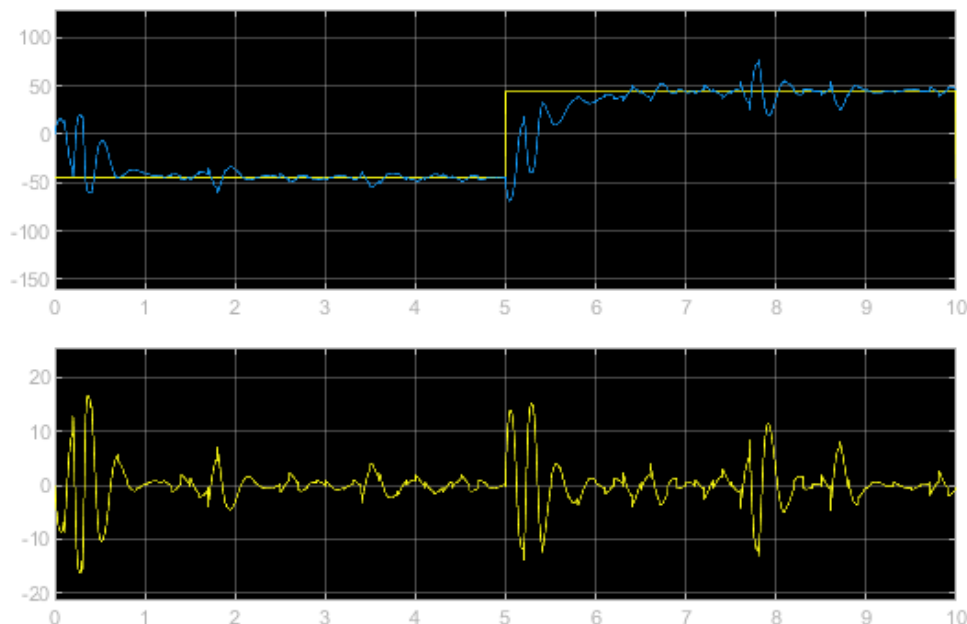
Exponiendo a perturbaciones al nuevo modelo podemos ver de forma exagerada que el sistema es mucho más estable que el anterior modelo, ya que puede aguantar perturbaciones mucho más grandes sin caerse. Concretamente puede llegar a aguantar hasta perturbaciones de 7,3 de amplitud. Otra cosa que también podemos destacar es que el péndulo ya no se cae cuando alcanza los 15° , como pasaba con el anterior, sino que debe alcanzar una inclinación de aproximadamente 20° para llegar a desequilibrarse.

Para finalizar, vamos a introducir ruido en la medida de la posición del péndulo tal y como lo hicimos en el apartado 5.4, recordando que el máximo ruido que pudo aguantar nuestro anterior modelo fue de 7.5×10^{-7} .

• Poder del ruido: 7.5×10^{-7}



• Poder del ruido: 1×10^{-6}



Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

En el caso del ruido en la medida de la posición del péndulo, comprobamos que también es capaz de aguantar un ruido de mayor intensidad, llegando a aguantar hasta un ruido de $2,2 \times 10^{-6}$.

Tras estos experimentos queda más que claro que esta segunda versión del péndulo invertido es más estable que la anterior. Es capaz de tolerar referencias, perturbaciones y ruidos más grandes que el anterior modelo, sobretodo en el experimento de las perturbaciones podemos ver que es mucho más difícil hacer que se caiga este nuevo péndulo. De esta forma hemos conseguido que nuestro péndulo invertido sea de naturaleza más estable sin necesidad de alterar ningún parámetro del regulador. Una vez llegados al montaje, este modelo va a poder servirnos de ayuda ya que vamos a encontrar que el péndulo del primer modelo va a tener bastantes complicaciones para poder mantenerlo en equilibrio.

6. Montaje experimental

6.1. Desarrollo del montaje

En este apartado vamos a explicar cómo se llevó a cabo la implementación en físico del péndulo invertido de furuta y cómo ha resultado efectuar el control en la vida real del mismo.

Empezaremos enumerando los materiales que hemos usado para la creación física del péndulo invertido:

LISTA DE MATERIALES

1. Estructura (pilares + bases)
2. Brazo giratorio
3. Pieza de unión brazo-péndulo
4. Motor Metal Gearmotor 37Dx70L con encoder
5. Potenciómetro de libre contacto
6. Varilla roscada fina
7. Pesos (piezas de metal + tuercas)
8. Silicona
9. Tornillos
10. Cables con conexiones de Arduino
11. Arduino DUE
12. SparkFun Ardumoto Motor Driver Shield

Como ya hemos dicho en el apartado de diseño, la estructura del péndulo, el brazo y la pieza que nos ayuda a unir el péndulo con el brazo las hemos hecho de plástico con la impresora 3D, cuyo acceso fue facilitado por la ETSID. El motor y el

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional arduino DUE con el Motor Driver pertenecen al departamento de ingeniería de sistemas y automática, debido a que se usan frecuentemente para hacer prácticas en algunas asignaturas. Otros materiales de menor importancia como los tornillos, la silicona o los cables también los tomamos del departamento. Mientras, piezas como las varillas roscadas o el potenciómetro las compramos para este proyecto.

En el anexo se pueden encontrar planos de las piezas que se diseñaron y se imprimieron y un boceto inicial del péndulo todo con medidas.

Comenzamos la construcción por la estructura, encajando los pilares cuadrados en los huecos de las bases. Más tarde añadimos silicona a estas uniones para fijarlas con más fuerza. Posteriormente colocamos el motor, que ya de por sí encajaba bastante justo por lo que quedaba bien sujeto, pero para fijarlo del todo hicimos un agujero con un taladro en la superficie de plástico para poder fijar el motor a la base superior con un tornillo. Luego encajamos el brazo al eje del motor, sin embargo esta pieza dio algunos problemas para fijarla, por lo que decidimos repetirla y hacerle un grosor más grande para poder fijarla al eje del motor apretándola con un tornillo que atravesara el grosor de la pieza. Al final del brazo pusimos el potenciómetro el cual ya venía de por sí con una tuerca para poder fijarlo, lo cual se tuvo en cuenta a la hora de diseñar el brazo. La idea ahora era que el péndulo estuviera agarrado al eje del potenciómetro, de forma que cuando el péndulo se moviera el eje del potenciómetro girara junto a él. Teniendo esto en cuenta diseñamos una pieza para la impresora 3D que nos permitiera unir el eje del potenciómetro con el eje del péndulo, la cual también tendría un tornillo atravesando su grosor para poder apretar la pieza al eje del potenciómetro y que estuviera bien sujeto y no deslizara. El eje del péndulo lo hicimos con una varilla roscada fina la cual encaja en la pieza de unión a presión, y en caso de ser necesario podríamos usar silicona si no quedaba lo suficiente bien sujeta. A esta varilla le añadimos piezas de metal para que hicieran de peso en su extremo superior. El hecho de usar una varilla roscada surgió de la idea de que la cabeza del péndulo podría estar formado por tuercas, por lo que podemos desplazar el peso sobre el eje del péndulo a la distancia que quisiéramos, pudiendo así manipular el centro de gravedad de nuestro péndulo a conveniencia. La cabeza del péndulo se acabó constituyendo con varias piezas de metal sujetas con tuercas, ya que con las tuercas solo no había suficiente peso. Con esto ya tenemos montada toda la estructura física del péndulo invertido, solo quedó hacer las conexiones eléctricas con arduino. Los cables que conectamos al potenciómetro los unimos con silicona al brazo robot para que no estuvieran sueltos y molestaran cuando el brazo girara.

Este fue el resultado del montaje:



Imágenes 28 y 29: Péndulo de Furuta, Montaje Final

Para conectar el motor a la placa de Arduino DUE hicimos uso del Motor Driver Shield, que se trata de un complemento que puedes añadirle a la placa de Arduino para controlar hasta dos motores de CC con una intensidad de 2A por canal. Este driver también viene con dos conectores para poder conectarse a una fuente de alimentación y poder meterle más voltaje al motor. Para hacer las pruebas nosotros conectamos Arduino con una fuente de alimentación de 12V, para que el motor tuviera suficiente potencia para poder moverse con la rapidez necesaria.

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

En tema de sensorización, recordamos que los dos parámetros que tenemos que medir son la posición angular del motor y la posición angular del péndulo. Para medir la posición del motor el propio motor que hemos usado viene con un encoder incorporado, además de cables que nos facilitan las conexiones con arduino:

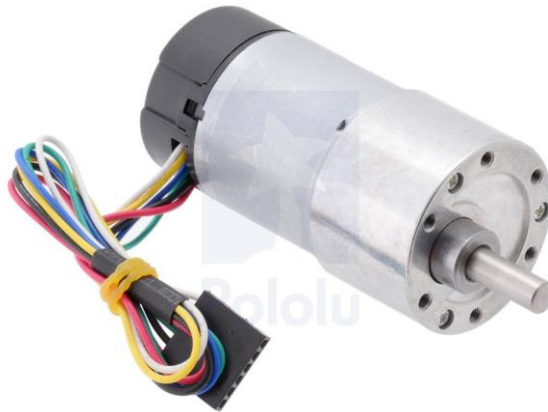


Imagen 30: Motor con encoder incluido

Con este encoder ya podemos monitorear la posición del eje del motor, y por ende la del brazo, en todo momento. Para medir la posición de la pieza del péndulo decidimos utilizar un potenciómetro. Decidimos no utilizar otro encoder para esta medición porque, a parte de que suelen ser más caros que un potenciómetro, el encoder funciona mediante un tren de pulsos que debe ser procesado por el microcontrolador lo cual supone un tiempo de computación extra que hace más lento al sistema. Pensamos también que si el eje del potenciómetro era lo suficientemente largo y hacíamos colgar el péndulo del eje nos ahorraríamos problemas respecto al montaje del encoder. De esta forma podemos medir la inclinación del péndulo, ya que cuando el péndulo gira el eje del potenciómetro también gira con él, y podemos utilizar esa diferencia en la resistencia eléctrica del potenciómetro para monitorear la posición del péndulo. Otra cosa a tener en cuenta del potenciómetro era que el eje tenía que tener poco rozamiento de giro, ya que si le costara mucho girar, el péndulo también giraría con mayor dificultad y de forma más lenta y el sistema perdería realismo. Con esto en mente, compramos un potenciómetro magnético de efecto *hall* o de libre contacto, cuyo eje no tiene rozamiento en el giro y es suficientemente largo para poder colgar el péndulo de él:



Imagen 31: Potenciómetro de efecto hall

Una vez el péndulo ya estaba montado tuvimos un problema con la medida del potenciómetro. El problema consistía en que el motor al girar provoca unas vibraciones intensas que se transmiten por toda la estructura del péndulo, y debido a esas vibraciones aparecía ruido en la señal de lectura del potenciómetro, ruido que hemos simulado anteriormente en la simulación en el apartado 5.4. de “respuesta ante ruido”. Con ruido en la señal de la posición del péndulo la medida es de muy mala calidad y resulta imposible hacer un control efectivo para estabilizar nuestro sistema, ya que le resulta muy confuso saber la posición real del péndulo y el motor no va a reaccionar correctamente para compensarla. Para eliminar este ruido utilizamos un filtro paso-bajo, ya que el ruido suele estar formado por frecuencias altas y con este filtro las eliminamos de la medida. El inconveniente de esto es que el filtro ralentiza la rapidez a la que la señal puede ser procesada y por lo tanto ralentiza la rapidez del sistema entero, no obstante el sistema no va tan lento como para que sea imposible estabilizarlo, y es un precio que vale la pena pagar a cambio de eliminar el ruido que sí que es un problema determinante.

Llegados a este punto, donde ya hemos montado el péndulo entero y hemos implementado la sensorización necesaria, empezamos a hacer pruebas para intentar mantener el péndulo estable ayudándonos de los datos y resultados que habíamos obtenido de la simulación, como por ejemplo las ganancias de los reguladores. Como es de esperar el péndulo real no fue exactamente igual que en la simulación, pero si lo suficientemente parecido como para poder apoyarnos en la simulación para intentar establecer el control del péndulo invertido real.

Haciendo pruebas fuimos conscientes de otros problemas relacionados con el motor que estábamos empleando. En primer lugar, el motor tiene una zona muerta muy grande, lo cual quiere decir que el motor no responde si los valores de tensión que se le aplican no superan un cierto límite, es decir, si son valores de tensión pequeños. Para que el motor haga pequeños movimientos se le deben aplicar pequeños voltajes. El problema está en que nuestro péndulo pasa constantemente por pequeñas inclinaciones que deben ser corregidas con pequeños movimientos del motor, ya que si el péndulo se empieza a inclinar y el motor no reacciona hasta que se

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional ha inclinado demasiado, puede ser ya demasiado tarde para corregirlo y evitar que se caiga. Este problema puede intentar corregirse en el entorno de programación forzando al motor a salir de la zona muerta, de forma que si se detecta que el péndulo tiene cierto grado de inclinación le apliquemos un valor de tensión al motor que supere el límite de la zona muerta. Esto sin embargo sigue sin solucionarlo del todo, ya que el motor recorre más distancia de la que queremos y se complica bastante intentar mantener el péndulo en su punto de equilibrio. Sumado a esto, nuestro motor no tiene una relación par-velocidad del todo adecuada. Ambos parámetros son importantes a la hora de que el motor reaccione de forma rápida y precisa para compensar los movimientos del péndulo. En nuestro caso, nuestro motor tiene mucho par pero no tanta velocidad y sería conveniente que el motor tuviera una relación más apropiada para nuestro problema, con un poco más de velocidad y un poco menos de par.

Desgraciadamente tenemos que decir que finalmente no hemos podido llevar a cabo el control del péndulo invertido real. El hecho de que el mecanismo de nuestro péndulo sea de pequeño tamaño ya dificulta bastante de por sí que se pueda equilibrar el péndulo con facilidad, el filtro que hemos tenido que poner debido al ruido que tenía el potenciómetro lo dificulta todavía más, pero principalmente el mayor problema es el del motor. Todos estos inconvenientes sumados han hecho que resulte muy complicado estabilizar el sistema.

Creemos que es posible que nuestro péndulo invertido llegue a funcionar, sin embargo por cuestiones de tiempo no hemos podido llegar a solucionarlo y lo hemos tenido que dejar en el punto en el que se encuentra ahora. Concluimos que la idea de hacer un péndulo invertido que resulte barato de construir es una tarea compleja, ya que debido a la baja calidad de los elementos utilizados aparecen muchos problemas que con materiales de calidad no aparecerían. Para hacer que funcionara bien pensamos que habría que gastarse un poco más de lo que teníamos previsto en un principio. No obstante, remarcamos que con un cambio del motor a otro más adecuado tal vez ya fuera suficiente para que funcionara y no supondría una diferencia económica muy grande. Otra posible solución podría ser intentar hacer la base más alta y el péndulo más largo para hacer más lenta la dinámica del sistema y fuera más fácil, sin embargo los pilares probablemente no se podrían hacer en la impresora 3D si son de mucha longitud debido a que la impresora solo puede crear piezas con unas dimensiones máximas determinadas. Igualmente insistimos en que la mejor solución que se podría adoptar sería emplear un motor de mejores características.

6.2. Péndulo modificado

Para intentar mejorar la situación y facilitar un poco más la estabilización del péndulo, decidimos poner en práctica una idea que se nos ocurrió que implicaba hacer modificaciones en el montaje del péndulo.

La idea era hacer que el eje del péndulo se extendiera por la parte de abajo, de forma que tuviera el doble de extensión y fuera sujetado por la mitad del eje. Pensado de otra forma, es como si tuviéramos dos ejes. Véase la foto del resultado de la implementación real para entenderlo mejor:

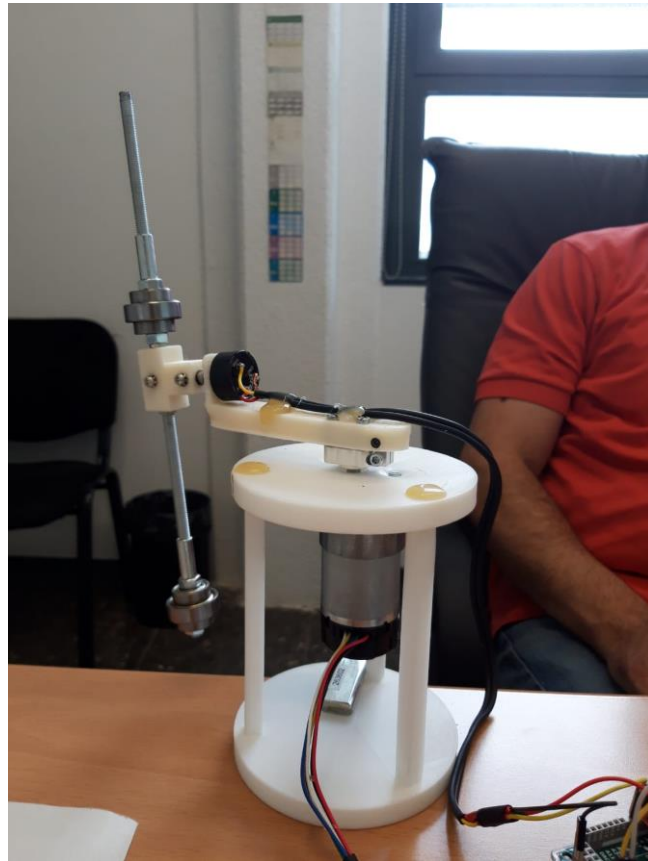


Imagen 32: Péndulo con modificaciones

Como vemos en la foto cada eje tiene su propio contrapeso los cuales podemos desplazar sobre los ejes y dejarlos a la distancia que queramos. Para hacer estos ejes se ha usado una varilla roscada más gruesa y los pesos que hemos utilizado son más pesados que en el primer prototipo. Además, para poder realizar estas modificaciones también ha sido necesario imprimir otra pieza de unión que permitiera sujetar el eje superior e inferior del péndulo.

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

El propósito de esto era poder hacer al péndulo más estable por naturaleza. Hay que entender que si el péndulo es más largo es más fácil de estabilizar, pero esto no es debido al hecho de que el péndulo sea más largo sino a que el centro de gravedad del péndulo está más alejado. En el caso de nuestro péndulo de antes es muy fácil de ver: si subimos el peso arriba del todo subimos el centro de gravedad del péndulo lo que provoca que el péndulo tarde más en caer y por lo tanto que su dinámica sea más lenta, es decir, es más difícil que se desequilibre, mientras que si bajamos el peso bajamos el centro de gravedad y el péndulo se vuelca con más facilidad. Esto se puede comprobar fácilmente en casa intentando sujetar con la palma de la mano un palo de escoba y un lápiz, y luego comparas que te cuesta más mantener en equilibrio.

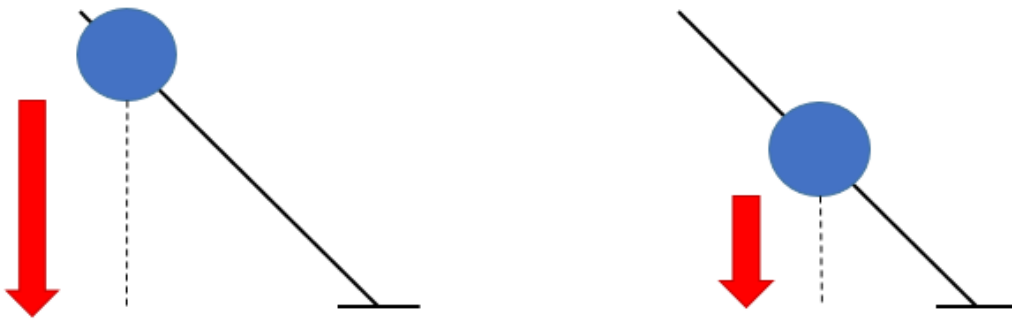


Imagen 33: Dinámica del péndulo con distintos centros de gravedad

Si cambiamos este péndulo simple por la segunda versión que hemos hecho estamos cambiando las normas del juego. Mientras que el péndulo de arriba tenderá a caerse hacia abajo, el péndulo de abajo tenderá a ir hacia arriba. Si ponemos el peso del péndulo de arriba en el extremo de su eje y subimos el peso del péndulo de abajo lo máximo posible, tenemos a efectos prácticos lo mismo que el péndulo simple de antes, ya que el péndulo de abajo es como si “no existiera”. Ahora mismo el centro de gravedad del péndulo de arriba está a mucha más distancia del centro que el centro de gravedad del segundo péndulo, por lo que el péndulo de arriba va a tener un momento de fuerza mayor que el de abajo ($M_f = r * F$) y va a desequilibrarse intentando caerse hacia abajo. Si vamos bajando el peso del péndulo de abajo aumentamos el momento de fuerza de este segundo péndulo, el cual va a intentar contrarrestar el del péndulo de arriba. Esto se traduce en que la fuerza que desequilibra al péndulo de arriba va a ser menor, y por lo tanto el péndulo va a ser más estable ya que le va a costar más desequilibrarse y caerse. Llega un punto en el que si dejamos los dos pesos a una distancia muy similar del centro, el centro de gravedad se encontrará en medio de ambos péndulos, y al no tener ninguno una clara superioridad sobre el otro el sistema no podrá estabilizarse, ya que no va a existir ningún punto de equilibrio en el que el

sistema pueda “descansar”. Por esto mismo, hay que tener en cuenta que no se deben dejar ambos pesos a la misma distancia.

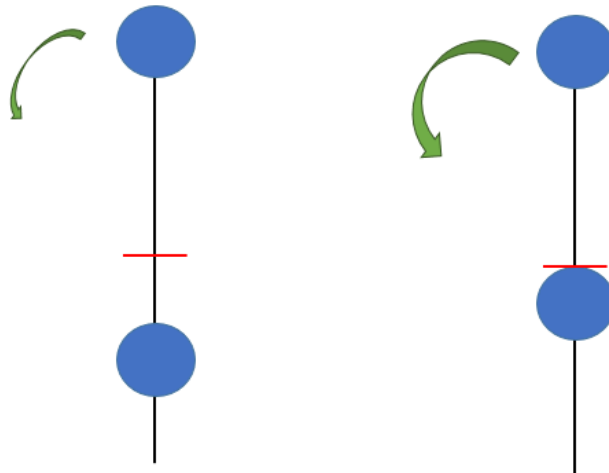


Imagen 34: Dinámica del péndulo modificado

Obviamente si hacemos que el peso del péndulo de arriba esté más cerca del centro que el peso de abajo se van a mantener en equilibrio sin ningún problema. La idea es mantener el peso del péndulo de arriba en el extremo de su eje para que se mantenga la máxima distancia posible del centro y variar el peso del péndulo de abajo. Si bajamos el segundo peso (hasta cierto punto) más estable será el péndulo por naturaleza y si lo subimos más inestable lo haremos. De esta forma, hemos conseguido poder manipular la dificultad del ejercicio del control del péndulo invertido. Podríamos haber llegado a un resultado similar haciendo en el modelo anterior el péndulo mucho más largo y poniendo el peso aún más lejos, pero tendríamos que haber hecho también más larga la base. De esta forma hemos obtenido el mismo resultado, que era hacer que el sistema fuera más fácil de estabilizar, en un espacio más reducido.

A pesar de estos cambios hemos seguido sin poder hacer un control exitoso del péndulo debido a los problemas mencionados en el apartado anterior. Igualmente, estas modificaciones nos han parecido una propuesta muy interesante que valía la pena probar y que creemos que ayuda un poco más a hacer posible la estabilización de nuestro péndulo invertido de furuta.

6.3. Presupuesto

Aunque no hayamos sido capaces de hacer funcionar nuestro péndulo invertido, vamos a incluir un pequeño presupuesto de los materiales usados en la implementación física económicamente hablando. Así, si se sigue con el proyecto puede resultar útil tener un presupuesto para poder saber el precio de cada elemento y el coste total de nuestro mecanismo. Además, si fuera necesario cambiar algunos elementos, se podría hacer la comparación para ver la diferencia de precios entre ambos modelos. Este presupuesto es de la primera versión de nuestro péndulo, no el del péndulo modificado que hemos realizado después. Hay que tener en cuenta que algunos de estos materiales los hemos tomado prestados del departamento, como es el caso del motor, la placa de arduino DUE, el driver para el motor y elementos secundarios como los cables o las piezas metálicas, por lo que si no contáramos esos elementos el precio real que ha costado el montaje sería bastante más bajo. No obstante, hemos elaborado el presupuesto considerando el precio individual de cada uno de los elementos necesarios para el montaje, aunque no haya hecho falta comprarlos para hacer nuestro péndulo invertido.

Nº	Material	Precio
1	Piezas de plástico de la Impresora 3D [Incluyen: 3 pilares + 2 bases circulares + brazo robot + pieza de unión]	6,62 €
2	Motor Metal Gearmotor 37Dx70L con encoder	39,95 €
3	Arduino DUE	28,00 €
4	SparkFun Ardumoto Motor Driver Shield	18,64 €
5	Potenciómetro de libre contacto	20,60 €
6	Varilla roscada	1,20 €
7	Elementos menores (piezas de metal, tornillos, tuercas, cables y silicona)	2,73 €
PRECIO TOTAL		117,74 €

7. Anexo

En este anexo se incluyen especificaciones técnicas del motor y del potenciómetro empleados en el montaje y los planos que se realizaron de las piezas previamente a su diseño en SolidWorks.

Respecto a los planos, solo se hicieron los de las primeras piezas que se diseñaron ya que en un principio pensábamos que iban a servir tanto para la simulación como para el montaje, sin embargo luego algunas piezas tuvieron que ser reajustadas para el montaje físico como ya hemos visto.

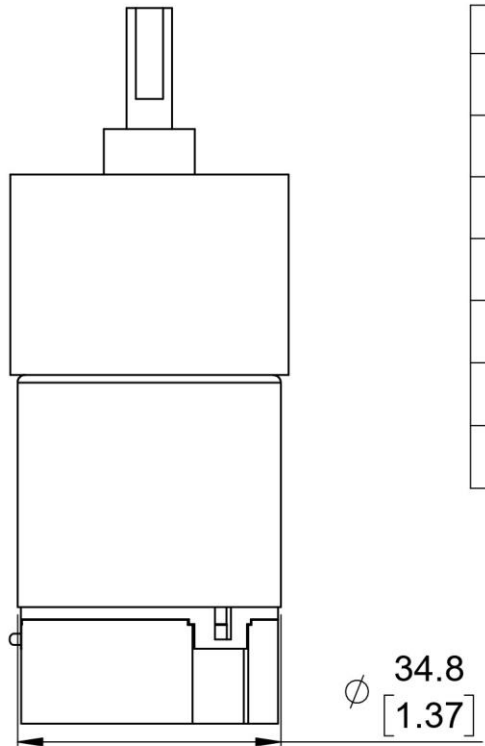
- **ESPECIFICACIONES MOTOR:**

Dimensions

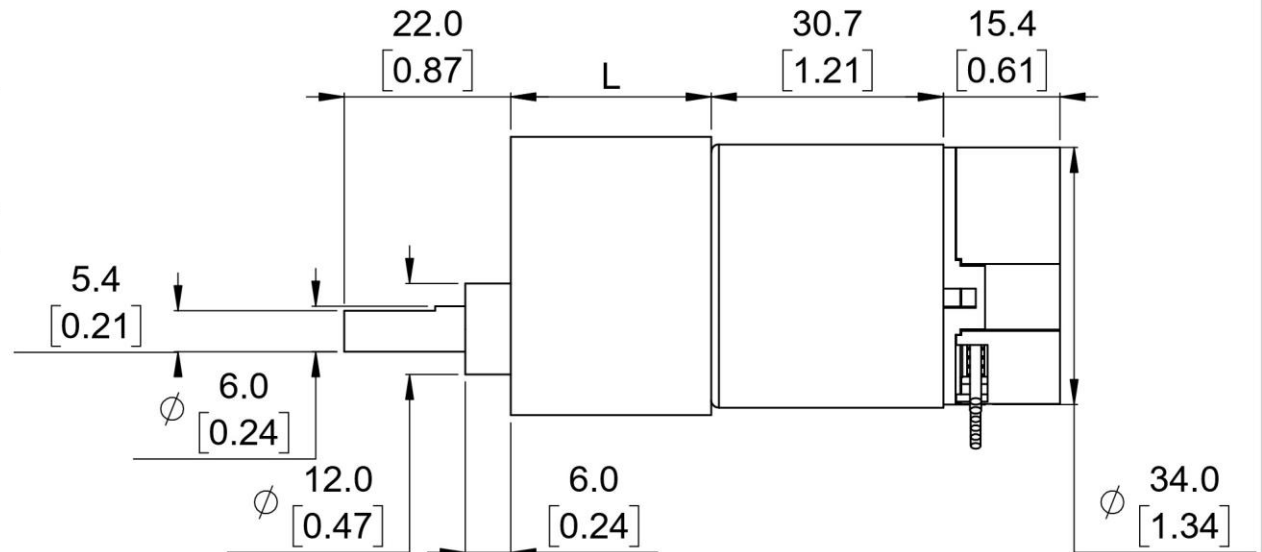
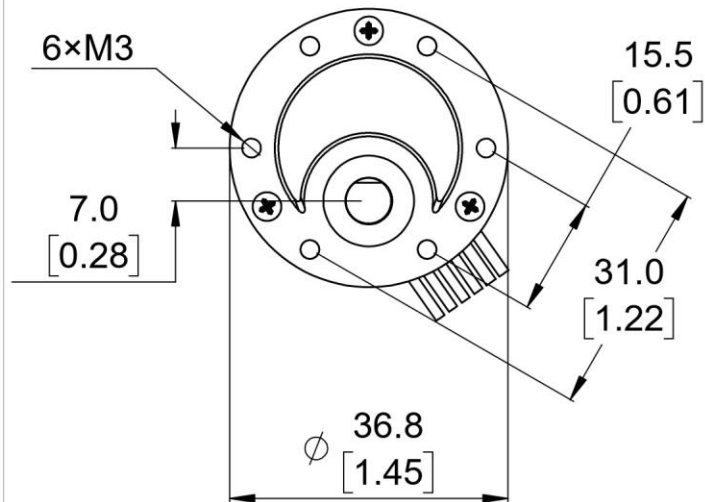
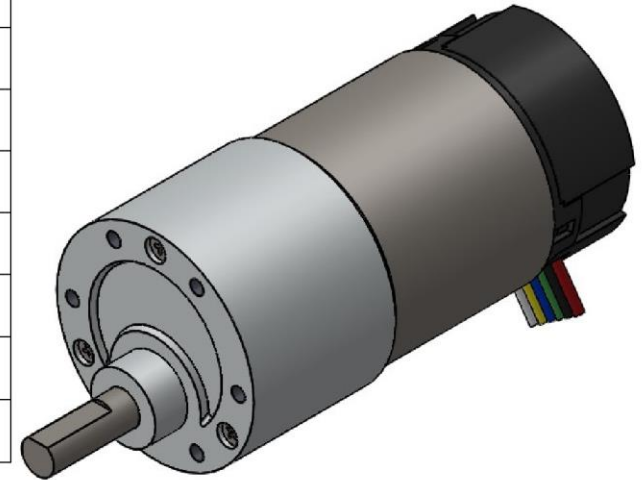
Size:	37D x 70L mm
Weight:	225 g
Shaft diameter:	6 mm

General specifications

Gear ratio:	70:1
No-load speed @ 12V:	150 rpm
No-load current @ 12V:	300 mA
Stall current @ 12V:	5000 mA
Stall torque @ 12V:	200 oz·in
No-load speed @ 6V:	75 rpm
No-load current @ 6V:	250 mA
Stall current @ 6V:	2500 mA
Stall torque @ 6V:	100 oz·in
Lead length:	8 in



Gear ratio	L
19:1	22 mm [0.87 in]
30:1	22 mm [0.87 in]
50:1	24 mm [0.94 in]
70:1	24 mm [0.94 in]
100:1	26.5 mm [1.04 in]
131:1	26.5 mm [1.04 in]
150:1	26.5 mm [1.04 in]



<https://www.pololu.com/category/116/37d-mm-gearmotors>

Name:
37D mm Metal Gearmotors with 64
CPR Encoder

Item number:
2822-2828

Drawing date:
02 April 2019

Dev code:
—

Units: mm
[in]

Material:
Mixed

Pololu
Robotics & Electronics
© 2018 Pololu Corporation

1. To get the specified scale, select 100% in print settings.

Scale: 1:1

Using the Encoder

A two-channel Hall effect encoder is used to sense the rotation of a magnetic disk on a rear protrusion of the motor shaft. The quadrature encoder provides a resolution of 64 counts per revolution of the motor shaft when counting both edges of both channels. To compute the counts per revolution of the gearbox output, multiply the gear ratio by 64. The motor/encoder has six color-coded, 8" (20 cm) leads terminated by a 1×6 female header with a 0.1" pitch, as shown in the main product picture. This header works with standard [0.1" male headers](#) and our male [jumper](#) and [precrimped wires](#). If this header is not convenient for your application, you can pull the crimped wires out of the header or cut the header off. The following table describes the wire functions:

Color	Function
Red	motor power (connects to one motor terminal)
Black	motor power (connects to the other motor terminal)
Green	encoder GND
Blue	encoder Vcc (3.5 – 20 V)
Yellow	encoder A output
White	encoder B output

The Hall sensor requires an input voltage, Vcc, between 3.5 and 20 V and draws a maximum of 10 mA. The A and B outputs are square waves from 0 V to Vcc approximately 90° out of phase. The frequency of the transitions tells you the speed of the motor, and the order of the transitions tells you the direction. The following oscilloscope capture shows the A and B (yellow and white) encoder outputs using a motor voltage of 12 V and a Hall sensor Vcc of 5 V



Pololu

37D mm metal gearmotor with 64 CPR encoder (with end cap removed).



Pololu

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

• **ESPECIFICACIONES POTENCIÓMETRO:**

Model 6120 Series

Features:

- 7/8" diameter
- Non-contacting
- Hall-effect technology
- Single turn
- Multiple styles available
- Custom models available



Model Styles Available

6121	1/8" Shaft, 1/4" Bushing
6124	6 mm Shaft, 3/8" Bushing
6126	1/8" Shaft, 3/8" Bushing
6127	1/4" Shaft, 3/8" Bushing
612x-XXXX	Custom models are available; Contact Customer Service for special features

Electrica

Output Voltage	0.2 Vdc (4%) to 4.8 Vdc (96%) Typical (see Feature Codes table)
Output Overvoltage Limits	10 Vdc to -0.3 Vdc; output may be shorted to ground or supply without damage
Output Current	±8 mA Max.
Output Load	1 kΩ Min., 10 kΩ Typical
Operating Input Voltage Range	4.5 to 5.5 Vdc
Supply Voltage Absolute Limits	20 Vdc Max., -10 Vdc Min.
Independent Linearity ²	±0.5% (0.25% Available)
Hysteresis	0.2% Max.
Resolution	0.088° for 360° travel, 0.011° for 45° travel
Supply Current	8.5 mA Typical, 12 mA Max.
Dielectric Strength	750 V rms
Insulation Resistance	1,000 MegΩ Min.
Electrostatic Discharge (ESD)	Passes 2 kV human body model and 15 kV air discharge
Bulk Current Injection (BCI)	Passes 2-500 MHz at 200 mA
Actual Electrical Travel	360° Typical (see Ordering Information)
Temperature Coefficient of Output Voltage	± 20 ppm/°C

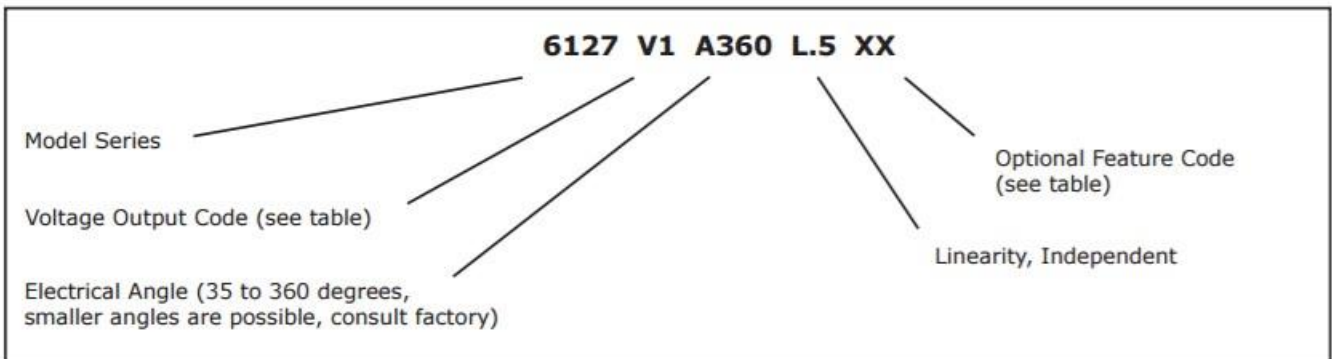
Mechanical

Total Mechanical Travel	360° Continuous (320° with stop feature)
Bearing	Bearing Bronze Bushing
Weight	0.6 oz. Typical
Static Stop Strength	40 in. oz.
Panel Nut Tightening Torque	25 in. lb. Max.
Rotational Speed	500 RPM Max.

Environmental

Operating Temperature Range	-40°C to +125°C
Shock	Per MIL R-39023, 6 ms Saw-tooth 100 G's
Vibration	Per MIL R-39023, 10 G's, 100 to 500 Hz
Moisture Resistance, Powered	Per MIL 202G, Method 106G
Rotational Life	10 million shaft revolutions with up to 8 oz sideload
Storage Temperature Range	-55°C to +125°C
Ingress Protection Rating (IP Code)	IP50, IP66 available as option (feature code ES)

Ordering



Feature Codes

Voltage Output Codes	
V0	≤ 3% to ≥ 96%
V1	4% to 96%
V2	5% to 95%
V3	10% to 90%
V4	15% to 85%
V5	20% to 80%

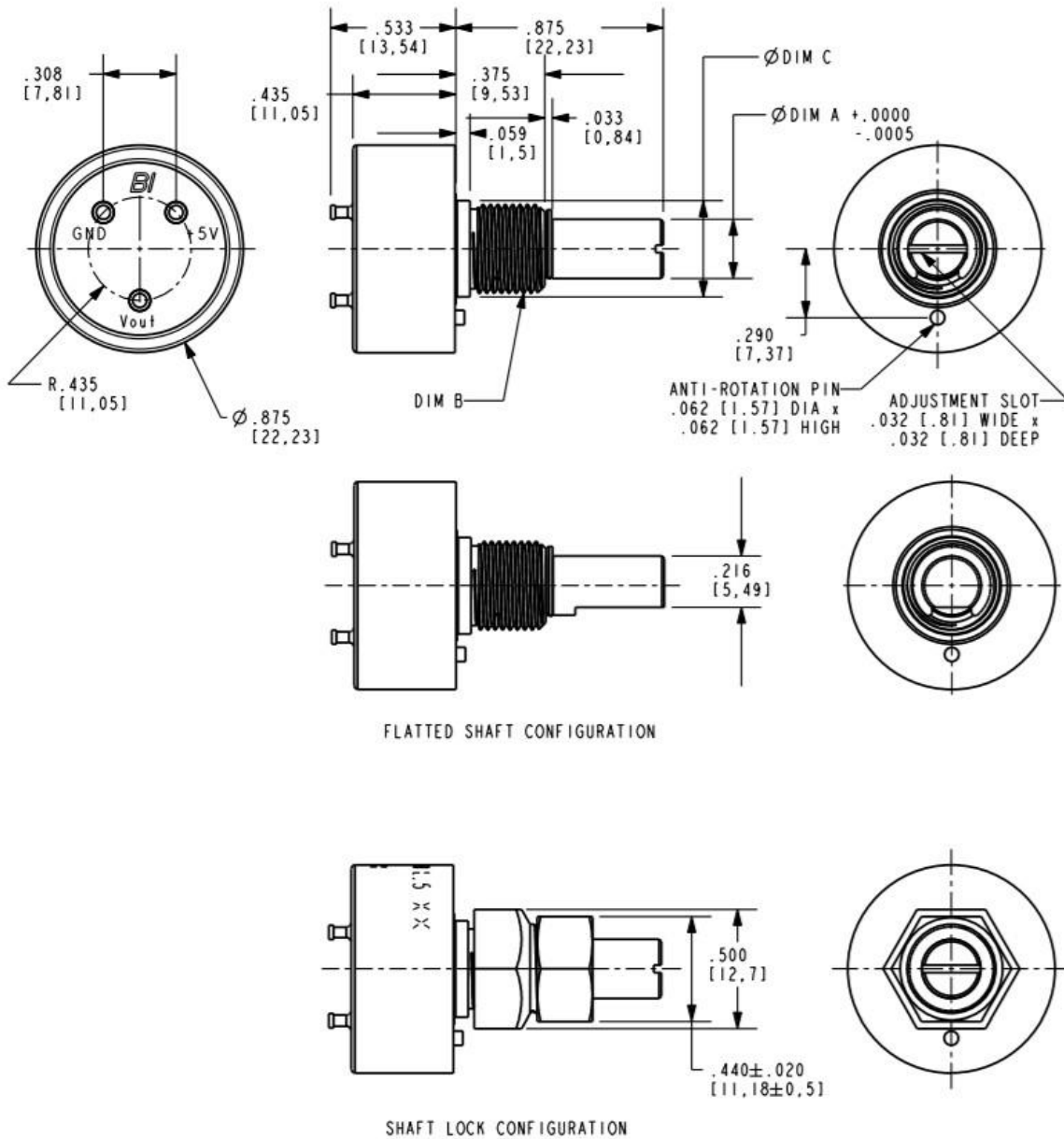
When V0 is used the angle specified is the theoretical angle over which the output would vary if the output could actually reach 0% and 100% of V_{cc}.

Optional Feature Codes	
ST	Stop (320°)
FS	Flatted Shaft (slot standard)
LT	Linearity Data
SL	Shaft Lock 6127 only
CW	Reverse Direction
ES	Seal (IP66) 6124 or 6127 only

When multiple Optional Feature codes are used the P/N shall be in the same sequence as listed in this table (top to bottom).

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

Outline Drawings

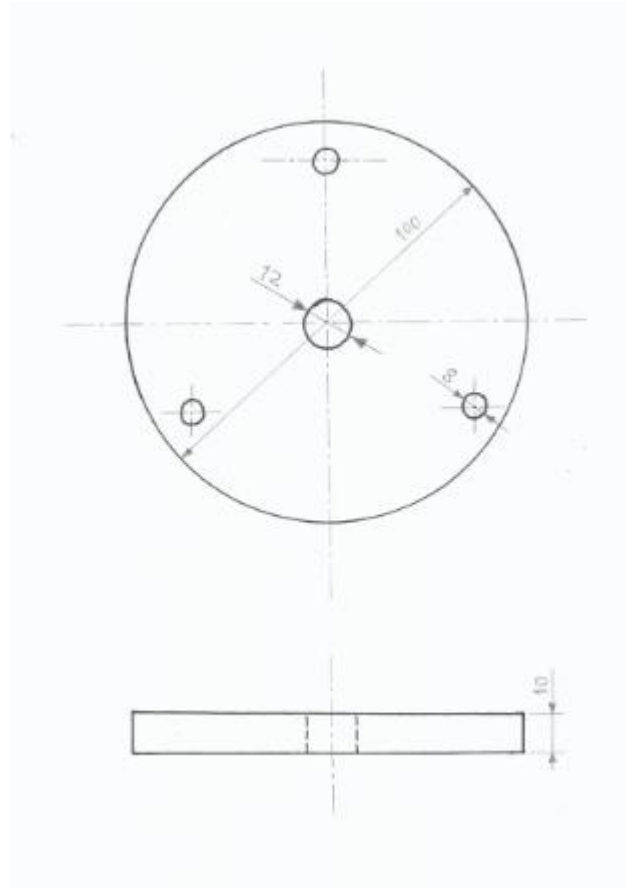


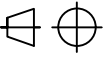
DIM	6121	6124	6126	6127
A	.1248	6 mm	.1248	.2497
B	1/4-32 UNEF	3/8-32 UNEF	3/8-32 UNEF	3/8-32 UNEF
C	.281	.406	.406	.406

NOTES:

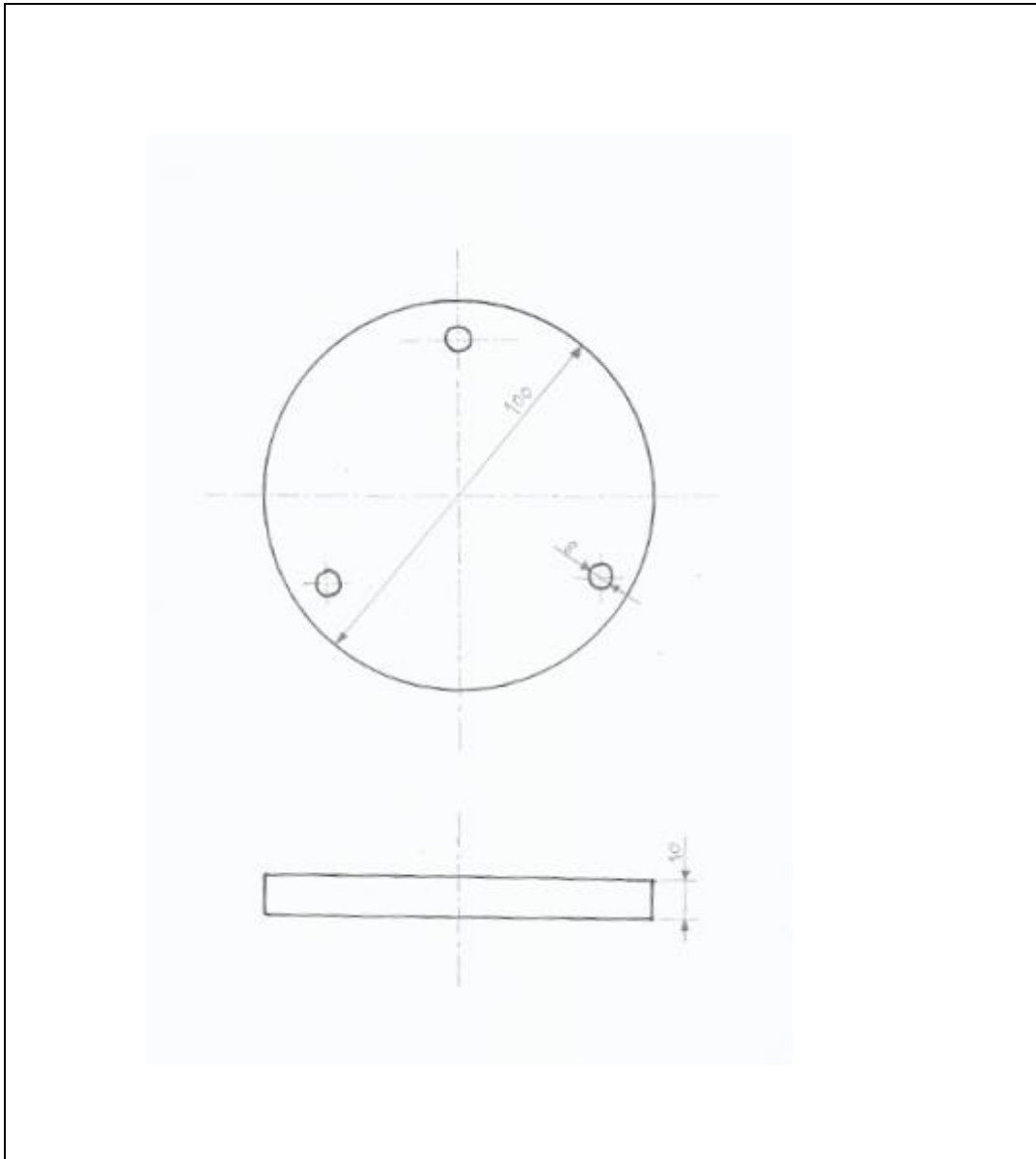
1. UNIT SHIPS WITH NUT AND WASHER (NOT SHOWN).
2. FOR SLOTTED OR FLATTED SHAFT, OUTPUT IS AT 50% IN POSITION SHOWN.
3. DIMENSIONS: INCHES [mm].
4. TOLERANCES: $\pm .015$ [.38] UNLESS NOTED.

- **PLANOS:**

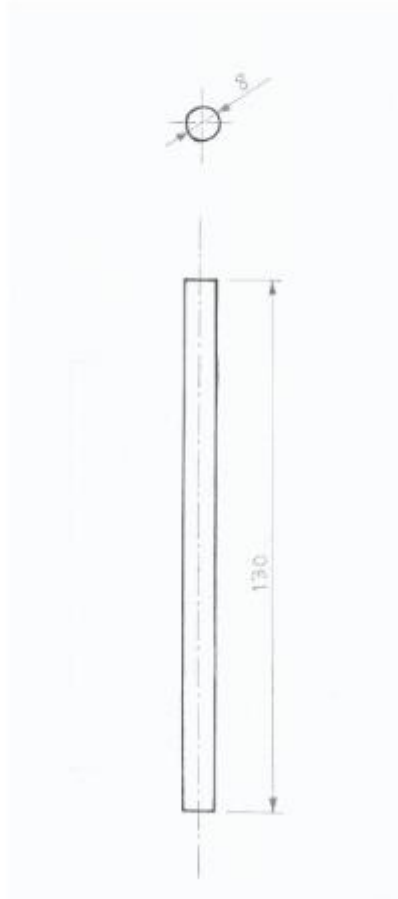


SIS. REP.	Escala:	Unidades:	NOMBRE DE LA PIEZA		Pieza n°:	1
	1:2	mm	Base superior		Cantidad:	1
					Firma:	Francisco Javier Morell Mirasol
TFG:	Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional					
Grado:	Ingeniería electrónica industrial y automática					

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

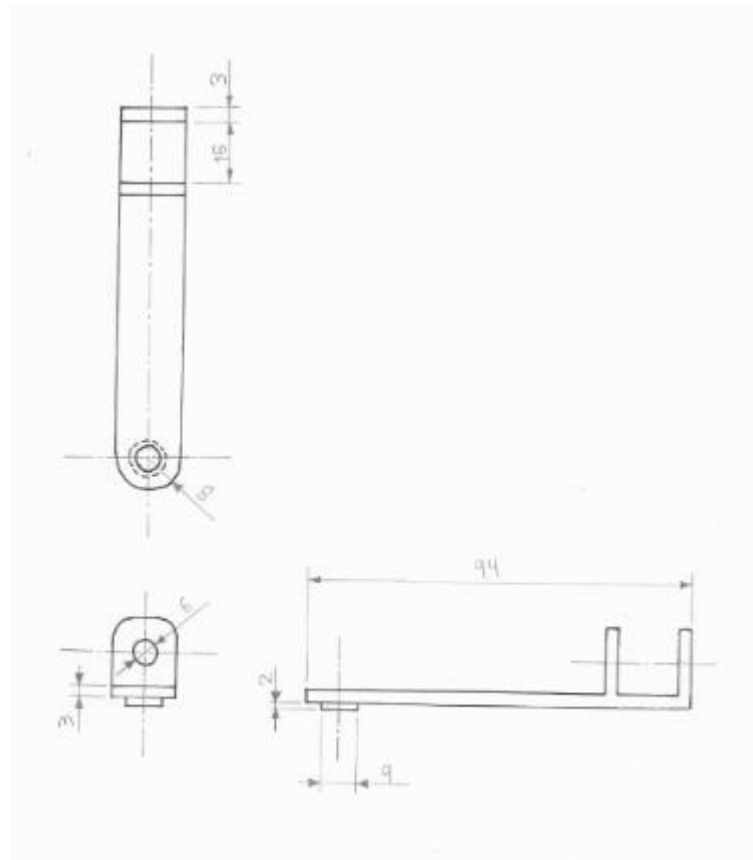



SIS. REP.	Escala:	Unidades:	NOMBRE DE LA PIEZA		Pieza n°:	2
	1:2	mm	Base inferior		Cantidad:	1
					Firma:	Francisco Javier Morell Mirasol
TFG:	Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional					
Grado:	Ingeniería electrónica industrial y automática					

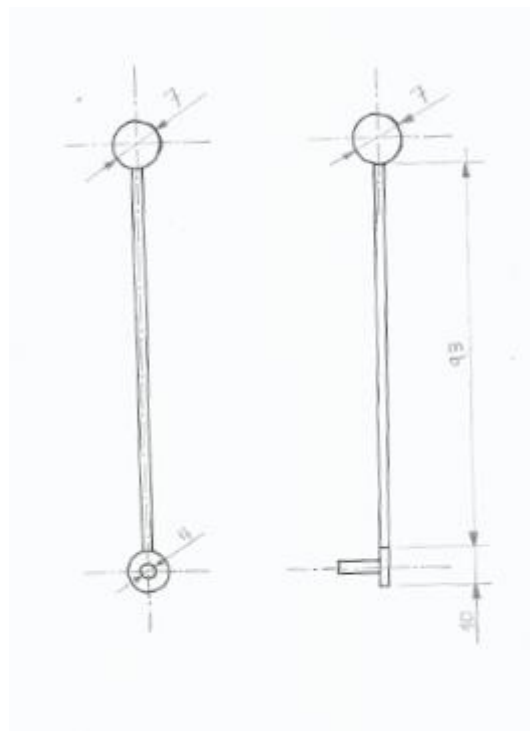


SIS. REP.	Escala:	Unidades:	NOMBRE DE LA PIEZA		Pieza nº:	3
	1:2	mm	Pilares base		Cantidad:	3
					Firma:	Francisco Javier Morell Mirasol
TFG:	Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional					
Grado:	Ingeniería electrónica industrial y automática					

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional

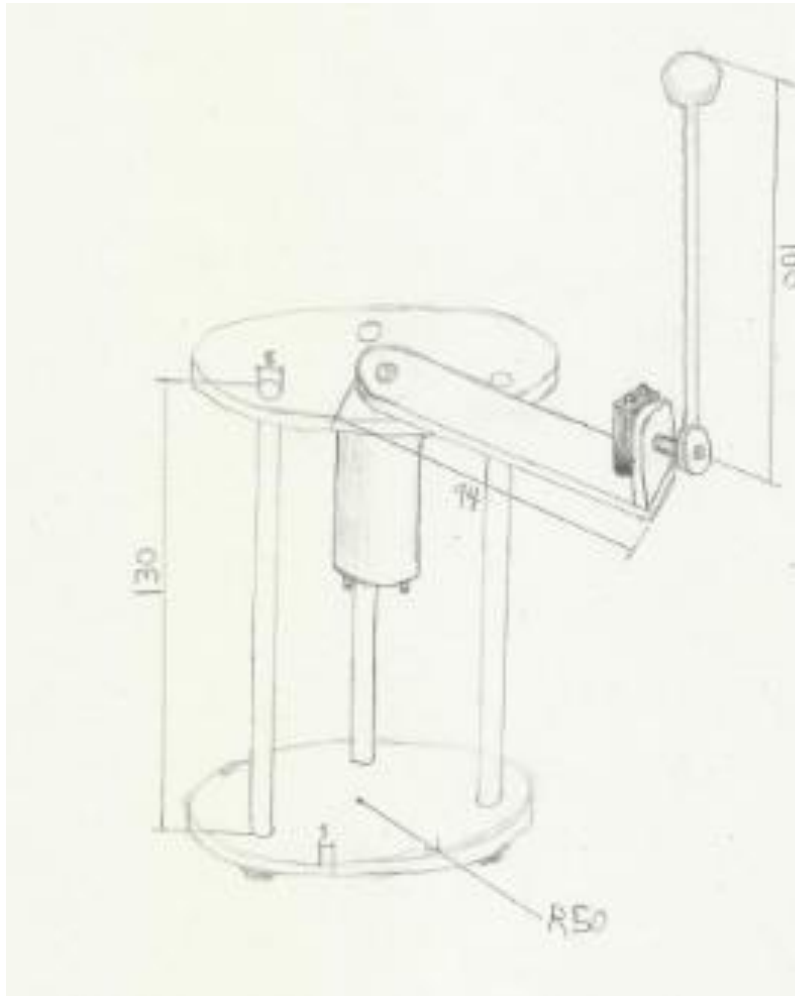


SIS. REP.	Escala:	Unidades:	NOMBRE DE LA PIEZA		Pieza n°:	4
	1:2	mm	Brazo robot		Cantidad:	1
					Firma:	Francisco Javier Morell Mirasol
TFG:	Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional					
Grado:	Ingeniería electrónica industrial y automática					



SIS. REP.	Escala:	Unidades:	NOMBRE DE LA PIEZA		Pieza nº:	5
	1:2	mm	Péndulo		Cantidad:	1
					Firma:	Francisco Javier Morell Mirasol
TFG:	Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional					
Grado:	Ingeniería electrónica industrial y automática					

Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional



SIS. REP.	Escala:	Unidades:	NOMBRE DE LA PIEZA			
	1:2	mm	Boceto péndulo de furuta		Pieza nº:	-
					Cantidad:	-
Firma:	Francisco Javier Morell Mirasol		Curso:	2018/2019		ETSID - UPV
TFG:	Diseño, implementación y control de un péndulo invertido rotacional					
Grado:	Ingeniería electrónica industrial y automática					

8. Bibliografía

- [1] Careaga, A.; Kevin, R. & Almeida, J. (2013). Furuta Pendulum. Instituto de Tecnología de Massachusetts, EU.
- [2] Escobar, L.; Montoya, O. & Giraldo, D. (2012). Control Global del Péndulo de Furuta Empleando Redes Neuronales Artificiales y Realimentación de Variables de Estado (Artículo de investigación). Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- [3] Toro, R. (2009). Diseño y control de un péndulo furuta para su utilización en las aulas de clase de la universidad EAFIT (proyecto de grado). Universidad EAFIT, Medellín.
- [4] Osorio, A. (2009). Diseño y control de un péndulo invertido rotacional utilizando técnicas lineales y no lineales (proyecto de grado). Universidad nacional de Colombia, Colombia.
- [5] Valera, A.; Vallés, M. & Cardo, M. (2014). Desarrollo y control de un péndulo de furuta. *ResearchGate*. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/228855086>
- [6] Mathworks (1984). Simscape Multibody. Recuperado de: <https://www.mathworks.com/products/simmechanics.html>
- [7] Stratasys (2009). GrabCAD. Massachusetts, EU. Recuperado de: <https://grabcad.com/>
- [8] Compañía Quanser. Quanser. Canada. Recuperado de: <https://www.quanser.com/>
- [9] Compañía Arduino (2005). Arduino. Recuperado de: <https://www.arduino.cc/>