

# **ANÁLISIS DE ESCALABILIDAD ESPACIAL PARA UN MODELO CONCEPTUAL DE PRODUCCIÓN DE ESCORRENTÍA**

**Miguel Ignacio Barrios Peña**

**Tesina presentada como requisito parcial para optar al título  
de Máster en Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente**

**Director: Doctor Félix Francés García**

**Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA  
Valencia, Julio de 2009**



# RESUMEN

En este trabajo de investigación se elabora un análisis del efecto de la escala espacial sobre los parámetros efectivos capacidad de almacenamiento estático efectivo  $h$  y conductividad hidráulica saturada efectiva  $k$ , para el módulo de producción de escorrentía del modelo hidrológico conceptual TETIS. Se aplicó el método de muestreo Hipercubo Latino (LHS) para generar campos de parámetros con soporte de microescala asumiendo independencia espacial, a estos campos generados se les aplicó la descomposición de Cholesky para obtener campos correlacionados asumiendo una estructura de dependencia espacial exponencial.

Los parámetros efectivos a escala de celda o macroescala ( $E2$ ), se calcularon por simulación inversa para cada una de las realizaciones de los diferentes procesos estocásticos generados; y se elaboró un análisis de la influencia de la incertidumbre de los parámetros estimados con soporte de microescala sobre la incertidumbre de los parámetros efectivos a escala de celda, utilizando como medida de evaluación la varianza de la estimación.

Para determinar en qué medida el tamaño de celda y la escala integral afectan la incertidumbre de los parámetros objeto de investigación, las simulaciones se elaboraron sobre tres tamaños de celda ( $10 \times 10$ ;  $30 \times 30$ ;  $90 \times 90 m^2$ ) y para 18 longitudes de correlación diferentes.

Se propusieron dos modelos determinísticos que relaciona los parámetros  $h$  y  $k$  entre la microescala y la macroescala en función de la variabilidad dentro de la celda y el valor de las variables de entrada. La optimización de los modelos se realizó tomando como función objetivo el error cuadrático medio aplicando el método cuasi-Newton y un algoritmo genético.

Finalmente, se realizó una evaluación del funcionamiento de los modelos de escalamiento determinístico propuestos, con la ejecución de simulaciones hidrológicas para tres escenarios de tormenta diferentes: un escenario de tormenta extraordinaria y dos escenarios ordinarios. Las medidas estadísticas utilizadas fueron el índice de eficiencia de Nash- Sutcliffe (NSE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE) para 2500 simulaciones diferentes en cada escenario.

De acuerdo con los resultados obtenidos, el tamaño de celda es un factor importante en la transferencia de incertidumbre entre escalas, para campos con dependencia espacial y en menor grado para el caso de independencia espacial. Para las celdas de mayor tamaño ( $90 \times 90 m^2$ ) se experimenta una significativa disminución de la varianza de estimación del parámetro (del orden de  $\sim 70$  a  $90\%$ ), mientras que para las celdas de menor tamaño la reducción en la varianza de estimación es menor (del orden de  $\sim 10$  a  $25\%$  para casos con una escala integral de 100m).

A medida que aumenta el nivel de dependencia espacial para un mismo tamaño de celda, (incremento en la escala integral  $a$ ), se amplía el grado de incertidumbre de

la estimación del parámetro efectivo, debido a que las variables aleatorias a nivel de sub-celda (microescala) aportan relativamente la misma información para generar el parámetro efectivo cuando  $a$  es alto con relación al tamaño de celda.

Los modelos determinísticos postulados para representar el funcionamiento de los parámetros efectivos  $h$  y  $k$  son buenos estimadores para eventos de tormentas extraordinarias. Sin embargo, su fiabilidad se reduce para la simulación de eventos de pequeña magnitud. Se destaca la importancia de demostrar que la estructura matemática propuesta en estas ecuaciones es una representación adecuada del funcionamiento y tendencia de los parámetros efectivos  $h$  y  $k$  para una gran familia de casos posibles en eventos de crecida.

# ABSTRACT

This research shows an analysis of the effect of spatial scale on two effective parameters of the hydrological model called TETIS: static storage capacity ( $h$ ) and saturated hydraulic conductivity ( $k$ ). Latin hypercube sample (LHS) was carried out to generate random fields for each parameter in microscale ( $E1$ ). The spatial dependence was produced by applying Cholesky decomposition to those random fields, with an exponential model for spatial correlation.

Was carried out an analysis of how parameter uncertainty in microscale ( $E1$ ) affects uncertainty of effective parameters ( $E2$ ), the variance was used as evaluation measure. To determine how parameter uncertainty is influenced by grid size and integral scale, To determine the influence of integral scale and grid size on parameter uncertainty, several simulations was implemented for three grid sizes ( $10 \times 10$ ;  $30 \times 30$ ;  $90 \times 90m^2$ ) and eighteen correlation lengths.

To express the relationship of parameters within scales ( $E1$  and  $E2$ ) were proposed two deterministic models of aggregation. Finally, performance of models was evaluated by Nash-Sutcliffe efficiency index (NSE) and root mean square error (RMSE), for 2500 simulations in three storm scenarios (extreme storm and two ordinary storms).

Results show that grid size is a main factor in the process of transferring uncertainty from microscale to grid scale (macroscale), especially when exist a high integral scale. Grid size of  $90 \times 90m^2$  shows a significant reduction of variance of estimation when upscaling (order of 70 to 90%), while smaller grid sizes have a less reduction of variance of estimation (order of 10 to 25% with integral scale of 100 meters).

The upscaling equations presented in this thesis are good estimators for the effective parameters  $h$  and  $k$  in the case of extreme storms. But, its reliability is reduced with small storms. However, is attractive that those mathematical structures represent properly the performance of  $h_{ef}$  and  $k_{ef}$  for a huge family of possible cases.



# CONTENIDO

1.	Introducción .....	17
1.1	Objetivos de la investigación .....	18
1.2	Organización del Documento .....	18
2.	Efectos De Escala En La Modelación Hidrológica: Estado Del Arte.....	21
2.1	Antecedentes .....	21
2.2	Estado Actual .....	25
2.2.1	Variabilidad, Heterogeneidad y Escala .....	25
2.2.2	Problemas De Escalabilidad En La Modelación De Procesos Hidrológicos.....	28
2.2.3	Elementos Estadísticos Para El Escalamiento En Hidrología.....	29
2.2.4	Enfoques de Escalamiento En La Modelación Hidrológica .....	30
2.2.4.1	Agregación .....	31
2.2.4.2	Desagregación .....	33
2.3	Discusión .....	34
3.	Metodología.....	37
3.1	Formulación del Problema de Investigación .....	37
3.2	Descripción General .....	38
3.3	Descripción del Modelo Hidrológico Conceptual de Producción de Escorrentía .....	40
3.3.1	Almacenamiento Estático y Pérdidas por Evapotranspiración .....	40
3.3.2	Almacenamiento Superficial y Escorrentía Directa.....	41
3.4	Experimentos Numéricos .....	42
3.4.1	Procedimiento Para la Generación de Campos de Parámetros .....	42
3.4.2	Escala Objeto de Investigación .....	43
3.4.3	Hipótesis asumidas.....	43
4.	Simulación Estadística de Parámetros a Nivel de Sub-celda.....	45
4.1	Representación por Distribuciones de Probabilidad Asumiendo iid.....	45
4.1.1	Estructura Estadística de los Campos Generados .....	46

4.1.2	Eficiencia de la Técnica LHS en Contraste con el Método Monte Carlo Convencional.....	49
4.2	Representación Con Dependencia Espacial.....	50
4.2.1	Estimadores de Relación Espacial.....	51
4.2.2	Estructura Estadística de los Campos Generados.....	52
5.	Análisis del Efecto de Escala por Simulación Estocástica Inversa.....	57
5.1	Puntos Límite.....	57
5.2	Escalamiento de Campos de Parámetros con Independencia Espacial...	58
5.2.1	Ergodicidad e Importancia de la Incertidumbre de los Parámetros Efectivos.....	62
5.2.2	Efecto del Cambio de Extensión En la Escala de Celda.....	69
5.3	Escalamiento de Parámetros con Dependencia Espacial.....	73
5.3.1	Ergodicidad e Importancia de la Incertidumbre de los Parámetros Efectivos.....	73
5.3.2	Efecto del Cambio de Extensión en la Escala de Celda.....	76
5.3.3	Efecto de la Escala Integral.....	79
6.	Escalamiento de Parámetros con Modelos Determinísticos.....	87
6.1	Capacidad de Almacenamiento Estático Efectivo.....	87
6.2	Conductividad Hidráulica Saturada Efectiva.....	94
6.3	Simulación Hidrológica de la Producción de Escorrentía con el Escalamiento Determinístico.....	96
6.3.1	Comparación con Parámetros Medios.....	104
6.3.2	Comparación con Parámetros Calibrados.....	106
7.	Conclusiones y Aportes de la Tesina.....	109
7.1	Conclusiones del trabajo.....	109
7.2	Aportes de la investigación.....	112
7.3	Futuras líneas de investigación.....	112
8.	Referencias.....	115
9.	Apéndice I: Lista de Símbolos.....	121
10.	Apéndice II: Modelos Descartados.....	123
11.	Apéndice III: Códigos Desarrollados en Matlab.....	125
11.1	Generación de campos aleatorios de parámetros.....	125
11.2	Modelo Hidrológico y Simulación Estocástica Inversa.....	127



# LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2-1. A)</b> Definición de los tres rasgos de la escala (Soporte, Espaciamiento y Extensión) para un campo unidimensional. <b>B)</b> Para un campo bidimensional: Soporte = $c*c$ ; Espaciamiento = $d$ ; y Extensión = $X*Y$ . Adaptado de Western & Bloschl (1999) y Bloschl (1999).....	26
<b>Figura 2-2.</b> Tipos de escalamiento relacionados con la <i>Extensión</i> , <i>Espaciamiento</i> ( <i>Cobertura</i> ) y <i>Soporte</i> de la escala. Adaptado de Bierkens et al. (2000) y Bloschl. (2005).....	31
<b>Figura 3-1. A)</b> Método Estocástico de Agregación (esquema para una realización). <b>B)</b> Método Determinístico de Agregación. (I = inputs, P = parámetros, O = outputs).....	39
<b>Figura 3-2.</b> Esquema del almacenamiento Estático. Tomado de (Vélez, 2001).....	40
<b>Figura 3-3.</b> Esquema de almacenamiento sobre la superficie de la ladera cuando se presenta escorrentía superficial. Tomado de (Vélez, 2001) .....	41
<b>Figura 3-4.</b> Representación esquemática del sistema y las escalas de modelación .....	43
<b>Figura 4-1</b> Comparación gráfica de la función de densidad acumulada teórica de la distribución lognormal para $h$ ( $\mu = 3.8$ y $\sigma = 1.2686$ ) y la función de densidad acumulada de muestras simuladas (se presentan cuatro casos al azar del conjunto de variables aleatorias simuladas).....	46
<b>Figura 4-2</b> Vectores de medias, varianzas y CV para algunos de los campos aleatorios de parámetros generados por el método LHS. ....	47
<b>Figura 4-3 A)</b> CDF simulada para 2025 variables aleatorias de $h$ y $k$ . <b>B)</b> 1000 simulaciones realizadas para $h$ y $k$ en un campo de 2025 variables aleatorias, con parámetros ( $\mu = 4.26$ , $\sigma = 0.83$ ) y ( $\mu = 3.75$ , $\sigma = 0.83$ ).....	48
<b>Figura 4-4. A)</b> Matriz de correlación de tres campos generados con 25 variables aleatorias. <b>B)</b> Matriz de correlación de tres campos generados con 225 variables aleatorias. <b>C)</b> Matriz de correlación de tres campos generados con 2025 variables aleatorias. ....	49
<b>Figura 4-5.</b> Comparación de la eficiencia del Método LHS y el método Monte Carlo típico en 323 casos con un número de realizaciones variable: de 32 a 1000 (en ambos casos se empleó solo una iteración). ....	50
<b>Figura 4-6. A)</b> Comparación del correlograma de la muestra y el correlograma del modelo exponencial con longitud de correlación de 100 m, caso de 45 variables aleatorias de $k$ con parámetros estadísticos $\mu = 3.51$ y $\sigma = 1.09$ (izquierda) y 45 variables aleatorias de $k$ con parámetros estadísticos $\mu = 3.75$ y $\sigma = 0.83$ (derecha). <b>B)</b> Imagen de la matriz de correlación en un conjunto de 2025 variables aleatorias de $k$ con 2500 realizaciones, con parámetros $\mu = 3.51$ y $\sigma = 1.09$ (izquierda), y $\mu = 3.75$ y $\sigma = 0.83$ (derecha).....	53
<b>Figura 4-7.</b> Tres realizaciones correlacionadas del parámetro $k$ , (simuladas con parámetros estadísticos $\mu = 3.75$ y $\sigma = 0.83$ , y un modelo de dependencia espacial exponencial con escala integral de 100 m). <b>A)</b> Para celdas con tamaño de $10 \times 10m$ . <b>B)</b> Para celdas con tamaño de $30 \times 30m$ . <b>C)</b> Para celdas con tamaño de $90 \times 90m$ . (El soporte de la escala $E1$ es de $2 \times 2m$ en todos los casos).....	54
<b>Figura 4-8 A)</b> 500 realizaciones no condicionadas de un campo aleatorio de 225 variables aleatorias de $k$ con función de distribución lognormal de parámetros $\mu = 3.98$ y $\sigma = 0.47$ . <b>B)</b> 500 realizaciones no condicionadas de un campo aleatorio de 225 variables aleatorias de $k$ con función de distribución lognormal de parámetros $\mu = 3.51$ y $\sigma = 1.09$ .....	55

<b>Figura 5-1.</b> Capacidad máxima de almacenamiento estático efectiva ( $h_{ef}[E2]$ ) en función de la precipitación ( $X1[E2]$ ) en cada $\Delta t$ , el estado de almacenamiento ( $H1[E2]$ ) en cada $\Delta t$ y la variabilidad de $h[E1]$ .....	58
<b>Figura 5-2.</b> Conductividad hidráulica saturada efectiva ( $k_{ef}$ ) en función de la precipitación ( $X1[E2]$ ) en cada $\Delta t$ , el estado de almacenamiento ( $H1[E2]$ ) en cada $\Delta t$ y la variabilidad de $k[E1]$ .....	61
<b>Figura 5-3.</b> Conductividad hidráulica saturada efectiva ( $k_{ef}$ ) en función de la precipitación excedente ( $X2[E2]$ ) en cada $\Delta t$ y la variabilidad de $k[E1]$ .....	62
<b>Figura 5-4.</b> Valor del parámetro efectivo relativo a su promedio en $E1$ para cada realización en función del tiempo. A) con $CV[E1]=0.5$ ; B) con $CV[E1]=1$ ; C) con $CV[E1]=1.5$ ; D) con $CV[E1]=2$ . En todos los casos $[E1]$ con 25 variables aleatorias.....	63
<b>Figura 5-5</b> Valor del parámetro efectivo relativo a su promedio en $E1$ para cada realización en función del tiempo. A) con $CV[E1]=0.5$ ; B) con $CV[E1]=1$ ; C) con $CV[E1]=1.5$ ; D) con $CV[E1]=2$ . En todos los casos $[E1]$ con 225 variables aleatorias.....	64
<b>Figura 5-6.</b> Valor del parámetro efectivo relativo a su promedio en $E1$ para cada realización en función del tiempo. A) con $CV[E1]=0.5$ ; B) con $CV[E1]=1$ ; C) con $CV[E1]=1.5$ ; D) con $CV[E1]=2$ . En todos los casos $[E1]$ con 2025 variables aleatorias.....	65
<b>Figura 5-7.</b> Disminución de varianza de estimación de los parámetros $h$ y $k$ en porcentaje como consecuencia de la agregación de escala $E1$ a $E2$ (con respecto a la varianza del parámetro en $E1$ ). A) para celdas con un tamaño de $10 \times 10m^2$ y 25 sub-celdas subsumidas. B) para celdas con un tamaño de $30 \times 30m^2$ y 225 sub-celdas subsumidas. C) para celdas con un tamaño de $90 \times 90m^2$ y 2025 sub-celdas subsumidas. ....	66
<b>Figura 5-8.</b> Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones $\pm$ el coeficiente de variación (valores estandarizados de $h$ y $k$ ) en celdas de $10 \times 10m^2$ . A) para campos con $CV = 0.5$ en $E1$ . B) para campos con $CV = 1$ en $E1$ . C) para campos con $CV = 1.5$ en $E1$ . D) para campos con $CV = 2$ en $E1$ .....	67
<b>Figura 5-9.</b> Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones $\pm$ el coeficiente de variación (valores estandarizados de $h$ y $k$ ) en celdas de $30 \times 30m^2$ . A) para campos con $CV = 0.5$ en $E1$ . B) para campos con $CV = 1$ en $E1$ . C) para campos con $CV = 1.5$ en $E1$ . D) para campos con $CV = 2$ en $E1$ .....	68
<b>Figura 5-10.</b> Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones $\pm$ el coeficiente de variación (valores estandarizados de $h$ y $k$ ) en celdas de $90 \times 90m^2$ . A) para campos con $CV = 0.5$ en $E1$ . B) para campos con $CV = 1$ en $E1$ . C) para campos con $CV = 1.5$ en $E1$ . D) para campos con $CV = 2$ en $E1$ .....	69
<b>Figura 5-11.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 0.5$ e independencia espacial. ....	71
<b>Figura 5-12.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 1$ e independencia espacial. ....	71
<b>Figura 5-13.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$	

. Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 1.5$ e independencia espacial.....	72
<b>Figura 5-14.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$	
. Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 2$ e independencia espacial.....	72
<b>Figura 5-15.</b> Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones $\pm$ el coeficiente de variación (valores estandarizados de $h$ y $k$ ) en celdas de $10 \times 10m^2$ . A) para campos con $CV = 0.5$ en $E1$ . B) para campos con $CV = 1$ en $E1$ . C) para campos con $CV = 1.5$ en $E1$ . D) para campos con $CV = 2$ en $E1$ . En todos los casos se asumió una escala integral igual a 100m.....	74
<b>Figura 5-16.</b> Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones $\pm$ el coeficiente de variación (valores estandarizados de $h$ y $k$ ) en celdas de $30 \times 30m^2$ . A) para campos con $CV = 0.5$ en $E1$ . B) para campos con $CV = 1$ en $E1$ . C) para campos con $CV = 1.5$ en $E1$ . D) para campos con $CV = 2$ en $E1$ . En todos los casos se asumió una escala integral igual a 100m.....	75
<b>Figura 5-17.</b> Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones $\pm$ el coeficiente de variación (valores estandarizados de $h$ y $k$ ) en celdas de $90 \times 90m^2$ . A) para campos con $CV = 0.5$ en $E1$ . B) para campos con $CV = 1$ en $E1$ . C) para campos con $CV = 1.5$ en $E1$ . D) para campos con $CV = 2$ en $E1$ . En todos los casos se asumió una escala integral igual a 100m.....	76
<b>Figura 5-18.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$	
. Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 0.5$ y una escala integral de 100 m. ....	77
<b>Figura 5-19.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$	
. Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 1$ y una escala integral de 100 m. ....	78
<b>Figura 5-20.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$	
. Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 1.5$ y una escala integral de 100 m. ....	78
<b>Figura 5-21.</b> Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros $h_{ef}$ y $k_{ef}$ en celdas de $10 \times 10m^2 = F1$ , $30 \times 30m^2 = F2$ y $90 \times 90m^2 = F3$	
. Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala $E1$ con un $CV = 2$ y una escala integral de 100 m. ....	79
<b>Figura 5-22.</b> Varianza de $h_{ef}$ con relación a $X1 + H1$ para 18 escalas integrales ( $a$ ) en celdas de $10 \times 10m^2$ con un $CV[E1] = 2$ .....	81
<b>Figura 5-23.</b> Varianza de $k_{ef}$ con relación a $X2[E2]$ para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de $10 \times 10m^2$ con un $CV[E1] = 2$ . ....	81
<b>Figura 5-24.</b> Varianza de $h_{ef}$ con relación a $X1 + H1$ para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de $30 \times 30m^2$ con un $CV[E1] = 2$ .....	82
<b>Figura 5-25.</b> Varianza de $k_{ef}$ con relación a $X2$ para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de $30 \times 30m^2$ con un $CV[E1] = 2$ .....	82

<b>Figura 5-26</b> Varianza de $h_{ef}$ con relación a $X1 + H1$ para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de $90 \times 90m^2$ con un $CV[E1] = 2$ .....	83
<b>Figura 5-27</b> Varianza de $k_{ef}$ con relación a $X2$ para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de $90 \times 90m^2$ con un $CV[E1] = 2$ .....	83
<b>Figura 5-28.</b> Relación de la varianza de estimación de $h_{ef}$ y $k_{ef}$ con la longitud de correlación relativa al tamaño de celda. Representación en escala logarítmica en ambos ejes.....	84
<b>Figura 6-1.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 61.23 mm y $CV = 1.54$ .....	89
<b>Figura 6-2.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 100.8 mm y $CV = 0.89$ .....	89
<b>Figura 6-3.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 205.4 mm y $CV = 1.24$ .....	90
<b>Figura 6-4.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 60.3 mm y $CV = 0.9$ .....	90
<b>Figura 6-5.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 136.7 mm y $CV = 1.1$ .....	91
<b>Figura 6-6.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 101.4 mm y $CV = 1.72$ .....	91
<b>Figura 6-7.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 53.5 mm y $CV = 1.85$ .....	92
<b>Figura 6-8.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 53.9 mm y $CV = 2.91$ .....	92
<b>Figura 6-9.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 55.9 mm y $CV = 2.49$ .....	93
<b>Figura 6-10.</b> Comparación de $h_{ef}$ calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo $h[E1]$ con promedio 35.6 mm y $CV = 3.74$ .....	93
<b>Figura 6-11.</b> Dispersión de $k_{ef}$ estimado por la ecuación [6-3] y calculado por simulación inversa para seis casos de $k[E1]$ : <b>A)</b> Media 25.45 mm/h; $cv = 1.19$ . <b>B)</b> Media 60.74 mm/h; $cv = 1.36$ . <b>C)</b> Media 41.36 mm/h; $cv = 1.45$ . <b>D)</b> Media 54 mm/h; $cv = 2.13$ . <b>E)</b> Media 18.69 mm/h; $cv = 2.66$ . <b>F)</b> Media 31.87 mm/h; $cv = 2.45$ .....	95
<b>Figura 6-12</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con $CV-k = 2.22$ , $CV-HU = 1.42$ $\bar{h} = 50.94mm$ $\bar{k} = 16.98mm$ . (NSE-ED = 0.9891 RMSE-ED = 0.0261; NSE-X2 = 0.9828 RMSE-X2 = 3.1156; NSE-X3 = 0.9233 RMSE-X3 = 0.2889). Escenario de tormenta 1.....	97
<b>Figura 6-13.</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con $CV-k = 2.43$ , $CV-HU = 1.81$ $\bar{h} = 37.29mm$ $\bar{k} = 15.92mm$ . (NSE-ED = 0.9921 RMSE-ED = 0.0223; NSE-X2 = 0.9871 RMSE-X2 = 2.7471; NSE-X3 = 0.8877 RMSE-X3 = 0.3393). Escenario de tormenta 1.....	98
<b>Figura 6-14.</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con $CV-k = 1.69$ , $CV-HU = 0.96$ $\bar{h}$	

=41.81mm $\bar{k} = 53.17\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9927 RMSE-ED = 0.0198; NSE-X2 = 0.9908 RMSE-X2 = 2.3181; NSE-X3 = 0.9276 RMSE-X3 = 0.7698). Escenario de tormenta 1.....	98
<b>Figura 6-15.</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con CV-k = 1.85, CV-HU = 1.78 $\bar{h} = 81.57\text{mm}$ $\bar{k} = 72.70\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9710 RMSE-ED = 0.0374; NSE-X2 = 0.9618 RMSE-X2 = 4.6019; NSE-X3 = 0.8858 RMSE-X3 = 1.1701). Escenario de tormenta 1.....	99
<b>Figura 6-16.</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con CV-k = 2.1, CV-HU = 1.77 $\bar{h} = 41.00\text{mm}$ $\bar{k} = 20.87\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9912 RMSE-ED = 0.0231; NSE-X2 = 0.9863 RMSE-X2 = 2.7840; NSE-X3 = 0.9582 RMSE-X3 = 0.2566). Escenario de tormenta 1.....	99
<b>Figura 6-17.</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con CV-k = 2.1, CV-HU = 1.77 $\bar{h} = 41.00\text{mm}$ $\bar{k} = 20.87\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9188 RMSE-ED = 0.0150; NSE-X2 = 0.9048 RMSE-X2 = 1.703; NSE-X3 = 0.7995 RMSE-X3 = 0.3750). Escenario de tormenta 2.....	100
<b>Figura 6-18.</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con CV-k = 2.22, CV-HU = 1.43 $\bar{h} = 50.94\text{mm}$ $\bar{k} = 16.98\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9012 RMSE-ED = 0.0166; NSE-X2 = 0.8850 RMSE-X2 = 1.8399; NSE-X3 = 0.7230 RMSE-X3 = 0.3839). Escenario de tormenta 2.....	100
<b>Figura 6-19.</b> Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con CV-k = 1.48, CV-HU = 1.46 $\bar{h} = 19.06\text{mm}$ $\bar{k} = 11.35\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.8408 RMSE-ED = 0.0040; NSE-X2 = 0.7902 RMSE-X2 = 0.5651; NSE-X3 = 0.60 RMSE-X3 = 0.2238). Escenario de tormenta 3.....	101
<b>Figura 6-20.</b> Distribución del índice de Nash- Sutcliffe (NSE) de la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) y la infiltración gravitacional (X3) para 2500 simulaciones en el escenario de tormenta 1. ....	102
<b>Figura 6-21.</b> Distribución del índice de Nash- Sutcliffe (NSE) de la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) y la infiltración gravitacional (X3) para 2500 simulaciones en el escenario de tormenta 2. ....	102
<b>Figura 6-22.</b> Distribución del índice de Nash- Sutcliffe (NSE) de la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) y la infiltración gravitacional (X3) para 2500 simulaciones en el escenario de tormenta 3. ....	103
<b>Figura 6-23.</b> Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización del valor promedio de h y k. para el escenario de tormenta 1. ....	104
<b>Figura 6-24.</b> Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización del valor promedio de h y k. para el escenario de tormenta 2. ....	105
<b>Figura 6-25.</b> Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización del valor promedio de h y k. para el escenario de tormenta 3. ....	105
<b>Figura 6-26.</b> Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización de parámetros efectivos hef y kef estacionarios. para el escenario de tormenta 1. ....	106
<b>Figura 6-27.</b> Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización de parámetros efectivos hef y kef estacionarios. Para el escenario de tormenta 2.....	107

**Figura 6-28.** Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización de parámetros efectivos  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  estacionarios. Para el escenario de tormenta 3. ....107

# LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 4-1</b> Tamaño de las celdas analizadas y el número de sub-celdas subsumidas dentro de cada una.....	45
<b>Tabla 4-2.</b> Características esperadas de los campos de parámetros $h$ y $k$ . .....	46





# 1. INTRODUCCIÓN

El problema de escalamiento dentro de la conceptualización y modelación de problemas hidrológicos es un tema que debe ser tratado por varias razones: la heterogeneidad de parámetros, la carencia de datos observados en muchos casos, la dependencia de diferentes procesos con relación a la escala, efectos de escala en los parámetros efectivos, la complejidad de los procesos y sistemas hidrológicos, posible similitud entre los parámetros y procesos del sistema, la naturaleza puntual de las ecuaciones de gobierno tradicionales, las diferencias en la escala del modelo y los parámetros, e imposición de escala por limitaciones computacionales.

La complejidad de los sistemas hidrológicos puede ser tratada reduciendo los parámetros involucrados a un número mínimo de parámetros adimensionales, y tomar ventaja de posibles similitudes en los procesos y sistemas; la similitud estadística en el sistema puede ser utilizada para hacer estimaciones de parámetros debido a la poca disponibilidad de información.

Debido a que la escala de modelación es determinada usualmente por los datos disponibles o por la capacidad computacional al margen de la resolución óptima para la solución del modelo, el escalamiento se ha constituido en un concepto clave para alcanzar una representación más realista de los procesos hidrológicos con ecuaciones de conservación de masa, momento y energía en diferentes escalas de análisis.

En este contexto, surgen problemas de escala debido a que la importancia relativa de los procesos cambia con la escala; por tanto, las descripciones que han sido obtenidas para procesos o parámetros a escalas pequeñas, no necesariamente siguen siendo válidos para escalas mayores, lo cual, ha permitido que se hayan desarrollado métodos de escalamiento tanto estocásticos como determinísticos.

Para aplicar las ecuaciones básicas del flujo a escalas mayores, se deben utilizar parámetros efectivos; los cuales permiten simular procesos hidrológicos con ecuaciones de escala pequeña en escalas de soporte más grande, de tal modo que las salidas del modelo con ambas escalas mantengan una similitud.

Estos parámetros son de gran relevancia en la práctica, ya que permiten simplificar la complejidad geométrica de los esquemas de modelación, y en consecuencia, reducir el requerimiento de datos y el esfuerzo computacional, pero su principal limitación es su alto grado de incertidumbre y su no-estacionariedad, lo cual hace que la estimación de parámetros efectivos no sea una tarea sencilla de realizar.

En la presente tesina se desarrolla un análisis del escalamiento de los parámetros capacidad de almacenamiento estático efectivo  $h$  y conductividad hidráulica saturada efectiva  $k$  para el módulo de producción de escorrentía del modelo

hidrológico conceptual “TETIS”, aplicando un procedimiento de simulación estocástica inversa asumiendo dependencia e independencia espacial en los parámetros. Se hace un análisis de la transferencia de la incertidumbre de los parámetros desde la microescala hacia la escala de celda o macroescala y se determina qué papel cumple el tamaño de celda y la escala integral en dicha incertidumbre evaluada a través de la varianza de la estimación.

Se proponen dos modelos determinísticos que relaciona los parámetros  $h$  y  $k$  entre la microescala y la escala de celda en función de la variabilidad dentro de la celda y el valor de las variables de entrada. La optimización de los modelos se realizó para el error cuadrático medio aplicando el método cuasi-Newton y el algoritmo genético del programa MATLAB versión 7.7.0.471-R2008b.

Finalmente, se hace una evaluación del funcionamiento de los modelos de escalamiento determinístico propuestos, con la ejecución de simulaciones hidrológicas para tres escenarios de tormenta diferentes: un escenario de tormenta extraordinaria y dos escenarios ordinarios. Las medidas estadísticas utilizadas fueron el índice de eficiencia de Nash- Sutcliffe (NSE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE) para 2500 simulaciones diferentes en cada escenario.

## **1.1 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

- Analizar los efectos de la heterogeneidad de parámetros en la microescala sobre los parámetros efectivos a escala de celda, asumiendo que el modelo hidrológico es válido en ambas escalas y aplicando simulaciones estocásticas.
- Analizar cómo afecta la incertidumbre de los parámetros en la microescala a la incertidumbre de los parámetros efectivos a escala de celda.
- Investigar el efecto del tamaño de celda y la escala integral sobre la incertidumbre de la estimación de los parámetros efectivos.
- Proponer un modelo matemático que relacione los parámetros físicos (por naturaleza estacionarios) con los parámetros efectivos que en la práctica son no-estacionarios.

## **1.2 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO**

En el capítulo dos se presenta una revisión del estado del arte en el tema de escala en Hidrología, se hace una revisión de sus antecedentes y los principales métodos y resultados de diversas investigaciones relacionadas con la temática, luego se hace una discusión y se formula el problema de investigación.

En el capítulo tres se aborda la descripción de métodos, del modelo hidrológico utilizado y del diseño de los experimentos computacionales para la generación de los diferentes campos de parámetros y las hipótesis asumidas. En el capítulo cuatro se muestran los resultados de las simulaciones estadísticas por el método Hiper cubo Latino y la generación de los campos con dependencia espacial.

En el capítulo cinco, se analiza cómo afecta la heterogeneidad de los parámetros en la microescala al valor de los parámetros efectivos y qué efecto tiene la escala integral y el tamaño de celda en la transferencia de la incertidumbre de la microescala a la escala de celda tanto para la hipótesis de independencia espacial como para la hipótesis de dependencia espacial.

El capítulo seis presenta los modelos determinísticos que mejor se ajustan a la tendencia de la capacidad de almacenamiento estático efectiva y la conductividad hidráulica efectiva con diferentes grados de variabilidad espacial de estos parámetros en la microescala. Se analiza además la fiabilidad del modelo para 2500 simulaciones hidrológicas en tres escenarios tormenta.



## **2. EFECTOS DE ESCALA EN LA MODELACIÓN HIDROLÓGICA: ESTADO DEL ARTE**

El análisis de procesos hidrológicos se ha fundamentado históricamente en la elaboración de experimentos a escala puntual ( $10^{-1}$  – 10 m) (Gupta, 2007), y se han realizado avances significativos en la comprensión y cuantificación de dichos procesos de manera individual y en una variedad de ambientes (Sivapalan y Kalma, 1995). De todo ello, se han obtenido modelos físicamente basados que explican con un sólido soporte teórico el comportamiento individual de procesos como la infiltración, la evapotranspiración, el flujo en canales y el flujo subterráneo a escala puntual.

Sin embargo, muchos problemas de ingeniería hidráulica deben abordarse con el apoyo de modelos elaborados sobre unidades geográficas significativamente más extensas (escala de cuenca) y la extrapolación de las ecuaciones físicas y valores observados de las condiciones de contorno y parámetros desde la escala puntual ( $10^{-1}$  – 10 m) a escalas más grandes (ladera, cuenca;  $10^2$  –  $10^6$  m) presenta dificultades e implica un desafío teórico importante para la ciencia hidrológica (Bierkens et al., 2000; Gupta, 2007).

### **2.1 ANTECEDENTES**

Los problemas de escala han sido reconocidos por los investigadores de la ciencia hidrológica desde hace varias décadas, evidencia de ello es que se han llevado a cabo varios talleres internacionales para abordar el tema, entre ellos se destacan: Caracas (Venezuela) en 1982, Princeton (New Jersey, EEUU) en 1984, Robertson (Australia) en 1993, y Krumbach (Austria) en 1996; además, el congreso internacional sobre modelación y simulación desarrollado en Canberra (Australia) en 2001, dedicó una sesión especial al tema. A continuación se presenta una breve descripción de los principales aspectos abordados en cada uno de estos eventos y los aportes que se han dado:

El principal objetivo del taller que se llevó a cabo en Caracas (Venezuela) en junio de 1982, fue promover la búsqueda de un apropiado nivel de conceptualización de los procesos hidrológicos compatible con los fenómenos observados a escala de cuenca con base en la estructura de drenaje y la geomorfología de la cuenca (Rodríguez-Iturbe y Gupta, 1983).

En 1983, la revista “*Journal of Hydrology*” publicó una edición especial titulada “*Scale Problems in Hydrology*”(Vol 65), que contiene los artículos presentados en el taller de Caracas en 1982; se destaca el interés de los participantes en entender el comportamiento y evolución de la cuenca a partir del comportamiento colectivo de sus componentes en vez de enfocar la atención en el funcionamiento individual de cada uno de los componentes del sistema, lo cual no implica que el papel del funcionamiento individual sea secundario, sino que al analizar el fenómeno desde una perspectiva colectiva, sólo unas pocas características individuales son relevantes (Rodríguez-Iturbe y Gupta, 1983).

Los talleres desarrollados en Caracas y en Princeton estuvieron fuertemente influenciados por entender el efecto de la escala en la respuesta hidrológica con base en la importancia relativa de la red de drenaje y la forma del terreno; por lo cual, las discusiones giraron en torno al hidrograma unitario geomorfológico de Rodríguez-Iturbe y Valdés y otros conceptos relacionados (Sivapalan y Kalma, 1995). Sivapalan et al. (1990), desarrollaron un modelo adimensional de frecuencia de crecidas con base en un hidrograma unitario geomorfológico generalizado y la generación de escorrentía a partir de un área parcial.

A partir de la década de los ochenta del siglo pasado, el campo de investigación en el efecto de escala empezó a hacerse más amplio, debido a numerosos y significativos avances tecnológicos y científicos y a nuevas prioridades de investigación; tales como: la amplia disponibilidad de modelos digitales de elevación (DEMs) y los sistemas de información geográfica (GISs), el incremento del uso de información proveniente de sensores remotos, la necesidad de tratar los efectos de los cambios generados por la actividad humana en la superficie de la tierra y las posibles interacciones con la atmosfera, y la comprensión de la importancia de los procesos hidrológicos superficiales en los modelos de circulación global de la atmosfera (GCMs) (Sivapalan y Kalma, 1995).

En 1995, la revista “*Hydrological Processes*” publicó una edición especial en su volumen 9 titulada “*Scale Issues in Hydrological Modelling*”, los artículos publicados trataron el tema de cómo abordar la heterogeneidad espacial, la existencia o no de escalas espaciales y temporales naturales, y enfoques para encontrar vínculos entre la escala de las variables de estado, los parámetros y las conceptualizaciones (Sivapalan y Kalma, 1995).

En 1997, la revista “*Water Resources Research*” presentó una sección especial denominada “*Scale Problems in Hydrology*” (Vol 33), en la cual fueron presentados los resultados del cuarto taller internacional sobre problemas de escala en hidrología que se llevó a cabo en Krumbach, Austria en 1996. Los editores reiteraron que hay importantes problemas de escala debido a que diferentes procesos son dominantes a diferentes escalas. Por tanto, la descripción de procesos y parametrizaciones derivadas a escala puntual no necesariamente son válidas a escalas más grandes en la cuenca (Bloschl et al., 1997).

En el tema de transferencia de información entre escalas se pueden distinguir dos líneas generales de investigación: una basada en escalar variables de estado, parámetros del modelo, inputs y conceptualizaciones y otra que involucra el uso

del análisis dimensional, conceptos de similaridad y análisis fractal y multifractal. (Bloschl y Sivapalan, 1995).

Wood et al. (1988) relacionaron el tamaño de la cuenca con la escorrentía producida a través de simulaciones realizadas en una cuenca de 17 km con el modelo hidrológico TOPMODEL; encontraron que a pequeña escala el patrón de variación de topografía, las propiedades del suelo y las características de la lluvia son importantes en la variación de la escorrentía generada, y al aumentar la escala hasta cierto umbral llamado área elemental representativa (REA, en lengua inglesa) todas las aéreas producirán aproximadamente idéntica respuesta. Concluyeron que el tamaño de la REA es de  $1 \text{ km}^2$ .

Zhang y Montgomery (1994) analizaron el efecto del tamaño de celda del modelo de elevación digital (2, 4, 10, 30 y 90 m) en simulaciones hidrológicas realizadas con el modelo TOPMODEL en dos pequeñas cuencas al oeste de Estados Unidos; sus resultados mostraron que el tamaño de la celda afecta significativamente a los parámetros topográficos y a los hidrogramas simulados: el tamaño de 10 m es significativamente mejor que el tamaño 30 y 90 m, y difiere de manera poco significativa con relación al tamaño 2 y 4 m. Trabajos similares han sido reportados por Molnár y Julien (2000), Moglen y Hartman (2001) y Rojas et al. (2008).

Bloschl et al. (1995) realizaron un análisis semejante al de Woods et al. (1988) empleando la misma topografía, el mismo método para generar los valores de los parámetros y considerando el efecto de propagación de la onda de crecida en un enfoque de cuencas anidadas. Sus resultados indicaron que la existencia y el tamaño de la REA son específicos para cada cuenca y aplicación particular y depende de muchos factores, tales como la duración y variabilidad espacial de la precipitación, el efecto de la propagación de la onda de crecida y la infiltración. La variabilidad a gran escala está fuertemente influenciada por la precipitación, mientras que la variabilidad a pequeña escala está relacionada con las características del suelo y la topografía.

Govindaraju et al. (2001) estudiaron el problema de la estimación de la infiltración representativa de un dominio espacial sujeto a precipitación de intensidad uniforme que denominaron “escala de campo”, la conductividad hidráulica fue representada como un campo aleatorio homogéneo correlacionado, emplearon la ecuación de Green-Ampt para describir la infiltración a nivel puntual y desarrollaron expresiones para describir la infiltración promedio a escala de campo y su varianza, las cuales fueron validadas con simulaciones de Monte Carlo. Una limitación importante de este estudio es que se ha ignorado la influencia del flujo superficial en el proceso.

Kandel et al. (2004) abordaron el efecto de la variabilidad a nivel de sub-celda en el dominio temporal; investigaron el sesgo generado en modelos con discretización diaria al no capturar procesos de erosión y escorrentía causados por la variabilidad de la precipitación a escala de discretización de minutos. Emplearon dos enfoques: primero, utilizando tasas efectivas de precipitación y escorrentía; y segundo, utilizando un esquema de desagregación de la lluvia. Sus resultados mostraron que el enfoque de promediar intensidades de precipitación

diaria subestima el transporte de sedimentos, y el enfoque de desagregar la precipitación diaria a estimaciones de 2 minutos presenta mejores resultados.

Ohara et al. (2008) emplearon un método estocástico con funciones de densidad de probabilidad para analizar la variabilidad a nivel de sub-celda en el proceso de acumulación y fusión de nieve. Estos autores encontraron que la ecuación de Fokker-Planck (FPE) formulada para el proceso de fusión de nieve puede describir los efectos de variabilidad a nivel de sub-celda, lo cual validaron con simulaciones de Monte Carlo.

Lee et al. (2009) estudiaron las implicaciones de la resolución espacial de los modelos digitales de elevación (DEM) en la estimación de parámetros con un modelo distribuido de lluvia-escorrentía. Sus resultados indican que al variar los parámetros topográficos debido al cambio en la resolución del DEM implica variar los valores de los parámetros de procesos para producir simulaciones igualmente aceptables y que las discretizaciones más finas son un factor que domina la ocurrencia de equifinalidad.

En 2004, la revista “*Hydrological Processes*” dedicó una edición especial al tema de escalado en Hidrología, llamada “*Scale and Scaling in Hydrology*” (Vol 18). En ella se publicaron los artículos presentados en el Congreso Internacional en Modelación y Simulación efectuado en Cambera (Australia) en 2001. Los editores destacaron que han habido avances significativos en el campo de investigación del escalado en los últimos veinte años (relativos a su publicación), especialmente en la madurez alcanzada para caracterizar y aprender sobre los patrones de heterogeneidad, la parametrización de la variabilidad a nivel de sub-celda, y la transferencia de información a través de escalas (escalado). Sin embargo, reconocieron la persistencia de un desafío central para la comunidad científica de las ciencias hidrológicas: ***Hacer sus métodos accesibles y relevantes para la práctica de la Hidrología*** (Sivapalan et al., 2004). Dicha afirmación coincide con el planteamiento hecho por Bloschl y Sivapalan (1995), quienes aseveraron una década atrás que: “*para las futuras investigaciones en el efecto de escala en Hidrología uno de los desafíos más importantes será llenar el vacío entre la teoría y la práctica*”.

Hay promisorias oportunidades de llenar ese vacío entre la teoría y la práctica en el marco de la iniciativa de “*Predicciones en Cuencas no Aforadas*” (PUB), promovida por la Asociación Internacional de Ciencias Hidrológicas (IAHS) para el decenio 2003-2012. Al respecto Sivapalan et al. (2004) sugieren que: “*...iniciativas prácticas como PUB están intrínseca y fundamentalmente conectadas con el efecto de las heterogeneidades, la escala y el escalado, promoviendo una clara motivación para asegurar que los resultados de investigación actuales y futuros sean llevados hacia una aplicación práctica*”. La estrategia de PUB enfatiza en mejorar el entendimiento del efecto de las variabilidades de multiescala en el comportamiento hidrológico a escala de cuenca, incrementar el uso de tecnologías avanzadas y el desarrollo y aplicación de modelos numéricos sofisticados que dependan menos de la calibración y más del entendimiento del sistema hidrológico (Sivapalan, 2005).



## 2.2 ESTADO ACTUAL

### 2.2.1 VARIABILIDAD, HETEROGENEIDAD Y ESCALA

Todo proceso hidrológico presenta variaciones espaciales y temporales significativas debido a variaciones en factores fisiográficos como clima, geología, suelo, vegetación, topografía (Woods, 2005), y debido a su interacción en el ámbito de los sistemas ecológicos. Según este autor, la variabilidad es el cambio cuantitativo en una variable hidrológica cuando se compara una ubicación espacial con otra, o un intervalo o un instante de tiempo con otro.

Los términos “variabilidad” y “heterogeneidad” se suelen utilizar en hidrología para referirse a dos fuentes de variación diferentes; Bloschl y Sivapalan (1995) afirman que: “...el término *variabilidad* es típicamente usado para flujos o variables de estado, y el término *heterogeneidad* es típicamente usado para propiedades del medio (como la conductividad hidráulica)”. Por considerar como relevante tal diferenciación para el propósito de este documento y con el ánimo de acordar una interpretación de estos términos, se afirma que:

La variabilidad es el cambio cuantitativo en una variable hidrológica cuando se compara una ubicación espacial con otra, o un intervalo o un instante de tiempo con otro. Y la heterogeneidad es el cambio cuantitativo en una propiedad del medio cuando se compara una ubicación espacial con otra.

La variabilidad y la heterogeneidad pueden ser descritas desde una perspectiva aleatoria (estocástica, no predecible en detalle pero predecible en términos de propiedades estadísticas) y/o desde una perspectiva determinística (predecible, causada por leyes físicas o eventos precedentes) dependiendo del caso particular que sea analizado. La misma variable hidrológica puede ser tratada como una cantidad aleatoria en una situación y ser considerada como determinística en otra situación. (Bloschl y Sivapalan, 1995; Woods, 2005).

Para expresar una variable como determinística, debe encontrarse un nivel de organización en el sistema identificando ciclos, tendencias, estructuras (referida como regularidad o restricción concreta, más no en su significado estocástico relativo a los momentos de una distribución) y/o patrones (Bloschl, 1999; Woods, 2005), y postulando una explicación con un sustento teórico de las leyes que los rigen. Pero en algunos casos resulta muy difícil lograrlo. En consecuencia, es más prudente representar las variables hidrológicas y las propiedades hidráulicas del suelo como variables aleatorias. Por ejemplo: humedad del suelo, concentración de contaminantes, conductividad hidráulica, tasas de degradación (Skøien y Bloschl, 2006).

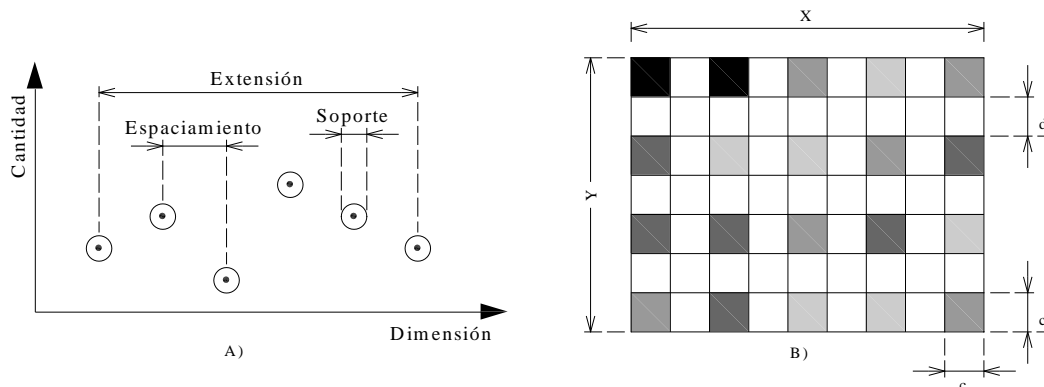
La escala es la medida espacial o temporal sobre la cual es considerada una variable hidrológica (Woods, 2005); puede definirse con relación al proceso (escala de procesos: se refiere a la dimensión de variabilidad natural), con relación

a las observaciones (escala de observación) o relativa a la modelación (escala de modelación) (Bloschl y Sivapalan, 1995; Bloschl, 1999).

Habitualmente, en el análisis de sistemas hidrológicos se requieren predicciones a una escala espacial y temporal diferente a la escala de observación y/o modelación por lo cual se requiere hacer una transferencia de información entre escalas; el proceso se denomina **Escalamiento** (“Scaling” en lengua inglesa) (Bloschl y Sivapalan, 1995; Bloschl, 2005; Wigmosta y Prasad, 2005).

Según Bloschl (2005) el escalamiento puede darse de manera ascendente (“upscaling”) o de manera descendente (“downscaling”); hay dos clases de métodos genéricos de escalamiento ascendente y descendente. La primera clase de métodos involucra modelos dinámicos de partes del ciclo hidrológico en donde el problema de escalado es determinar cómo cambian las ecuaciones del modelo y los parámetros del modelo con la escala. La segunda clase de métodos consiste en descripciones estadísticas donde interesa encontrar la mejor forma de representar la variabilidad aleatoria en el espacio y el tiempo en varias escalas.

Bloschl y Sivapalan (1995) identificaron que en la escala de observación hay tres rasgos relevantes: la extensión (dominio del conjunto de observaciones), el espaciamiento (separación entre observaciones) y el soporte (integración de espacio o tiempo que sustenta cada observación) (Western y Bloschl, 1999). Por ejemplo, en una serie de precipitación observada cada diez minutos durante un año, la extensión es un año, el espaciamiento es diez minutos y el soporte son diez minutos (Figura 2-1).



**Figura 2-1.** A) Definición de los tres rasgos de la escala (Soporte, Espaciamiento y Extensión) para un campo unidimensional. B) Para un campo bidimensional: Soporte =  $c \cdot c$ ; Espaciamiento =  $d$ ; y Extensión =  $X \cdot Y$ . Adaptado de Western & Bloschl (1999) y Bloschl (1999).

Según Bloschl (2005) las anteriores características de la escala de observación (Figura 2-1) se pueden emplear como rasgos de la escala de modelación. Para un modelo hidrológico espacialmente distribuido, la extensión es el tamaño de la cuenca, el espaciamiento es la separación entre elementos de modelación y el soporte es el tamaño de la celda.

Bloschl (2005) afirma que los diferentes tipos de escalado ascendente y descendente (“upscaling” y “downscaling”) dependen de qué rasgo de la escala va a cambiar (extensión, espaciamiento o soporte). El escalado en términos de la “extensión” se refiere a una *extrapolación o su inverso (selección de una*

*subregión*); el escalado en términos del “espaciamiento” implica una *interpolación o su inverso (un muestreo)* y el escalado en términos del “soporte” implica una *agregación o una desagregación*.

La extensión, el espaciamiento y el soporte, influyen de manera diferente en el escalado, por ejemplo: si la escala se define como extensión, “*la varianza de la precipitación tiende a incrementarse con la escala*”; pero si la escala se define como soporte, “*la varianza de la precipitación tiende a disminuir al aumentar el soporte (debido al efecto de filtrado)*” (Western y Blöschl, 1999; Blöschl, 2005)

Tanto la heterogeneidad como la variabilidad se presentan en las dimensiones temporal y espacial en un rango de escalas; la escala que se use para interpretar y entender el comportamiento de un sistema tiene un gran efecto sobre la variabilidad que se perciba. La escala actúa como un filtro que permite ver algunos aspectos hidrológicos y enmascarar otros, lo cual justifica la importancia de analizar sus efectos y cómo abordarlos para tener una percepción adecuada del sistema hidrológico objeto de investigación. A continuación se cita un ejemplo sencillo propuesto por Woods (2005), y levemente modificado por el autor para ilustrar el efecto de escala en la percepción de la variabilidad: “*...conocemos acerca de la variación temporal de la temperatura en al menos tres escalas: primero, habitualmente hace más frío en la noche que en el día; segundo, las temperatura promedio es menor en periodos nublados; y tercero, generalmente hace más frío en invierno que en verano. Estos tres ejemplos de variabilidad temporal de la temperatura están en diferentes escalas de tiempo: el primero está en la escala de tiempo diaria, el segundo no tiene una escala particular (la nubosidad puede ir desde segundos hasta días), y el tercero está en la escala de tiempo anual. También conocemos que la temperatura del aire es variable de lugar a lugar: es más frío en la sombra de un árbol frondoso que a plena exposición a la radiación solar, y es más frío en la parte alta de las montañas que cerca de valles y tierras más bajas; de tal manera, se ha hecho referencia a la variabilidad espacial en dos escalas espaciales, la escala puntual (del orden de 1m) y la escala de paisaje (del orden de 10km)*” (Woods, 2005).

Cuando se escoge una escala para representar un parámetro, una variable, un grupo de variables o un sistema, se afecta la manera como podrá ser percibida su variabilidad. Por tanto, la diferencia percibida entre dos valores de un parámetro o entre dos valores de una variable debida al tipo de agregación a la que sea sometida la dimensión de referencia (espacio o tiempo) **es el efecto de escala sobre el patrón de variabilidad o heterogeneidad**. Ejemplo ilustrativo: la variación diaria de la precipitación permite observar un tipo de variabilidad, mientras que la variación anual implica observar una diferencia con el patrón de variación diaria, lo cual implica un **efecto de escala** (ídem en la dimensión espacial).

## 2.2.2 PROBLEMAS DE ESCALABILIDAD EN LA MODELACIÓN DE PROCESOS HIDROLÓGICOS

Debido a la presencia de diferentes procesos relevantes a diferentes escalas y a que los vínculos entre tales procesos son no lineales, la transferencia de información de una escala espacial o temporal a otra es uno de los desafíos más difíciles de tratar en la ciencia hidrológica (Bloschl y Sivapalan, 1995; Wigmosta y Prasad, 2005; Gupta, 2007). Ejemplo: el flujo a través de los poros en una matriz de suelo domina el transporte del agua a escala de laboratorio, mientras que a escala de ladera, existen macroporos y caminos preferenciales que transportan la mayor parte del flujo.

Los procesos hidrológicos son representados utilizando modelos matemáticos compuestos por inputs, variables de estado y parámetros; debido a la alta heterogeneidad natural en las propiedades de la cuenca y a la variabilidad espacio-temporal en los procesos hidrológicos, cuando se desea llevar a cabo un escalado de una escala “E1” a “E2” se pueden requerir cambios en los parámetros, las variables de estado o incluso en las ecuaciones del modelo; por ejemplo: en el escalamiento de un modelo desarrollado a la escala de laboratorio (E1), se podría requerir un modelo matemático diferente del flujo subsuperficial para que represente la escala de ladera (E2), ya que se debe incluir el efecto de los procesos dominantes a la escala de ladera (Wigmosta y Prasad, 2005).

Los modelos conceptuales y físicamente basados enfrentan dos problemas con relación al escalamiento: introducir nuevos procesos al cambiar la escala y/o introducir el efecto de la variabilidad a medida que cambia la resolución de la escala; para abordar este problema, los hidrólogos han aplicado diversas herramientas matemáticas como: la teoría de probabilidad, métodos geoestadísticos, fractales, análisis de similaridad, lógica difusa, algoritmos genéticos, algoritmos evolutivos y teoría del caos, entre otros (Bloschl y Sivapalan, 1995; Sivapalan y Kalma, 1995; Wigmosta y Prasad, 2005).

Wigmosta y Prasad (2005) plantean que las heterogeneidades de la escala puntual son las responsables de la mayor parte de la sensibilidad de la respuesta hidrológica; lo cual se ilustra con el siguiente ejemplo: “Sea  $E2$  la escala de celda, cuyo valor promedio de capacidad de infiltración ( $\Phi2$ ) es mayor a la intensidad promedio de la lluvia ( $P2$ ), teóricamente se esperaría que no habría escorrentía en esa celda; Sea  $E1$  la escala puntual con una extensión  $\Psi$  y  $N$  capacidades de infiltración ( $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N \in \Psi$ ), entonces un subconjunto  $\Omega \in \Psi$  con valores de capacidad de infiltración inferiores al valor de la intensidad de precipitación ( $P1$ ), teóricamente generaría escorrentía en la región  $\Omega$  perteneciente a la celda  $\Psi$ , lo cual implicaría además una tasa de erosión laminar”. El hecho de promediar el valor de inputs y parámetros y aplicar el modelo a una escala mayor (E2) genera una pérdida de descripción de la variabilidad, ignorar mecanismos importantes para la comprensión del sistema y reducir la utilidad del modelo.

El efecto de escala espacial en el ámbito de una cuenca no se reduce solo a incluir la variabilidad a nivel de sub-celda en la celda de un modelo hidrológico

distribuido; ya que dependiendo de la extensión de la cuenca se pueden presentar mecanismos dominantes diferentes: En cuencas pequeñas y medianas, los procesos de ladera dominan la forma y magnitud del hidrograma, el tiempo de residencia del agua en el sistema de canales es pequeño en comparación a la ladera y la red de drenaje cumple un papel secundario en la respuesta hidrológica; en cuencas grandes, el tiempo de residencia en el sistema de cauces es mayor y hay una fuerte influencia de la red de cauces en la forma y magnitud del hidrograma, sin embargo, los procesos de ladera continúan siendo importantes ya que determinan el volumen de agua que entra a la red de cauces (Wigmosta y Prasad, 2005).

### **2.2.3 ELEMENTOS ESTADÍSTICOS PARA EL ESCALAMIENTO EN HIDROLOGÍA**

La variabilidad natural puede ser caracterizada estadísticamente por probabilidades espaciales o temporales o sus momentos; la diferencia entre los métodos de escalamiento estadístico reside en la forma en que representan la variabilidad hidrológica (Bloschl, 2005).

La forma más sencilla de representar la variabilidad es a través de una variable aleatoria, y en situaciones más complejas como un proceso aleatorio (Gottschalk, 2005; Bloschl, 2005). El espacio paramétrico de un proceso aleatorio en el caso general incluye un infinito e ilimitado número de “puntos”, lo cual implica que no sea posible realizar una estimación directa de las funciones de distribución. Por tanto, de manera convencional se acepta una caracterización parcial del espacio paramétrico por una función de distribución unidimensional o por una caracterización de momentos de segundo orden.

En una caracterización por la función de distribución, solo se especifica la densidad de probabilidad de primer orden y se asume que el espacio paramétrico satisface la condición de independencia y distribución idéntica (iid). Gottschalk (2005) afirma que los puntos de referencia más importantes sobre la utilización de la teoría de probabilidad y los métodos estadísticos en Hidrología fueron los desarrollos de Kritskij y Menkel en 1946 quienes propusieron una transformación de la distribución gamma y Ven Te Chow en 1954 quien introdujo la distribución lognormal, la cual se ha empleado en numerosos estudios para generar campos aleatorios en el estudio diversos procesos hidrológicos y propiedades hidráulicas del suelo (Chen et al., 1994; Tuli et al., 2001; Zhu y Mohanty, 2002; Kim et al., 2005).

Una alternativa a las funciones de distribución (enfoque iid) es la caracterización a través de momentos; La situación más común es cuando se dispone solo de una realización del proceso aleatorio, por lo cual, se asume que el proceso aleatorio es ergódico, homogéneo e isótropo; usualmente, la homogeneidad de segundo orden es una condición suficiente, y la correlación y persistencia (memoria e inercia) descritas por la función de autocorrelación y la función de espectro corresponden a las características más importantes del proceso aleatorio (Gottschalk, 2005; Bloschl, 2005).

Una forma común de representar la variabilidad natural es a través de una función de la distancia de correlación, usualmente estimada a partir del semivariograma experimental. Éste es usualmente ajustado por una función analítica. Para un proceso estacionario el semivariograma tiene un comportamiento asintótico comúnmente de tipo exponencial, gaussiano o esférico (Bloschl, 1999; 2005).

Para un proceso no estacionario, al aumentar el vector separación se tiende a incrementar el semivariograma, la varianza tiende a infinito y la distancia de correlación tiende a infinito o no existe. En este caso el semivariograma estaría representado por una ley de potencia y probablemente tendría un comportamiento autosimilar (Bloschl, 1999).

Otra opción de representar la variabilidad es a través de la expansión “Karhunen-Loève”, que es una representación de series en términos de variables aleatorias y funciones determinísticas y ha sido utilizada comúnmente para representar la variabilidad de un proceso aleatorio espacio-temporal en escalas temporales grandes (semana, mes o año) (Gottschalk, 2005).

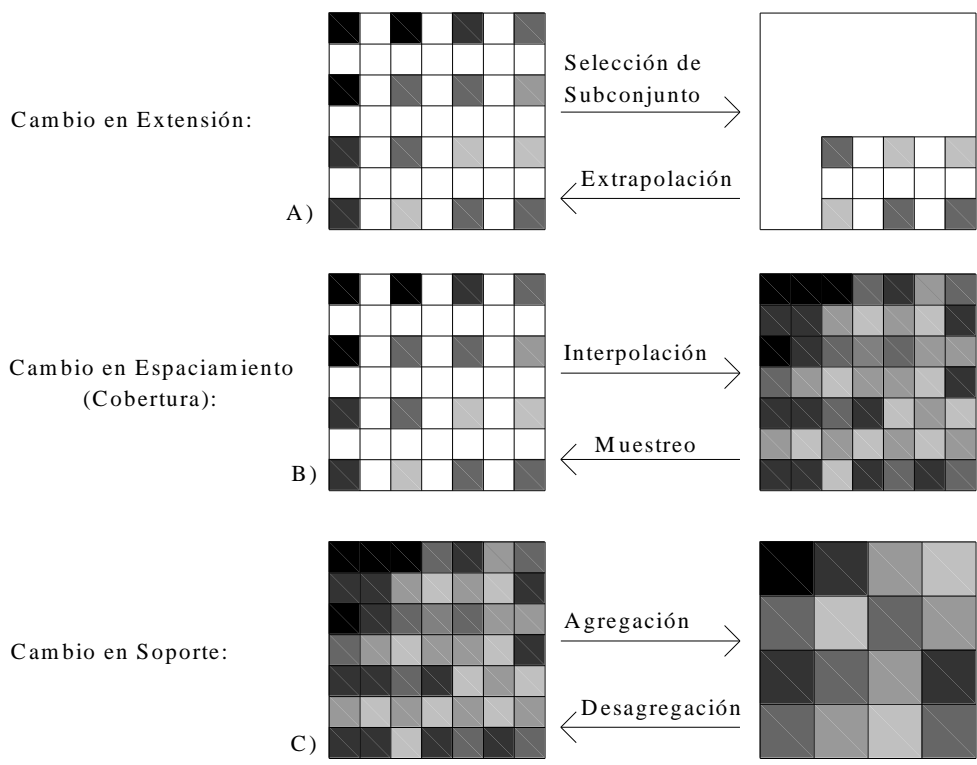
## **2.2.4 ENFOQUES DE ESCALAMIENTO EN LA MODELACIÓN HIDROLÓGICA**

En el procedimiento de transferencia de información entre escalas, se utilizan un conjunto de conceptualizaciones, leyes físicas, y herramientas matemáticas y estadísticas a diferentes niveles de complejidad, dependiendo de las hipótesis asumidas (Gupta et al., 1994; Gupta et al., 1996; Gray, 2000; Menabde y Sivapalan, 2001; Wigmosta y Prasad, 2005; Gupta, 2007). Por tanto, en un mismo caso de escalamiento se pueden emplear diferentes métodos de agregación y desagregación de manera integrada.

Algunos aportes científicos se han dirigido a estudiar el efecto de la variación de la resolución espacial en las variables de estado y de salida del sistema así como en sus propiedades geomorfométricas, a nivel de celda y/o área representativa (REA, REW, HRU) (Becker y Braun, 1999; Schmidt et al., 2000; García et al., 2002; Armstrong y Mathur, 2003; Shrestha et al., 2006; Dehotin y Braud, 2008); mientras que otros se han orientado a tratar de derivar a priori en diferentes escalas de agregación el valor de parámetros efectivos distribuidos a partir de valores físicos puntuales (Pedraza, 2007) o a partir de parámetros de modelos agregados calibrados (Viney y Sivapalan, 2004; Moreda et al., 2006).

Viney y Sivapalan (2004) propusieron un enfoque que llamaron desagregación-agregación. El cual involucra una desagregación de las variables de estado a escala de la cuenca a distribuciones de escala puntual. Consecuentemente se aplican modelos físicos conocidos a escala puntual con dichas distribuciones y luego se agregan las resultantes respuestas a escala puntual para producir una respuesta a escala de cuenca.

Dado que la escala tiene tres rasgos (“*Extensión*”, “*Espaciamiento*” y “*Soporte*”), el escalado (*Upscaling/Downscaling*) puede aplicarse con relación a cada una de estas características (Figura 2-2); si el objetivo es aumentar la *Extensión*, el escalamiento hace referencia a una extrapolación, si el objetivo es disminuir la *Extensión*, implica seleccionar un subconjunto del dominio sujeto a escalamiento. Si se pretende disminuir el *Espaciamiento* (aumento de cobertura) se utiliza una interpolación, si se pretende aumentar el *Espaciamiento* (disminución de la cobertura) se emplea el muestreo. Si se desea aumentar el *Soporte*, el escalamiento hace referencia a la agregación y si se desea disminuir el *Soporte*, el escalamiento hace referencia a la desagregación (Western y Bloschl, 1999; Gray, 2000; Wigmosta y Prasad, 2005).



**Figura 2-2.** Tipos de escalamiento relacionados con la *Extensión*, *Espaciamento* (*Cobertura*) y *Soporte* de la escala. Adaptado de Bierkens et al. (2000) y Bloschl. (2005).

Debido a que el objetivo principal de la presente investigación es analizar la variabilidad y heterogeneidad en procesos hidrológicos a nivel de la sub-celda y sus efectos de escala, a continuación se describen con mayor detalle los métodos de *Agregación* y *Desagregación*.

### 2.2.4.1 AGREGACIÓN

En el escalamiento por *Agregación* pueden diferenciarse de manera general tres métodos: promediar variables y/o parámetros; uso de parámetros efectivos; y promediar las ecuaciones del modelo (Bierkens et al., 2000; Wigmosta y Prasad, 2005):

**Promediar Variables y/o Parámetros.** En este procedimiento a su vez hay dos alternativas: promediar variables de entrada y/o parámetros si el modelo es lineal; o promediar variables de salida si el modelo es no-lineal y aplicable a todas las unidades de modelación y/o a todos los intervalos de tiempo de cálculo (Bierkens et al., 2000; Wigmosta y Prasad, 2005).

**Parámetros Efectivos.** La gran mayoría de modelos hidrológicos son altamente complejos y no-lineales; si las ecuaciones utilizadas para describir los procesos a escala puntual permanecen válidas, a escalas mayores se pueden utilizar parámetros efectivos para escalar el modelo. El parámetro efectivo transfiere los efectos de las heterogeneidades de la escala menor a la escala mayor (Wigmosta y Prasad, 2005).

A través de métodos determinísticos se pueden conocer los valores efectivos, condicionado a que se conozca completamente la variación en la escala de soporte menor. Los parámetros obtenidos por métodos inversos de vincular predicciones del modelo con observaciones, se consideran también determinísticos, pero dependen de la conceptualización del modelo y son específicos para éste (Wigmosta y Prasad, 2005).

Según Wigmosta y Prasad (2005), los métodos estocásticos se emplean cuando se conocen algunas observaciones del parámetro en la escala de soporte menor, y reconocen que no hay unicidad en el resultado de las interpolaciones para obtener una cobertura completa de valores estimados del parámetro a esa escala. Por lo cual, utilizan diferentes funciones igualmente probables para representar la variación del campo paramétrico (cada una representa una realización), la familia de estas funciones se denomina función estocástica, de la cual se calcula una distribución de probabilidad asociada a las realizaciones, que expresa la incertidumbre asociada a la estimación de la variación del parámetro. En cada realización se hace un procedimiento de agregación para obtener un parámetro efectivo y luego se estima su distribución de probabilidad, que expresa la incertidumbre en la estimación del parámetro efectivo (Bierkens et al., 2000; Wigmosta y Prasad, 2005).

Wignosta y Prasad (2005) afirman que los valores agregados en cada realización pueden ser empleados para generar outputs del modelo con los cuales se estima su distribución de probabilidad para expresar la incetidumbre asociada a la(s) variable(s) de salida del modelo y/o variables de estado.

**Promediar las Ecuaciones del Modelo.** Este método de agregación consiste en escalar el modelo desde una escala de soporte menor (*E1*) a una escala de soporte mayor (*E2*); el procedimiento se desarrolla analíticamente, promediando las ecuaciones espacial o temporalmente. El modelo agregado a la escala “E2”, deberá calcular el valor de la(s) variable(s) de salida con valores de parámetros y/o inputs soportados a esa escala (*E2*), o con valores de parámetros y/o inputs soportados a la escala menor (*E1*) (Bierkens et al., 2000),(Wigmosta y Prasad, 2005).



Según Bierkens et al. (2000), el ejemplo más conocido de este enfoque es la derivación de la ley de Darcy a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Con relación al escalamiento de modelos de infiltración, Wigmosta y Prasad (2005) afirman que ha habido diversas investigaciones pero sus soluciones no son únicas y representan una aproximación a la tasa de infiltración real.

Los modelos resultantes pueden ser: *Determinísticos* si la variación espacial o temporal es descrita por una única función determinística (*promediación en volumen o temporal*); *Estocásticos* si la variación espacial o temporal se representa a través de una función estocástica, el enfoque estocástico es conocido como “*promediación en conjunto (ensemble averaging en lengua inglesa)*”, ya que trata de encontrar una ecuación diferencial que describa la media de los valores aleatorio de la(s) variable(s) de salida (Bierkens et al., 2000; Haltas, 2006).

#### 2.2.4.2 DESAGREGACIÓN

La desagregación consiste en representar la variación de una propiedad a la escala de soporte menor (*E1*) a partir de algunas características de la propiedad (como media, varianza, función de distribución, etc.) dadas a una escala de soporte mayor (*E2*).

Los métodos de desagregación pueden clasificarse de acuerdo al tipo de problema: *Determinístico*, *Estocástico condicional* y *Estocástico no condicional*.

**Problema Determinístico.** En el problema determinístico se asume que se conoce exactamente el promedio de la propiedad a la escala de soporte mayor “*E2*”, y el objetivo es encontrar una función determinística que describa la variación espacial o temporal en la escala de soporte menor “*E1*”. Dicha función puede ser empírica, con soporte en leyes físicas y/o con uso de información auxiliar (Bierkens et al., 2000).

**Problema Estocástico Condicional.** Se asume que se conoce exactamente el promedio de la propiedad a la escala de soporte mayor “*E2*”, y se busca un conjunto de funciones igualmente probables que describan la variación espacial o temporal de la propiedad a la escala de soporte menor “*E1*” condicionada a que el promedio de cada función individual sea igual al promedio conocido de la propiedad (Bierkens et al., 2000; Bloschl, 2005).

**Problema Estocástico No Condicional.** Se asume que no se conoce exactamente el promedio de la propiedad a la escala de soporte mayor “*E2*” y se conoce su función de distribución de probabilidad. El propósito es encontrar un conjunto de funciones igualmente probables que describan la variación espacial o temporal a la escala de soporte menor “*E1*”, tal que la función de distribución de probabilidad de los promedios de dicho grupo de funciones sea estadísticamente equivalente a la función de distribución de probabilidad del promedio conocida. (Bierkens et al., 2000).

## 2.3 DISCUSIÓN

Los efectos de escala surgen a causa de la naturaleza heterogénea de las características medioambientales presentes en los sistemas hidrológicos y a la fuerte variabilidad asociada a los procesos que allí ocurren sobre un amplio rango de escalas espacio-temporales; la no-linealidad presente en dichos procesos se constituye en un factor que hace aún más complejo el desarrollo de estrategias de escalamiento. Además, debido a restricciones prácticas, existen disparidades entre el soporte de las escalas de proceso, observación y modelación. La convolución de todos estos factores hace que los problemas de escala en Hidrología continúen siendo un gran desafío.

Los aportes científicos brevemente descritos en los apartados anteriores con relación a los efectos de escala y la transferencia de información entre escalas, constituyen esfuerzos significativos y muy útiles para mejorar el entendimiento del problema y abordarlo de una manera adecuada. Sin embargo, aún permanece abierto el problema fundamental de la escala en Hidrología: postular leyes generales (si existen) para el escalado de procesos y semejanza hidrológica. Para abordar esta ambiciosa pretensión, se requiere enfocar más los esfuerzos en buscar un entendimiento de los procesos hidrológicos a diferentes escalas, que en tratar de calibrar un caso particular.

Es necesario identificar los procesos dominantes que controlan la respuesta hidrológica en diferentes ambientes y a diferentes escalas y luego desarrollar modelos basados en esos procesos dominantes; por tanto, es fundamental la conceptualización en diferentes escalas (Bloschl, 2001). La anterior afirmación es consecuente con la teoría general de sistemas (Bertalanffy, 1976), la cual afirma que en la medida en que un sistema es más complejo, surgen propiedades superiores útiles para explicarlo, lo que implica que: “*el todo no es la simple suma de las partes*”; es decir, las propiedades relevantes que describen dinámicamente a un volumen elemental representativo (REV) de agua no equivale a la suma de las propiedades que describen individualmente a cada molécula de agua.

Asumiendo la cuenca hidrográfica como un sistema complejo con algún grado de organización (Sivapalan, 2003; Tetzlaff et al., 2008), resulta importante identificar y entender patrones de interacción entre clima, suelo, vegetación y topografía y descifrar su orden subyacente, simetría o similaridad en un amplio rango de escalas; para lo cual es fundamental buscar una comprensión de la evolución de la climatología, geología, geomorfología, ecología y su relación con el comportamiento hidrológico en la cuenca, lo cual sugiere un gran desafío para la Ciencia Hidrológica en particular y para las Ciencias de la Tierra en general.

Una vez identificados esos procesos dominantes desde una perspectiva holística, se podrá avanzar hacia el estudio de su parametrización y la deducción de un grupo de ecuaciones de balance, dependientes de la escala con consistencia, y expresables directamente en la escala de subcuenca para masa, momento y energía (Sivapalan, 2003).

En el caso de los modelos hidrológicos distribuidos, una de sus principales fuentes de incertidumbre es el efecto de la heterogeneidad a nivel de sub-celda. En la mayoría de las aplicaciones prácticas dicho efecto se trata con el uso de parámetros efectivos y se asume que los parámetros y los procesos son uniformes dentro de cada celda y que las ecuaciones puntuales son aplicables en el soporte de la celda.

De acuerdo con Vélez et al. (2009), al introducir parámetros efectivos en el modelo se aumenta la incertidumbre debido a que no tienen significado físico y son no estacionarios. Desde un punto de vista práctico, los parámetros efectivos se estiman con calibraciones, las cuales se realizan para una escala espacial y temporal particular; este enfoque ha dado resultados aceptables para estimar caudales de descarga pero sus validaciones no se realizan adecuadamente en términos de “contrastar el comportamiento de las variables de estado”, lo cual sumado a la sobre-parametrización hace que múltiples respuestas satisfagan la función objetivo en un caso concreto, y da lugar a que sea aplicable el concepto de equifinalidad (Bloschl, 1999; Beven, 2006).

Con el fin de no renunciar a buscar una explicación del sistema hidrológico bajo el enfoque distribuido y evitar conformarse con hallar “predicciones aceptables” e intentar mejorar la comprensión de su comportamiento, se requiere dirigir esfuerzos para intentar dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿cómo puede ser aplicado un modelo con parámetros efectivos dependientes de la escala sin calibración?, ¿existe(n) una(s) ley(es) de escalado para obtener parámetros efectivos válidos a escala de celda a partir de la escala puntual?, si existe(n) ¿cuál es su expresión matemática?, ¿cuál es la mejor manera de preservar información de procesos a nivel puntual al hacer predicciones cambiando escalas temporales y espaciales?. La resolución de estas preguntas contribuiría de manera importante en el desarrollo del paradigma de la modelación distribuida; particularmente tendría una aplicación directa en la predicción hidrológica en cuencas no aforadas o pobremente aforadas (PUB) (Beven y Feyen, 2002).

Dado que los efectos de escala espacial son una fuente importante de incertidumbre en los modelos hidrológicos distribuidos, una de las líneas de avance en la Ciencia Hidrológica es buscar relaciones entre escalas, bien sea derivando ecuaciones a escala de celda ( $E2$ ) a partir de ecuaciones a escala puntual o microescala ( $E1$ ), relacionar los parámetros y/o las variables a través de las escalas bajo la hipótesis de que el modelo es aplicable tanto en  $E1$  como en  $E2$  y/o encontrar auto-similaridad entre escalas.



# 3. METODOLOGÍA

## 3.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La infiltración puede conceptualizarse como un proceso a escala puntual o a microescala con un soporte de 0.002 a 10 m<sup>2</sup> con parámetros observables y medibles; pero cuando es considerada en áreas más grandes (escala de celda o ladera con soporte de 10 a 10<sup>4</sup> m<sup>2</sup>), debe razonarse como un proceso espacial con una interacción entre la escorrentía y la infiltración e influenciado por la heterogeneidad del medio (Karssenbergh, 2006; Gupta, 2007).

El propósito de la presente investigación es analizar los efectos de la heterogeneidad en la microescala (*E1*) sobre la modelación de la producción de escorrentía a escala de celda o macroescala (*E2*), asumiendo que el modelo hidrológico es válido a ambas escalas. Se intenta encontrar un patrón de escalado que relacione los parámetros físicos con los parámetros efectivos que en la práctica no son estacionarios, y de esta manera mejorar el conocimiento acerca de su efecto de escala y analizar qué implicaciones tiene en la incertidumbre de la estimación de parámetros efectivos.

Los objetivos del trabajo analizar los efectos de la heterogeneidad de parámetros en la microescala sobre los parámetros efectivos a escala de celda aplicando simulaciones estocásticas, indagar cómo la incertidumbre de los parámetros en la microescala afecta a la incertidumbre de los parámetros efectivos a escala de celda, investigar el efecto del tamaño de celda y la escala integral sobre la incertidumbre en la estimación de los parámetros efectivos y proponer un modelo matemático que relacione los parámetros físicos con los parámetros efectivos.

Se estudia el efecto del tamaño de la celda, para estimar qué variabilidad debe ser representada de manera explícita y qué variabilidad debe ser representada de manera agregada por el modelo. Bloschl y Sivapalan (1995) mostraron que el valor de REA probablemente no se pueda determinar de manera universal, y sugieren que su tamaño depende de los procesos que sean representados, y de las condiciones biogeofísicas del ámbito a ser modelado. Por lo cual el tamaño ideal del elemento de modelación depende de las conceptualizaciones del modelo que se utilice y es particular para cada modelo.

Para abordar este trabajo, se empleó la conceptualización de la producción de escorrentía del modelo hidrológico conceptual y distribuido TETIS, desarrollado por el Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente de la Universidad Politécnica de Valencia, el cual ha sido probado en numerosos estudios y aplicaciones en diferentes climas y regiones del mundo con resultados

satisfactorios en España, Italia, Francia, y Colombia (Francés et al., 2007; Vélez et al., 2007; Vélez y Francés, 2008; Vélez et al., 2009).

## 3.2 DESCRIPCIÓN GENERAL

Se emplearon simulaciones de Monte Carlo, se aplicó la técnica de muestreo hipercubo latino y un modelo de dependencia espacial exponencial para representar la heterogeneidad de los parámetros a nivel de microescala con un soporte de  $2 \times 2m^2$ . Se generaron 500 realizaciones de cada campo de parámetros ( $h, k$ ) para celdas con un tamaño de  $10 \times 10m^2$  y  $30 \times 30m^2$ , y 2500 realizaciones de cada campo de parámetros para celdas con un tamaño de  $90 \times 90m^2$ .

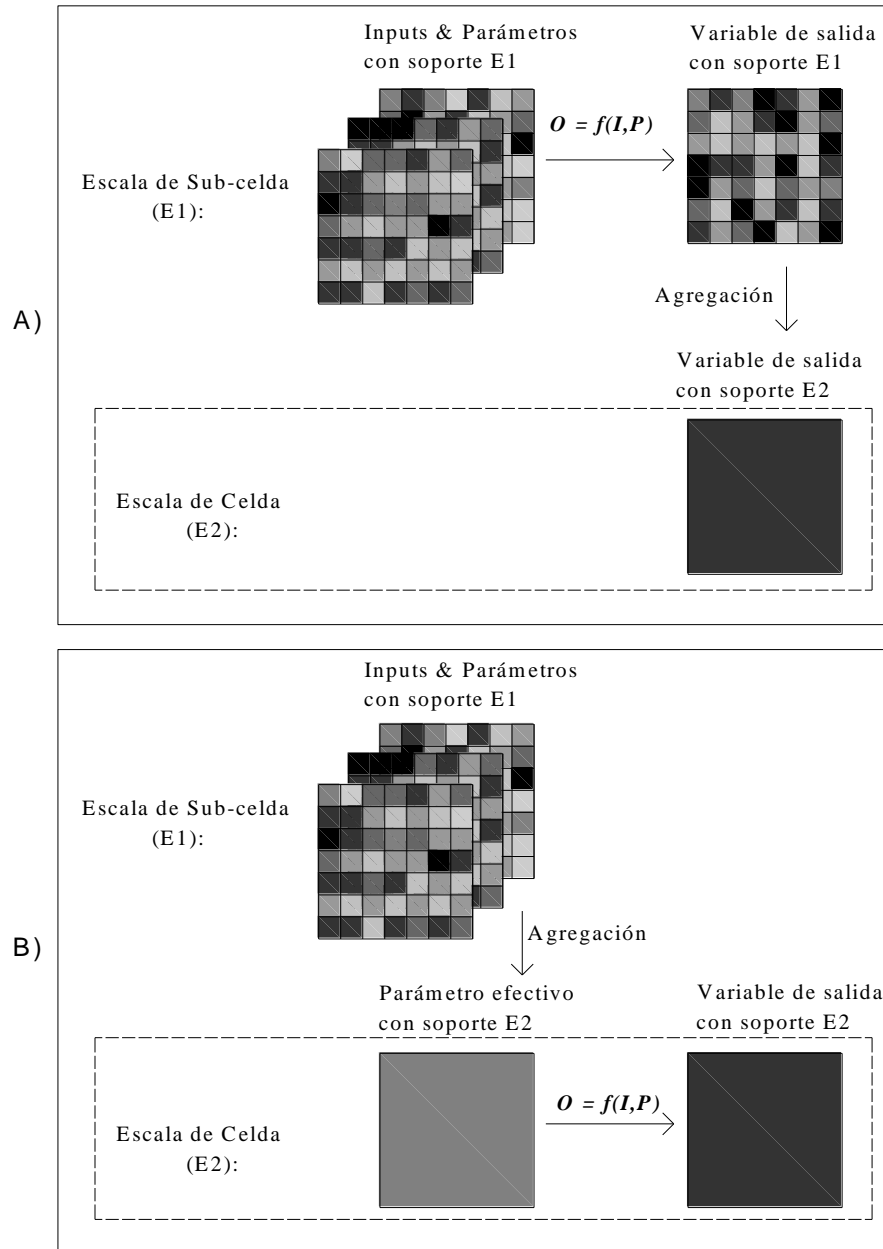
Con el ánimo de cuantificar diferencias entre los valores de las variables hidrológicas simuladas asumiendo independencia espacial y asumiendo dependencia espacial, se generaron dos tipos de campos de parámetros: en un primer tipo se aplicaron simulaciones con la distribución log-normal aceptando iid, lo cual implica una longitud de correlación igual a cero; y en un segundo tipo se tuvo en cuenta la correlación espacial entre las variables aleatorias para 18 longitudes de correlación diferentes. Los resultados se presentan en los apartados 4.1 y 4.2 respectivamente, y en la sección 5.3.3 se estudia cómo influye la longitud de correlación (escala integral) en la incertidumbre del parámetro efectivo.

La precipitación se asumió espacialmente constante en cada realización dado que para los tamaños de celda utilizados esta hipótesis es aplicable; sin embargo, al restar las abstracciones, la precipitación toma un comportamiento espacialmente variable debido a la variabilidad espacial de las abstracciones (en adelante “*excedente de precipitación*” denotado por  $x_2$ ).

Se empleó una técnica estocástica de escalado con la resolución del problema inverso a nivel de microescala ( $E1$ ) y una agregación de las variables de salida para calcular el valor de los parámetros efectivos. Su principal limitación es que requiere importantes recursos computacionales que la hace inaplicable a efectos prácticos en la modelación distribuida. Por tanto se desarrolló un modelo determinístico de agregación empleando relaciones entre la estructura estadística de los campos de parámetros y los parámetros efectivos para obtener una relación entre parámetros a diferentes escalas de agregación (**Figura 3-1**).

En la técnica estocástica de escalado, se aplicó el modelo hidrológico a escala  $E1$  y se obtuvieron las variables de salida con soporte  $E1$ , luego éstas se agregaron para obtener el valor de cada variable de salida con soporte  $E2$  (escala de celda o macroescala); se aplicó una agregación lineal de las variables de salida ya que las variables de salida son volúmenes a los cuales es aplicable el principio de conservación de la masa (**Figura 3-1 A**). Finalmente los parámetros efectivos se calcularon a través de simulación inversa.

En la técnica determinística de escalado se calculan parámetros efectivos para reproducir el valor promedio de la variable de salida de las realizaciones y se propone una relación de escalado entre los estadísticos de los campos de parámetros con el valor del parámetro efectivo (Figura 3-1 B).



**Figura 3-1.** A) Método Estocástico de Agregación (esquema para una realización). B) Método Determinístico de Agregación. (I = inputs, P = parámetros, O = outputs).

A continuación se presenta una descripción detallada del modelo conceptual de producción de escorrentía, las condiciones iniciales y de contorno, las hipótesis asumidas y el procedimiento de los experimentos numéricos.

### 3.3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO HIDROLÓGICO CONCEPTUAL DE PRODUCCIÓN DE ESCORRENTÍA

La producción de escorrentía se representa en el modelo TETIS mediante esquemas conceptuales simples adaptados a la escala de celda con parámetros efectivos y a intervalos de tiempo característicos en la modelación de eventos (10 – 60 minutos). Según Vélez (2001), la producción de escorrentía se basa en la realización de un balance hídrico en cada celda, asumiendo que el agua se distribuye en cinco tanques conceptuales de almacenamiento y conectados entre sí, para una descripción completa del modelo se remite al lector a Vélez (2001). El análisis de escalabilidad se desarrolló para los tanques de almacenamiento estático y almacenamiento superficial (T1 y T2 respectivamente) que representan el flujo a través de la zona no saturada en TETIS.

De acuerdo con Vélez (2001), el flujo entre los tanques es función del agua almacenada en ellos, por lo cual las variables de estado son los volúmenes almacenados en cada tanque. La función que relaciona el flujo con las variables de estado depende de la conceptualización, del tipo de tanque, de las características morfológicas y de los parámetros hidrológicos de la celda.

#### 3.3.1 ALMACENAMIENTO ESTÁTICO Y PÉRDIDAS POR EVAPOTRANSPIRACIÓN

Este almacenamiento tiene en cuenta la interceptación, la detención de agua en charcos y el agua que se retiene en el suelo por fuerzas capilares; además influye la salida de agua por evapotranspiración en su variación (Vélez, 2001).

De acuerdo con la conceptualización del modelo (Vélez, 2001): la precipitación ( $X_1$ ) entra al conducto distribuidor del que se deriva una cantidad  $D_1$  para el almacenamiento estático; la capacidad máxima de almacenamiento estático se define como la capacidad de almacenamiento de agua útil en el suelo más la capacidad de la cobertura de la superficie para almacenar agua (Figura 3-2).

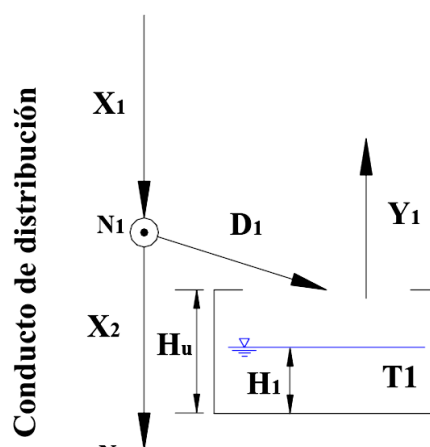


Figura 3-2. Esquema del almacenamiento Estático. Tomado de (Vélez, 2001)



La cantidad de agua que se deriva del primer nodo del conducto distribuidor ( $N_1$ ) y que no ingresa al almacenamiento estático se denomina en TETIS “excedente” y se denota con  $X_2$ , depende del contenido de humedad del suelo (cantidad de agua almacenada en el tanque  $H_1$ ), de la capacidad de almacenamiento estático ( $h$ ) y de la cantidad de precipitación ( $X_1$ ). En el modelo TETIS se aplica la siguiente expresión para representar este proceso (Vélez, 2001):

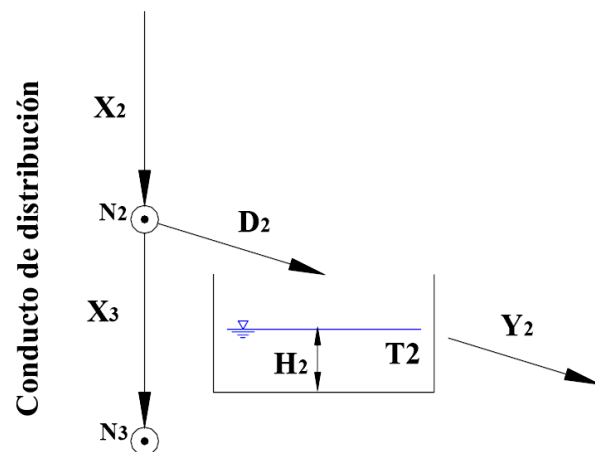
$$X_2 = \text{Max}[0; X_1 - h + H_1] \quad [3-1]$$

La evapotranspiración ( $Y_1$ ) se incluye de manera simple, como una función del volumen de agua disponible ( $H_1$ ), la evapotranspiración potencial ( $ETP$ ) y el índice de cobertura vegetal ( $\lambda$ ) (Vélez, 2001):

$$Y_1 = \text{Min}[ETP * \lambda; H_1] \quad [3-2]$$

### 3.3.2 ALMACENAMIENTO SUPERFICIAL Y ESCORRENTÍA DIRECTA

De acuerdo Vélez (2001), el segundo tanque ( $T_2$ ) representa el agua que se encuentra en la superficie y es susceptible de moverse superficialmente por la ladera o de infiltrarse (Vélez, 2001). Dado que en  $T_1$  se ha derivado una cantidad de agua para el almacenamiento estático en el suelo, entonces la capacidad de infiltración se puede aproximar a la conductividad hidráulica saturada del estrato superior del suelo ( $k$ ). La infiltración gravitacional ( $X_3$ ) se define por la siguiente expresión para un intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ):



**Figura 3-3.** Esquema de almacenamiento sobre la superficie de la ladera cuando se presenta escorrentía superficial. Tomado de (Vélez, 2001)

$$X_3 = \text{Min}[X_2; \Delta t * k] \quad [3-3]$$

El flujo superficial ( $Y_2$ ) se representa asumiendo una velocidad estacionaria con un modelo de depósito lineal deducido a partir de la ecuación de continuidad (Vélez, 2001):

$$Y_2 = \left(1 - \frac{\Delta x}{u * \Delta t + \Delta x}\right) * H_2 \quad [3-4]$$

Los parámetros  $h, \lambda, k, u$  expresan numéricamente las características más importantes de la cuenca; sin embargo, debido a que existen errores en las variables de entrada, errores propios del modelo y errores derivados de los efectos de escala, en TETIS se utilizan factores correctores ( $FC_s$ ) para estimar los valores de los parámetros efectivos (Vélez, 2001; Francés y Vélez, 2008).

## 3.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

### 3.4.1 PROCEDIMIENTO PARA LA GENERACIÓN DE CAMPOS DE PARÁMETROS

Se utilizó la técnica de muestreo estratificado hipercubo latino (LHS) para reducir el número de realizaciones necesarias en las simulaciones de Monte Carlo y conseguir un cálculo razonablemente preciso de la función de distribución muestreada. El procedimiento empleado fue el siguiente:

1. La función de distribución uniforme acumulada fue segmentada en  $p$  intervalos, donde  $p$  representa el número de realizaciones para cada variable aleatoria; se generó un número aleatorio dentro de cada segmento para determinar los puntos de muestreo.
2. Con los números aleatorios generados en el paso anterior, se aplicó el método de la transformada inversa a la distribución lognormal acumulada con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  para producir las  $p$  realizaciones de una variable aleatoria.
3. se determinó la bondad de ajuste empleando los test Chi cuadrado y Kolmogorov-Smirnov con un 5% de significancia.
4. Los pasos 1, 2 y 3 se aplicaron para las  $q$  variables aleatorias, que representan el número de unidades de modelación a nivel de sub-celda. Con la anterior información se construyó la matriz  $\underline{\underline{F}}$  de dimensión  $(p, q)$ , caracterizada por no tener dependencia espacial.

Para tener en cuenta la dependencia espacial se aplicaron los siguientes pasos adicionales:

5. Se calculó la matriz de correlación  $\underline{\underline{R}}$  de las  $q$  variables aleatorias generadas en cada campo aleatorio, y se calculó la matriz de correlación  $\underline{\underline{R^*}}$  del modelo de dependencia espacial asumido ( $\underline{\underline{R^*}}$  corresponde al semivariograma asumido para cada escala integral).
6. Se calculó la descomposición de Cholesky para  $\underline{\underline{R}}$  y  $\underline{\underline{R^*}}$  tal que  $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{U}} \times \underline{\underline{U}}'$ , y  $\underline{\underline{R^*}} = \underline{\underline{V}} \times \underline{\underline{V}}'$
7. Se calculó la matriz  $\underline{\underline{F^*}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{V}} \times \underline{\underline{U}}^{-1})'$ .

8. Para expresar el orden relativo, en cada vector columna de  $\underline{\underline{F}}^*$  se aplicó el siguiente procedimiento: a cada valor  $f_{p,q}$  se le asignó un entero positivo comenzando en “1” y de manera ascendente dependiendo de la magnitud del valor  $f_{p,q}$  evaluado; es decir, al valor  $f_{p,q}$  de menor magnitud se le asignó “1”, al valor  $f_{p,q}$  de magnitud siguiente se le asignó “2”, así hasta que al valor  $f_{p,q}$  de mayor magnitud se le asignó el valor “ $p$ ”.
9. A cada vector columna de  $\underline{\underline{F}}$  se le aplicó el procedimiento descrito en el punto anterior para expresar el orden relativo de cada columna.
10. Finalmente, cada columna de  $\underline{\underline{F}}$  fue reordenada de acuerdo al orden de la columna correspondiente en la matriz  $\underline{\underline{F}}^*$ , y de esa forma trasladar la estructura de correlación de  $\underline{\underline{F}}^*$  a  $\underline{\underline{F}}$ .

### 3.4.2 ESCALAS OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Se analizó la transferencia de información entre la microescala ( $E1$ ) con un soporte de  $(2 \times 2)m^2$  y la escala de celda ( $E2$ ) con soporte entre  $10^2$  a  $8.1 \times 10^3 m^2$  (Figura 3-4). Las unidades de modelación  $E1$  tienen una geometría cuadrada con longitud  $l$  ( $l = 2m$ ); En la escala de modelación  $E2$  se utilizaron varios tamaños de celda para indagar cómo influye el soporte de  $E2$  en la relación de los parámetros efectivos con los parámetros a nivel de detalle, se emplearon tres soportes diferentes: ( $L = 10m; L = 30m; L = 90m$ ). La escala de agregación temporal se fijó en diez minutos.

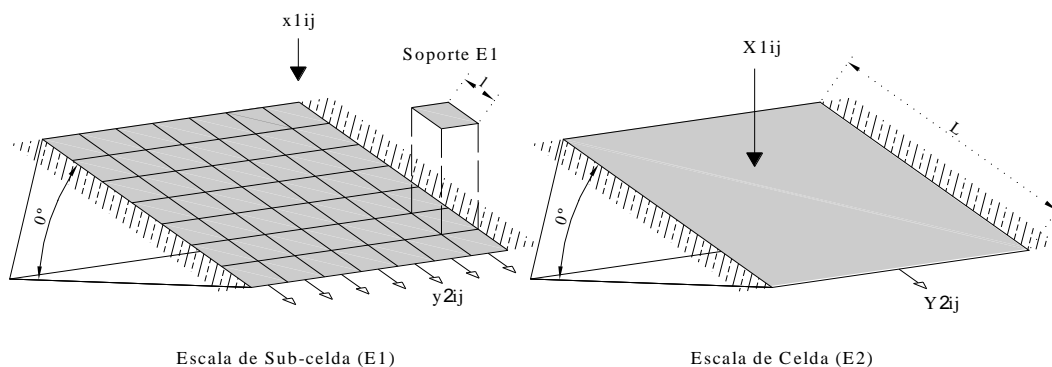


Figura 3-4. Representación esquemática del sistema y las escalas de modelación

### 3.4.3 HIPÓTESIS ASUMIDAS

**Con relación a los parámetros:** los parámetros están sujetos a incertidumbre debido a errores de medida y observación que permiten tratarlos como variables aleatorias, se asumió que siguen una función de distribución de probabilidad

lognormal con parámetros  $\mu$  ( $\mu$ ) y  $\sigma$  ( $\sigma$ ); la función aleatoria de los parámetros es estacionaria con relación a los momentos de primero y segundo orden. Los parámetros sujetos a análisis de escalamiento son  $k$  y  $h$ , por lo cual  $\lambda$  y  $u$  se consideran homogéneos espacialmente a escala  $E1$ .

**Con relación al modelo hidrológico:** el modelo hidrológico y conceptual de producción de esorrentía es aplicable tanto a escala  $E1$  como a escala  $E2$ .

**Con relación a la precipitación:** se asumió una tormenta teórica uniforme espacialmente, discretizada en 200 intervalos de tiempo de diez minutos con una magnitud monótonicamente creciente y un incremento de 2 mm en cada intervalo iniciando en 1mm. La utilización de esta precipitación teórica singular se justifica en que representa un amplio rango de valores, lo cual permite obtener una mejor distribución de las variables calculadas en el espacio de soluciones.

**Condiciones Iniciales y de Contorno:** Los experimentos numéricos se desarrollaron partiendo de un estado de humedad inicial seco, por lo cual los valores de las variables de estado ( $H_1$  y  $H_2$ ) en el instante de tiempo inicial se consideraron iguales a cero. Debido a que el modelo considera la interacción espacial del flujo superficial ( $Y_2$ ) entre unidades de modelación, dicha variable se ha considerado como una condición de contorno con un valor constante de 10 mm.

## 4. SIMULACIÓN ESTADÍSTICA DE PARÁMETROS A NIVEL DE SUB-CELDA

Con el propósito de cuantificar las diferencias en los resultados de las simulaciones con TETIS asumiendo independencia y dependencia espacial, se generaron dos familias de campos de parámetros. En la sección 4.1 se hace una presentación de las principales características estadísticas de los campos de parámetros  $h$  y  $k$  simulados con la técnica Hipercubo Latino (LHS) asumiendo independencia espacial. En la sección 4.2 se presentan los resultados de las simulaciones (LHS) en campos de parámetros  $h$  y  $k$  con dependencia espacial.

### 4.1 REPRESENTACIÓN POR DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD ASUMIENDO IID

Se realizaron 500 simulaciones de 24 campos de parámetros  $h$  y  $k$  bajo la hipótesis de independencia y distribución lognormal idéntica en cada realización. Se emplearon 8 combinaciones de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  sobre tres tipos de celda de diferente extensión: F1, F2, y F3, que representan tres tamaños diferentes de celda con un número de  $e^2$  sub-celdas subsumidas (Tabla 4-1).

Con base en los resultados de diversas aplicaciones del modelo TETIS se valoró el orden de magnitud de los estadísticos esperados para los campos de parámetros. Las medias presentadas en el Tabla 4-2 representan valores que ocurren con frecuencia en el medio natural y se han tomado como representativos para analizar el efecto de escala espacial; para incluir diferentes grados de variabilidad se emplearon cuatro valores diferentes de coeficiente de variación (Tabla 4-2).

Código del Campo	Soporte	Tamaño del campo generado [‘Extensión de la celda m <sup>2</sup> ’; ‘Número de Sub-celdas (e <sup>2</sup> )’]
F1	10x10m <sup>2</sup>	[100; 25]
F2	30x30m <sup>2</sup>	[900; 225]
F3	90x90m <sup>2</sup>	[8100; 2025]

**Tabla 4-1** Tamaño de las celdas analizadas y el número de sub-celdas subsumidas dentro de cada una.

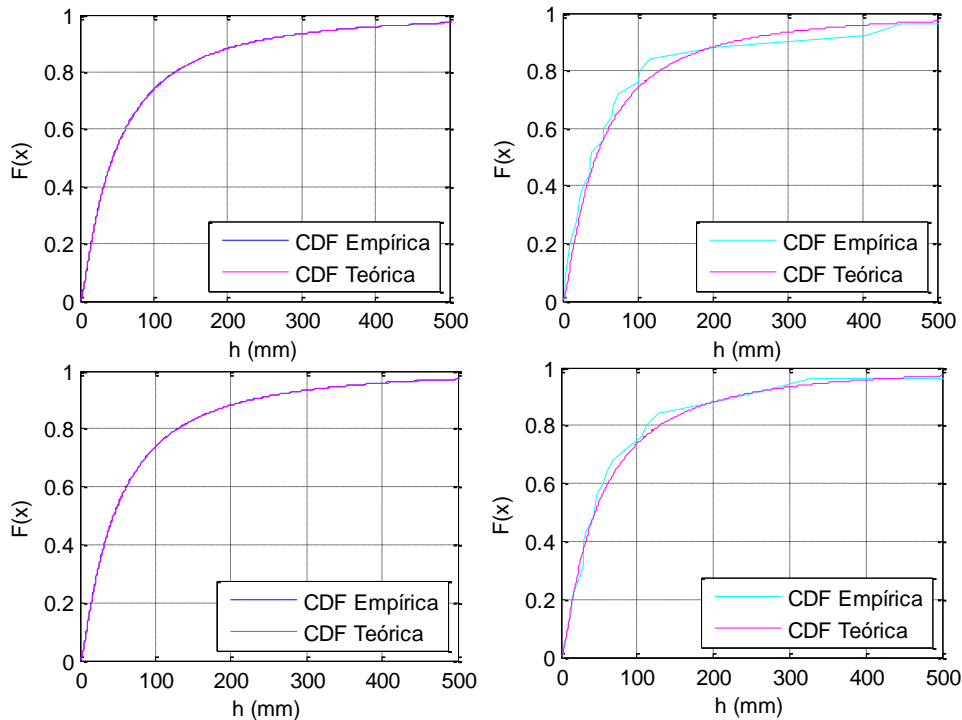
Media $h$ (mm)	CV $h$	Parámetros Lognormal		Media $k$ (mm/h)	CV $k$	Parámetros Lognormal		Campos generados
		$\mu$	$\sigma$			$\mu$	$\sigma$	
70	0.5	4.13	0.47	20	0.5	2.88	0.47	F1;F2;F3
	1	3.90	0.83		1	2.65	0.83	F1;F2;F3
	1.5	3.66	1.09		1.5	2.41	1.09	F1;F2;F3
	2	3.44	1.27		2	2.19	1.27	F1;F2;F3
100	0.5	4.49	0.47	60	0.5	3.98	0.47	F1;F2;F3
	1	4.26	0.83		1	3.75	0.83	F1;F2;F3
	1.5	4.02	1.09		1.5	3.51	1.09	F1;F2;F3
	2	3.80	1.27		2	3.29	1.27	F1;F2;F3

**Tabla 4-2.** Características esperadas de los campos de parámetros  $h$  y  $k$ .

### 4.1.1 ESTRUCTURA ESTADÍSTICA DE LOS CAMPOS GENERADOS

Al calcular 500 realizaciones de cada variable aleatoria, se observa que la función de densidad acumulada (CDF) de la muestra generada se ajusta de manera razonable a la función de densidad acumulada teórica de la distribución lognormal (Figura 4-1).

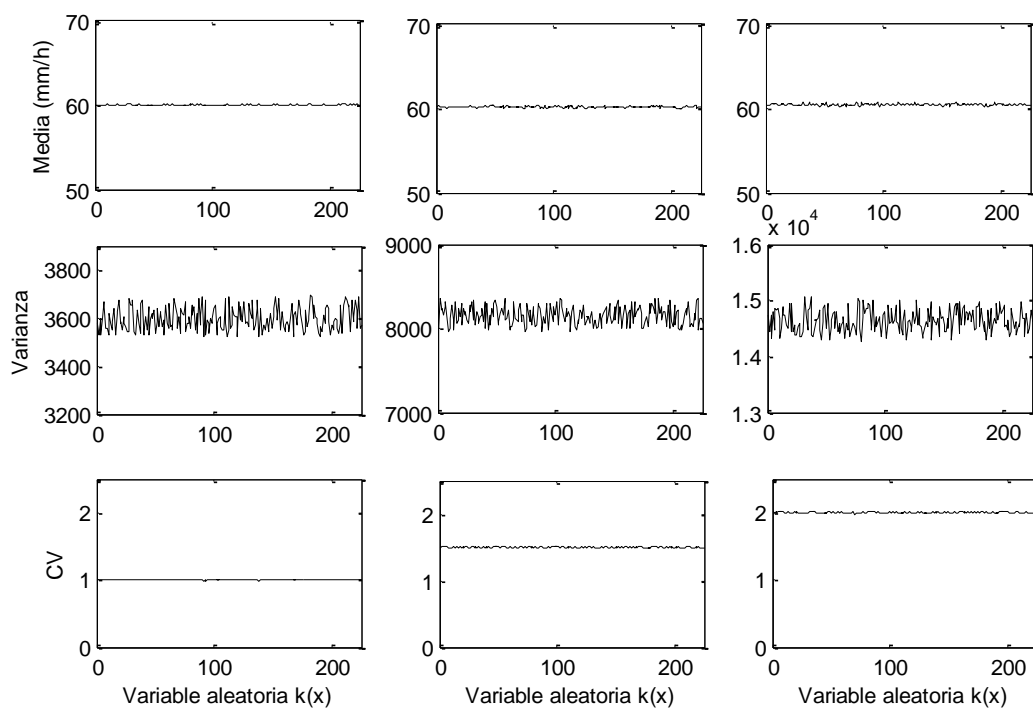
Los test de bondad de ajuste Chi Cuadrado y Kolmogorov-Smirnov realizados a cada una de las variables aleatorias normalizadas muestran que la distribución de probabilidad de los campos generados se ajusta a la distribución normal con un nivel de significancia del 5%.



**Figura 4-1** Comparación gráfica de la función de densidad acumulada teórica de la distribución lognormal para  $h$  ( $\mu = 3.8$  y  $\sigma = 1.2686$ ) y la función de densidad acumulada de muestras simuladas (se presentan cuatro casos al azar del conjunto de variables aleatorias simuladas).

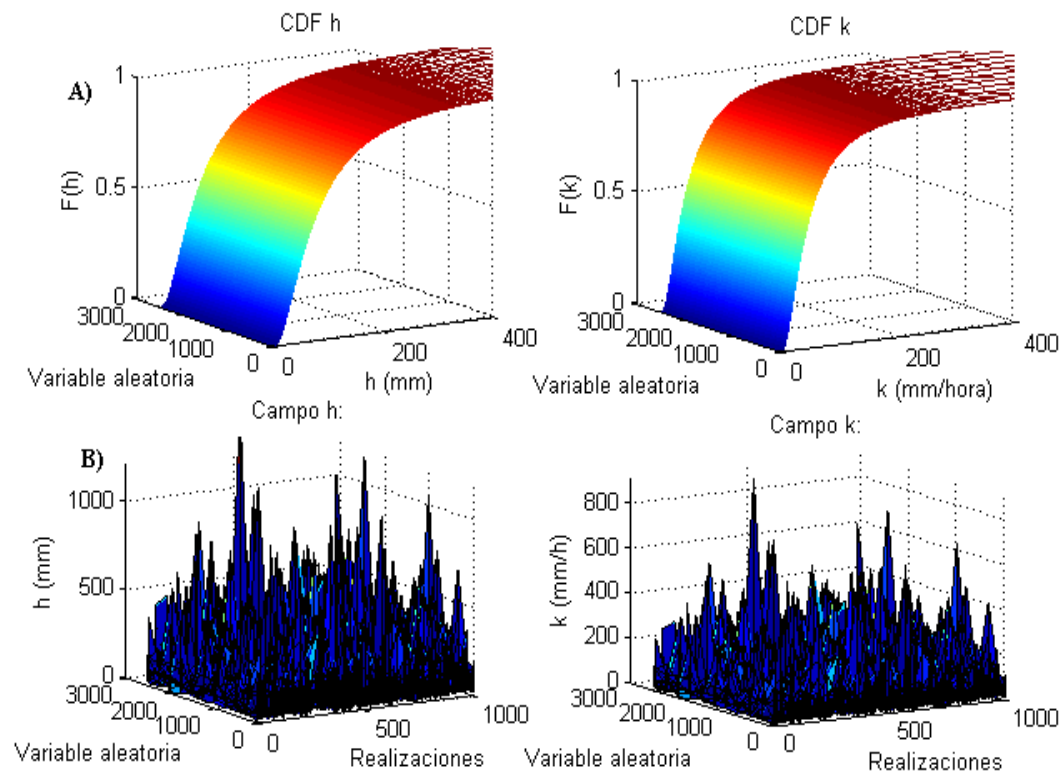
Las muestras generadas en cada campo aleatorio de parámetros se caracterizan por reproducir de manera aceptable los parámetros estadísticos con base a los cuales fueron generadas. Además, los estadísticos media y varianza presentan valores estacionarios en la dimensión espacial en cada campo generado, esta propiedad es fundamental para asumir la estacionariedad en sentido amplio.

A continuación en la **Figura 4-2** se presentan los valores de medias, varianzas y coeficientes de variación de algunos de los campos aleatorios de parámetros generados. Se observa que los estadísticos media y varianza de estos campos no describen una tendencia con relación a la dimensión espacial. De manera análoga al ejemplo presentado en la **Figura 4-2**, todos los campos de parámetros generados para diferentes casos de variabilidad cumplen la propiedad de ser estacionarios espacialmente.



**Figura 4-2** Vectores de medias, varianzas y CV para algunos de los campos aleatorios de parámetros generados por el método LHS.

Al realizar una inspección visual de las CDFs empíricas de las variables aleatorias ( $k$  y  $h$  para cada sub-celda) simuladas en uno de los campo de parámetros, se observa que todas siguen la distribución lognormal y no hay CDFs empíricas que sigan otra tendencia, lo cual indica que el algoritmo utilizado reproduce las características estadísticas deseadas (**Figura 4-3 A**). La técnica LHS ofrece buenos resultados de manera eficiente ya que con 500 realizaciones reproduce valores extremos de la variable aleatoria conservando los estadísticos media y varianza aún en casos de coeficientes de variación altos ( $CV = 2$ ) (**Figura 4-3 B**).



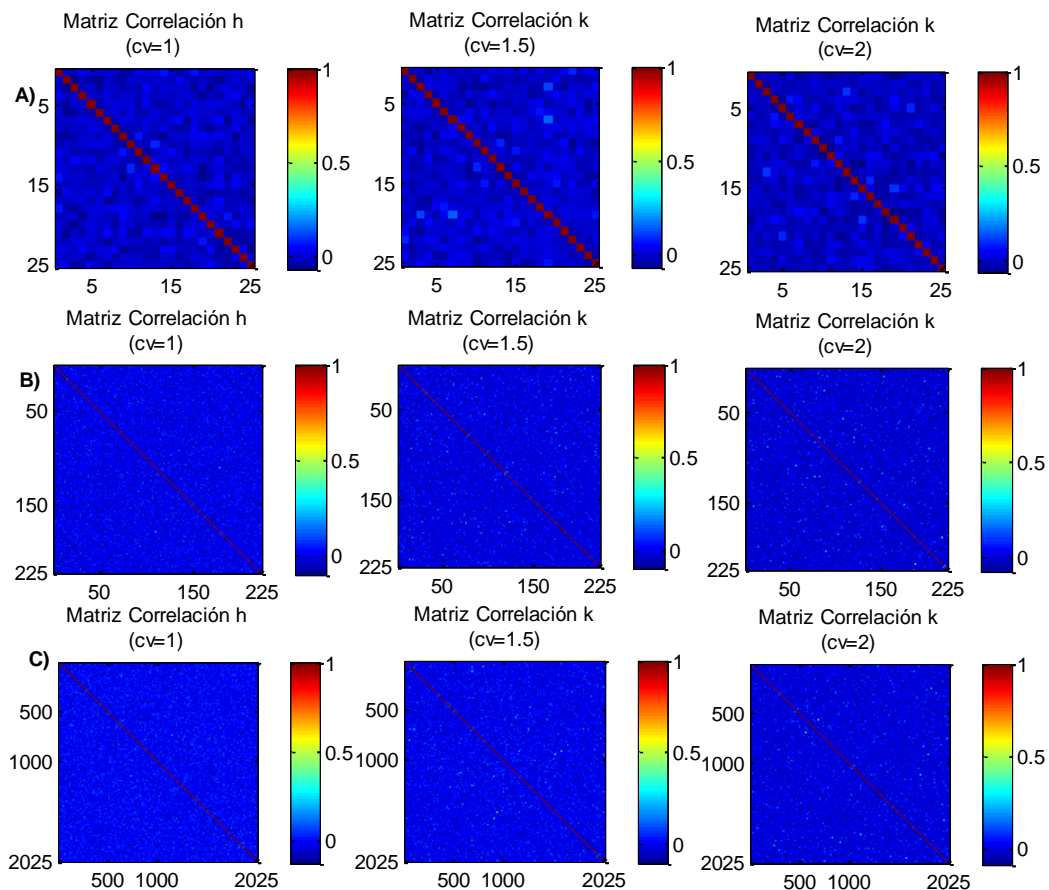
**Figura 4-3** A) CDF simulada para 2025 variables aleatorias de  $h$  y  $k$ . B) 1000 simulaciones realizadas para  $h$  y  $k$  en un campo de 2025 variables aleatorias, con parámetros  $(\mu = 4.26, \sigma = 0.83)$  y  $(\mu = 3.75, \sigma = 0.83)$ .

Los campos simulados no poseen dependencia espacial ya que cada una de las variables aleatorias se ha generado de manera independiente a los valores que toman las otras variables aleatorias en la misma realización; además, las matrices de correlación calculadas para cada campo de parámetros simulado constatan que los datos no están correlacionados ya que sus valores tienden a cero.

En la **Figura 4-4** se presentan los valores de algunas matrices de correlación. Se observa que solamente la correlación de cada variable aleatoria consigo misma presenta un valor alto ( $r = 1$ ), mientras que su relación con las otras variables aleatorias es prácticamente nula.

El hecho de que los datos no estén correlacionados no implica certeza de independencia entre las variables; sin embargo, en este caso se considera evidencia suficiente ya que al diseñar los experimentos numéricos no se estableció ningún tipo de relación entre las variables aleatorias.





**Figura 4-4.** A) Matriz de correlación de tres campos generados con 25 variables aleatorias. B) Matriz de correlación de tres campos generados con 225 variables aleatorias. C) Matriz de correlación de tres campos generados con 2025 variables aleatorias.

### 4.1.2 EFICIENCIA DE LA TÉCNICA LHS EN CONTRASTE CON EL MÉTODO MONTE CARLO CONVENCIONAL

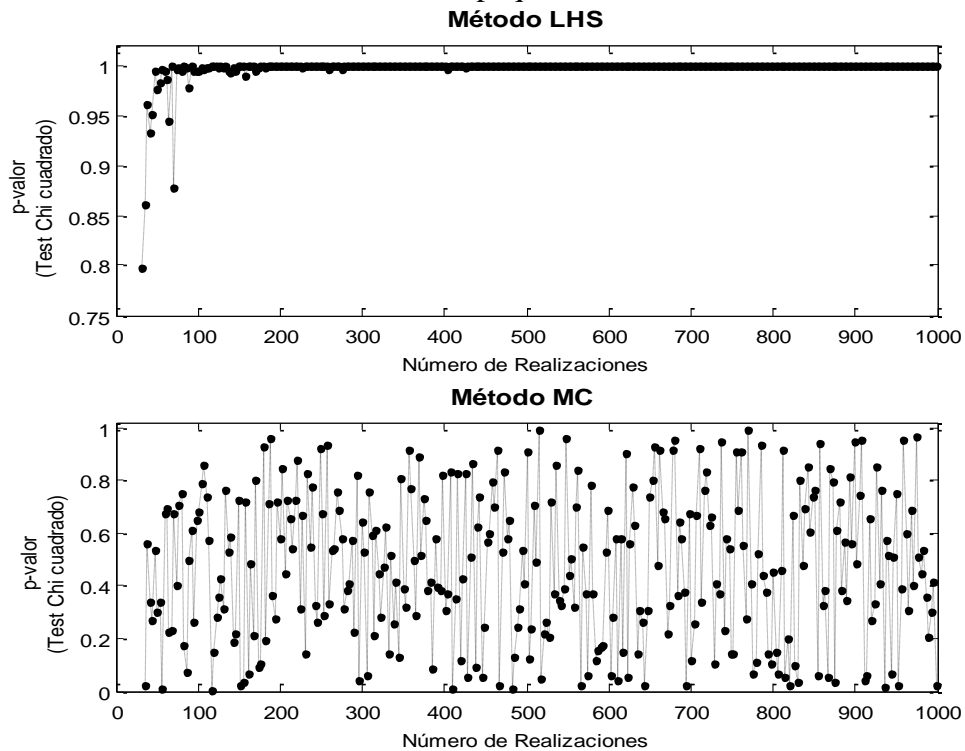
Se realizaron 323 conjuntos de simulaciones con diferente número de realizaciones aplicando el método Hipercubo Latino y el método de Monte Carlo convencional (MC) con el propósito de comparar la capacidad de estos métodos para reproducir la función de densidad teórica de la distribución Lognormal.

El criterio empleado para realizar la comparación entre estos métodos fue calcular el P-valor de la muestra simulada aplicando el test Chi cuadrado. De acuerdo con la **Figura 4-5**, es más probable que el método LHS genere muestras con un nivel de confianza alto (ej: mayor al 95%) con pocas realizaciones en comparación con el método MC.

De manera general, en la **Figura 4-5** se observa que hay una mayor tendencia a que el método MC genere muestras que no se ajusten a la pdf teórica ya que hay gran ocurrencia de valores con un nivel de confianza bajo a pesar del incremento en el número de realizaciones; en contraste, el método LHS proporciona de manera sistemática una mejora en el ajuste a medida que se aumenta el número de realizaciones; en la **Figura 4-5** se observa que a partir de 100 realizaciones el

método LHS genera muestras que se ajustan muy bien al valor teórico de la CDF mientras que el método MC exige más iteraciones para obtener valores aceptables.

El anterior análisis permite inferir que el método LHS requiere menos iteraciones que el método MC para producir una muestra con un nivel de confianza alto y que permita aceptar que la CDF de la muestra generada sea razonablemente similar a la CDF teórica del espacio probable de cada parámetro objeto de estudio; por tanto, es un método más eficiente que MC, especialmente si se simula con un número de realizaciones relativamente pequeño.



**Figura 4-5.** Comparación de la eficiencia del Método LHS y el método Monte Carlo típico en 323 casos con un número de realizaciones variable: de 32 a 1000 (en ambos casos se empleó solo una iteración).

## 4.2 REPRESENTACIÓN CON DEPENDENCIA ESPACIAL

En esta sección se analiza el caso de la generación de campos aleatorios de parámetros con un grado de dependencia espacial. La familia de variables aleatorias dependientes de su ubicación ( $x$ ) en el espacio euclidiano, se denominará en adelante campo aleatorio espacial ( $\omega$ ). Dado que las unidades de modelación a escala  $E1$  (sub-celdas) subsumidas dentro de la unidad de modelación a escala  $E2$  (celda) representan un espacio discretizado, los campos aleatorios espaciales tratados en el presente estudio son regularmente espaciados.

Cada uno de los campos aleatorios espaciales ( $\omega$ ) son considerados estacionarios en sentido amplio, por lo cual tienen momentos de segundo orden finitos, media estacionaria (independiente de la posición) y una covarianza que depende solo de la distancia entre las localizaciones de las variables aleatorias ( $d$ ); además, son isotrópicos al asumir que la covarianza solo depende de la magnitud de  $d$  y no de la dirección.

Los campos de parámetros correlacionados espacialmente se generaron con base en las muestras no correlacionadas descritas en la sección 4.1. Dichas muestras fueron reorganizadas para representar la función de dependencia espacial con base en un procedimiento fundamentado en la descomposición de Cholesky, el cual está descrito en la sección 3.4.1.

### 4.2.1 ESTIMADORES DE RELACIÓN ESPACIAL

Dadas dos localizaciones  $x$  y  $x + d$  de un campo aleatorio, la covarianza está definida por la siguiente expresión:

$$\text{cov}(x, x + d) = E[(z(x) - \mu_z(x)) \times (z(x + d) - \mu_z(x + d))] \quad [4-1]$$

Asumiendo que el fenómeno es estacionario en sentido amplio, y estimando la varianza de la variable regionalizada  $z(x)$  a través de la varianza muestral, se tiene que el correlograma muestral está definido por:

$$\rho(d) = \frac{\text{cov}(z(x + d), z(x))}{\sigma_{x+h} \times \sigma_x} = \frac{c(d)}{\sigma_x^2} = \frac{c(d)}{c(0)} \quad [4-2]$$

La varianza de la diferencia entre dos valores del campo aleatorio con separación  $d$  está representada por el variograma; el cual tiene la siguiente expresión:

$$2\gamma(d) = E[(z(x + d) - z(x))^2] \quad [4-3]$$

Bajo el supuesto de estacionariedad, cualquiera de las tres funciones de dependencia espacial expuestas puede ser usada en la determinación de la relación espacial en un campo aleatorio y son válidas las siguientes relaciones:

$$\gamma(d) = c(0) - c(d) \quad [4-4]$$

$$\rho(d) = 1 - \frac{\gamma(d)}{c(0)} \quad [4-5]$$

El modelo teórico de correlación espacial asumido para representar el grado de dependencia espacial corresponde a una estructura exponencial con longitud de correlación " $a$ ":

$$\rho(d) = \exp\left(\frac{-3d}{a}\right) \quad [4-6]$$

Se simularon campos aleatorios de parámetros para 18 longitudes de correlación diferentes (vector representado por la ecuación [4-7]) con el objetivo de analizar el efecto que tiene la escala integral en la incertidumbre de los parámetros efectivos.

$$a = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 150, 200, 300, 500, 1000, 5000, 10000m\} \quad [4-7]$$

Debido a que el procedimiento utilizado para generar los campos correlacionados incluyó la aplicación de la factorización de Cholesky, se requirió que la matriz de correlación de la muestra aleatoria inicial fuera definida positiva; esta situación implicó la utilización de un número de realizaciones superior al número de variables aleatorias del campo aleatorio. Por tanto, en los campos de parámetros simulados para celdas de un tamaño de  $90 \times 90m$  (2025 variables aleatorias) fue necesario incrementar el número de realizaciones a 2500 para obtener resultados satisfactorios en la correlación de cada campo simulado.

## 4.2.2 ESTRUCTURA ESTADÍSTICA DE LOS CAMPOS GENERADOS

Los campos de parámetros simulados con dependencia espacial cumplen la hipótesis de estacionariedad en sentido amplio ya que en la sección 4.1.1 se describió que las variables aleatorias tienen medias y varianzas estacionarias; y como se expresa en el modelo de dependencia espacial, sus covarianzas dependen solo de la distancia ( $d$ ).

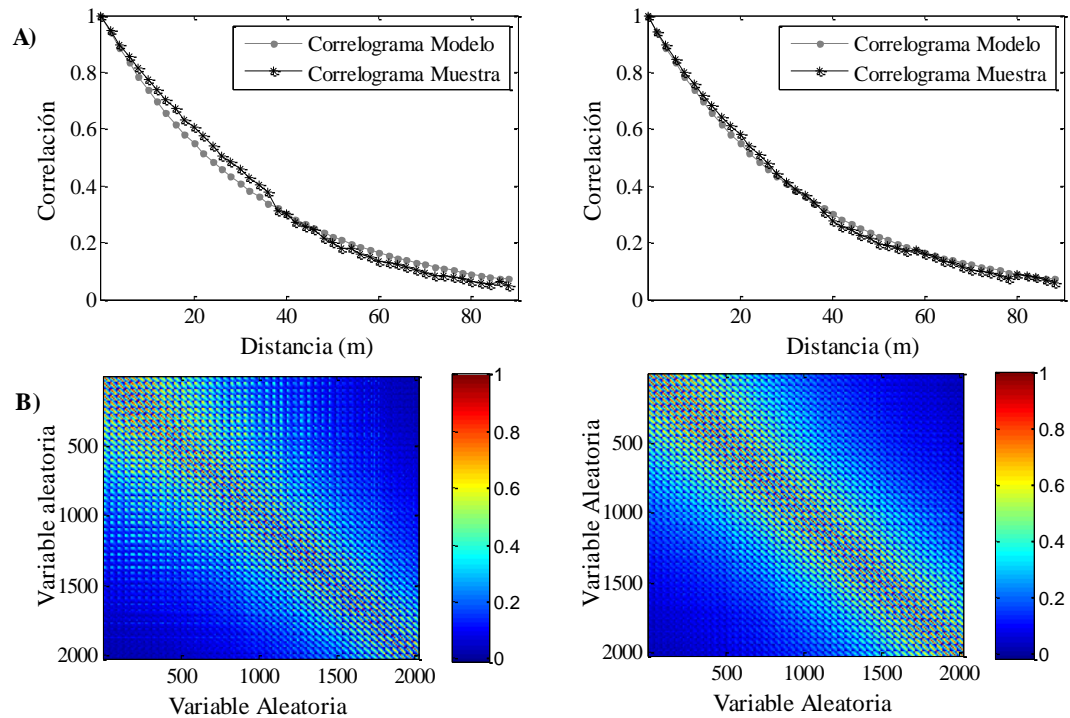
El uso de la descomposición de Cholesky para reproducir la estructura teórica de correlación espacial planteada en la sección 4.2.1 es aceptable, ya que permite encontrar en los elementos muestreados en los campos aleatorios una estructura de “organización” que coincide con el modelo de correlación espacial; en la **Figura 4-6 A**, se observa que la correlación calculada en la muestra luego de aplicar la descomposición de Cholesky reproduce la función de dependencia espacial.

Los procesos estocásticos simulados son estacionarios en sentido amplio; algunos de ellos cumplen la condición de ergodicidad en la estimación de la media, específicamente los que tienen menor grado de dependencia espacial y menor escala integral con relación al tamaño de celda. Una menor dependencia espacial hace que el valor del parámetro en una sub-celda dada no será tan previsible con base en los valores de otras subceldas y se estará proporcionando más información para estimar la media; a su vez, el error de estimación tenderá a cero y para valores altos en el vector separación ( $d$ ) la correlación tenderá a cero:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \rho(d) \rightarrow 0 \quad [4-8]$$

El hecho de que algunos de los proceso estocásticos generados no sean erogódicos, no implica limitaciones para el análisis de escalamiento estocástico, ya que se cuenta con un conjunto de 500 realizaciones para cada proceso estocástico en celdas de tamaño  $10 \times 10m^2$  y  $30 \times 30m^2$ , y 2500 realizaciones para

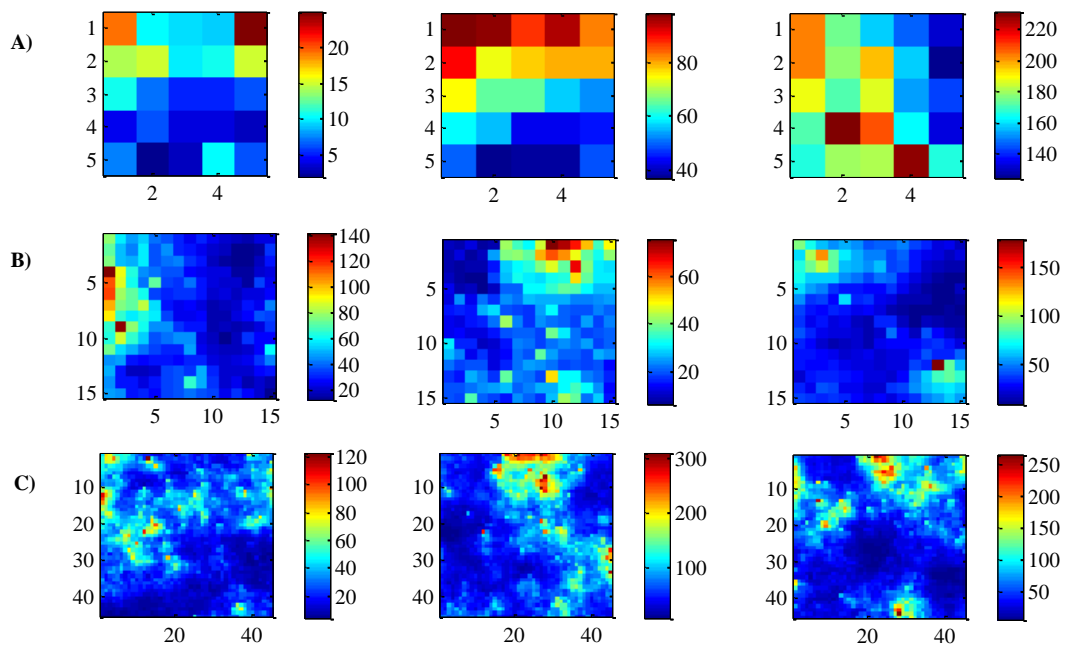
cada función estocástica en celdas de tamaño  $90 \times 90 m^2$ . Este número permite hacer una descripción adecuada sin tener que limitarse a la información contenida en una sola realización.



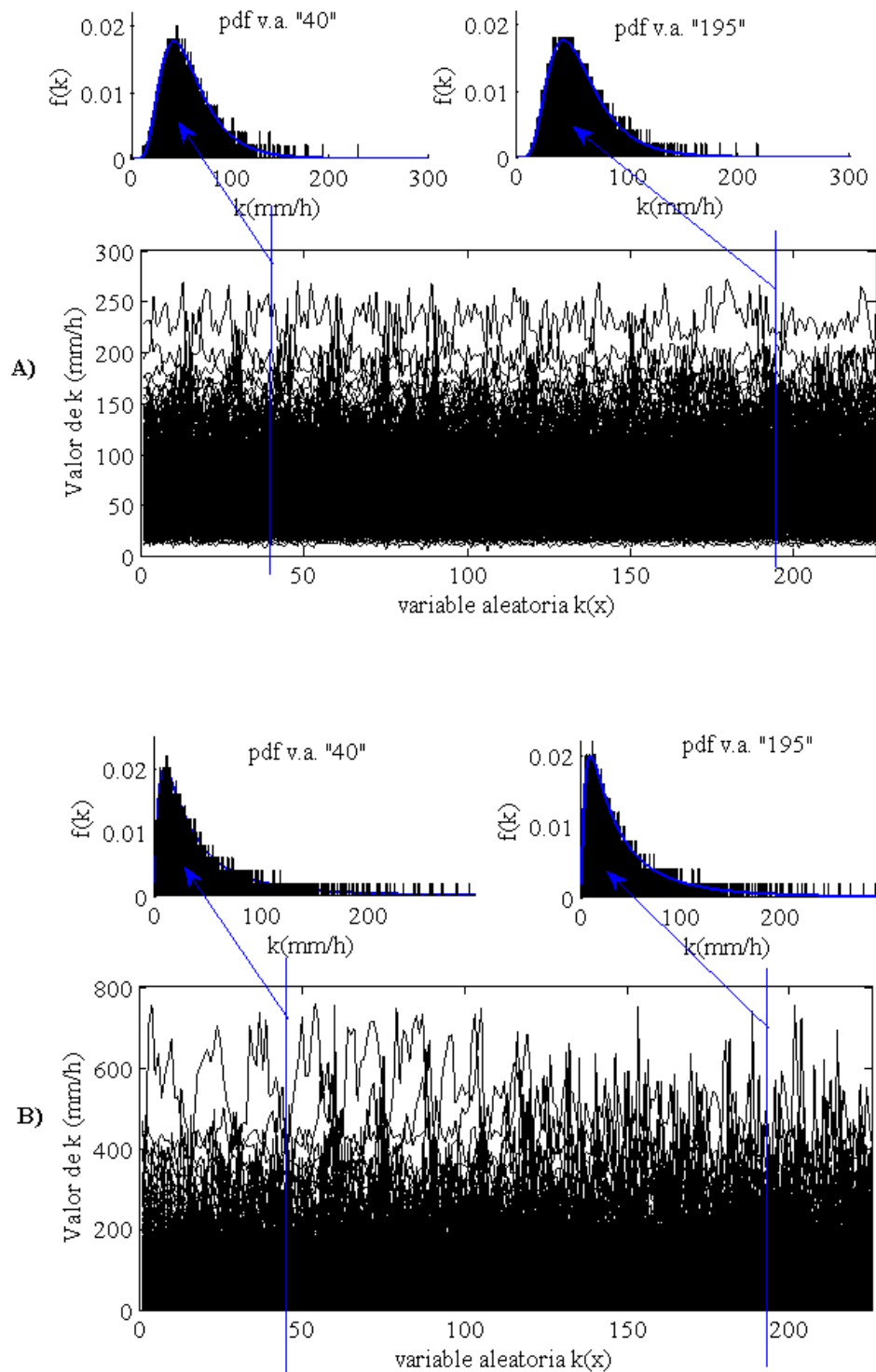
**Figura 4-6.** A) Comparación del correlograma de la muestra y el correlograma del modelo exponencial con longitud de correlación de 100 m, caso de 45 variables aleatorias de  $k$  con parámetros estadísticos  $\mu = 3.51$  y  $\sigma = 1.09$  (izquierda) y 45 variables aleatorias de  $k$  con parámetros estadísticos  $\mu = 3.75$  y  $\sigma = 0.83$  (derecha). B) Imagen de la matriz de correlación en un conjunto de 2025 variables aleatorias de  $k$  con 2500 realizaciones, con parámetros  $\mu = 3.51$  y  $\sigma = 1.09$  (izquierda), y  $\mu = 3.75$  y  $\sigma = 0.83$  (derecha).

En la **Figura 4-7** se presentan algunas realizaciones de los campos aleatorios correlacionados para los diferentes tamaños de celda. Al hacer una comparación visual entre las realizaciones del mismo campo aleatorio (caso A, B y C), se observa que las simulaciones representan la alta incertidumbre introducida intencionalmente en las diferentes variables aleatorias, ya que uno de los propósitos de esta investigación es indagar como influye la incertidumbre de los parámetros  $k$  y  $h$  a nivel de sub-celda  $E1$  sobre el comportamiento de los parámetros efectivos a escala de celda  $E2$ .

La **Figura 4-8** muestra el conjunto de realizaciones para dos de los casos generados con simulación no condicionada. En dicha figura, se puede observar explícitamente que se ha introducido una alta incertidumbre en el valor de cada parámetro a nivel de sub-celda. En las secciones 0 y 5.3.1 se presenta un análisis de la transferencia de la incertidumbre entre la escala  $E1$  y  $E2$ .



**Figura 4-7.** Tres realizaciones correlacionadas del parámetro  $k$ , (simuladas con parámetros estadísticos  $\mu = 3.75$  y  $\sigma = 0.83$ , y un modelo de dependencia espacial exponencial con escala integral de 100 m). **A)** Para celdas con tamaño de  $10 \times 10 m$ . **B)** Para celdas con tamaño de  $30 \times 30 m$ . **C)** Para celdas con tamaño de  $90 \times 90 m$ . (El soporte de la escala  $E1$  es de  $2 \times 2 m$  en todos los casos).



**Figura 4-8** **A)** 500 realizaciones no condicionadas de un campo aleatorio de 225 variables aleatorias de  $k$  con función de distribución lognormal de parámetros  $\mu = 3.98$  y  $\sigma = 0.47$ . **B)** 500 realizaciones no condicionadas de un campo aleatorio de 225 variables aleatorias de  $k$  con función de distribución lognormal de parámetros  $\mu = 3.51$  y  $\sigma = 1.09$ .





# 5. ANÁLISIS DEL EFECTO DE ESCALA POR SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA INVERSA

## 5.1 PUNTOS LÍMITE

El cálculo de los parámetros efectivos a partir de los valores simulados a nivel de sub-celda ( $E1$ ) se realizó mediante un procedimiento de modelación inversa en cada realización de cada proceso estocástico, pero la estructura matemática del modelo hidrológico (ecuaciones [3-1] y [3-3]) hace que existan infinitas soluciones para  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  particularmente cuando  $X_2[E2]$  es igual a cero y cuando  $X_3[E2]$  es igual a  $X_2[E2]$ . En cualquier otra situación existe una única solución. Dada la importancia de este hecho particular a efectos del cálculo de los parámetros efectivos, a continuación se enuncian los dos casos particulares y la forma en que se dio solución a las ecuaciones:

**Punto límite 1 (PL1):** Dada la ecuación [3-1] y las condiciones iniciales y de contorno expuestas en la sección 3.4.3, existe un punto de inflexión hasta el cual  $X_2[E2]$  es igual a cero y a partir del cual  $X_2[E2]$  es igual a  $X_1 + H_1 - h_{ef}$ .

**Punto límite 2 (PL2):** Dada la ecuación [3-3] y las condiciones iniciales y de contorno expuestas en la sección 3.4.3, existe otro punto de inflexión hasta el cual  $X_3[E2]$  es igual a  $X_2[E2]$  y a partir del cual  $X_3[E2]$  es igual a  $\Delta t \times k_{ef}$ .

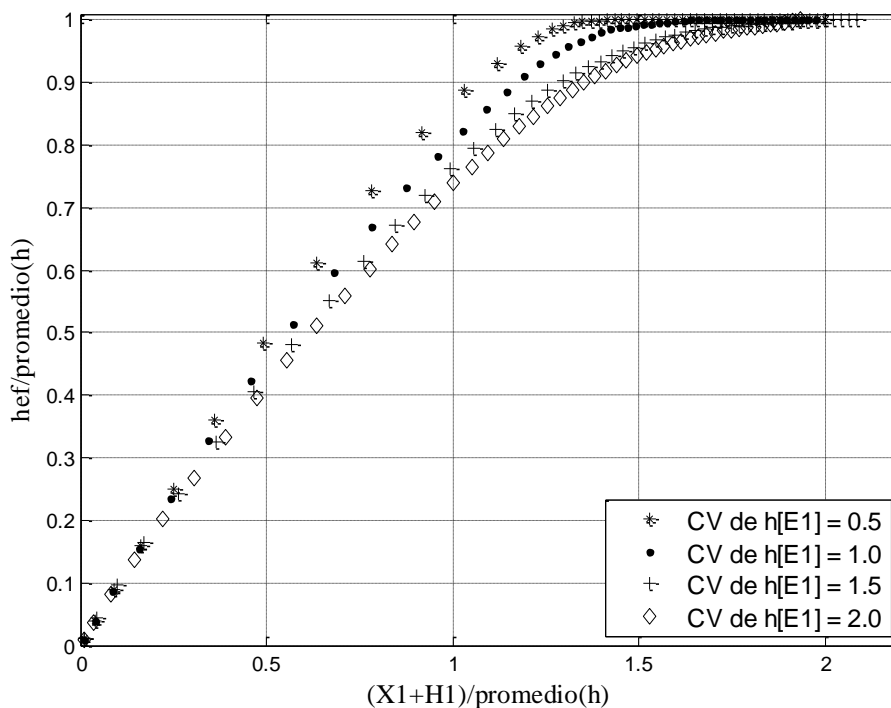
Para evitar la construcción de una función sobreparametrizada que explique el comportamiento de  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$ , y superar el problema de indeterminación originado por la existencia de **PL1** y **PL2**, se ha hecho válido que el parámetro efectivo  $h_{ef}$  sea igual a  $X_1[E2] + H_1[E2]$  cuando  $X_2[E2]$  sea igual a cero. De manera similar, se ha asumido que el parámetro efectivo  $k_{ef}$  es igual a  $X_2[E2] \times (\Delta t)^{-1}$  cuando  $X_3[E2]$  es igual a  $X_2[E2]$ . De tal forma, los parámetros efectivos quedan definidos con una única solución a través de la modelación inversa para cualquier caso.

A pesar de la aplicación de los anteriores supuestos, continúa siendo asumible la conceptualización de que las ecuaciones son aplicables tanto a escala  $E1$  como a escala  $E2$ .

## 5.2 ESCALAMIENTO DE CAMPOS DE PARÁMETROS CON INDEPENDENCIA ESPACIAL

De acuerdo con los cálculos llevados a cabo, el valor de los parámetros efectivos en todos los casos analizados se encuentra entre cero y el valor promedio del parámetro a nivel de sub-celda ( $E1$ ) para cada realización, dependiendo su valor en cada instante de tiempo del valor de las variables de entrada y del estado de almacenamiento en cada uno de los tanques conceptuales.

En el caso de la capacidad de almacenamiento estático efectiva  $h_{ef}$ , su valor está condicionado al valor de la precipitación  $X1$ , al valor del almacenamiento  $H1$  en cada instante de tiempo y a la variabilidad del parámetro a nivel de sub-celda ( $h[E1]$ ) expresada en términos del coeficiente de variación (CV). En la **Figura 5-1** se presenta dicha dependencia para una celda con 2025 sub-celdas subsumidas. A medida que aumenta el CV, se observa que la curva  $h_{ef} = f(X1, H1)$  tiende a disminuir su pendiente; este comportamiento implica que cuando el parámetro  $h$  tiene una alta variabilidad a escala  $[E1]$  es más probable que el parámetro efectivo  $h_{ef}$  tome valores menores a la media de  $h[E1]$ . Dicha dependencia ocurre en todo el conjunto de realizaciones y también puede visualizarse en la **Figura 5-6**.



**Figura 5-1.** Capacidad máxima de almacenamiento estático efectiva ( $h_{ef}[E2]$ ) en función de la precipitación ( $X1[E2]$ ) en cada  $\Delta t$ , el estado de almacenamiento ( $H1[E2]$ ) en cada  $\Delta t$  y la variabilidad de  $h[E1]$ .

De manera similar al comportamiento del parámetro efectivo  $h_{ef}$ ; el parámetro  $k_{ef}$  toma valores acotados en el intervalo de cero a un valor igual al promedio de la conductividad hidráulica saturada en la microescala ( $E1$ ) (**Figura 5-2** y **Figura 5-3**).

El hecho de que el parámetro efectivo no pueda ser superior al valor medio en la escala de detalle, se debe a que cuando todas las sub-celdas están contribuyendo a la generación de flujo se está “utilizando” toda la capacidad de almacenamiento estático de las sub-celdas (en el caso de  $h[E1]$ ) o toda la capacidad de infiltración de las sub-celdas (en el caso de  $k[E1]$ ) y no es posible “utilizar” más capacidad, en ese caso el problema toma un aspecto lineal, en el cual el parámetro a escala  $E2$  es determinado unicamente por el promedio a escala  $E1$ . A continuación se presenta un ejemplo simplificado para ilustrar esta característica:

Sea una celda con cuatro sub-celdas subsumidas, la matriz de capacidades de almacenamiento estático en mm es:

$$h[E1] = \begin{vmatrix} 100 & 120 \\ 200 & 70 \end{vmatrix} \quad [5-1]$$

Nótese que la capacidad de almacenamiento global de la celda en términos de volumen es 490 mm (122.5 mm en promedio por cada sub-celda) y representa el volumen máximo que puede almacenar la celda en un instante de tiempo dado.

Asumiendo  $H1 = 0$ , si ocurre una precipitación  $X1[E1] = 80mm = X1[E2] = 320mm$  implica que solo la sub-celda (4,4) tendrá un excedente de precipitación:

$$X2[E1] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} \quad [5-2]$$

Por tanto, la capacidad de almacenamiento global de la celda en términos de volumen tomará un valor efectivo de 310 mm para que la precipitación excedente total de la celda sea de 10 mm. Dicha capacidad global es equivalente a que cada sub-celda tenga un  $h[E1] = 77.5$ , con lo cual en promedio cada sub-celda contribuye teóricamente con 2.5 mm para un total de 10 mm. En este caso el parámetro efectivo  $h_{ef}$  es 77.5 mm que es un valor inferior al valor promedio del parámetro en la microescala (122.5 mm).

Asumiendo que  $H1 = 0$  y ocurra una precipitación  $X1[E1] = 300mm$  equivalente a  $X1[E2] = 1200$ , todas las sub-celdas contribuyen a la generación de precipitación excedente:

$$X2[E2] = \begin{vmatrix} 200 & 180 \\ 100 & 230 \end{vmatrix} \quad [5-3]$$

En este caso, la capacidad de almacenamiento global de la celda en términos de volumen tendrá un valor efectivo de 490 mm que equivale a un valor promedio por sub-celda de 122.5 mm ( $h_{ef}$ ). Para cualquier valor de  $X1[E2] + H1[E2]$  que

implique que todas las sub-celdas contribuyan al flujo el valor de  $h_{ef}$  continuará siendo 122.5 mm (valor promedio por sub-celda).

En este mismo ejemplo, queda definida explícitamente la importancia de la variabilidad espacial del parámetro, ya que para satisfacer la condición de que todas las sub-celdas contribuyan al flujo el valor de  $X1[E2] + H1[E2]$  debe ser mayor al valor máximo de la matriz de capacidades de almacenamiento estático (ecuación [5-1]), lo cual implica que si en el campo de parámetros se tiene un coeficiente de variación alto (ejemplo  $CV=2$ ), el parámetro efectivo igualará al valor promedio del campo de parámetros a escala  $E1$  para un valor  $X1[E2] + H1[E2]$  mayor al valor  $X1[E2] + H1[E2]$  que satisfaga esa condición en un campo de parámetros con un coeficiente de variación más bajo (ejemplo  $CV=0.5$ ).

Siguiendo el ejemplo simplificado, el campo de parámetros  $h[E1]$  presentado en la ecuación [5-1] tiene un  $CV=0.45$  y el valor máximo de  $h[E1]$  es 200 mm, ubicado en la sub-celda (2,1). Por tanto,  $X1[E2] + H1[E2]$  debe ser mayor a 200 mm para que todas las sub-celdas contribuyan al flujo y sea válido que  $h_{ef}$  sea igual al promedio de  $h[E1]$ ; en cualquier otro caso  $h_{ef}$  será menor a dicho promedio.

En caso de que el campo de parámetros tenga un coeficiente de variación mayor, los desvíos con relación a la media del campo  $h[E1]$  serán mayores, con lo cual el valor máximo de la matriz  $h[E1]$  será mayor en comparación al caso de la ecuación [5-1], consecuentemente se necesitará un valor  $X1[E2] + H1[E2]$  mayor a 200 mm para que  $h_{ef}$  sea igual al promedio de  $h[E1]$ .

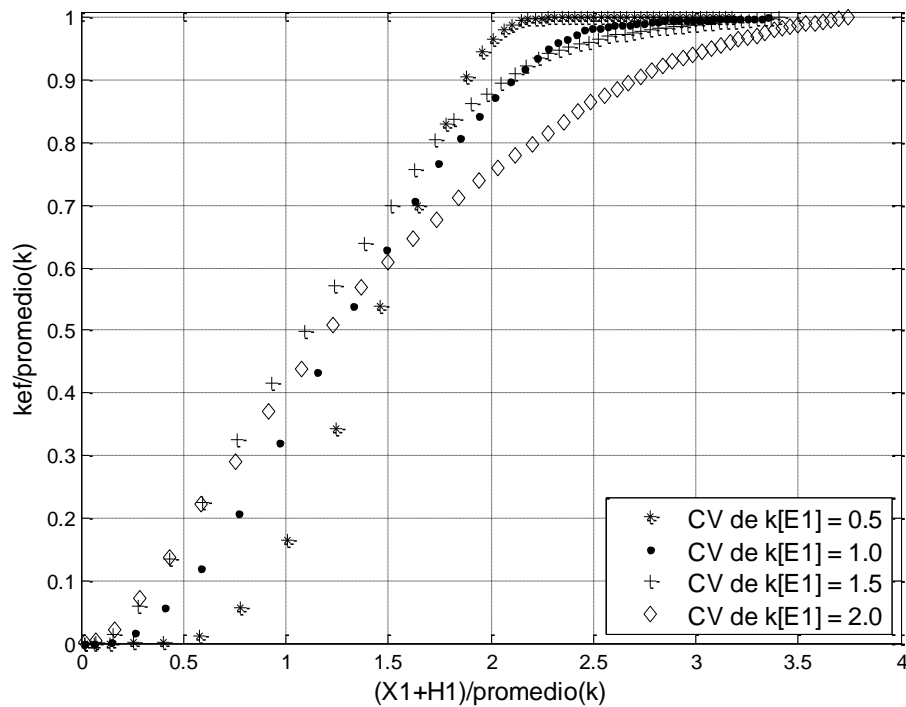
El estudio del escalamiento de parámetros efectivos no se agota con la descripción simplificada expuesta anteriormente, ya que la función de distribución de probabilidad de cada una de las variables aleatorias del campo de parámetros delimita de una manera más precisa la estructura de variabilidad espacial del parámetro. Pues dos campos de parámetros a escala  $E1$  con funciones de distribución de probabilidad diferentes e iguales estadísticos (medias, desviaciones estándar,  $CV$ ) tienen valores diferentes para los parámetros efectivos.

La conductividad hidráulica saturada efectiva ( $k_{ef}$ ) presenta una función de dependencia sigmoidea con relación a las variables  $X1[E2]$  y  $H1[E2]$ . Al cambiar la variabilidad del parámetro  $k[E1]$ , la relación  $k_{ef} = f(X1, H1)$  varía en su forma, tomando una estructura complicada de modelar lo cual implicaría la utilización de un modelo imbricado y sobreparametrizado para reproducir su comportamiento (Figura 5-2). Debido a que  $k_{ef}$  depende del valor de  $X2$ , y éste a su vez depende de  $X1$  y  $H1$ , la dependencia mostrada por  $k_{ef}$  con relación a  $X1$  y  $H1$  es indirecta, y resulta más apropiado expresar  $k_{ef}$  en función de  $X2[E2]$ .

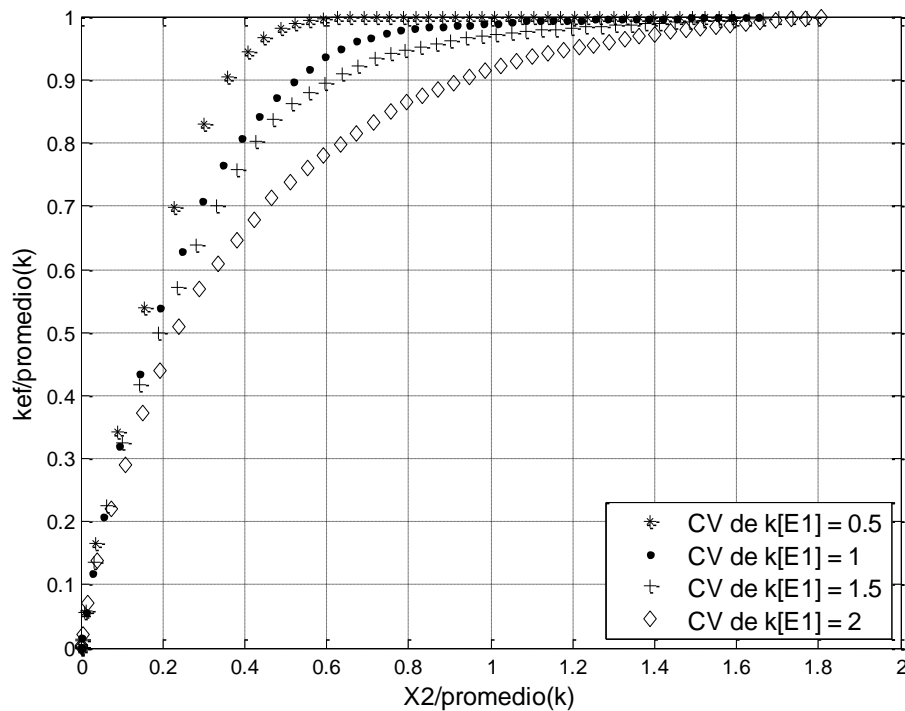
En la Figura 5-3 se presenta la distribución de  $k_{ef}$  en función de  $X2[E2]$  para cuatro grados diferentes de variabilidad ( $CV = 0.5; CV = 1; CV = 1.5; CV = 2$ ) en una de las realizaciones;  $k_{ef}$  presenta un patrón de dependencia mucho más

consistente al distribuirlo en función de  $X_2[E_2]$  en contraste con la **Figura 5-2**; a medida que se incrementa el coeficiente de variación del parámetro a escala  $E_1$ , el parámetro efectivo tiende a tomar valores más bajos.

La tasa de disminución del parámetro efectivo  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  con respecto al coeficiente de variación (**Figura 5-1** y **Figura 5-3**) no presenta una distribución lineal, ya que al pasar de un  $CV = 1.5$  a  $CV = 2.0$  la tasa de cambio de  $h_{ef}$  es más pequeña en comparación con la tasa de cambio de  $h_{ef}$  al pasar de  $CV = 0.5$  a  $CV = 1$  o de  $CV = 1.0$  a  $CV = 1.5$ . Una situación similar ocurre en el caso de  $k_{ef}$ , se nota que hay un punto crítico de mínima variación de  $k_{ef}$  alrededor de  $CV = 1$  y un aumento en la variación de  $k_{ef}$  cuando  $CV$  se aleja de 1; este mismo comportamiento se observó con simulaciones de Monte Carlo hechas sin aplicar la técnica de Hiper cubo Latino en la generación de campos aleatorios de parámetros.



**Figura 5-2.** Conductividad hidráulica saturada efectiva ( $k_{ef}$ ) en función de la precipitación ( $X_1[E_2]$ ) en cada  $\Delta t$ , el estado de almacenamiento ( $H_1[E_2]$ ) en cada  $\Delta t$  y la variabilidad de  $k[E_1]$ .



**Figura 5-3.** Conductividad hidráulica saturada efectiva ( $k_{ef}$ ) en función de la precipitación excedente ( $X_2[E_2]$ ) en cada  $\Delta t$  y la variabilidad de  $k[E_1]$ .

### 5.2.1 ERGODICIDAD E IMPORTANCIA DE LA INCERTIDUMBRE DE LOS PARÁMETROS EFECTIVOS

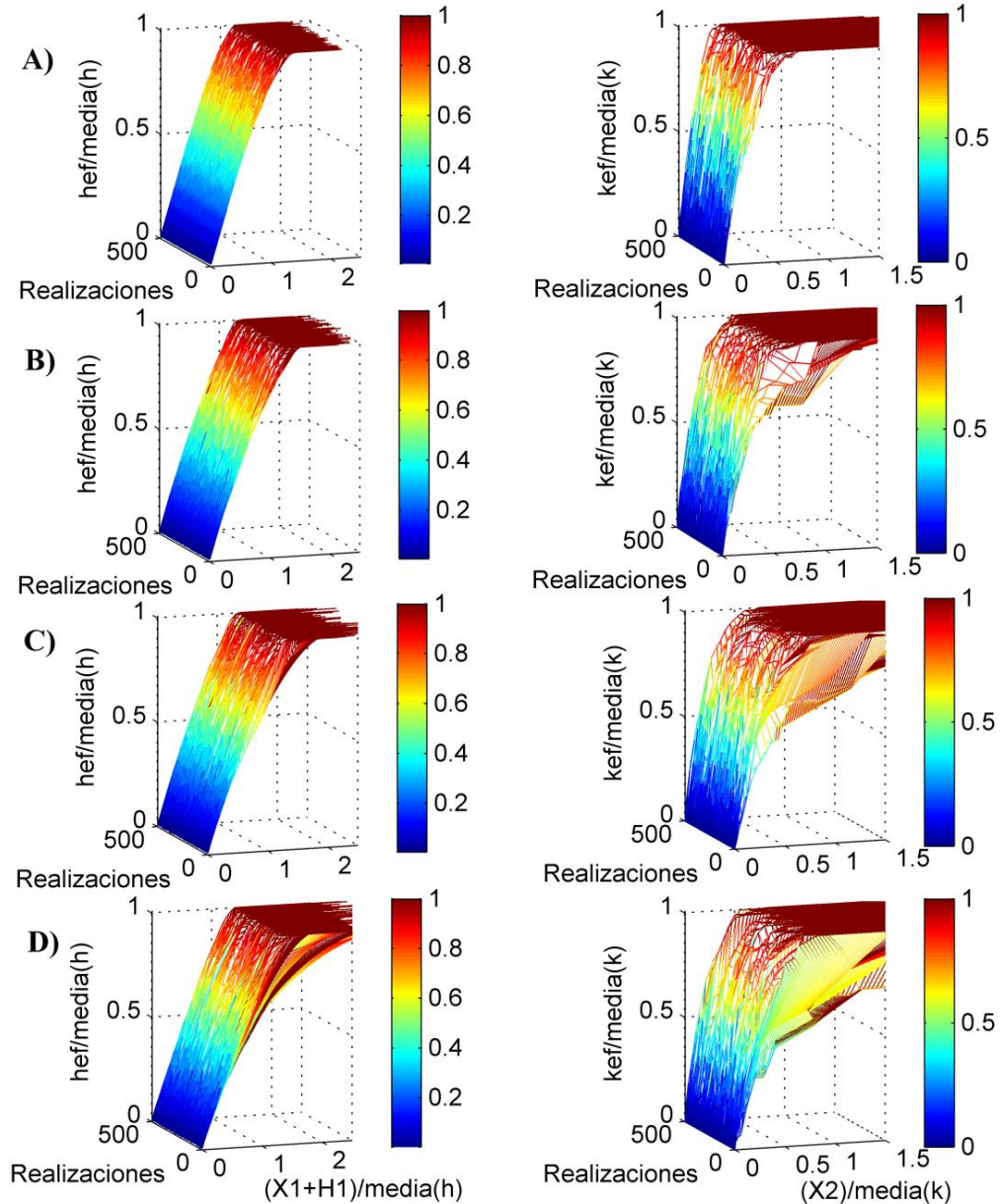
Debido a la hipótesis de independencia e idéntica distribución entre los parámetros a escala  $E_1$ , la probabilidad conjunta de las variables aleatorias en cada realización es el producto de las probabilidades individuales y es muy similar entre realizaciones, especialmente en los campos de parámetros con mayor número de variables aleatorias (caso de 2025 variables aleatorias), el valor promedio en cada realización tiende al promedio de los valores medios de cada variable aleatoria, lo cual es consistente con la Ley Fuerte de los Grandes Números de la teoría de probabilidad.

El hecho de que la esperanza sea muy similar entre realizaciones y sigan la misma función de distribución de probabilidad, hace que los valores de los parámetros efectivos calculados a escala  $E_2$  tiendan con poca varianza a un mismo valor, y por lo tanto, tengan significativamente menor varianza de estimación e incertidumbre que los parámetros a la escala de detalle  $E_1$ .

Sin embargo, para los casos en los que cada celda tiene 25 y 225 variables aleatorias, se presenta mayor incertidumbre en el valor del parámetro efectivo sujeto al nivel de variabilidad en los parámetros a escala  $E_1$  (tanto para  $h_{ef}$  como

para  $k_{ef}$ ). Esto ocurre como consecuencia de que para pocas variables aleatorias no es aplicable la Ley Fuerte de los Grandes Números en todo el conjunto de realizaciones de cada proceso.

En la **Figura 5-4**, **Figura 5-5** y **Figura 5-6** se presenta el valor del parámetro efectivo para cada una de las 500 realizaciones, relativo al promedio de la respectiva realización en función de  $X1[E2]+H1[E2]$  para tres tamaños de celda:  $10 \times 10 m^2$  (25 sub-celdas subsumidas),  $30 \times 30 m^2$  (225 sub-celdas subsumidas) y  $90 \times 90 m^2$  (2025 sub-celdas subsumidas); en cada figura se comparan los cuatro niveles de variabilidad ( $CV = 0.5; CV = 1; CV = 1.5; CV = 2$ ).

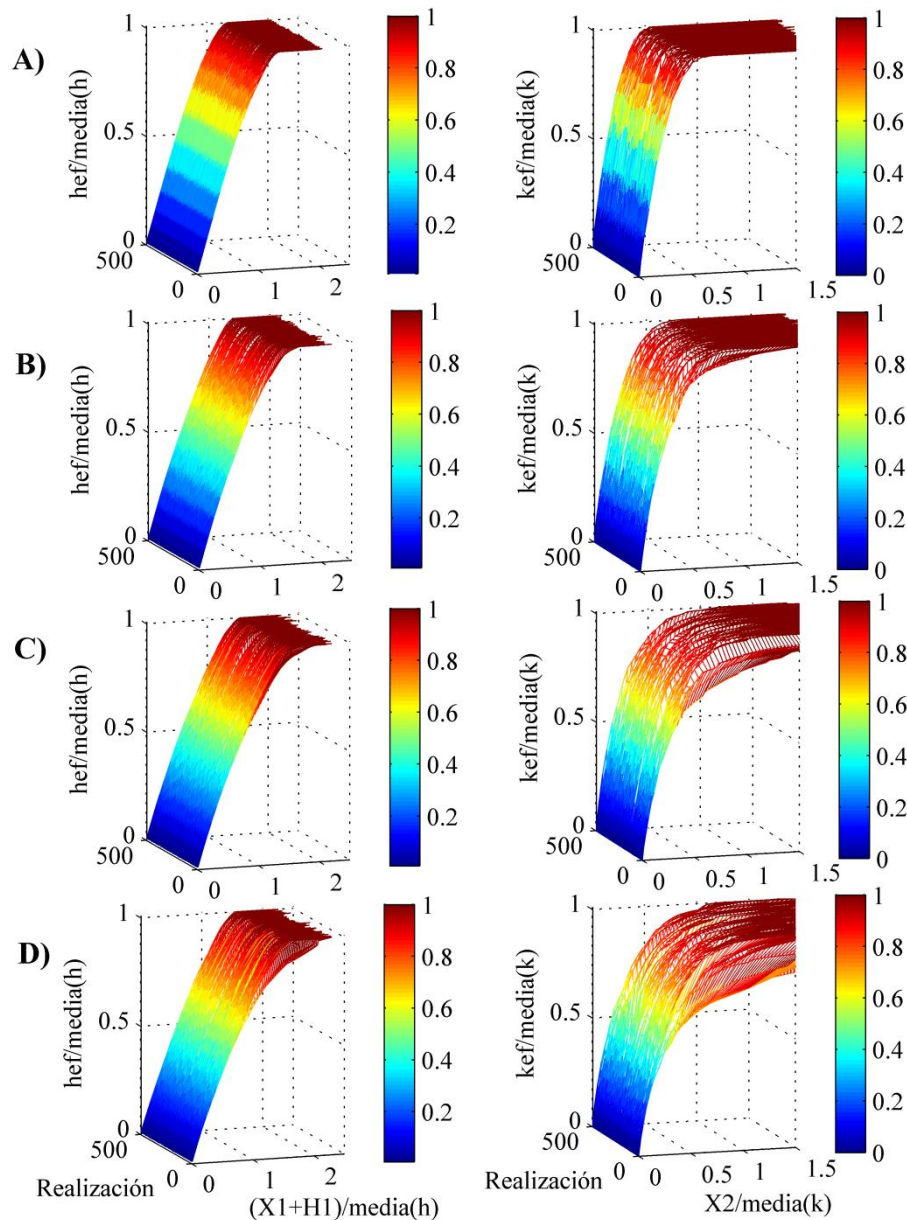


**Figura 5-4.** Valor del parámetro efectivo relativo a su promedio en  $E1$  para cada realización en función del tiempo. A) con  $CV[E1]=0.5$ ; B) con  $CV[E1]=1$ ; C) con  $CV[E1]=1.5$ ; D) con  $CV[E1]=2$ . En todos los casos  $[E1]$  con 25 variables aleatorias.

La **Figura 5-4** y **Figura 5-5** muestran que para tamaños de celda pequeños hay mayor variabilidad en el valor del parámetro efectivo entre realizaciones, especialmente en las simulaciones procedentes de campos aleatorios de parámetros con alta

variabilidad a escala  $E1$  ( $CV = 1.5; CV = 2$ ; casos: figura **Figura 5-4-C**, figura **Figura 5-4-D**, figura **Figura 5-5-C** **Figura 5-5-D**).

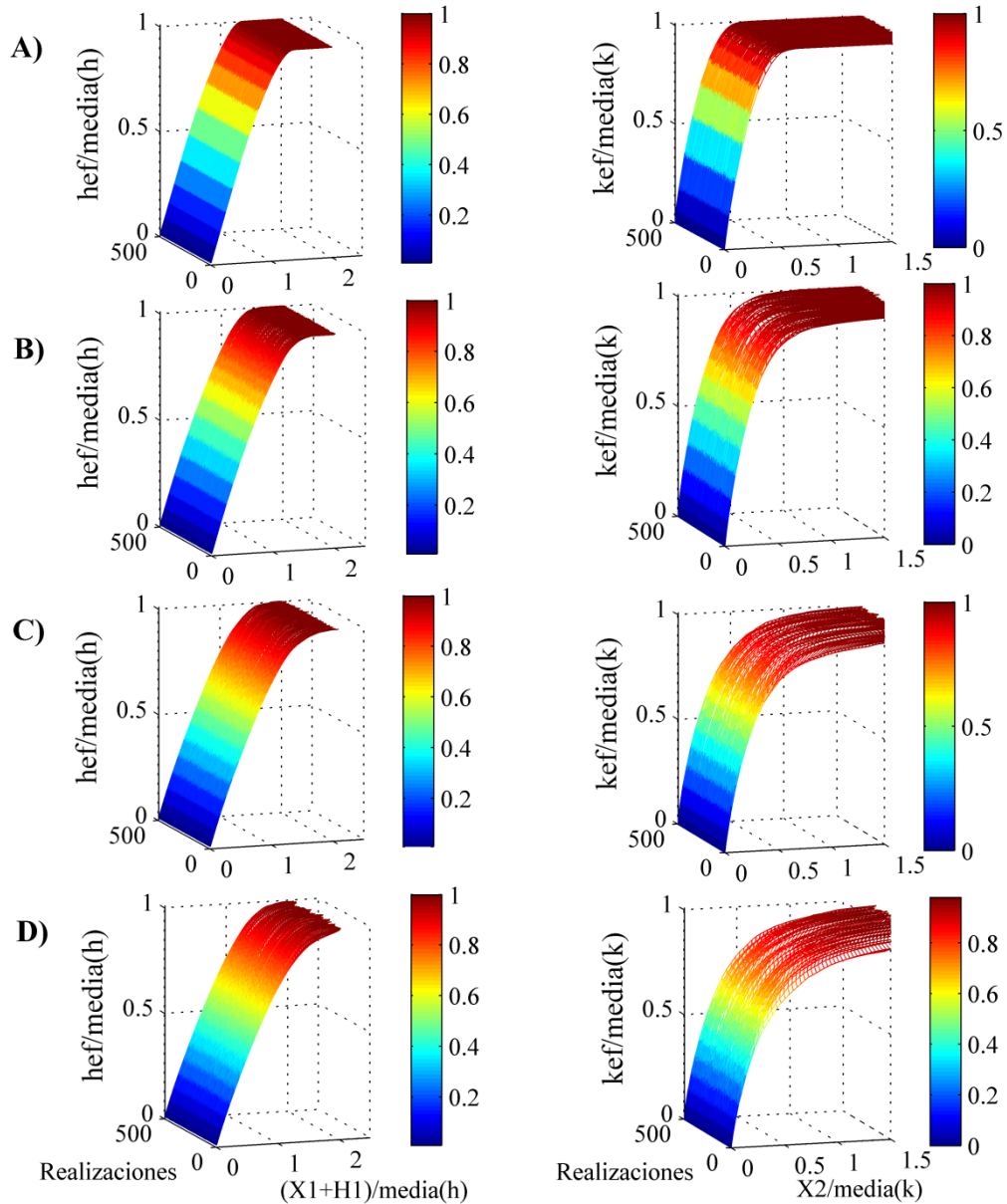
Para un tamaño de celda mayor (**Figura 5-6**), se observa que la incertidumbre y variabilidad en los parámetros con soporte  $E1$  no afecta de manera relevante a la variabilidad del parámetro efectivo a escala  $E2$  ya que éste tiende a tomar el mismo valor en todas las realizaciones en cada uno de los casos A, B, C y D de la **Figura 5-6**, lo cual se explica por la participación de un mayor número de variables aleatorias en comparación con las figuras **Figura 5-4** y **Figura 5-5**, las cuales corresponden a simulaciones hechas sobre campos aleatorios con 25 y 225 variables aleatorias respectivamente.



**Figura 5-5** Valor del parámetro efectivo relativo a su promedio en  $E1$  para cada realización en función del tiempo. A) con  $CV[E1]=0.5$ ; B) con  $CV[E1]=1$ ; C) con  $CV[E1]=1.5$ ; D) con  $CV[E1]=2$ . En todos los casos  $[E1]$  con 225 variables aleatorias.



Es importante resaltar que la variabilidad en la escala  $E1$  afecta al valor esperado del parámetro efectivo en la escala  $E2$ , lo cual se comprueba al observar las diferencias entre sus valores en los casos A, B, C y D de la **Figura 5-6**. Para un coeficiente de variación alto a escala  $E1$  (casos C y D de la **Figura 5-6**), el valor del parámetro efectivo a escala  $E2$  tiende a ser menor en comparación con el valor del parámetro efectivo correspondiente al mismo instante de tiempo con una baja variabilidad a nivel de sub-celda (caso A de la **Figura 5-6**).

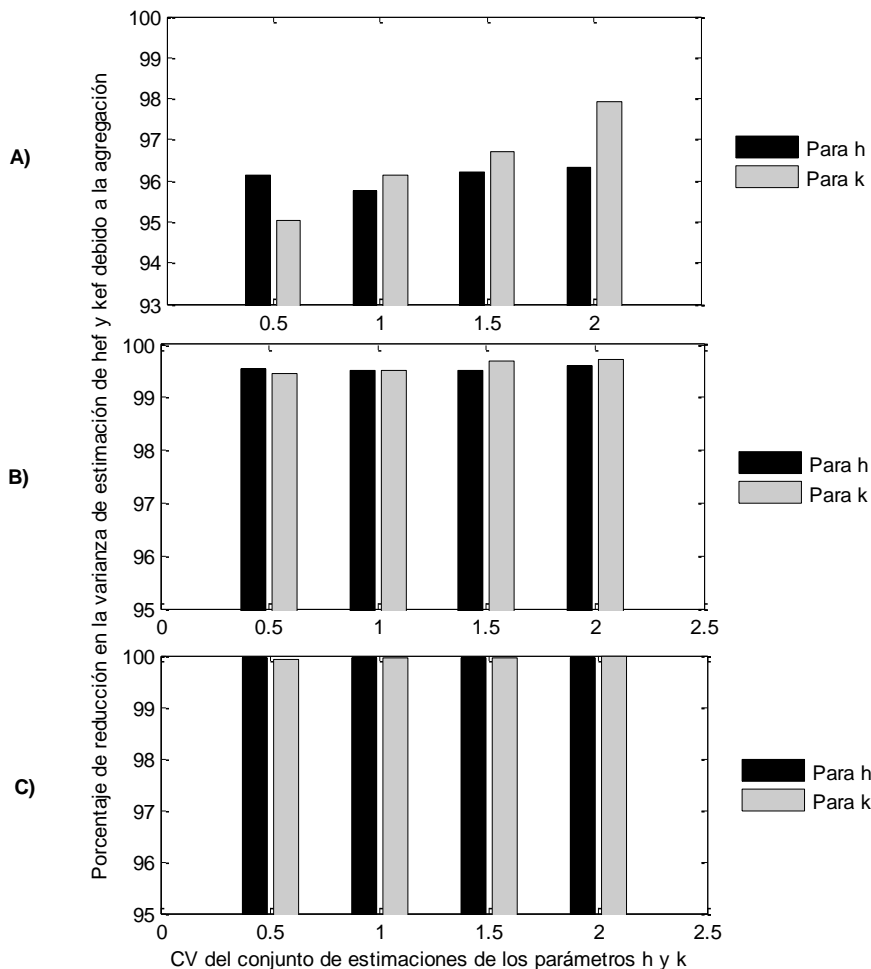


**Figura 5-6.** Valor del parámetro efectivo relativo a su promedio en  $E1$  para cada realización en función del tiempo. A) con  $CV[E1]=0.5$ ; B) con  $CV[E1]=1$ ; C) con  $CV[E1]=1.5$ ; D) con  $CV[E1]=2$ . En todos los casos  $[E1]$  con 2025 variables aleatorias.

El efecto del tamaño de celda o extensión de la escala  $E2$  sobre la variabilidad del parámetro efectivo en el conjunto de realizaciones, se expresa en una notable disminución de la variabilidad en el valor del parámetro efectivo, específicamente a medida que se incrementa el número de variables aleatorias presentes en el campo de parámetros a escala  $E1$ . Lo cual, se debe principalmente a que la

hipótesis de independencia e idéntica distribución de probabilidad (iid) de las variables aleatorias en cada campo de parámetros simulados hace que a medida que existan más variables aleatorias se tiende a cumplir con mayor rigor la Ley Fuerte de los Grandes Números; en la cual, la esperanza de la realización tiende a ser igual a la esperanza común a toda la función aleatoria, y es aplicable el postulado de que “una muestra suficientemente grande puede proporcionar información casi exacta sobre la función de distribución de la población”.

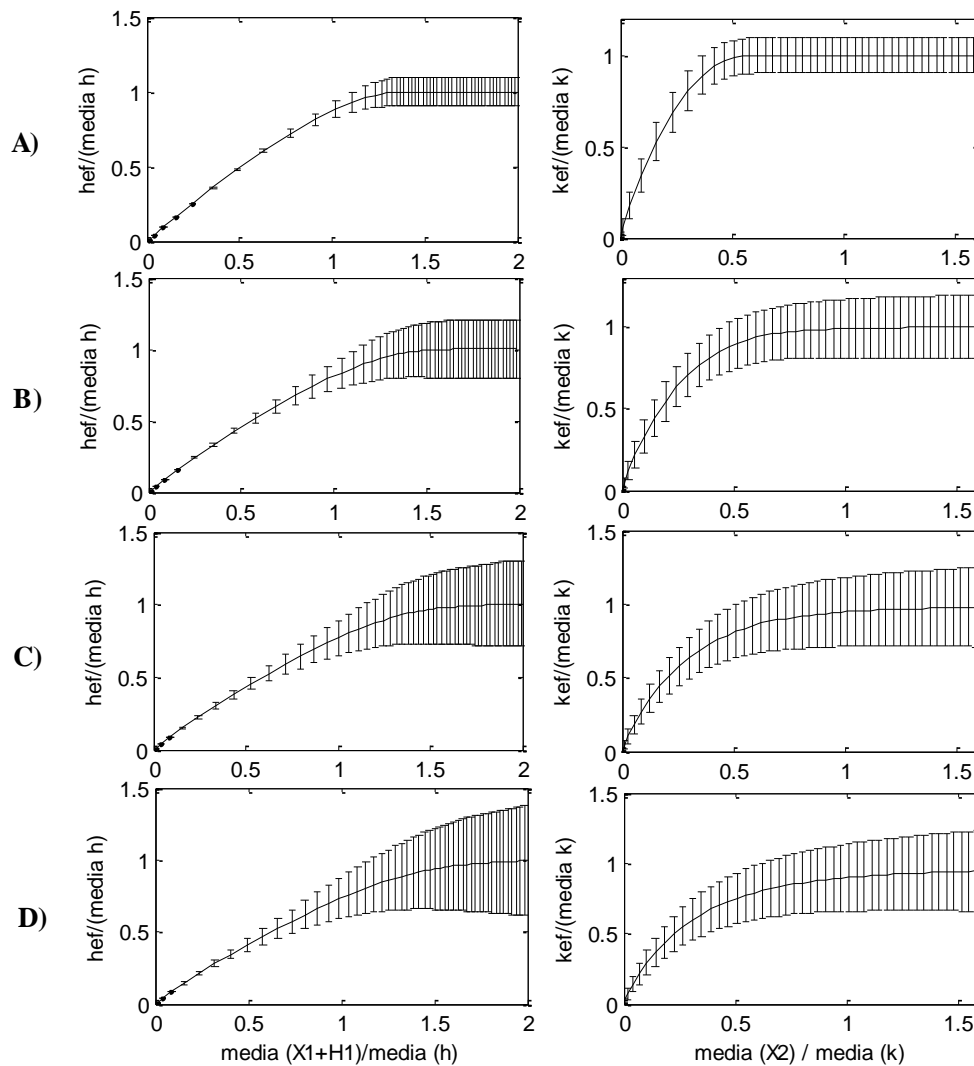
En el caso del parámetro capacidad de almacenamiento estático  $h$ , la varianza de estimación a escala  $E2$  se reduce prácticamente en un cien por ciento en comparación con su valor a escala  $E1$  para celdas con 2025 variables aleatorias subsumidas (Figura 5-7-C), el porcentaje de reducción en la varianza de estimación no presenta una dependencia relevante con relación al nivel de variabilidad a escala  $E1$ , ya que la reducción en la varianza es muy similar para campos de parámetros con diferentes coeficientes de variación ( $CV = 0.5$ ;  $CV = 1.0$ ;  $CV = 1.5$ ;  $CV = 2.0$ ). El parámetro conductividad hidráulica saturada  $k$  presenta el mismo comportamiento que  $h$  (Figura 5-7-C).



**Figura 5-7.** Disminución de varianza de estimación de los parámetros  $h$  y  $k$  en porcentaje como consecuencia de la agregación de escala  $E1$  a  $E2$  (con respecto a la varianza del parámetro en  $E1$ ). A) para celdas con un tamaño de  $10 \times 10 m^2$  y 25 sub-celdas subsumidas. B) para celdas con un tamaño de  $30 \times 30 m^2$  y 225 sub-celdas subsumidas. C) para celdas con un tamaño de  $90 \times 90 m^2$  y 2025 sub-celdas subsumidas.

El mismo análisis para celdas con 225 variables aleatorias subsumidas, revela que de manear similar hay una notable disminución de la varianza tanto en  $h$  como en  $k$  a pesar de representar un conjunto de observaciones más pequeño (mayor al 99%) (**Figura 5-7-B**).

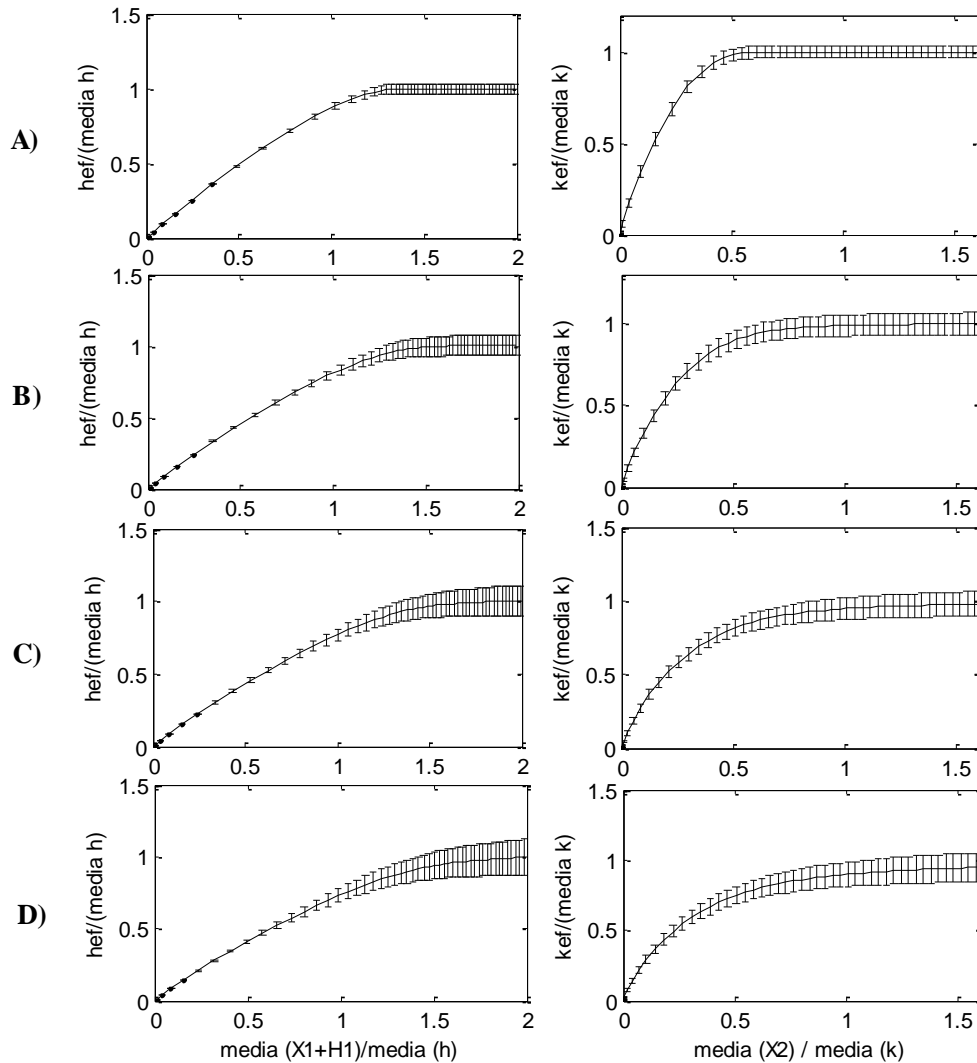
Al aplicar el procedimiento de agregación para conjuntos de realizaciones con un número pequeño de variables aleatorias subsumidas en la celda (25 sub-celdas), se obtiene un conjunto de realizaciones del parámetro efectivo con menor variabilidad que la variabilidad a escala  $E1$ , la disminución en la varianza de la variable aleatoria como consecuencia del escalamiento es superior al 94% (**Figura 5-7-A**).



**Figura 5-8.** Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones  $\pm$  el coeficiente de variación (valores estandarizados de  $h$  y  $k$ ) en celdas de  $10 \times 10 m^2$ . A) para campos con  $CV = 0.5$  en  $E1$ . B) para campos con  $CV = 1$  en  $E1$ . C) para campos con  $CV = 1.5$  en  $E1$ . D) para campos con  $CV = 2$  en  $E1$ .

Las figuras 5-8, 5-9 y **Figura 5-10** muestran el valor esperado estandarizado del conjunto de realizaciones de los parámetros efectivos con sus respectivos coeficientes de variación a través del tiempo. De acuerdo con estas figuras, el

tamaño de la celda influye en la incertidumbre del parámetro efectivo, ya que cuando la celda (escala  $E2$ ) alberga menos unidades de soporte a escala  $E1$  hay mayor varianza de estimación en la variable aleatoria “parámetro efectivo” en comparación a los casos en que la celda alberga más unidades de soporte a escala  $E1$ , lo cual es consistente con los resultados de investigaciones similares (Bloschl, 1999).

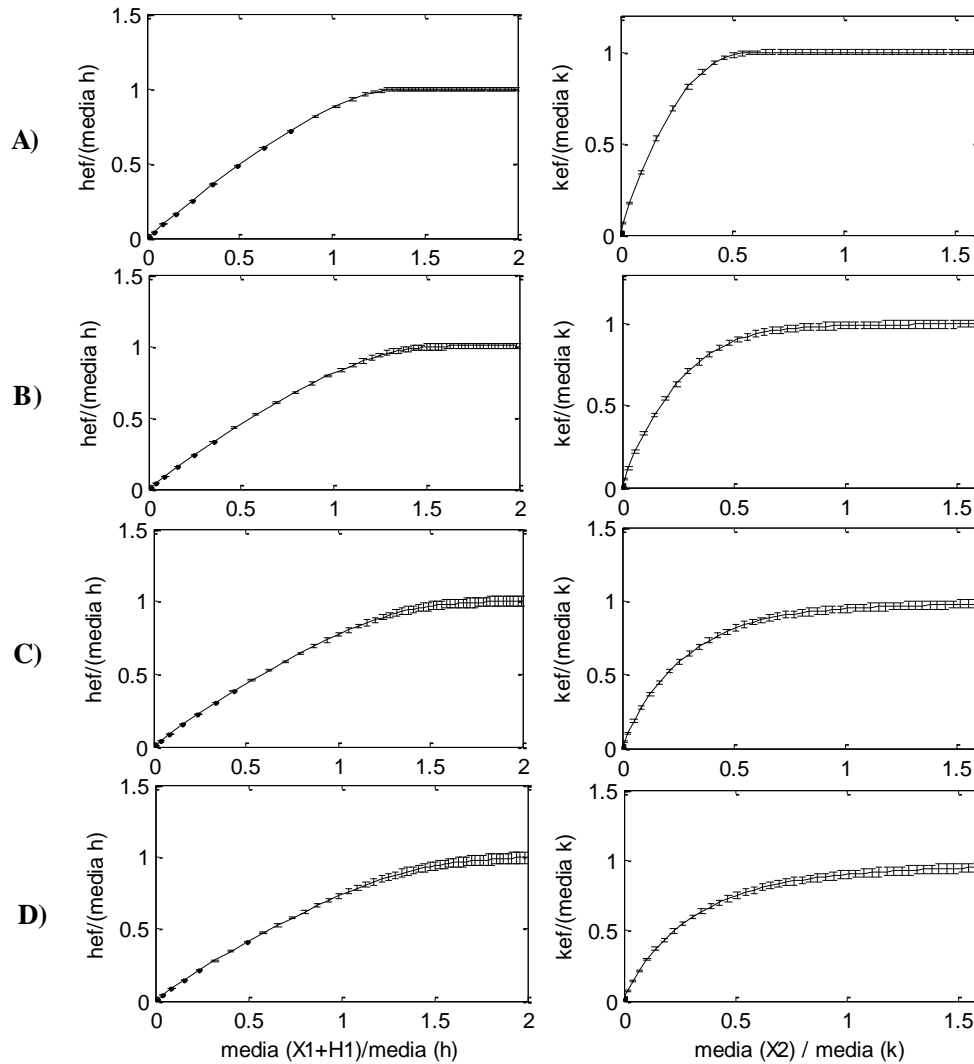


**Figura 5-9.** Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones  $\pm$  el coeficiente de variación (valores estandarizados de  $h$  y  $k$ ) en celdas de  $30 \times 30m^2$ . A) para campos con  $CV = 0.5$  en  $E1$ . B) para campos con  $CV = 1$  en  $E1$ . C) para campos con  $CV = 1.5$  en  $E1$ . D) para campos con  $CV = 2$  en  $E1$ .

A pesar de que exista una amplia incertidumbre en el valor del parámetro a escala de detalle y sea asumible iid, para celdas con tamaño de  $90 \times 90m^2$  o un tamaño superior, el valor del parámetro efectivo en cualquiera de los casos probables tenderá a la esperanza del conjunto de los valores probables del parámetro efectivo.

Con base en este criterio, para efectos prácticos se recomienda que cuando exista una alta incertidumbre en la estimación de los valores del parámetro a escala de

detalle y sea asumible la hipótesis de iid, es preferible utilizar tamaños de celda iguales o superiores a  $90 \times 90 m^2$  con el fin de disminuir en el espacio probable de valores del parámetro efectivo su nivel de incertidumbre, ya que si se tomaran tamaños menores de celda, la incertidumbre en los valores a escala de detalle se transferiría con mayor magnitud a la escala de celda o escala de modelación (figuras 5-8 y 5-9).



**Figura 5-10.** Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones  $\pm$  el coeficiente de variación (valores estandarizados de h y k) en celdas de  $90 \times 90 m^2$ . A) para campos con CV = 0.5 en  $E1$ . B) para campos con CV = 1 en  $E1$ . C) para campos con CV = 1.5 en  $E1$ . D) para campos con CV = 2 en  $E1$ .

## 5.2.2 EFECTO DEL CAMBIO DE EXTENSIÓN EN LA ESCALA DE CELDA

En la sección anterior se analizó la influencia de la incertidumbre de los parámetros a escala  $E1$  sobre la incertidumbre del valor de los parámetros efectivos a escala  $E2$ , y se encontró que la incertidumbre se transfiere en mayor

grado para celdas con una extensión pequeña ( $10 \times 10 m^2$  y  $30 \times 30 m^2$ ); mientras que para celdas de mayor extensión ( $90 \times 90 m^2$ ) la incertidumbre de los parámetros a escala  $E1$  no afectan de manera relevante a la varianza de estimación de los parámetros efectivos a escala  $E2$  asumiendo la hipótesis de iid; la reducción de la varianza del conjunto de realizaciones está más influenciada por el número de sub-celdas subsumidas en la celda de modelación a escala  $E2$ , lo cual implica que a mayor extensión (tamaño) de la escala  $E2$  disminuye la variabilidad de los probables valores que tome el parámetro efectivo. Por otro lado, a menor tamaño de celda habrá más incertidumbre en el valor del parámetro efectivo sujeto a la incertidumbre del parámetro a escala de detalle.

A continuación se muestra cómo afecta la extensión de la celda al valor al que tiende el conjunto de realizaciones de cada parámetro efectivo (Esperanza).

Se compararon los valores medios de los parámetros efectivos  $h$  y  $k$  de 500 realizaciones para los tres tamaños de celda; el patrón de referencia que se empleó fue el residuo entre el valor promedio del parámetro en el conjunto de realizaciones de la celda de mayor tamaño y el promedio del parámetro en el conjunto de realizaciones de los otros dos tamaños de celda respectivamente.

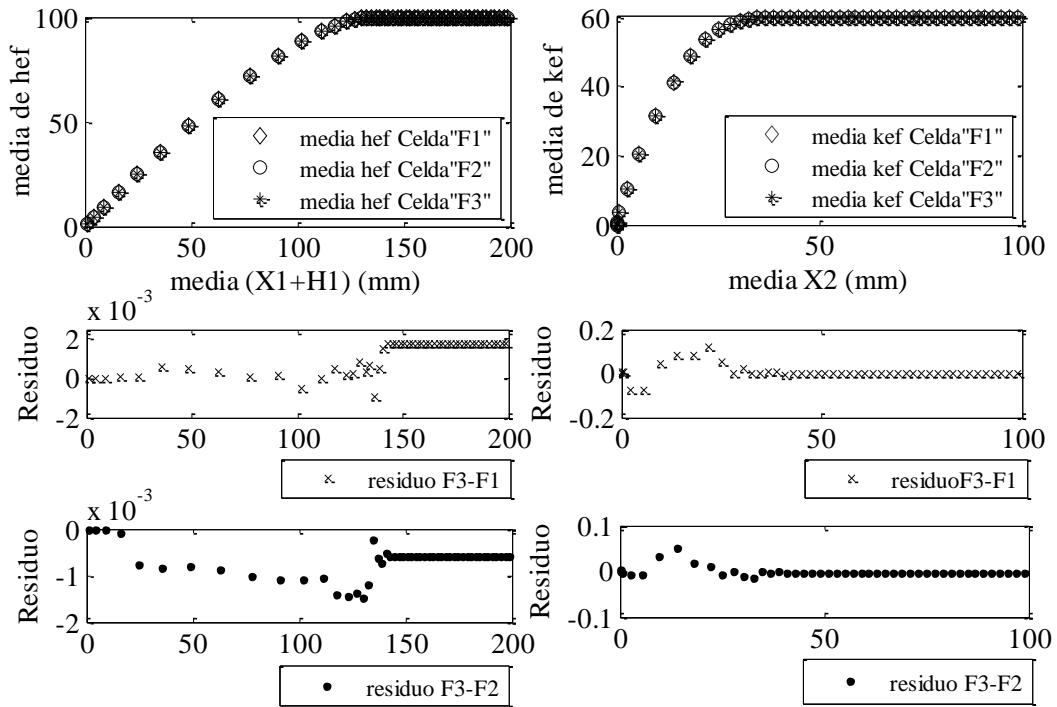
Los resultados indican que el tamaño de celda no influye de manera relevante en el valor esperado de los parámetros efectivos  $h$  y  $k$ , ya que los residuos encontrados no son significativos con relación al orden de magnitud de la esperanza en ambos tipos de parámetro. Los valores más altos se encuentran en los residuos de  $\bar{k}_{ef}$ , cuyo valor máximo es de 0.6 mm de diferencia entre  $\bar{k}_{ef}$  de la celda de mayor tamaño con  $\bar{k}_{ef}$  de la celda de menor tamaño; en términos generales los residuos oscilan en el intervalo -0.2 a 0.2 mm (**Figura 5-11, Figura 5-12, Figura 5-13, Figura 5-14**).

En el caso del parámetro  $\bar{h}_{ef}$ , las diferencias entre los distintos tamaño de celda son menores a las de  $\bar{k}_{ef}$ , el mayor residuo es del orden de 0.02 mm que es un valor muy bajo en comparación con el orden de magnitud del valor esperado de  $h$  que corresponde a 100 mm.

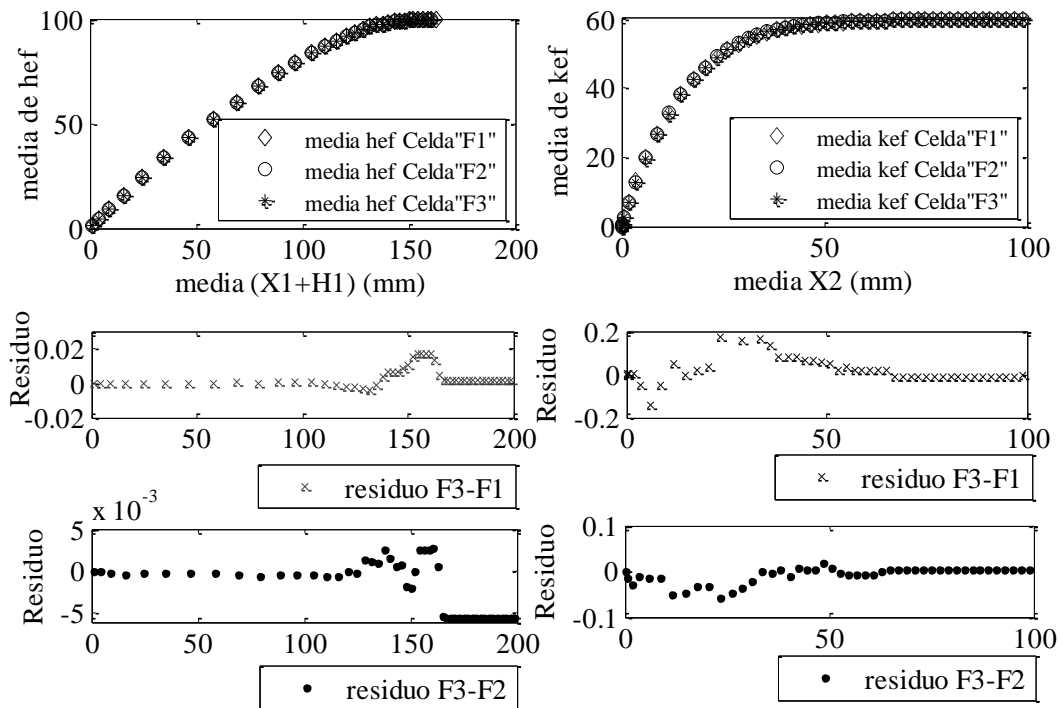
Con base en las evidencias mostradas por las simulaciones, se afirma que los tamaños de celda estudiados no influyen de manera relevante en el valor al que tienda un conjunto de simulaciones aún en los casos en que se presente un alto grado de incertidumbre a nivel de la escala de detalle  $E1$ . Como puede observarse en la **Figura 5-14**, para coeficientes de variación altos ( $CV = 2$ ) a escala  $E1$ , la esperanza matemática de los conjuntos de realizaciones para los tres tamaños de celda diferentes tiende a ser la misma.

Este comportamiento mostrado por la esperanza del parámetro efectivo (bien sea  $\bar{h}_{ef}$  o  $\bar{k}_{ef}$ ), podría indicar la probable existencia de una condición de invariancia del parámetro efectivo a medida que se aumente o disminuya la escala espacial (bajo las hipótesis asumidas). Por todo lo anterior, si la incertidumbre se debe solo al valor de los parámetros y éstos cumplen la condición de iid, el valor esperado

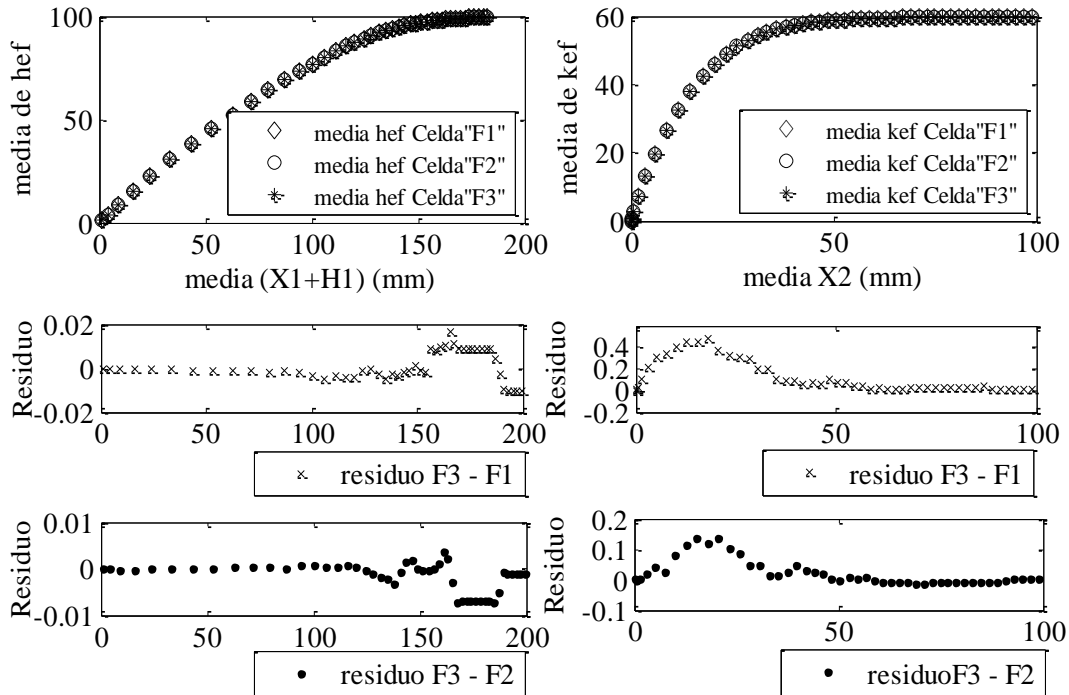
del parámetro efectivo de un conjunto de realizaciones no dependerá de manera relevante del tamaño de la celda de modelación.



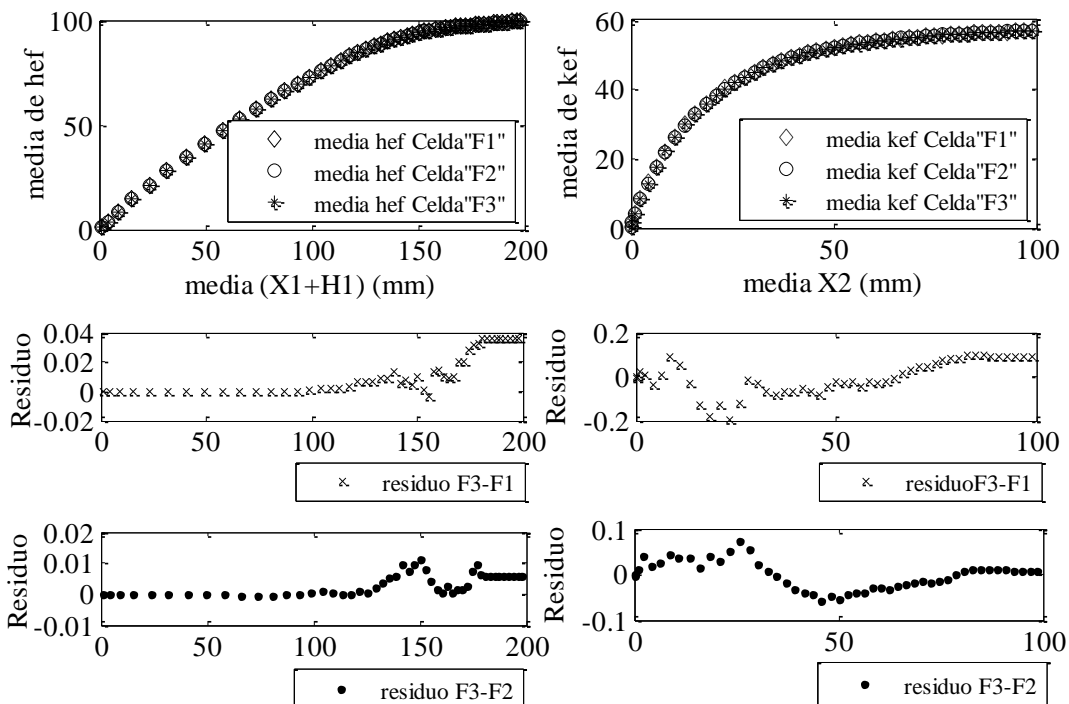
**Figura 5-11.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 0.5$  e independencia espacial.



**Figura 5-12.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 1$  e independencia espacial.



**Figura 5-13.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 1.5$  e independencia espacial.



**Figura 5-14.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 2$  e independencia espacial.



## 5.3 ESCALAMIENTO DE PARÁMETROS CON DEPENDENCIA ESPACIAL

En la sección 5.2 se estudió el escalamiento de parámetros asumiendo una longitud de correlación (escala integral) igual a cero; en esta sección se analiza cómo está relacionado el tamaño de celda y la longitud de correlación espacial entre los valores de los parámetros a escala de detalle con el comportamiento de los parámetros efectivos asumidos como un proceso estocástico.

### 5.3.1 ERGODICIDAD E IMPORTANCIA DE LA INCERTIDUMBRE DE LOS PARÁMETROS EFECTIVOS

En el caso de los campos aleatorios con dependencia espacial hay una influencia mucho más dominante de la incertidumbre del valor de los parámetros a escala de detalle sobre la incertidumbre de los parámetros efectivos a escala de modelación. Lo cual se debe a que si el error de estimación de un valor a nivel de sub-celda es alto, es muy probable que los valores de otras sub-celdas contenidas en el radio de influencia de su longitud de correlación también tengan errores de estimación altos, lo que se transfiere como error de estimación al parámetro efectivo.

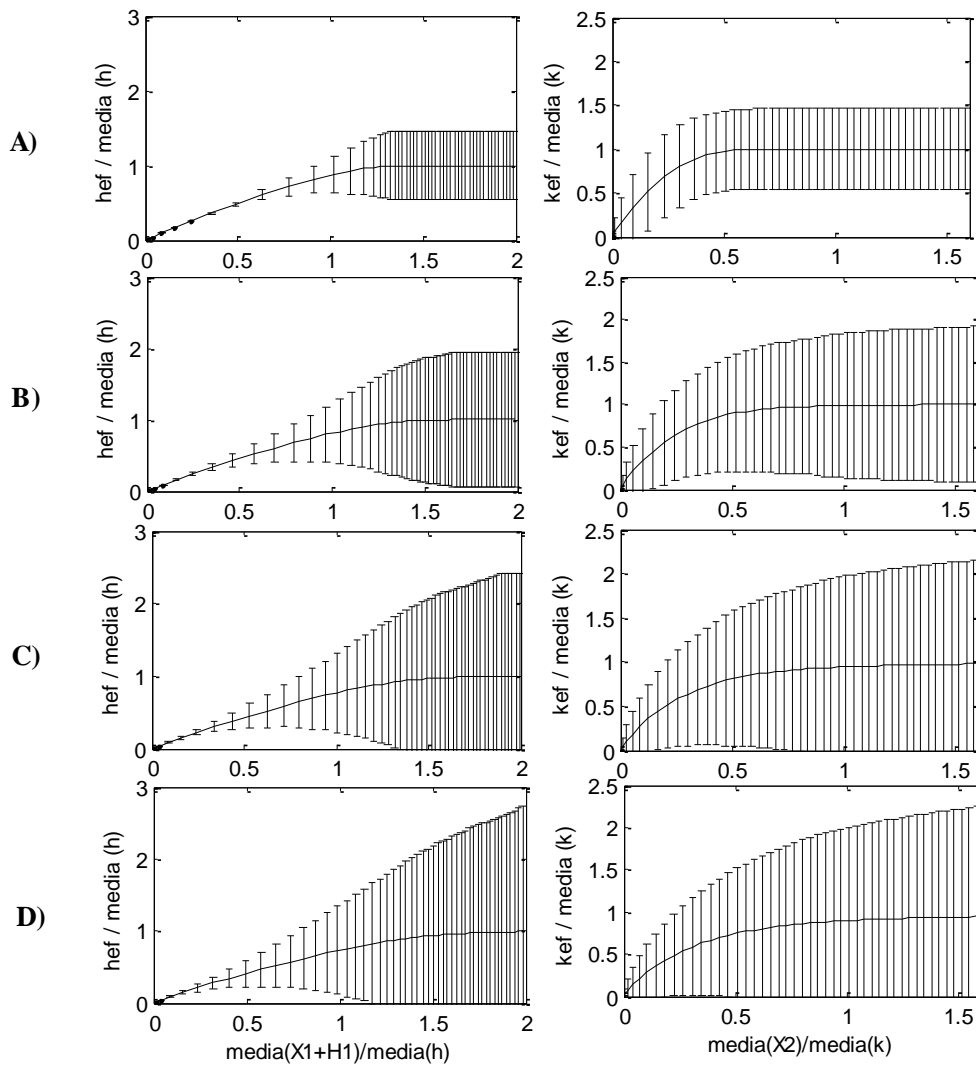
Mientras exista un alto grado de incertidumbre en el valor de los parámetros a nivel de sub-celda, habrá más incertidumbre en los parámetros efectivos en contraste con los campos de parámetros no correlacionados espacialmente. En la **Figura 5-15** se compara el rango de variación del parámetro efectivo calculado con base en diferentes niveles de variabilidad en la estimación del parámetro a nivel de sub-celda (A, B, C y D), se observa que cuando hay más incertidumbre en la estimación de los parámetros a escala de detalle, dicha incertidumbre se transfiere a la escala de celda en un alto porcentaje. Para el parámetro  $h$ , la reducción en la varianza de estimación es del 14% para campos con un  $CV = 0.5$  a escala  $E1$ , del 12.1% para campos con  $CV = 1$ , del 10.7% para campos con un  $CV = 1.5$  y del 24.8% para campos con un  $CV = 2$ . Con lo cual se comprueba que al agregar de escala  $E1$  a  $E2$  hay una disminución en la incertidumbre del parámetro.

Para celdas de  $30 \times 30 m^2$  hay una mayor disminución de la incertidumbre en el escalamiento de los parámetros: para  $h$ , la reducción en la varianza de estimación es de 36.8% para campos con un  $CV = 0.5$  a escala  $E1$ , del 32.51% para campos con un  $CV = 1$ ; del 28.9% para campos con un  $CV = 1.5$  y del 41.3% para campos con un  $CV = 2$ . En la **Figura 5-16** se presenta la distribución de la esperanza estandarizada del parámetro efectivo  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$ , y su coeficiente de variación para un conjunto de realizaciones en función del tiempo.

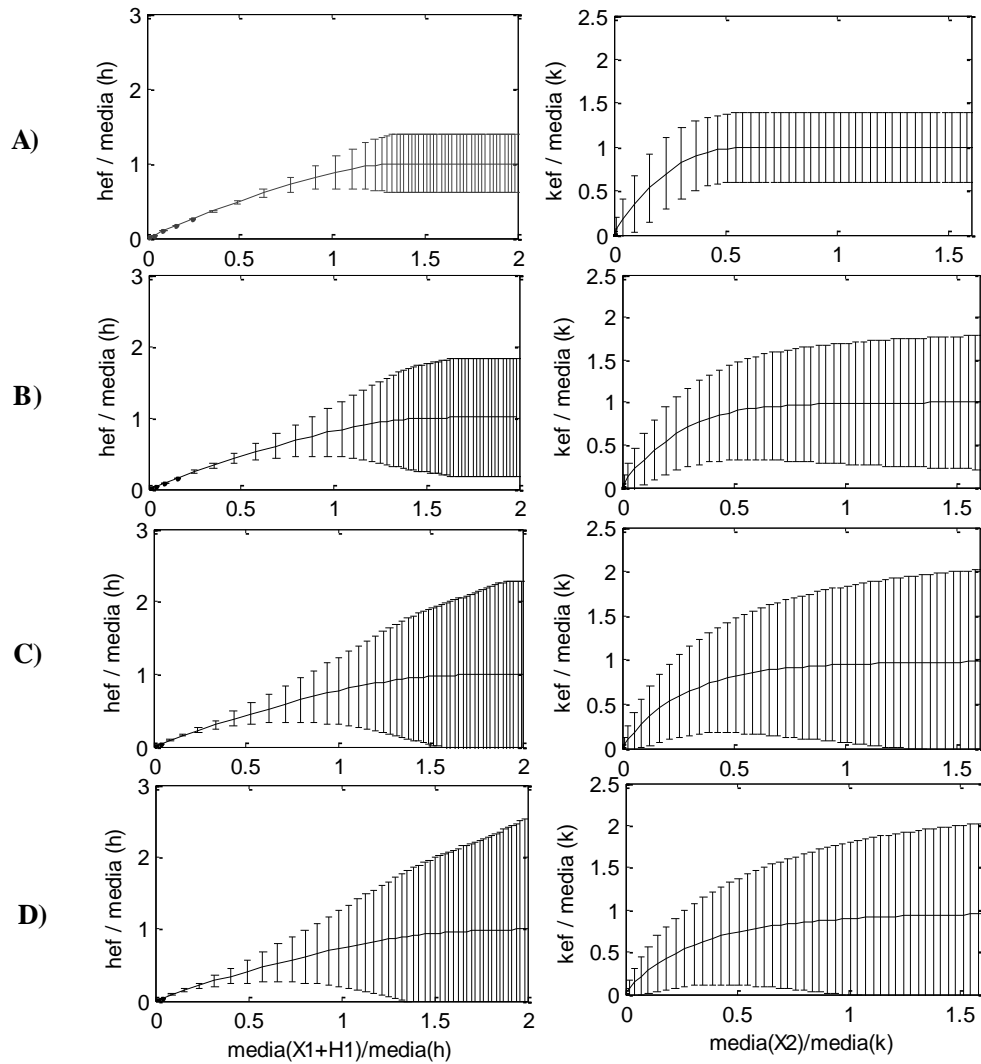
En el caso de celdas de  $90 \times 90 m^2$ , la disminución de la incertidumbre es mayor en comparación con las celdas de tamaños más pequeños (**Figura 5-15**, **Figura 5-16** y

**Figura 5-17**); la reducción en la varianza de estimación al transferir la información de  $E1$  a  $E2$  para el parámetro  $h$  es del 71.7% en campos con un  $CV = 0.5$ , del 75.6% en campos con un  $CV = 1$ , del 78.8% para campos con un  $CV = 1.5$ , y del 84% en campos con un  $CV = 2$ . En el caso del parámetro  $k$ , el porcentaje de reducción es similar: del 71.6% para campos con un  $CV = 0.5$ , del 76.8% para campos con un  $CV = 1$ , del 82.4% para campos con un  $CV = 1.5$ , y del 88% para campos con un  $CV = 2$ . En todos los casos se observó que cuando se tiende a alcanzar la saturación los parámetros efectivos tienden a tomar el valor medio del parámetro a escala  $E1$ .

De acuerdo con estos resultados, el tamaño de celda tiene una notable influencia en la transferencia de incertidumbre entre escalas, ya que para las celdas de mayor tamaño se experimenta una significativa disminución de la varianza de estimación del parámetro (del orden de  $\sim 70$  a  $90\%$ ), mientras que para las celdas de menor tamaño la reducción en la varianza de estimación es menor (del orden de  $\sim 10$  a  $\sim 25\%$ )



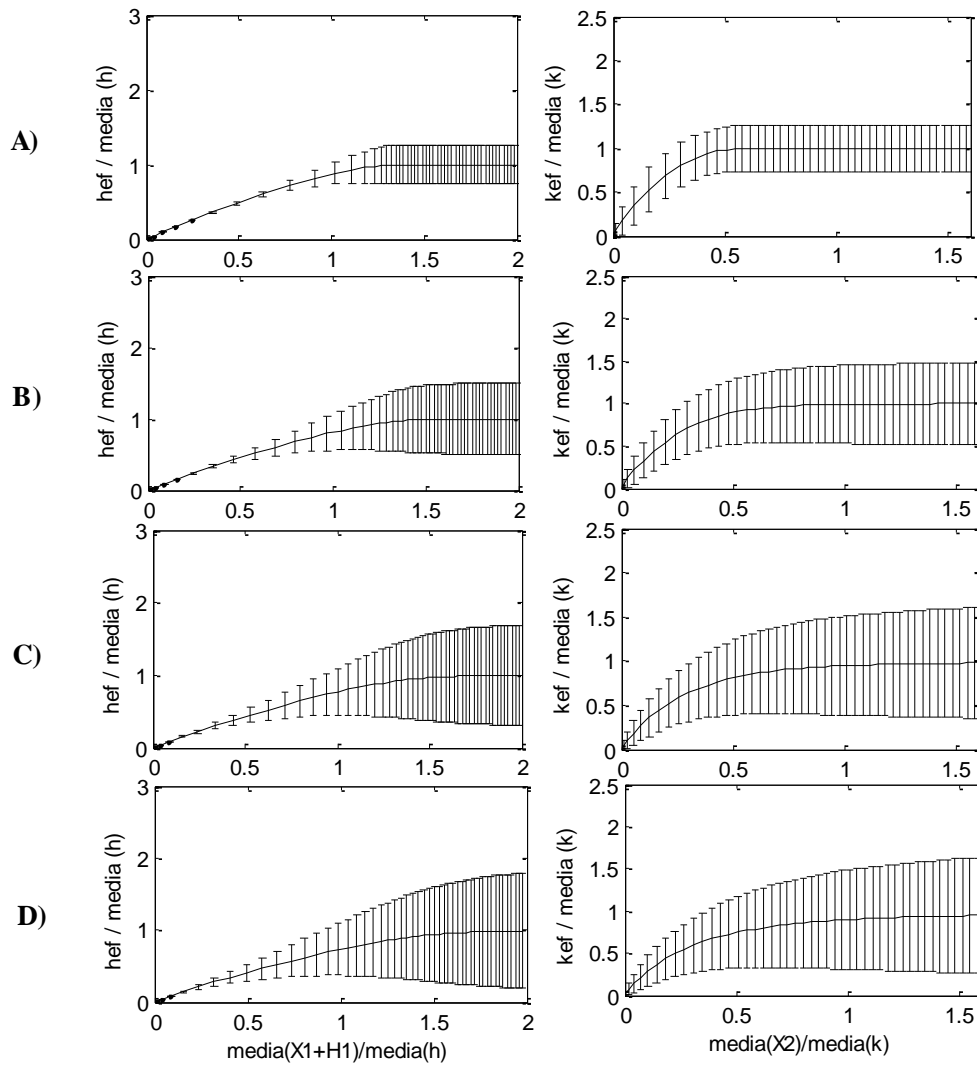
**Figura 5-15.** Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones  $\pm$  el coeficiente de variación (valores estandarizados de  $h$  y  $k$ ) en celdas de  $10 \times 10 m^2$ . A) para campos con  $CV = 0.5$  en  $E1$ . B) para campos con  $CV = 1$  en  $E1$ . C) para campos con  $CV = 1.5$  en  $E1$ . D) para campos con  $CV = 2$  en  $E1$ . En todos los casos se asumió una escala integral igual a 100m.



**Figura 5-16.** Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones  $\pm$  el coeficiente de variación (valores estandarizados de  $h$  y  $k$ ) en celdas de  $30 \times 30 m^2$ . A) para campos con  $CV = 0.5$  en  $E1$ . B) para campos con  $CV = 1$  en  $E1$ . C) para campos con  $CV = 1.5$  en  $E1$ . D) para campos con  $CV = 2$  en  $E1$ . En todos los casos se asumió una escala integral igual a 100m.

Si se toman los casos de parámetros no correlacionados de la sección 5.2, como casos especiales de dependencia espacial con longitud de correlación igual a cero, se nota que la variación de la varianza de la estimación entre escalas no depende solamente del tamaño de celda; por ejemplo, para celdas de  $90 \times 90 m^2$  con una escala integral de 100 m y un  $CV[E1] = 2$ , la reducción de la varianza de estimación del parámetro HU es de 84%, mientras que para las mismas condiciones pero con una escala integral de 0 m la reducción es de 99%.

La disminución en la varianza de la estimación del parámetro efectivo está influenciada por el tamaño de celda, ya que a pesar de que haya un cambio en la escala integral la varianza se reduce significativamente para celdas de  $90 \times 90 m^2$ . Sin embargo, la longitud de correlación también cumple un papel relevante y no pueden realizarse conclusiones consistentes sin tener en cuenta dicha influencia; por tanto, en la sección 5.3.3 se presenta un análisis para diferentes magnitudes de la escala integral en los tres tamaños de celda.



**Figura 5-17.** Parámetro efectivo promedio del conjunto de 500 realizaciones  $\pm$  el coeficiente de variación (valores estandarizados de  $h$  y  $k$ ) en celdas de  $90 \times 90 m^2$ . A) para campos con  $CV = 0.5$  en  $E1$ . B) para campos con  $CV = 1$  en  $E1$ . C) para campos con  $CV = 1.5$  en  $E1$ . D) para campos con  $CV = 2$  en  $E1$ . En todos los casos se asumió una escala integral igual a 100m.

### 5.3.2 EFECTO DEL CAMBIO DE EXTENSIÓN EN LA ESCALA DE CELDA

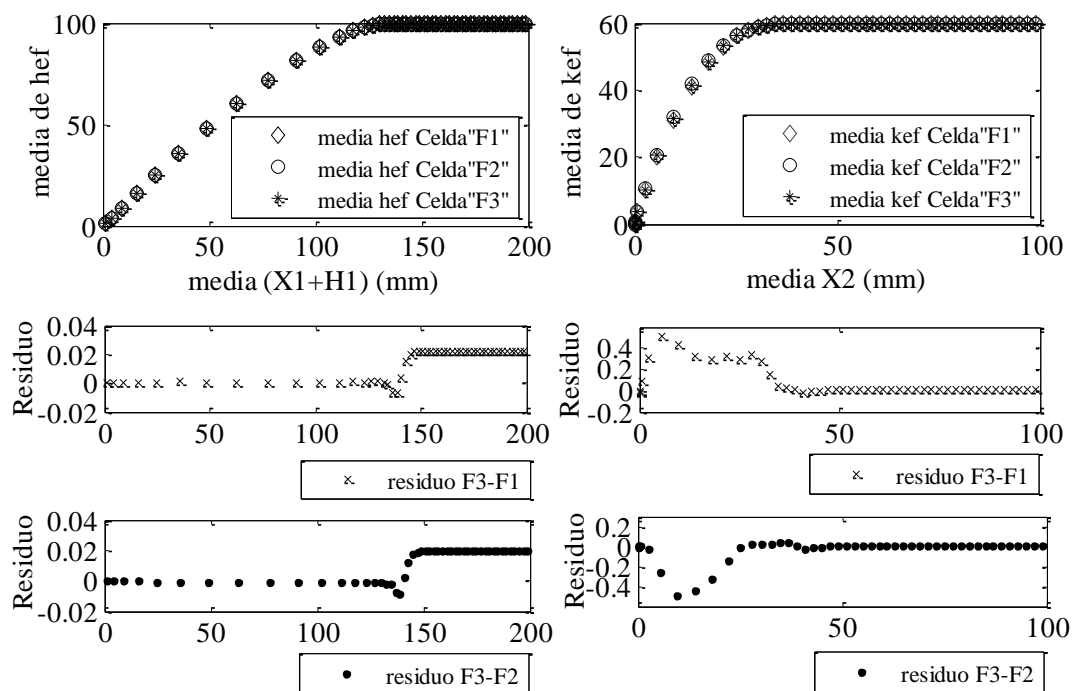
En párrafos anteriores se ha indicado que el comportamiento estocástico de los parámetros efectivos está influenciado por el tamaño de celda y la escala integral, específicamente se ha descrito cómo varía la incertidumbre de los valores de los parámetros efectivos en diferentes escalas, expresada como la varianza de estimación de cada parámetro.

Se encontró que la varianza de la estimación del parámetro efectivo (tanto en  $h_{ef}$  como en  $k_{ef}$ ) depende de manera relevante del tamaño de celda y de la escala integral que defina el grado de dependencia espacial del parámetro a escala  $E1$ .

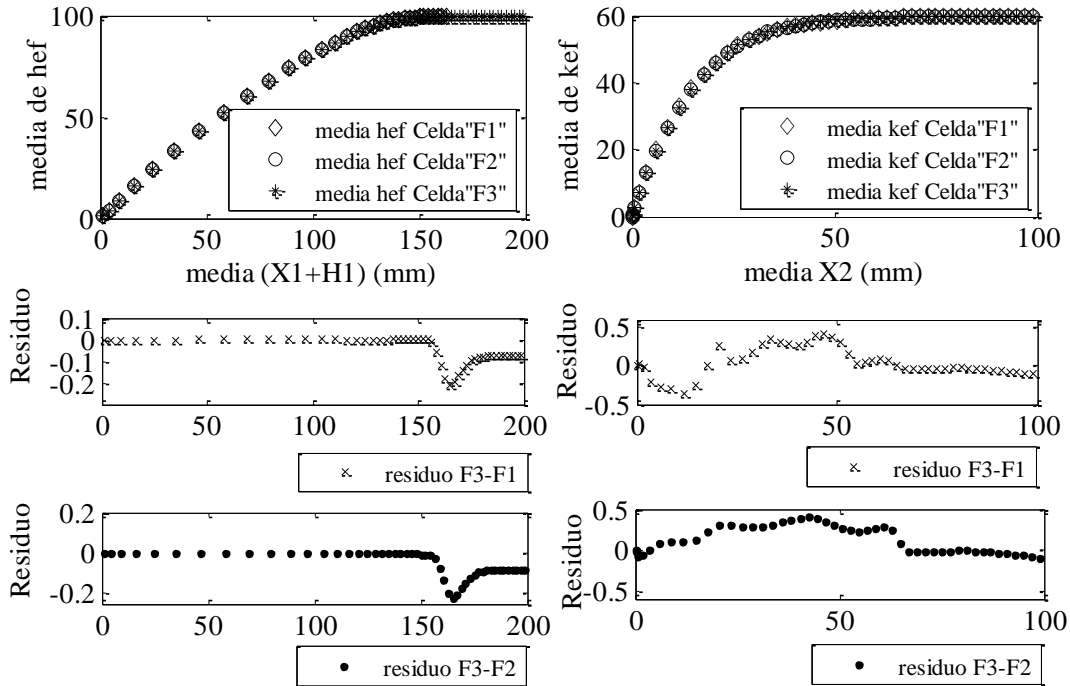
Los parámetros efectivos en celdas de  $90 \times 90 m^2$  con correlación espacial a escala  $E1$ , tienen menor incertidumbre que los parámetros efectivos de celdas con un tamaño de  $30 \times 30 m^2$  y  $10 \times 10 m^2$  calculados para un mismo nivel de incertidumbre en la escala de detalle.

La esperanza de cada proceso estocástico no presenta una dependencia dominante con respecto al tamaño de celda; las diferencias entre los valores esperados en los tres tamaños de celda no son significativos con relación al orden de magnitud de la esperanza. Sus valores oscilan entre 0.01 mm a 0.6 mm y a medida que aumenta la incertidumbre del valor de los parámetros, su valor tiende a aumentar; sin embargo el incremento de tales residuos es pequeño a medida que aumenta el rango de observación del espacio muestral para el parámetro a escala  $E1$ .

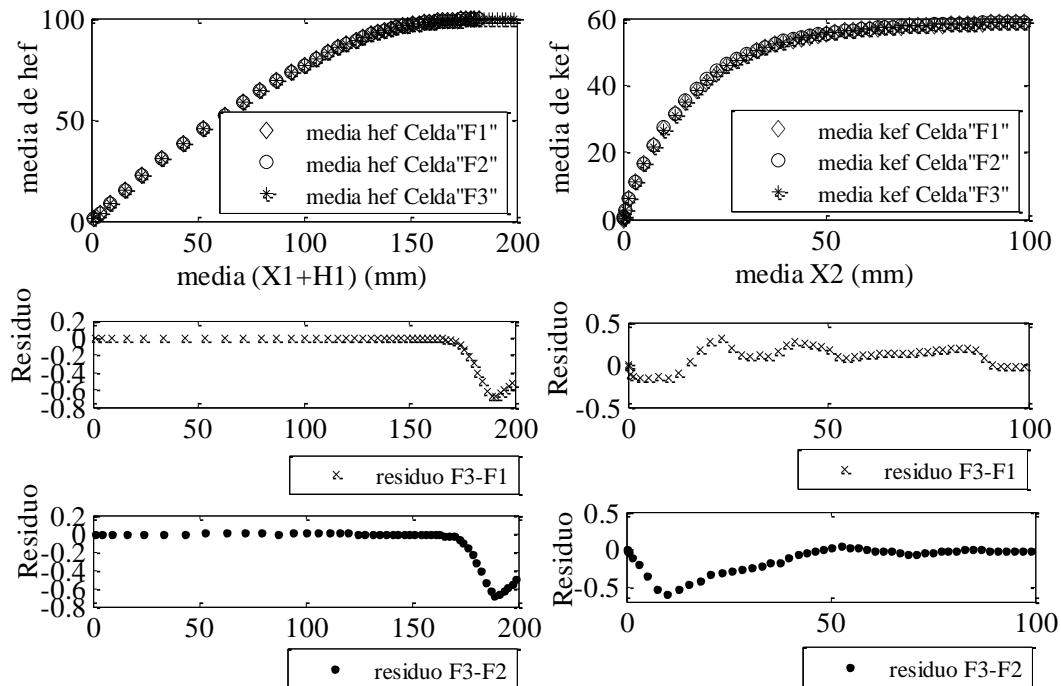
En las siguientes figuras (Figura 5-18, Figura 5-19, Figura 5-20, Figura 5-21) se presenta gráficamente la esperanza de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  para los tres tamaños de celda y los residuos con respecto al valor de la celda de mayor tamaño  $90 \times 90 m^2$ . En todos los casos se observa que la esperanza tiende a tomar un mismo valor independientemente del tamaño de la celda.



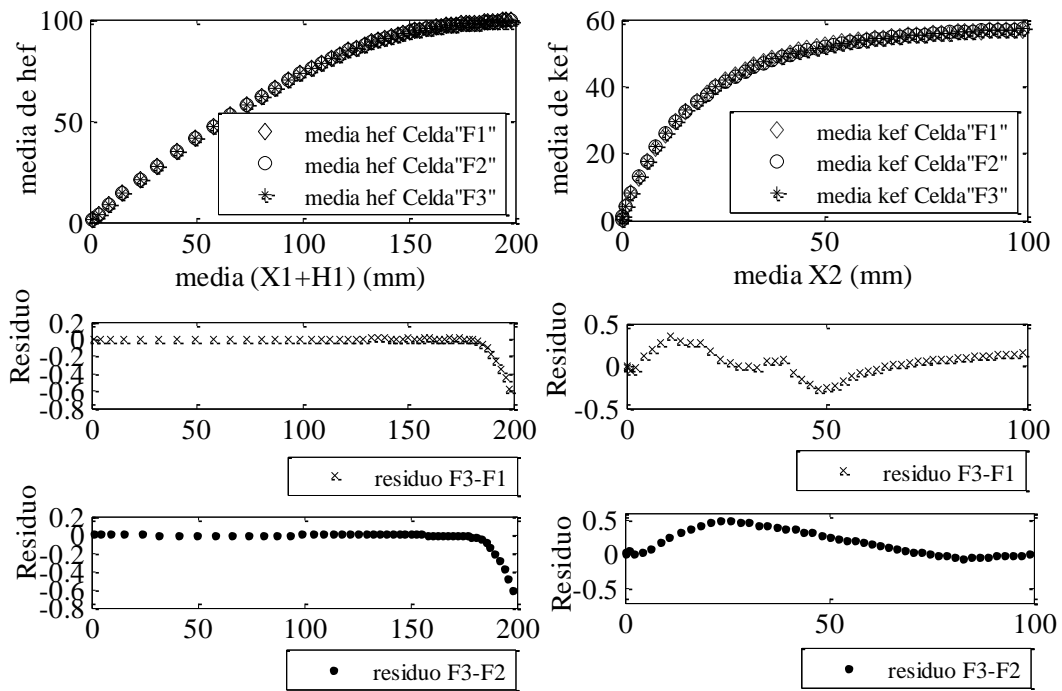
**Figura 5-18.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 0.5$  y una escala integral de 100 m.



**Figura 5-19.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 1$  y una escala integral de 100 m.



**Figura 5-20.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 1.5$  y una escala integral de 100 m.



**Figura 5-21.** Comparación de la esperanza de un conjunto de 500 realizaciones de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  en celdas de  $10 \times 10 m^2 = F1$ ,  $30 \times 30 m^2 = F2$  y  $90 \times 90 m^2 = F3$ . Los parámetros efectivos fueron calculados por modelación estocástica inversa para campos de parámetros a escala  $E1$  con un  $CV = 2$  y una escala integral de  $100 m$ .

### 5.3.3 EFECTO DE LA ESCALA INTEGRAL

El grado de dependencia espacial en la escala de detalle es un factor que condiciona notablemente la incertidumbre de los parámetros efectivos; pero como se verá a continuación, dicha influencia es relativa al tamaño de la celda. Por ejemplo: en términos del escalamiento una escala integral igual a  $10 m$  no proporciona el mismo efecto en una celda de  $30 \times 30 m^2$  que en una celda de  $90 \times 90 m^2$  o de  $10 \times 10 m^2$ .

Para un mismo tamaño de celda, a medida que se incrementa el grado de dependencia espacial (incremento en la escala integral  $a$ ), se incrementa la incertidumbre de la estimación del parámetro efectivo expresada como la varianza de estimación, debido a que las variables aleatorias a nivel de sub-celda aportan relativamente la misma información para generar el parámetro efectivo cuando  $a$  es alto con relación al tamaño de celda (Figura 5-22, Figura 5-23, Figura 5-24, Figura 5-25).

En cada una de las escalas integrales analizadas, la varianza de estimación de los parámetros efectivos toma un valor máximo que se alcanza cuando todas las celdas de todo el conjunto de realizaciones estén contribuyendo al flujo y el parámetro efectivo es igual al promedio de los valores del parámetro a nivel de sub-celda en todas las realizaciones.

El valor de la varianza de estimación del parámetro efectivo tiende a la varianza del parámetro a escala  $E1$  cuando la escala integral tiende a infinito para un tamaño de celda constante y se cumple:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} Var(h_{ef})[E2] = Var(h)[E1] \quad [5-4]$$

Para el parámetro  $k_{ef}$  se comprueba el mismo comportamiento:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} Var(k_{ef})[E2] = Var(k)[E1] \quad [5-5]$$

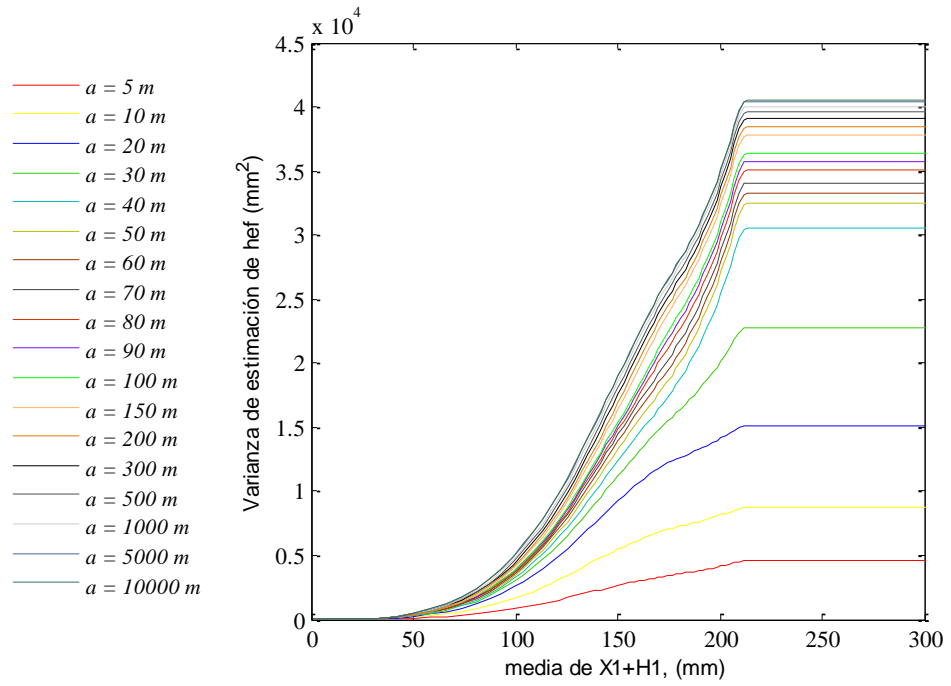
En las siguientes figuras (**Figura 5-22, Figura 5-23, Figura 5-24, Figura 5-25**) se observa dicha tendencia: para una escala integral de 1000 metros o más, la varianza de estimación del parámetro efectivo tiende a ser igual a la varianza de estimación del parámetro en la escala de detalle  $E1$  para valores menores de la escala integral, la incertidumbre de los parámetros efectivos tiende a disminuir en todos los casos analizados.

A medida que la celda es más pequeña se “acelera” la aproximación de  $Var(k_{ef})[E2]$  a su límite, en términos de que se requiere una menor escala integral para que  $Var(k_{ef})[E2]$  se aproxime a  $Var(k)[E1]$  en comparación con celdas de mayor tamaño (ídem para el caso del parámetro  $h$ ).

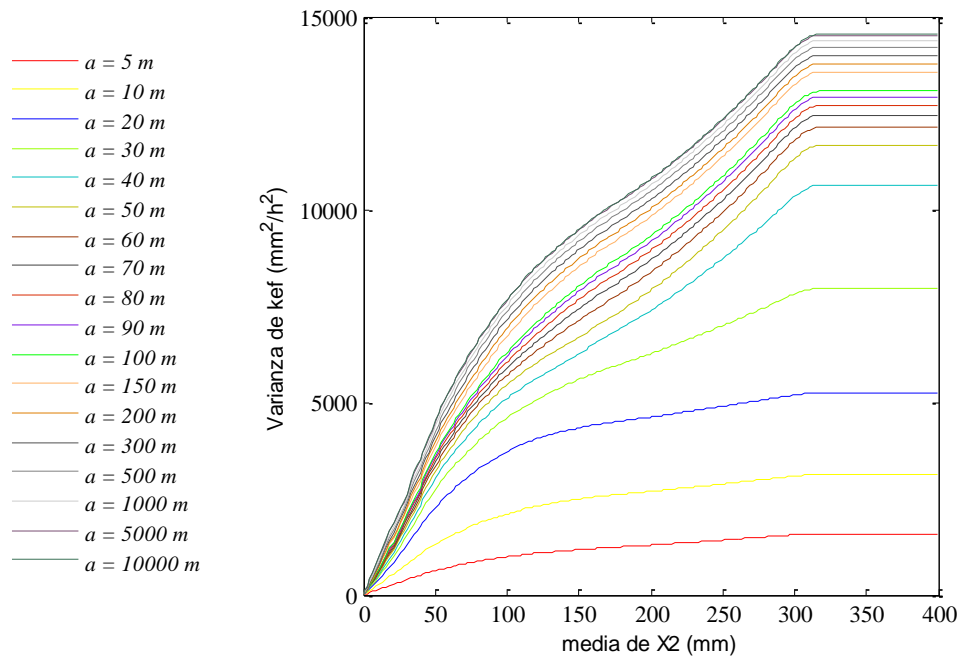
Si se tiene una escala integral de 100 metros y la incertidumbre de los valores del parámetro  $h[E1]$  expresada en términos de la varianza de su estimación es de  $4 \times 10^4 mm^2$ , la estimación del parámetro efectivo estará sujeta a una varianza de  $3.6 \times 10^4 mm^2$  si se utilizan celdas de  $10 \times 10 m^2$ , o estará sujeta a una varianza de  $2.9 \times 10^4 mm^2$  si se utilizan celdas de  $30 \times 30 m^2$ , o estará sujeta a una varianza de  $7.3 \times 10^3 mm^2$  si se utilizan celdas de  $90 \times 90 m^2$ , este mismo análisis se extiende a las otras escalas integrales tenidas en cuenta en este estudio, cuyos resultados pueden apreciarse en las respectivas figuras (**Figura 5-22, Figura 5-23, Figura 5-24, Figura 5-25**)

Por todo lo anterior, desde la perspectiva de reducir la incertidumbre de los parámetros a escala  $E2$  y bajo las hipótesis asumidas, es preferible utilizar celdas de modelación de  $90 \times 90 m^2$  cuando exista un alto grado de dependencia espacial a nivel de sub-celda, sin embargo la decisión de implementar un tamaño de celda está sujeta adicionalmente a otros efectos como la incertidumbre estructural del modelo y el error de las variables de entrada.

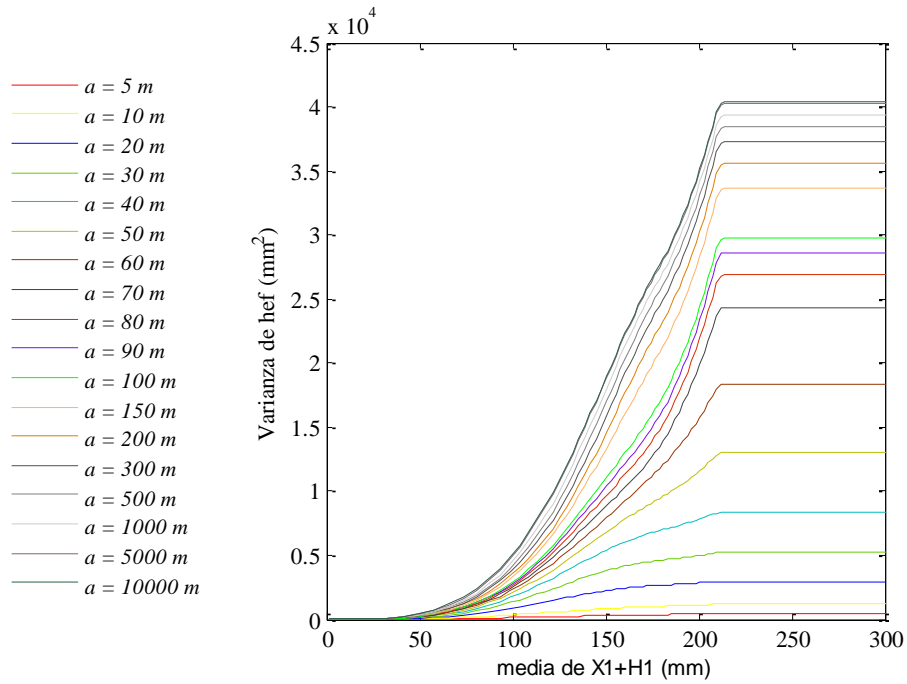




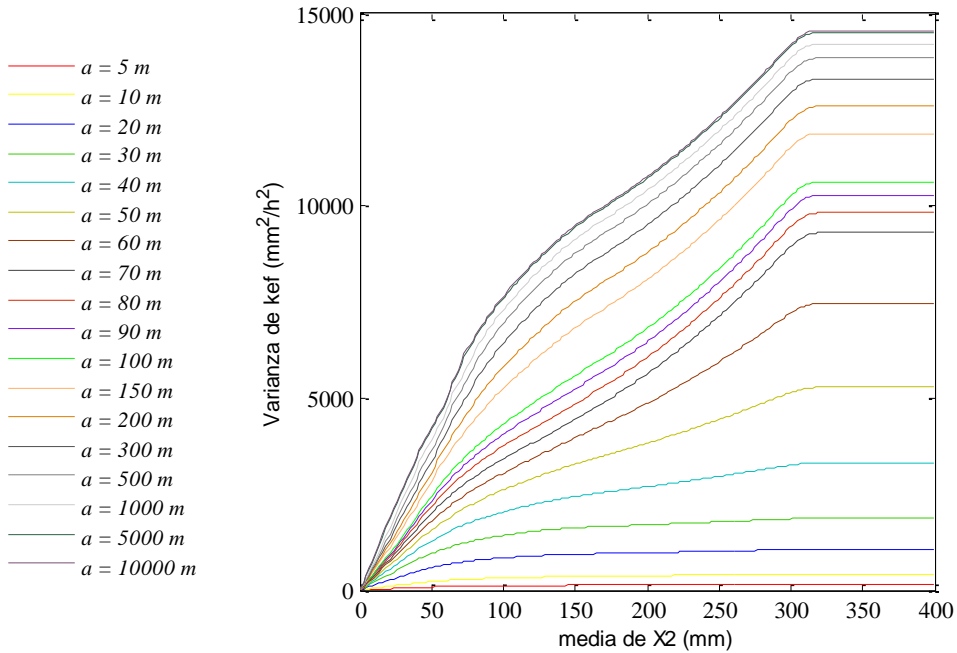
**Figura 5-22.** Varianza de  $h_{ef}$  con relación a  $X1 + H1$  para 18 escalas integrales ( $a$ ) en celdas de  $10 \times 10\text{m}^2$  con un  $\text{CV}[E1] = 2$ .



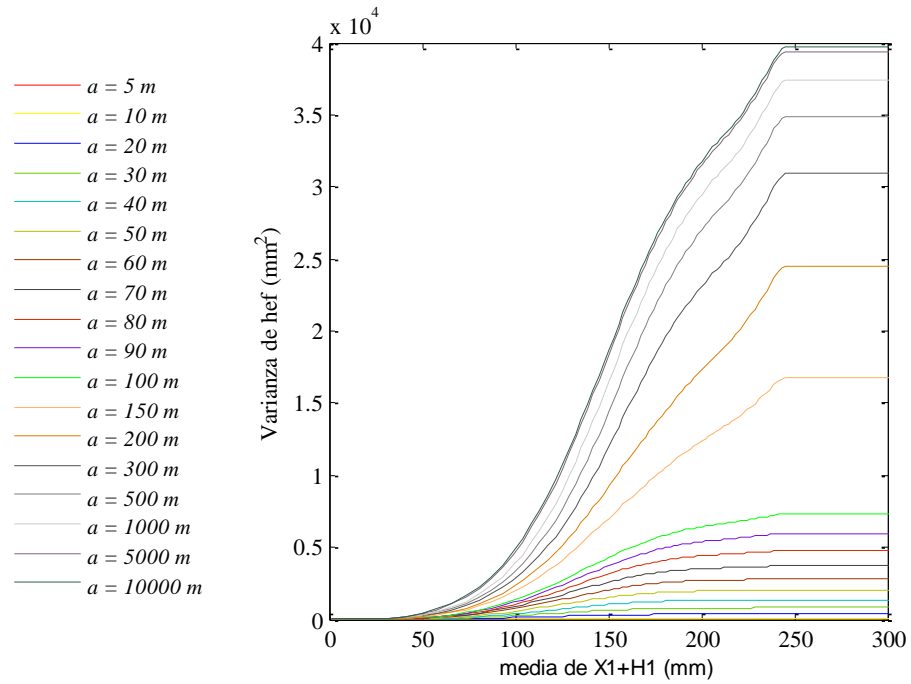
**Figura 5-23.** Varianza de  $k_{ef}$  con relación a  $X2[E2]$  para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de  $10 \times 10\text{m}^2$  con un  $\text{CV}[E1] = 2$ .



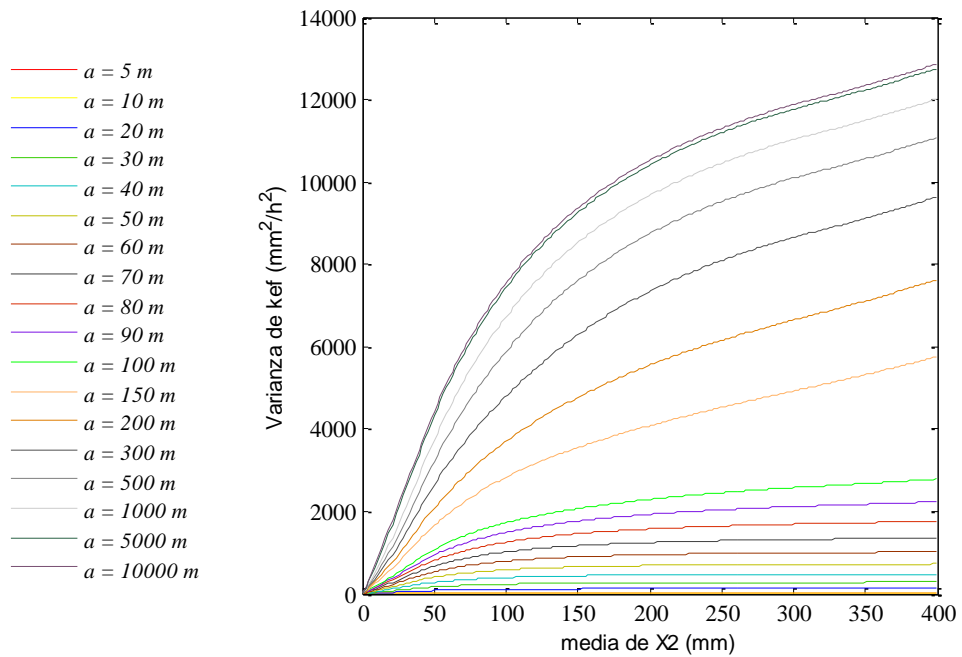
**Figura 5-24.** Varianza de  $h_{ef}$  con relación a  $X_1 + H_1$  para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de  $30 \times 30 m^2$  con un  $CV[E1] = 2$ .



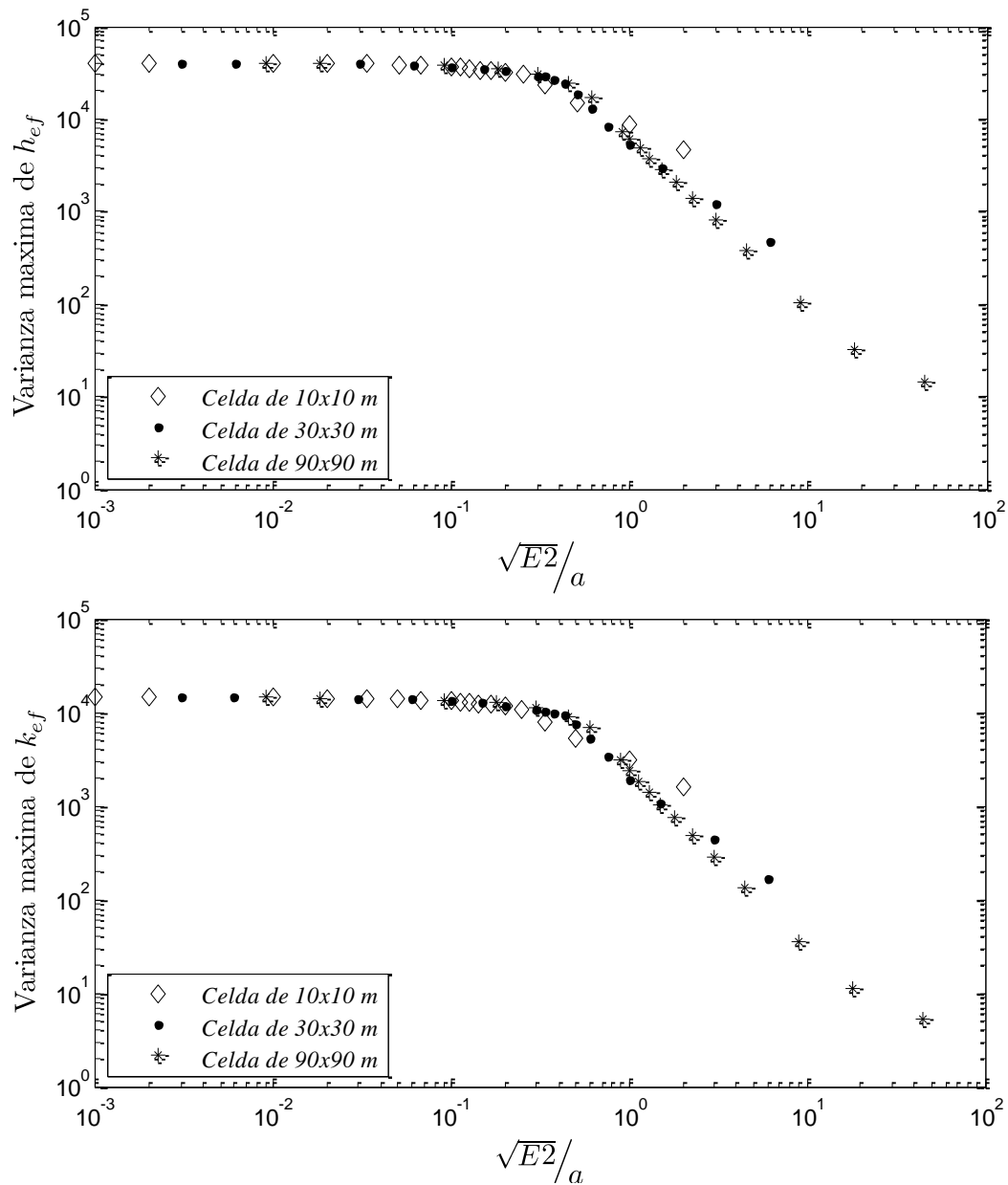
**Figura 5-25.** Varianza de  $k_{ef}$  con relación a  $X_2$  para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de  $30 \times 30 m^2$  con un  $CV[E1] = 2$ .



**Figura 5-26** Varianza de  $h_{ef}$  con relación a  $X1 + H1$  para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de  $90 \times 90 m^2$  con un  $CV[E1] = 2$ .



**Figura 5-27** Varianza de  $k_{ef}$  con relación a  $X2$  para 18 escalas integrales ( $a$ ) diferentes en celdas de  $90 \times 90 m^2$  con un  $CV[E1] = 2$ .



**Figura 5-28.** Relación de la varianza de estimación de  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  con la longitud de correlación relativa al tamaño de celda. Representación en escala logarítmica en ambos ejes.

De acuerdo con la **Figura 5-28**, se comprueba que la varianza de estimación de los parámetros efectivos disminuye notablemente a medida que la relación  $\sqrt{E2}/a$  se hace más grande. Por tanto, se recomienda emplear tamaños de celda mayores al valor de la longitud de correlación para disminuir el efecto del error de estimación de los parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  al menos en un orden de magnitud. Por contra, La incertidumbre del parámetro efectivo tiende a aumentar a medida que disminuye la relación  $\sqrt{E2}/a$ , llegando hasta un valor asintótico cuando ocurre:  $\sqrt{E2} < a$ .

La tendencia a la invariancia en los valores de los parámetros efectivos con relación al aumento de  $\sqrt{E2}/a$  está directamente vinculada al concepto de REA (Representative Elementary Area). Cuando las variaciones en los valores de los

parámetros efectivos son pequeñas (coeficientes de variación  $\leq 0.038$  para valores  $\sqrt{E^2}/a \geq 45$ ) se alcanza un tamaño de celda que toma las características descritas por Wood et al. (1988) para REA, y recientemente presentadas por Martínez et al. (2007):

1. Deben ser distinguibles tres dominios diferentes correspondientes al tamaño de la matriz de suelo en donde la propiedad o parámetro es evaluada/o. Por tanto, debe satisfacerse la inecuación:  $l \square D \square L$ , donde  $l$  es el soporte de la variación significativa dentro de la unidad evaluada ( $EI$ ),  $L$  es el soporte de la variación lenta, heterogeneidades gruesas o variabilidad por organización (Unidad cartográfica), y  $D$  es el tamaño de REA.
2. Los valores de los parámetros efectivos obtenidos para REA deben ser independientes de su tamaño, o variar muy poco a medida que se incrementa el tamaño de REA.
3. El REA debe ser indiferente con respecto al parámetro analizado y debe ser invariante con relación al tiempo y localización.
4. Los valores deben constituir campos continuos y diferenciables sobre los dominios temporal y espacial.

El tamaño de REA es relativo a la longitud de correlación y no se corresponde con un valor absoluto. Por tanto, la característica 3 descrita anteriormente queda definida en términos relativos.

El alcance de estos resultados se limita al proceso de producción de escorrentía ya que no se ha tenido en cuenta la propagación del flujo a través de cauces. Por lo cual, el tamaño de REA está condicionado al tamaño de la ladera.



## 6. ESCALAMIENTO DE PARÁMETROS CON MODELOS DETERMINÍSTICOS

Uno de los propósitos fundamentales al estudiar el escalamiento de los parámetros de un modelo, es encontrar una relación matemática que permita cuantificar la transferencia de información con respecto al comportamiento de los parámetros a través de diferentes escalas (en este caso escalas espaciales).

En esta sección se presenta una estimación de los parámetros efectivos a escala de celda ( $90 \times 90 m^2$ ) teniendo en cuenta la variabilidad espacial del parámetro dentro de la celda. Se ajustaron varios modelos matemáticos para estimar los parámetros efectivos  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$ , con base en los campos de parámetros generados por simulaciones estadísticas y los valores de las variables de salida obtenidas por simulación inversa. La función objetivo minimizada por el método cuasi-Newton fue el error cuadrático medio para todos los casos. En algunos casos se empleó un algoritmo genético para tener mayor fiabilidad de que el mínimo encontrado fuera global.

### 6.1 CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO ESTÁTICO EFECTIVO

La capacidad máxima de almacenamiento estático efectivo  $h_{ef}$  en el intervalo de tiempo  $t$ , es función del input de precipitación  $X_1[E2]$  en  $t$ , del almacenamiento estático  $H_1[E2]$  en  $t$ , del promedio de la capacidad máxima de almacenamiento estático a nivel de sub-celda  $\bar{h}[E1]$  y de los parámetros de la distribución Lognormal de  $h$  en la escala  $E1$ :  $\mu$  y  $\sigma$ .

La dependencia que muestra  $h_{ef}$  de los valores de  $X_1[E2]$  y  $H_1[E2]$  explica su variabilidad en el tiempo; su dependencia con relación a  $\bar{h}[E1]$  se debe a que éste es el valor máximo que puede tomar el parámetro efectivo cuando todas las sub-celdas están contribuyendo al flujo; y su dependencia de  $\mu$  y  $\sigma$  de  $h[E1]$  expresa la variación en el grado de curvatura de la función, como consecuencia de un aumento o disminución en la variabilidad espacial de  $h$  a escala de detalle.

Debido a que la forma de la función del parámetro  $h$ , representa una curva de crecimiento exponencial con una asíntota superior, se realizaron optimizaciones para cinco variedades de modelos de crecimiento con cuatro o menos parámetros (en el Apéndice I se hace una presentación de los modelos que fueron probados y rechazados). El modelo que mejor representa el comportamiento del parámetro

efectivo  $h_{ef}$  en función de las variables mencionadas anteriormente es el siguiente:

$$h_{ef}[E2]_t = (X_1[E2]_t + H_1[E2]_t) \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{\ln(X_1[E2]_t + H_1[E2]_t) - \mu}{\sigma} \right] \right\} + \bar{h}[E1] \left\{ \Phi \left[ \frac{\ln(X_1[E2]_t + H_1[E2]_t) - \mu}{\sigma} - \omega_1 \mu^{\omega_2} \sigma \right] \right\} \quad [6-1]$$

donde,

$h_{ef}[E2]_t$  = Capacidad de almacenamiento estático efectivo en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros

$X_1[E2]_t$  = Precipitación en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros

$H_1[E2]_t$  = Almacenamiento estático en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros

$\Phi$  = Función de densidad acumulada de la distribución normal estándar

$\mu, \sigma$  = Parámetros de la función de distribución Lognormal del parámetro hidrológico  $h$  a nivel de sub-celda

$\bar{h}[E1]$  = Promedio de  $h$  a nivel de sub-celda

$\omega_1$  = Parámetro de la ecuación [6-1]

$\omega_2$  = Parámetro de la ecuación [6-1]

La anterior ecuación combina la influencia de  $X_1$ ,  $H_1$  y el promedio de  $h$  asignándole pesos a estas variables. Dichos pesos están en función de  $X_1$ ,  $H_1$  y la variabilidad del parámetro “ $h$ ” a nivel de subcelda expresada con  $\mu$  y  $\sigma$ . Los parámetros  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de la ecuación [6-1] fueron calculados mediante un procedimiento de optimización sin restricciones. Aplicando el método cuasi-Newton se minimizó el error cuadrático medio:

$$FO = \frac{\sum (O_i - E_i)^2}{N} \quad [6-2]$$

donde,

$O_i$  = Valor de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa

$E_i$  = Valor del  $h_{ef}$  estimado por el modelo [6-1] con valores iniciales aleatorios para  $\omega_1$  y  $\omega_2$

$N$  = tamaño de la muestra empleada en la optimización

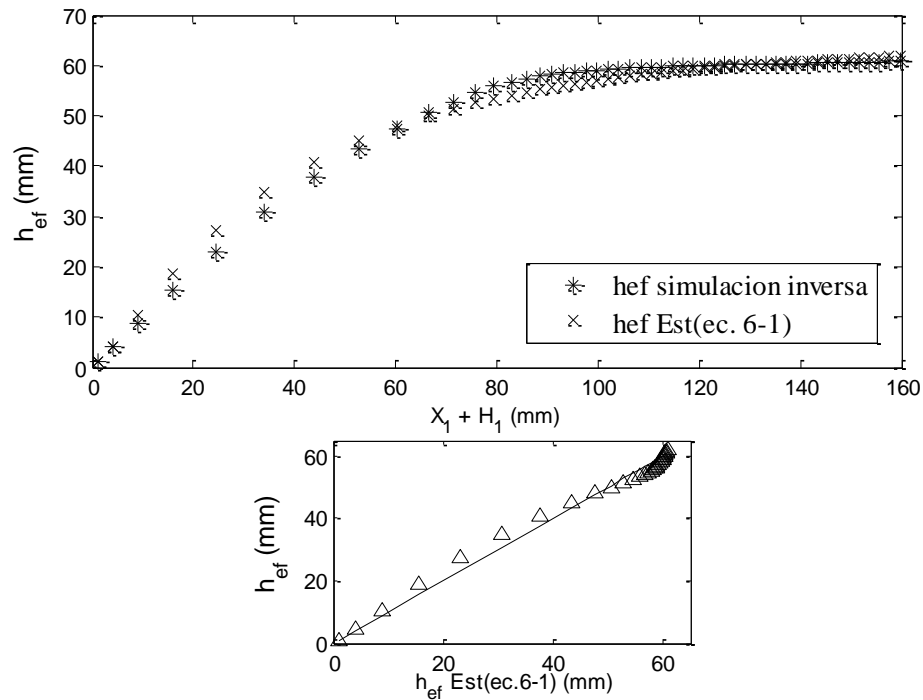
Resultando  $\omega_1 = 0.93$  y  $\omega_2 = -0.47$ .

Todas las optimizaciones se realizaron con el método cuasi-Newton; sin embargo, para asegurar que los puntos críticos encontrados fueran globales, en algunos casos se empleó el algoritmo genético disponible en la versión 7.7.0.471(R2008b) de MATLAB, utilizando 50 generaciones en la fase reproductiva.

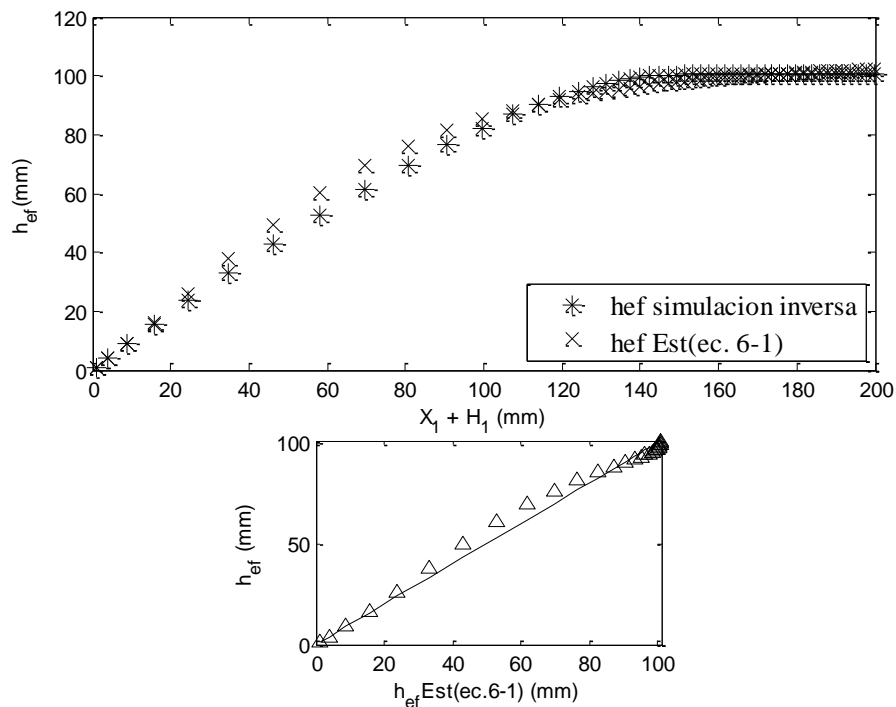
La expresión [6-1] representa de manera consistente y robusta la tendencia de los diferentes valores que toma  $h_{ef}$  para un amplio rango de coeficientes de variación



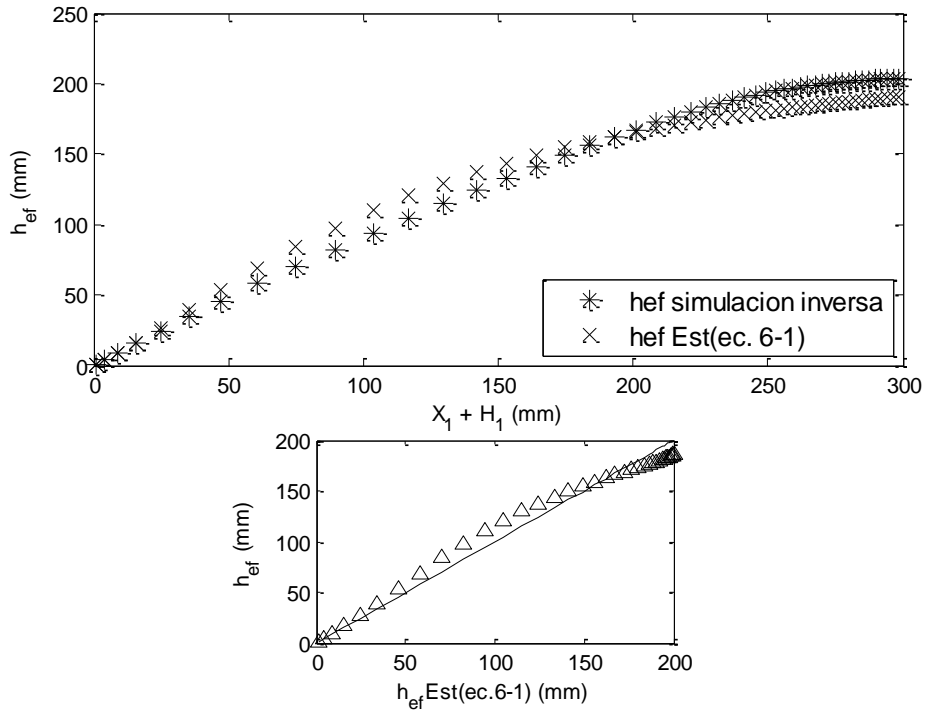
de  $h$  a nivel de sub-celda, y con un mínimo número de parámetros. En las figuras 6-1 a 6-10, se compara el comportamiento de la ecuación [6-1] con los valores calculados por solución del problema inverso para diversos casos, con coeficientes de variación de 0.89 a 3.7. De manera general se observa que la estimación de  $h_{ef}$  con la ecuación [6-1] es fiable y reproduce la tendencia del parámetro efectivo.



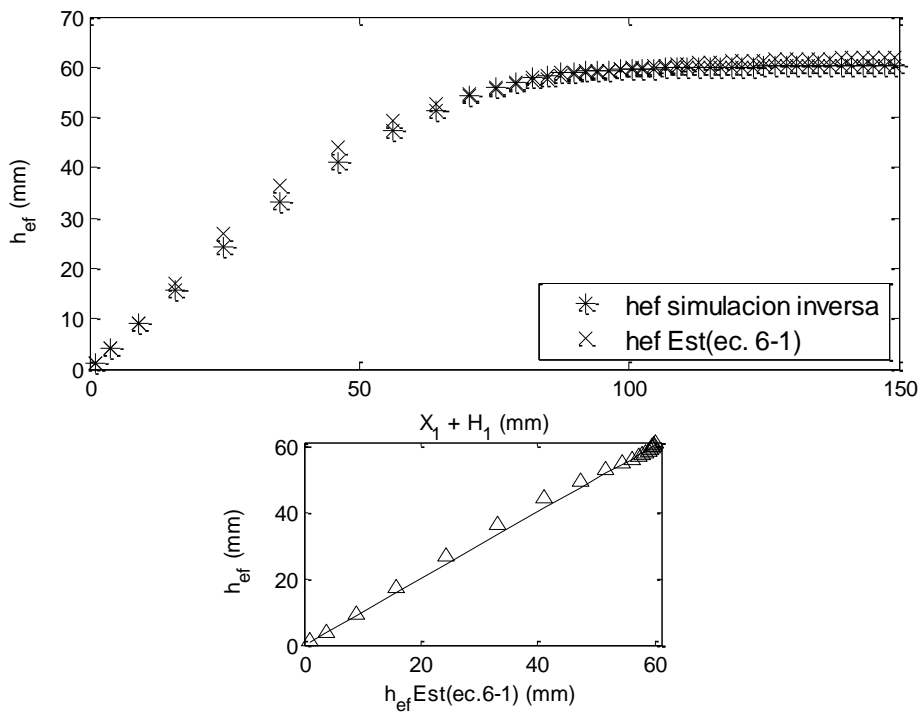
**Figura 6-1.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 61.23 mm y  $CV = 1.54$ .



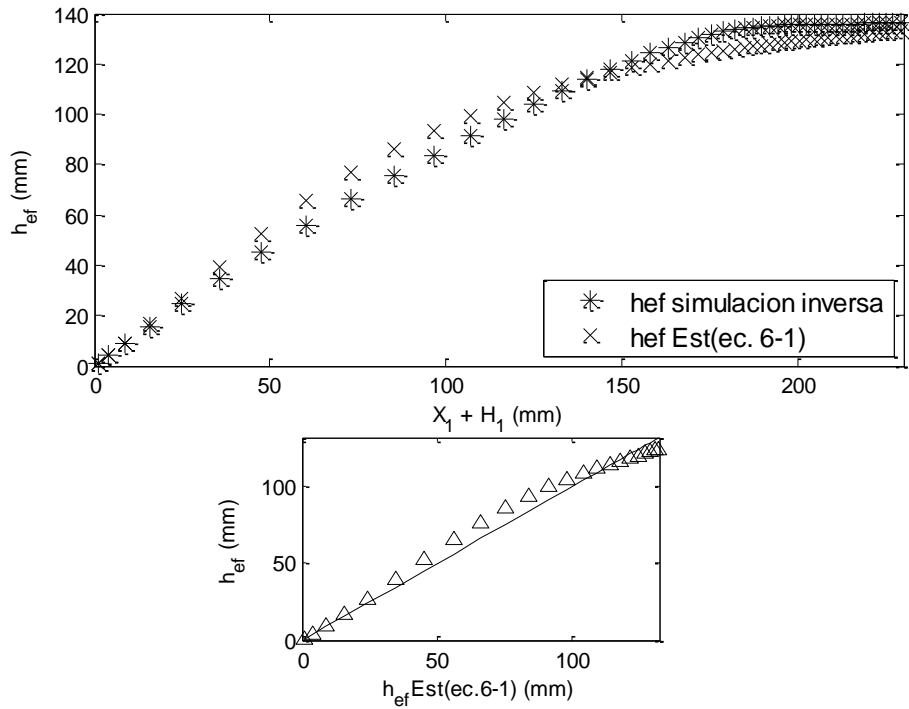
**Figura 6-2.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 100.8 mm y  $CV = 0.89$ .



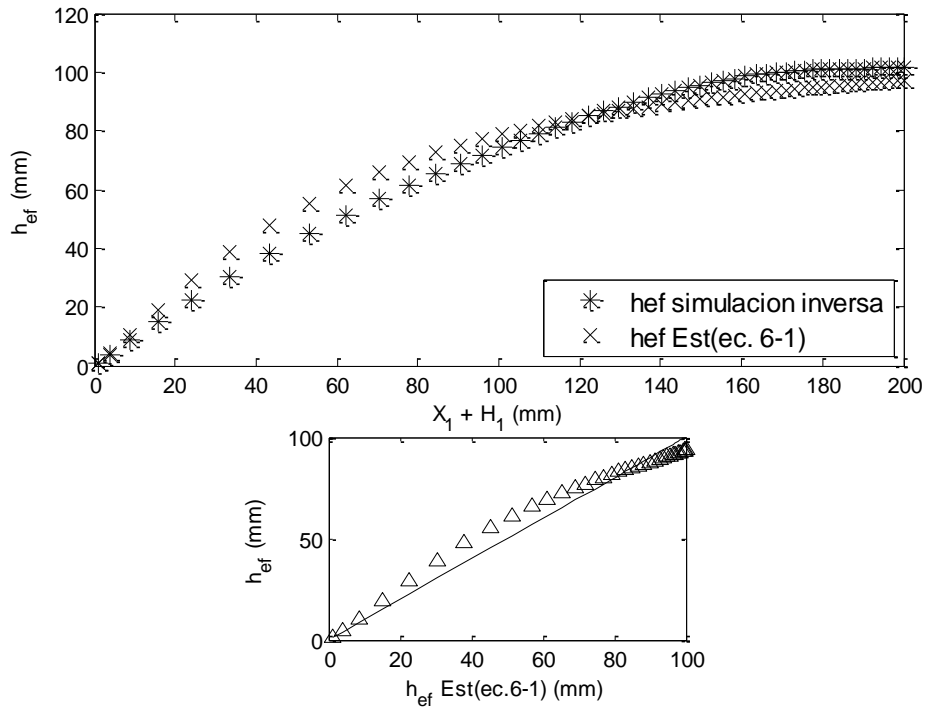
**Figura 6-3.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 205.4 mm y CV = 1.24.



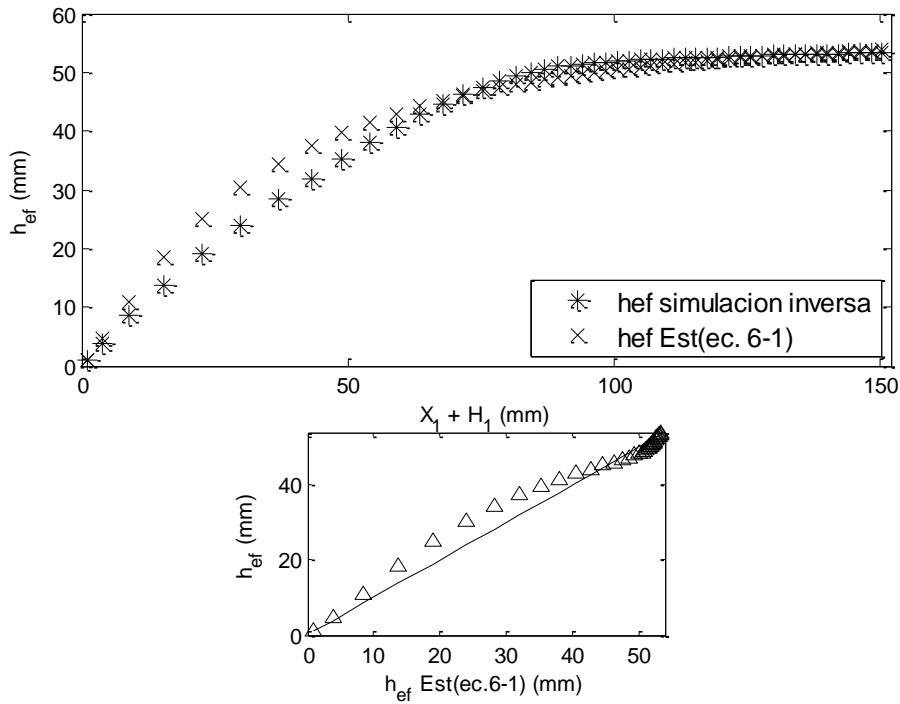
**Figura 6-4.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 60.3 mm y CV = 0.9.



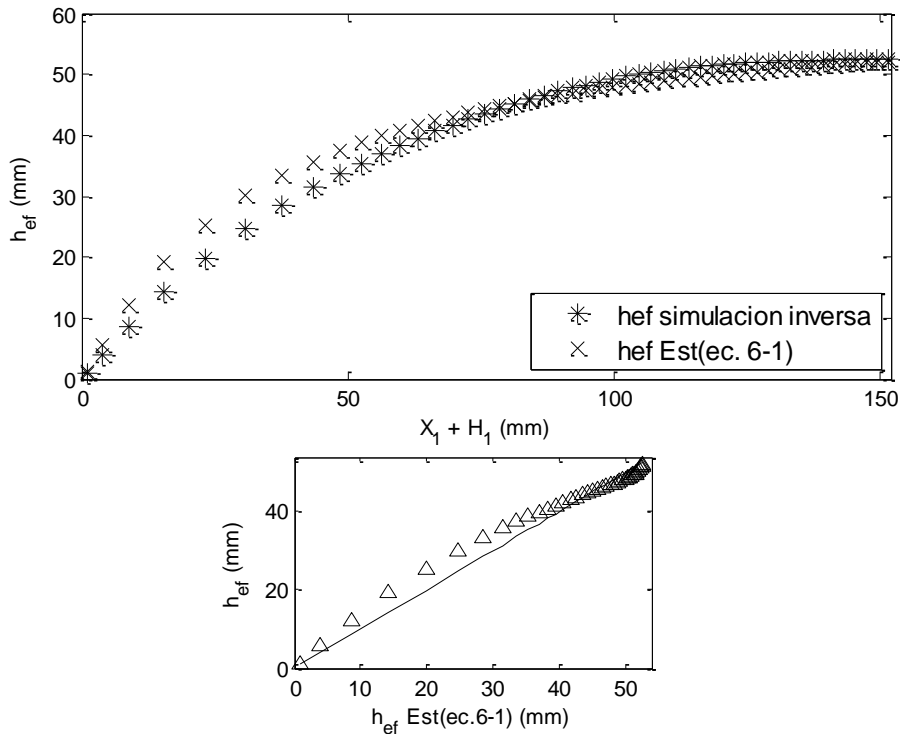
**Figura 6-5.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 136.7 mm y CV = 1.1.



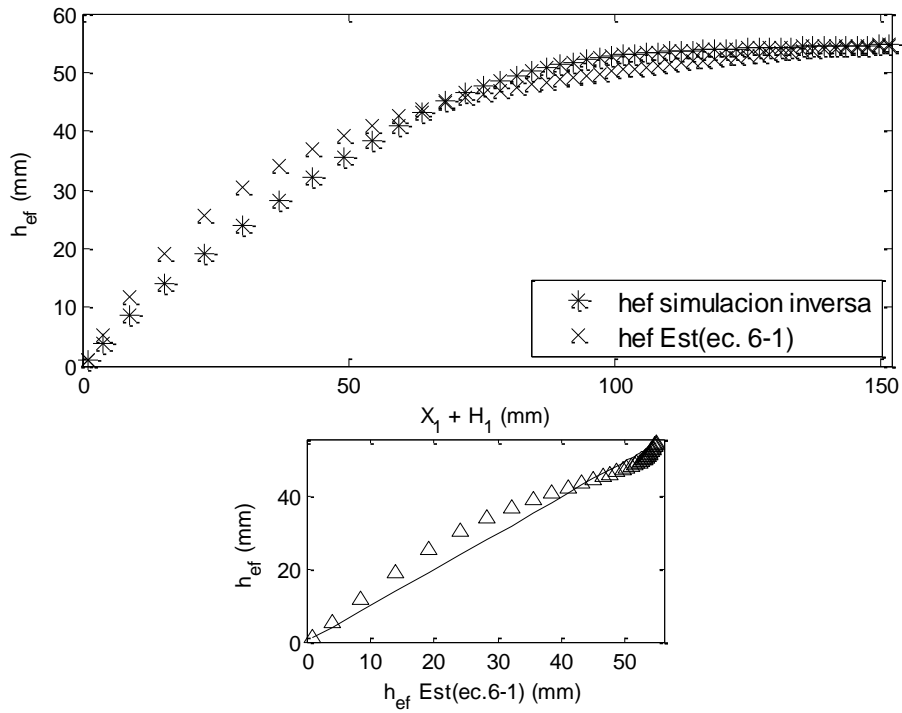
**Figura 6-6.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 101.4 mm y CV = 1.72.



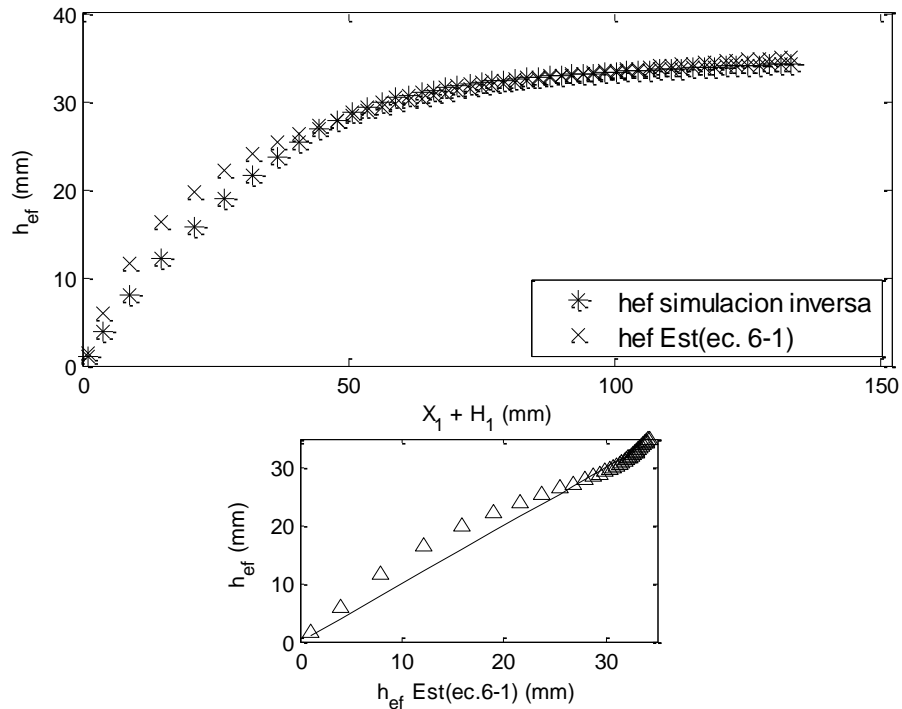
**Figura 6-7.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 53.5 mm y  $CV = 1.85$ .



**Figura 6-8.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 53.9 mm y  $CV = 2.91$ .



**Figura 6-9.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 55.9 mm y CV = 2.49.



**Figura 6-10.** Comparación de  $h_{ef}$  calculado por simulación inversa y la estimación hecha con la ecuación [6-1] para un campo  $h[E1]$  con promedio 35.6 mm y CV = 3.74.

## 6.2 CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA SATURADA EFECTIVA

La conductividad hidráulica saturada efectiva  $k_{ef}$  en el intervalo de tiempo  $t$ , es función del input de precipitación excedente  $X_2[E2]$  en  $t$ , del valor promedio de las conductividades hidráulicas saturadas a nivel de sub-celda  $\bar{k}[E1]$  y de la desviación estándar de  $k$  en la escala de detalle  $\sigma(k[E1])$ .

El modelo matemático que presenta un mejor comportamiento para reproducir la dependencia del escalamiento de  $k_{ef}$  es de estructura exponencial con un comportamiento asintótico en  $\bar{k}[E1]$  (ecuación [6-3]). En dicha ecuación se tiene en cuenta a la influencia del valor promedio de  $k$  y el valor de  $X_2$  en cada intervalo de tiempo. El peso de cada una de estas variables depende de la dispersión de los valores de  $k$  a nivel de subcelda y del valor que tenga  $X_2$  en cada intervalo de tiempo.

$$k_{ef}[E2]_t = \bar{k}[E1] \times \left\{ \varepsilon(X_2[E2]_t, \alpha \times \sigma(k[E1])) \right\} - (X_2[E2]_t) \times \left\{ \varepsilon(X_2[E2]_t, \alpha \times \sigma(k[E1])) \right\} \quad [6-3]$$

donde,

$k_{ef}[E2]_t$  = Conductividad hidráulica saturada efectiva en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros por hora.

$X_2[E2]_t$  = Excedente de precipitación en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros.

$\bar{k}[E1]$  = Promedio de  $k$  a nivel de sub-celda.

$\varepsilon$  = Función de densidad de la distribución de probabilidad exponencial

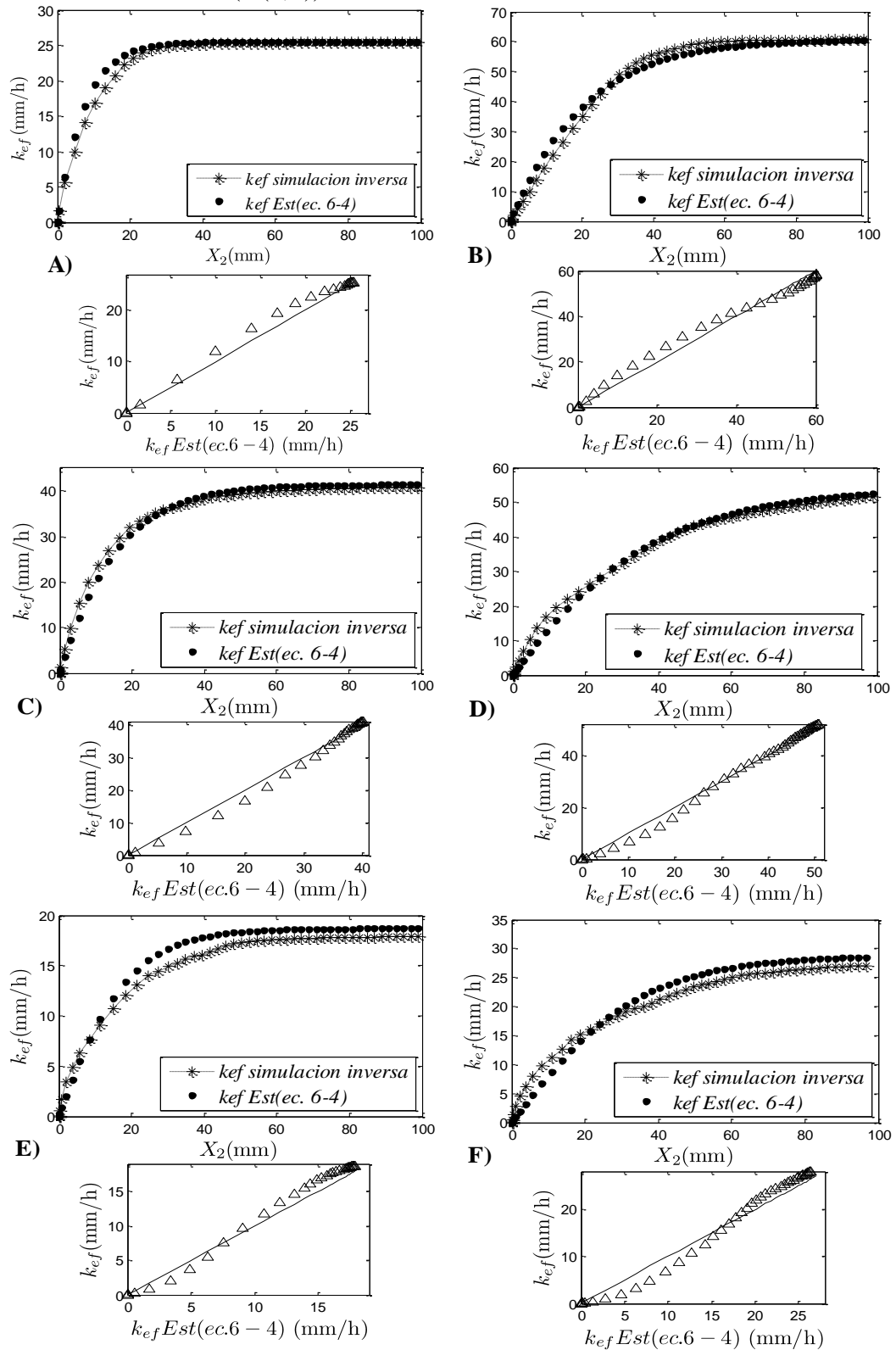
$\alpha$  = Parámetro de la ecuación [6-3]

$\sigma(k[E1])$  = Desviación estándar de  $k$  con soporte  $E1$

$\alpha$  es un parámetro constante que permite aumentar o disminuir el grado de curvatura de la función representada por la ecuación [6-3], y se obtuvo a través de la minimización del error cuadrático medio entre el valor del parámetro efectivo calculado por simulación inversa y el valor estimado por [6-3]. Resultando un valor de 0.19. Las optimizaciones se realizaron con el método cuasi-Newton y en algunos casos se empleó un algoritmo genético (disponible en la versión 7.7.0.471(R2008b) de MATLAB) obteniéndose resultados muy similares, por tanto, se optó por utilizar el método cuasi-Newton de manera generalizada ya que exige un menor tiempo de cálculo en comparación con el algoritmo genético.

En la **Figura 6-11** se presentan valores estimados de  $k_{ef}$  por la ecuación [6-3] y sus respectivos valores de referencia ( $k_{ef}$  obtenido por simulación inversa) para seis casos representativos del rango de variabilidades estudiado: para campos de parámetros  $k$  con coeficientes de variación entre 1.19 y 2.66 a escala  $E1$ . Los resultados indican que el ajuste de esta ecuación es satisfactorio para representar

el comportamiento de  $k_{ef}$ , ya que su estimación sigue la tendencia de  $k_{ef}$  para diversos casos (ej: **Figura 6-11 A, B, C, D, E, F**) y sus residuos tienden a la distribución Normal ( $N(0,\sigma)$ ).



**Figura 6-11.** Dispersión de  $k_{ef}$  estimado por la ecuación [6-3] y calculado por simulación inversa para seis casos de  $k_{[E1]}$ : **A)** Media 25.45 mm/h;  $cv = 1.19$ . **B)** Media 60.74 mm/h;  $cv = 1.36$ . **C)** Media 41.36 mm/h;  $cv = 1.45$ . **D)** Media 54 mm/h;  $cv = 2.13$ . **E)** Media 18.69 mm/h;  $cv = 2.66$ . **F)** Media 31.87 mm/h;  $cv = 2.45$ .

La ecuación [6-3] representa una buena estimación del parámetro  $k_{ef}$  dado que es robusta al no desmejorar su funcionamiento a medida que se aumenta la variabilidad a nivel de subcelda, lo cual se evidencia en que las estimaciones para coeficientes de variación superiores a 2 presentan un buen ajuste con los valores de referencia (casos E y F de la **Figura 6-11**).

Se realizaron ajustes para otras cuatro estructuras matemáticas de tendencia exponencial creciente con una asíntota superior, y se encontró que a pesar de tener más parámetros que el modelo presentado anteriormente (ecuación [6-3]) no expresan de manera adecuada la tendencia del parámetro efectivo.

## **6.3 SIMULACIÓN HIDROLÓGICA DE LA PRODUCCIÓN DE ESCORRENTÍA CON EL ESCALAMIENTO DETERMINÍSTICO**

Para evaluar la fiabilidad de los modelos de escalamiento propuestos, se elaboraron 2500 simulaciones hidrológicas para campos de parámetros  $h$  y  $k$  con diferentes grados de variabilidad a escala  $E1$  y para tres escenarios de precipitación diferentes con discretización temporal de 10 minutos, duración de 8.33 horas, misma forma e intensidad variable:

- 1) Tormenta 1: (Evento extraordinario) intensidad media de precipitación de 130.4 mm/h.
- 2) Tormenta 2: (Evento ordinario 1) intensidad media de precipitación de 32.6 mm/h.
- 3) Tormenta 3: (Evento ordinario 2) intensidad media de precipitación de 8.2 mm/h.

El hecho de catalogar un evento de precipitación como “extraordinario” u “ordinario” es relativo a un lugar específico y está asociada su probabilidad de ocurrencia. Los órdenes de magnitud de los tres escenarios de tormenta simulados son consistentes con los valores IDF para una región tropical del sistema orográfico de los Andes.

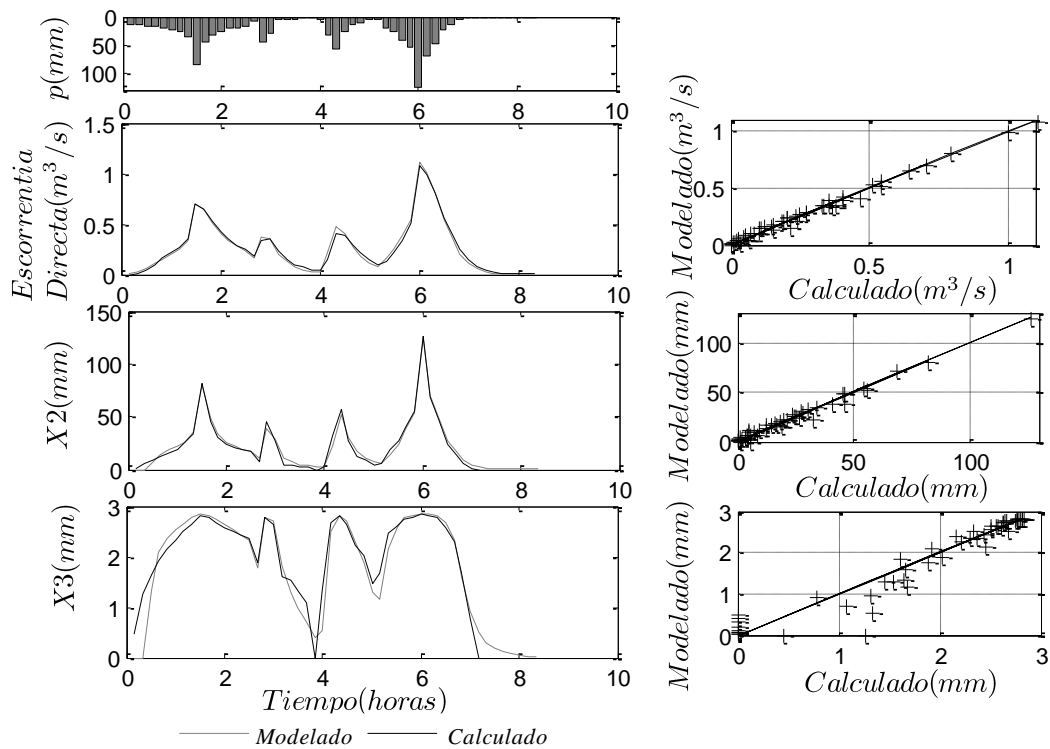
El funcionamiento de la ecuación [6-1] para estimar  $h_{ef}$  y [6-3] para estimar  $k_{ef}$  es satisfactorio para la tormenta 1, lo cual puede observarse en las figuras **6-12**, **6-13**, **6-14**, **6-15**, y **6-16**. En dichas figuras se reportan índices de eficiencia de Nash–Sutcliffe (NSE) superiores a 0.97, 0.96 y 0.88 para la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) respectivamente para varios grados de variabilidad de los parámetros a escala de detalle (CV 0.96 a 2.4).

Para el caso del segundo escenario de tormenta, las ecuaciones [6-1] y [6-3] continúan siendo asumibles según las figuras **6-17** y **6-18**; ya que tanto la escorrentía directa, el excedente de precipitación y la infiltración gravitacional

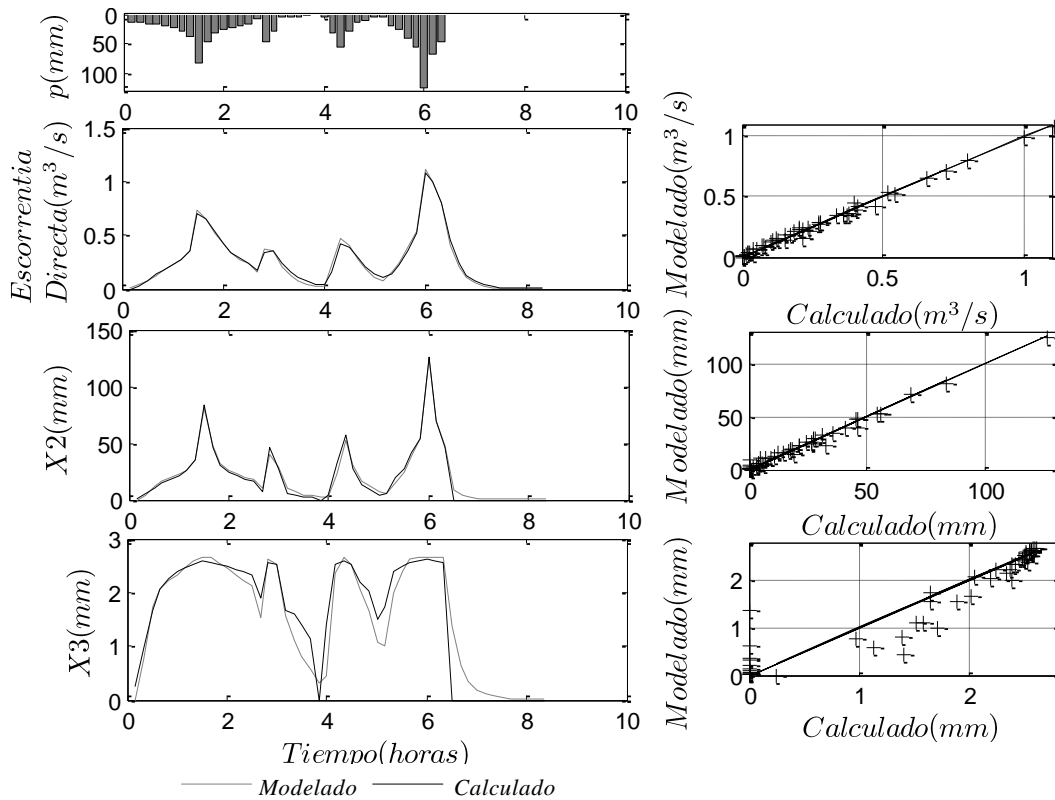


calculadas con base en dichas ecuaciones de escalamiento reproducen la tendencia de las variables calculadas a escala de detalle y presentan índices NSE aceptables (**Figura 6-17** y **Figura 6-18**).

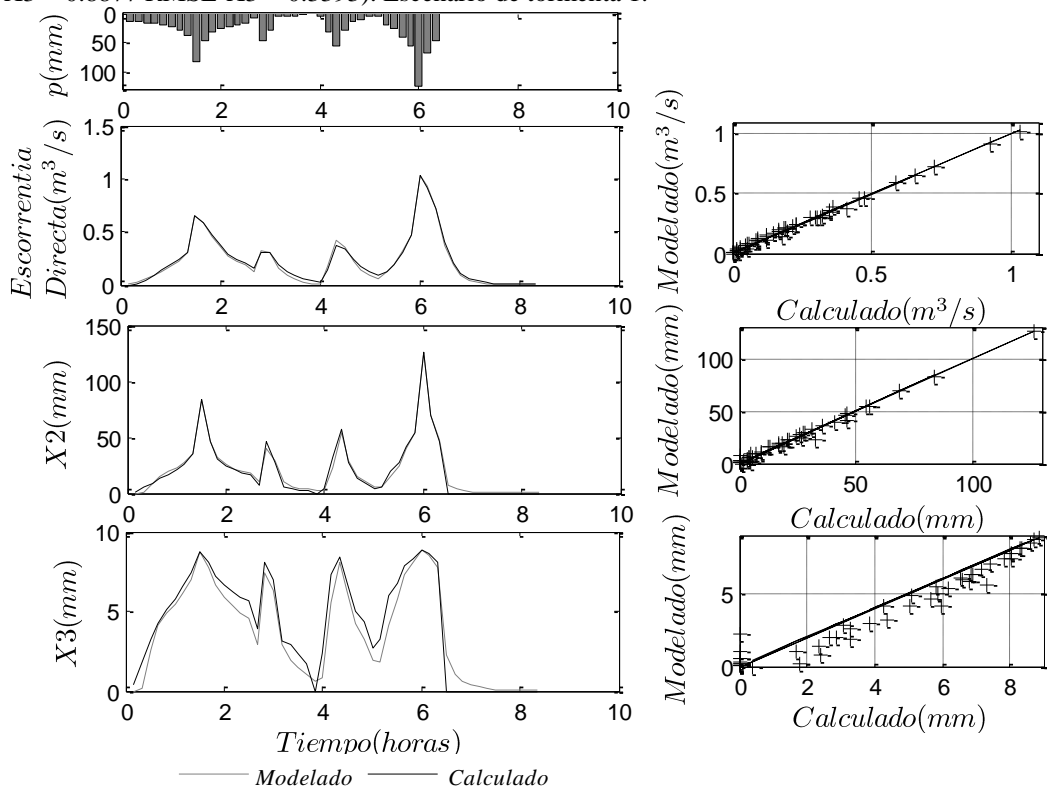
El tercer escenario de tormenta muestra evidencia de que las ecuaciones [6-1] y [6-3] tienden a ser menos fiables para eventos con tormentas de alta frecuencia y de pequeña magnitud, ya que de acuerdo con la **Figura 6-19**, los índices NSE disminuyen a 0.84, 0.79 y 0.60 para la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) respectivamente, cuando la variabilidad espacial de los parámetros  $h$  y  $k$  es alta (**Figura 6-19**).



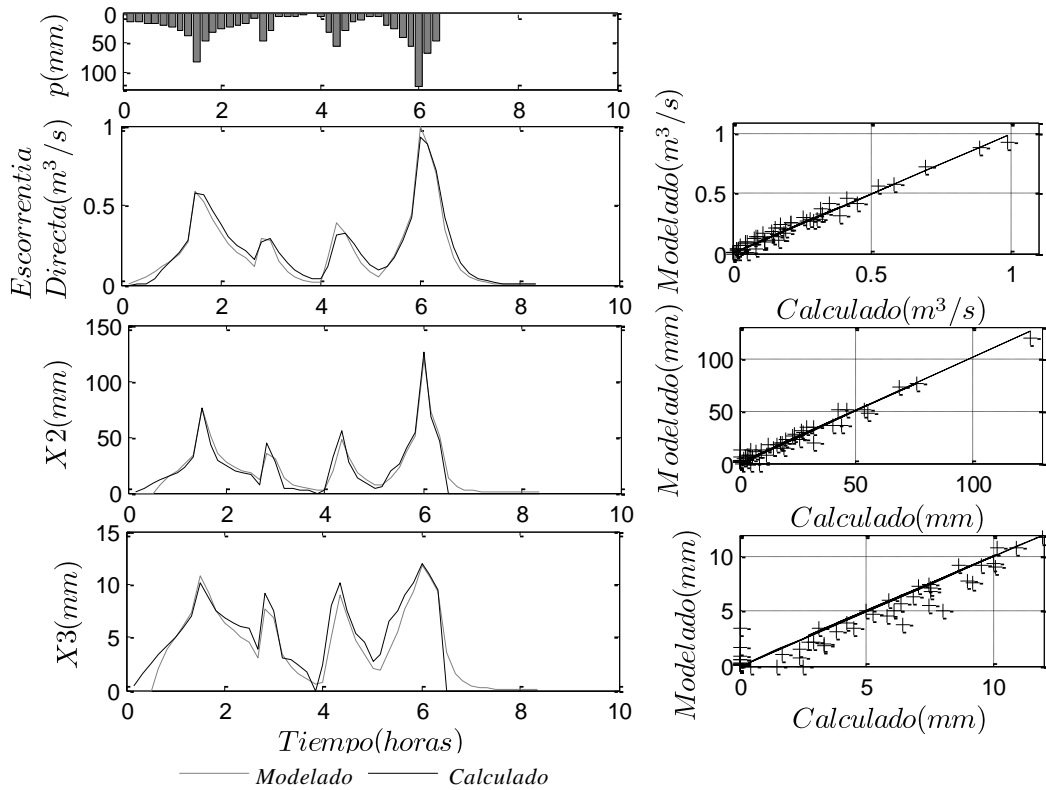
**Figura 6-12** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 2.22$ ,  $CV-HU = 1.42$ ,  $h = 50.94\text{mm}$ ,  $k = 16.98\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9891 RMSE-ED = 0.0261; NSE-X2 = 0.9828 RMSE-X2 = 3.1156; NSE-X3 = 0.9233 RMSE-X3 = 0.2889). Escenario de tormenta 1.



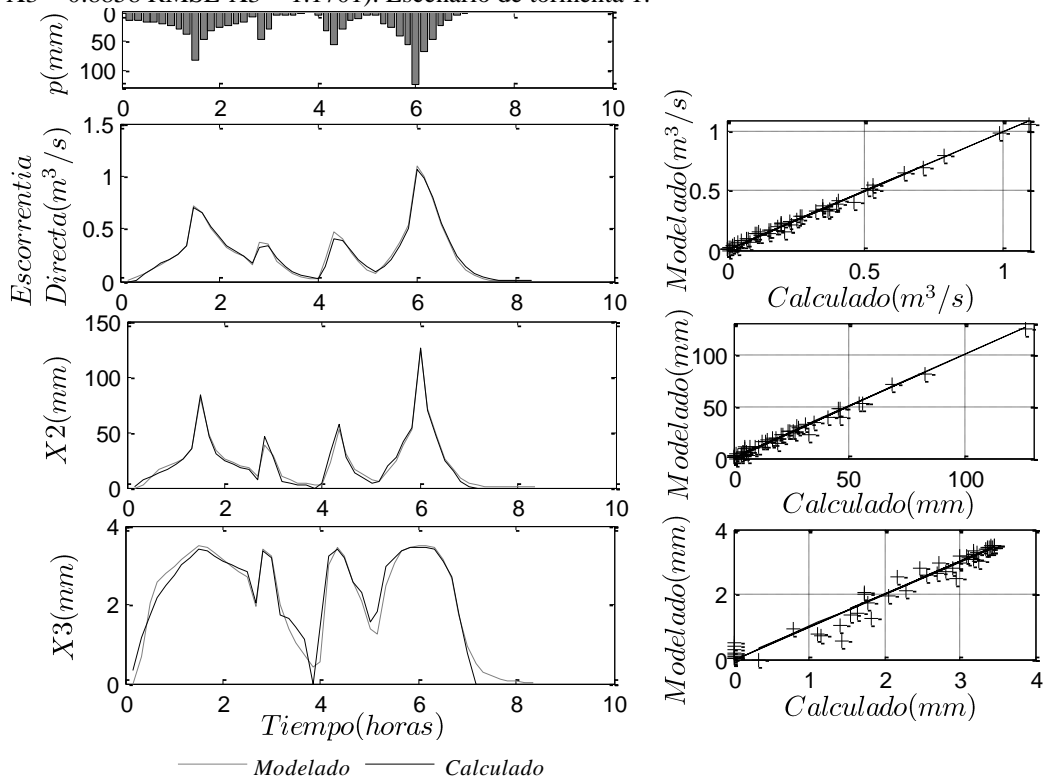
**Figura 6-13.** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 2.43$ ,  $CV-HU = 1.81$   $\bar{h} = 37.29\text{mm}$   $\bar{k} = 15.92\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9921 RMSE-ED = 0.0223; NSE-X2 = 0.9871 RMSE-X2 = 2.7471; NSE-X3 = 0.8877 RMSE-X3 = 0.3393). Escenario de tormenta 1.



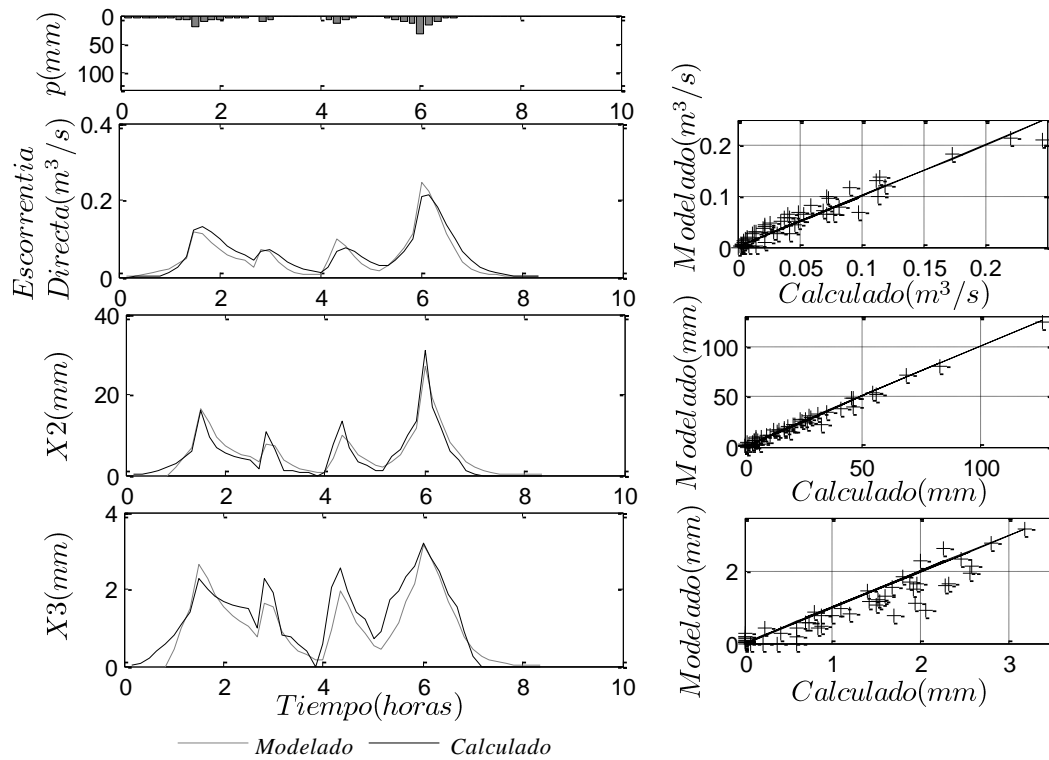
**Figura 6-14.** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 1.69$ ,  $CV-HU = 0.96$   $\bar{h} = 41.81\text{mm}$   $\bar{k} = 53.17\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9927 RMSE-ED = 0.0198; NSE-X2 = 0.9908 RMSE-X2 = 2.3181; NSE-X3 = 0.9276 RMSE-X3 = 0.7698). Escenario de tormenta 1.



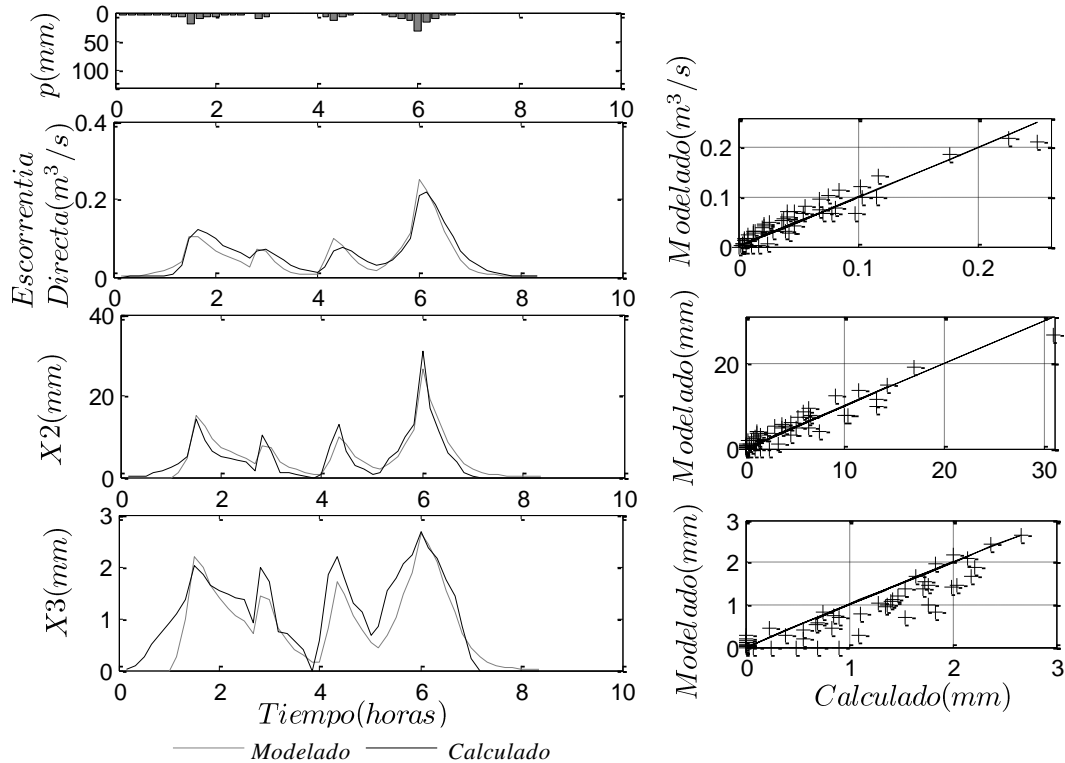
**Figura 6-15.** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 1.85$ ,  $CV-HU = 1.78$ ,  $\bar{h} = 81.57\text{mm}$ ,  $\bar{k} = 72.70\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9710 RMSE-ED = 0.0374; NSE-X2 = 0.9618 RMSE-X2 = 4.6019; NSE-X3 = 0.8858 RMSE-X3 = 1.1701). Escenario de tormenta 1.



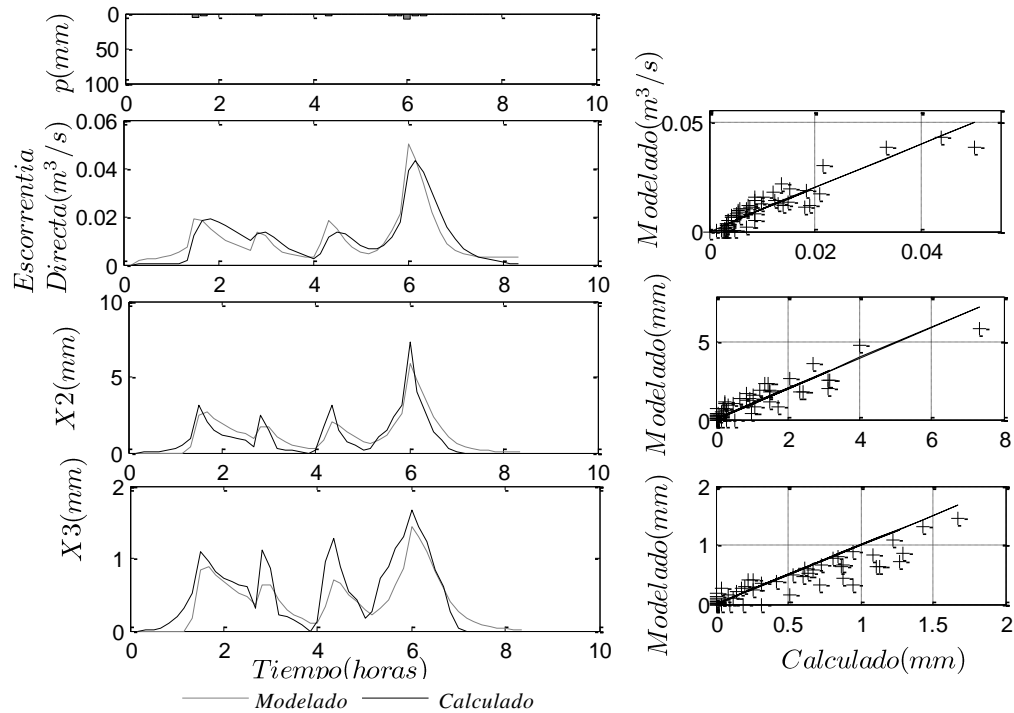
**Figura 6-16.** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 2.1$ ,  $CV-HU = 1.77$ ,  $\bar{h} = 41.00\text{mm}$ ,  $\bar{k} = 20.87\text{mm}$ . (NSE-ED = 0.9912 RMSE-ED = 0.0231; NSE-X2 = 0.9863 RMSE-X2 = 2.7840; NSE-X3 = 0.9582 RMSE-X3 = 0.2566). Escenario de tormenta 1.



**Figura 6-17.** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 2.1$ ,  $CV-HU = 1.77$   $h = 41.00mm$   $k = 20.87mm$ . (NSE-ED = 0.9188 RMSE-ED = 0.0150; NSE-X2 = 0.9048 RMSE-X2 = 1.703; NSE-X3 = 0.7995 RMSE-X3 = 0.3750). Escenario de tormenta 2.



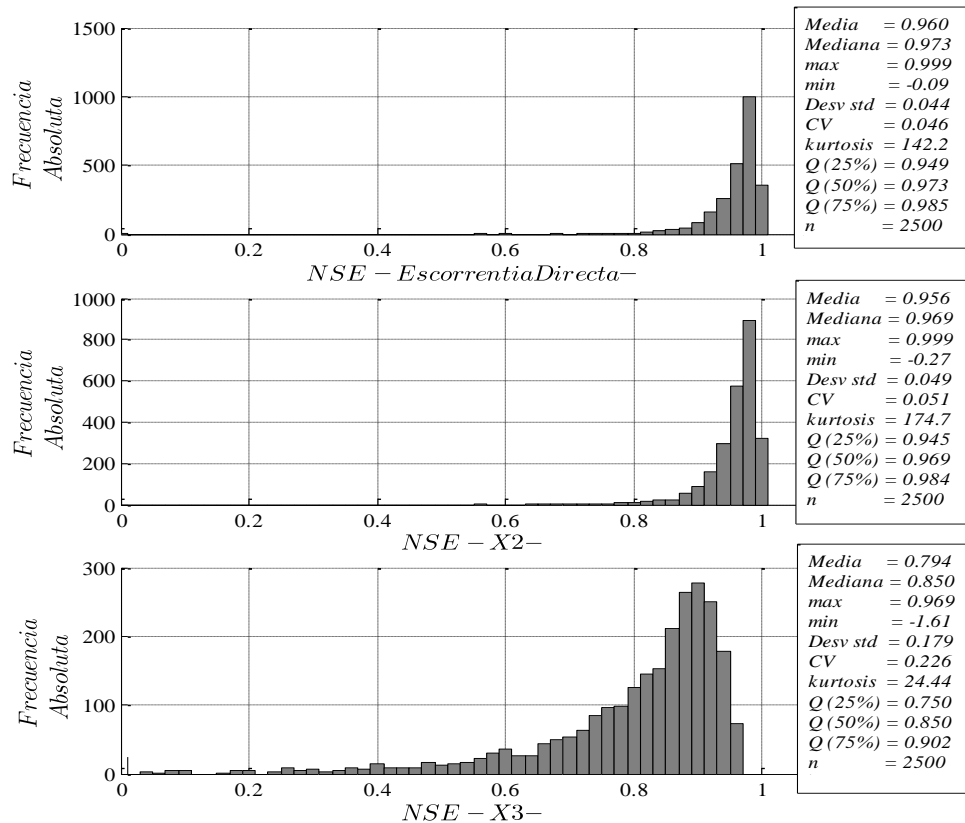
**Figura 6-18.** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 2.22$ ,  $CV-HU = 1.43$   $h = 50.94mm$   $k = 16.98mm$ . (NSE-ED = 0.9012 RMSE-ED = 0.0166; NSE-X2 = 0.8850 RMSE-X2 = 1.8399; NSE-X3 = 0.7230 RMSE-X3 = 0.3839). Escenario de tormenta 2.



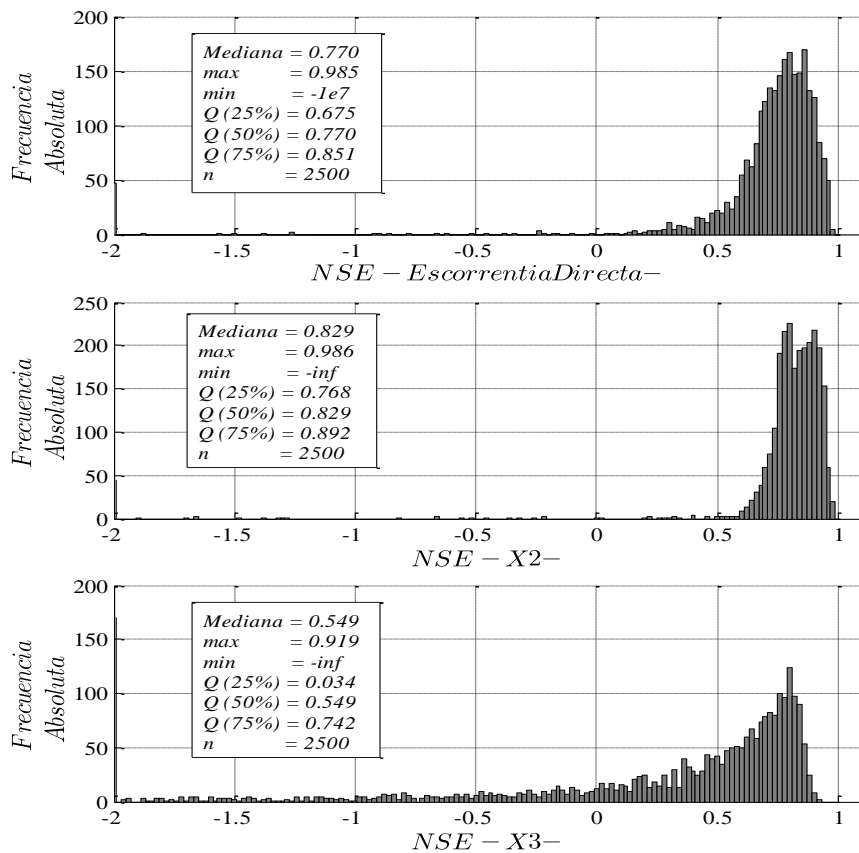
**Figura 6-19.** Predicción de la escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) para una celda con  $CV-k = 1.48$ ,  $CV-HU = 1.46$ ,  $\bar{h} = 19.06\text{mm}$ ,  $\bar{k} = 11.35\text{mm}$ . ( $NSE-ED = 0.8408$ ,  $RMSE-ED = 0.0040$ ;  $NSE-X2 = 0.7902$ ,  $RMSE-X2 = 0.5651$ ;  $NSE-X3 = 0.60$ ,  $RMSE-X3 = 0.2238$ ). Escenario de tormenta 3.

De acuerdo con los resultados de las simulaciones hidrológicas para 2500 casos, se reporta que las ecuaciones [6-1] y [6-3] son estimadores fiables de  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  para eventos de tormentas extraordinarias; dado que los cuartiles inferiores ( $Q_{25\%}$ ) para el índice NSE de la escorrentía directa, excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) son de 0.949, 0.945 y 0.750 respectivamente; aproximadamente hay una probabilidad del 75% de que el índice NSE sea superior a esos valores (Figura 6-20), por lo cual hay una alta probabilidad de obtener buenos resultados al aplicar estas ecuaciones de escalado para casos de tormentas extremas.

En el caso de las 2500 simulaciones para el escenario de tormenta 2, el índice NSE de la escorrentía directa tiene un valor superior a 0.675 para el 75% de las simulaciones; el valor del índice NSE del excedente de precipitación (X2) tiene un valor superior a 0.768 en el 75% de las simulaciones; sin embargo, en el índice NSE de la infiltración gravitacional (X3), el valor del cuartil inferior ( $Q_{25\%}$ ) para las 2500 simulaciones es de 0.034 y la mediana es 0.549, lo cual indica que el 50% de las simulaciones presentan un NSE superior a 0.549 con relación a la variable “X3” (Figura 6-21).



**Figura 6-20.** Distribución del índice de Nash- Sutcliffe (NSE) de la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) y la infiltración gravitacional (X3) para 2500 simulaciones en el escenario de tormenta 1.

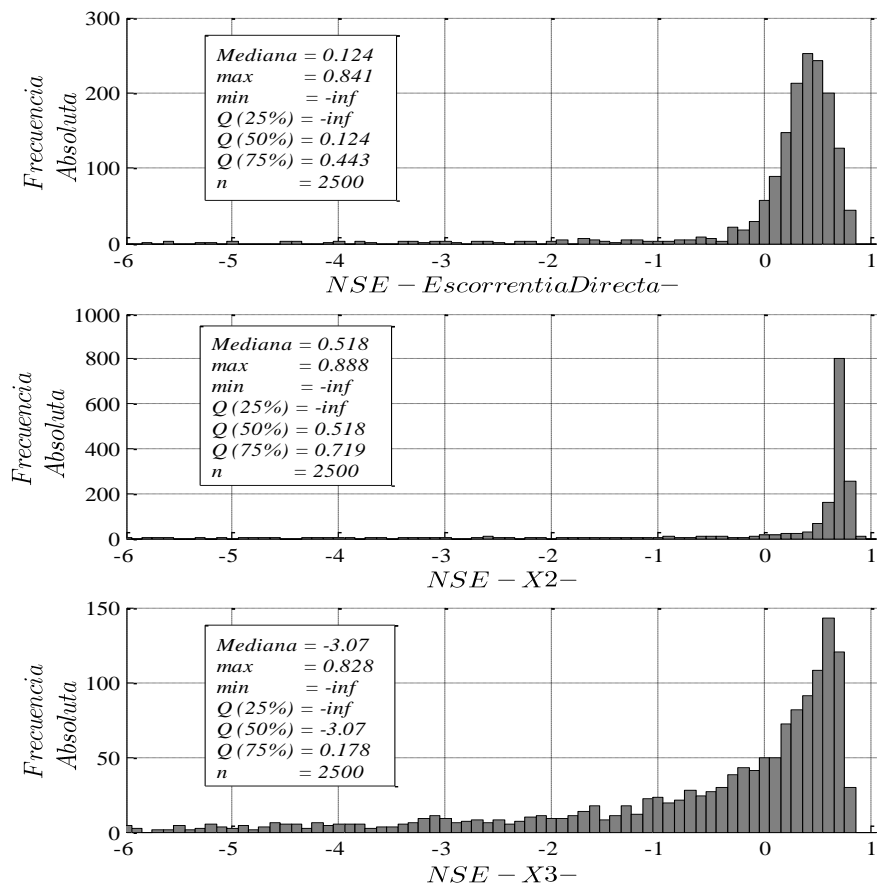


**Figura 6-21.** Distribución del índice de Nash- Sutcliffe (NSE) de la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) y la infiltración gravitacional (X3) para 2500 simulaciones en el escenario de tormenta 2.

Los índices NSE calculados para el escenario de tormenta 3, el cual corresponde a una tormenta ordinaria, presentan valores que tienden a ser muy bajos: por ejemplo, en el caso de la escorrentía directa, solo un 25% de las simulaciones tiene valores de NSE superiores a 0.443, en el caso del excedente de precipitación (X2) un 25% de las simulaciones tiene un NSE superior a 0.719 y para la infiltración gravitacional un 25% de las simulaciones tiene un NSE superior a 0.178 (Figura 6-22).

De acuerdo con estos resultados, se reconoce que las ecuaciones [6-1] y [6-3] son unos buenos estimadores de los parámetros efectivos para eventos de tormentas extraordinarias. Sin embargo, su fiabilidad se reduce para simulaciones de eventos de pequeña magnitud. Este funcionamiento de las ecuaciones [6-1] y [6-3] se debe a que fueron calibradas para precipitaciones de alta magnitud y los errores de pequeña escala no tuvieron un peso importante en la función objetivo.

Sin embargo, se destaca la importancia de haber demostrado que la estructura matemática propuesta en las ecuaciones [6-1] y [6-3] es una representación adecuada del funcionamiento y tendencia de los parámetros efectivos  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  respectivamente para una gran familia de casos posibles; por lo cual, muy probablemente las mismas estructuras matemáticas ([6-1] y [6-3]) optimizadas para un orden de magnitud pequeño podría ofrecer una mejor estimación de los parámetros efectivos para tormentas pequeñas.

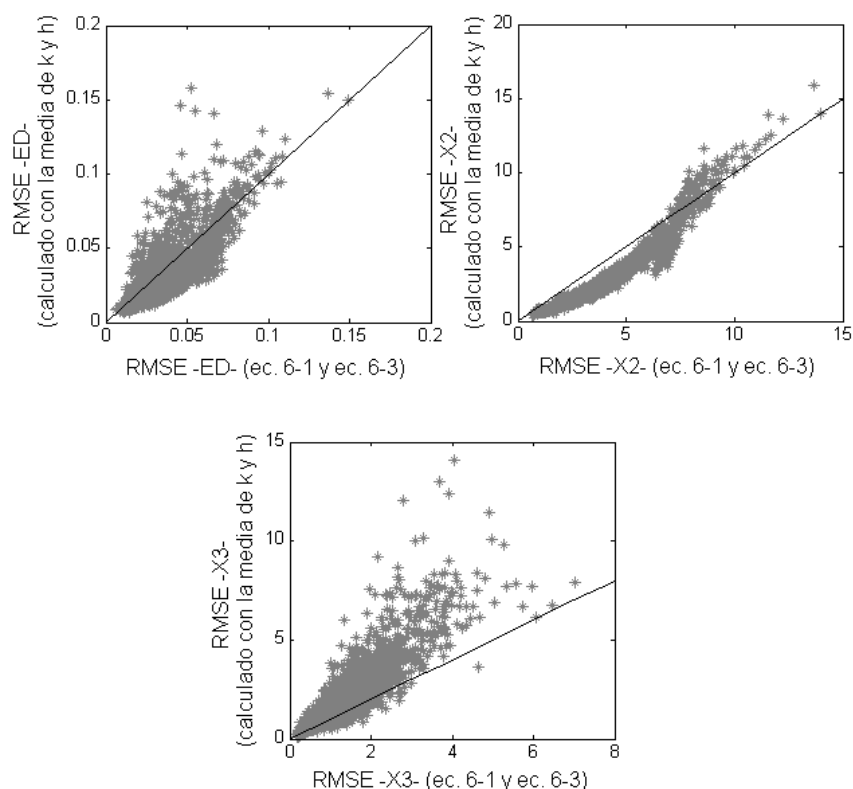


**Figura 6-22.** Distribución del índice de Nash- Sutcliffe (NSE) de la escorrentía directa, el excedente de precipitación (X2) y la infiltración gravitacional (X3) para 2500 simulaciones en el escenario de tormenta 3.

### 6.3.1 COMPARACIÓN CON PARÁMETROS MEDIOS

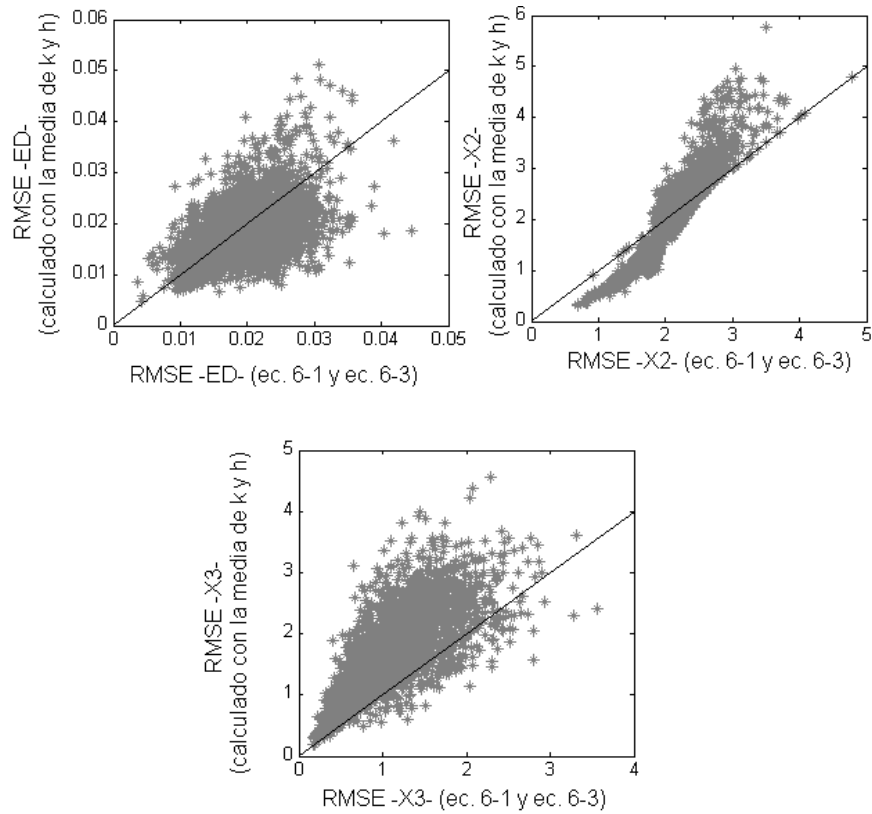
En este apartado se presenta una comparación entre los resultados de las simulaciones utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3], y simulaciones realizadas con parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  medios. Al utilizar los valores promedios de  $h$  y  $k$  a escala  $El$  como parámetros efectivos estacionarios, no se ofrecen un mejor resultado, ya que el valor de RMSE para la escorrentía directa (ED) y para la infiltración gravitacional (X3) tiende a ser mayor en comparación al RMSE obtenido con las ecuaciones [6-1] y [6-3] en el caso del escenario de tormenta 1 (Figura 6-23).

De manera similar, en el caso de los escenarios de tormenta 2 y 3 se observa un aumento del RMSE para el excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) al utilizar el valor promedio de  $h$  y  $k$  (Figura 6-24 y Figura 6-25). Sin embargo, el modelo muestra poca sensibilidad al valor de  $h_{ef}$  debido a que la mayoría de las unidades de modelación a escala  $El$  se saturan rápidamente.

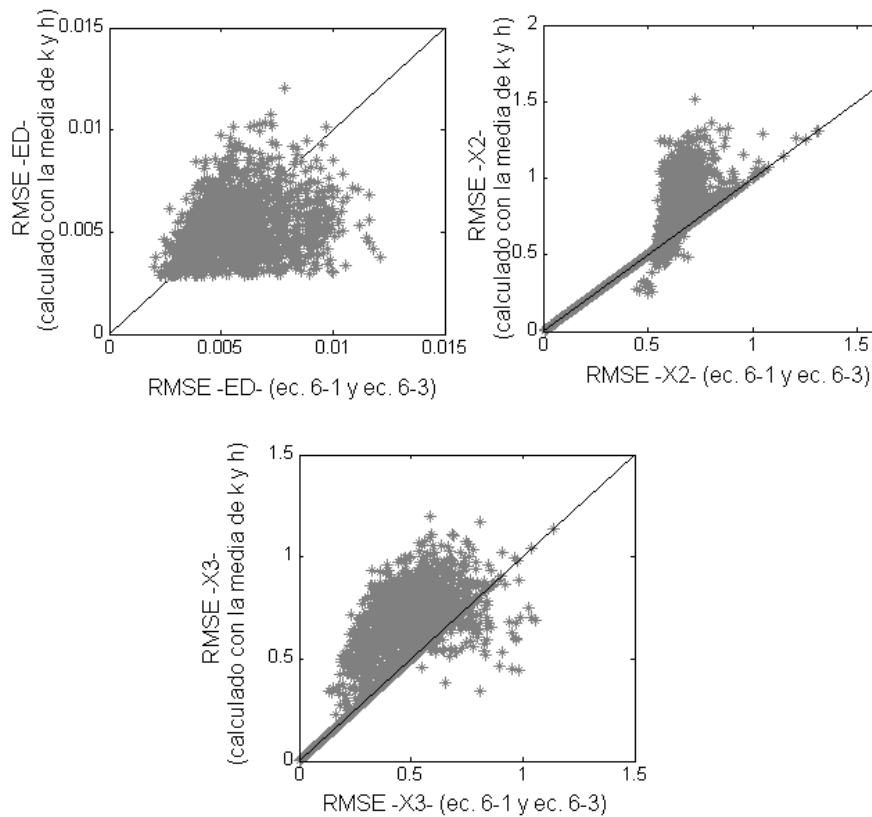


**Figura 6-23.** Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización del valor promedio de  $h$  y  $k$  para el escenario de tormenta 1.





**Figura 6-24.** Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización del valor promedio de h y k. para el escenario de tormenta 2.



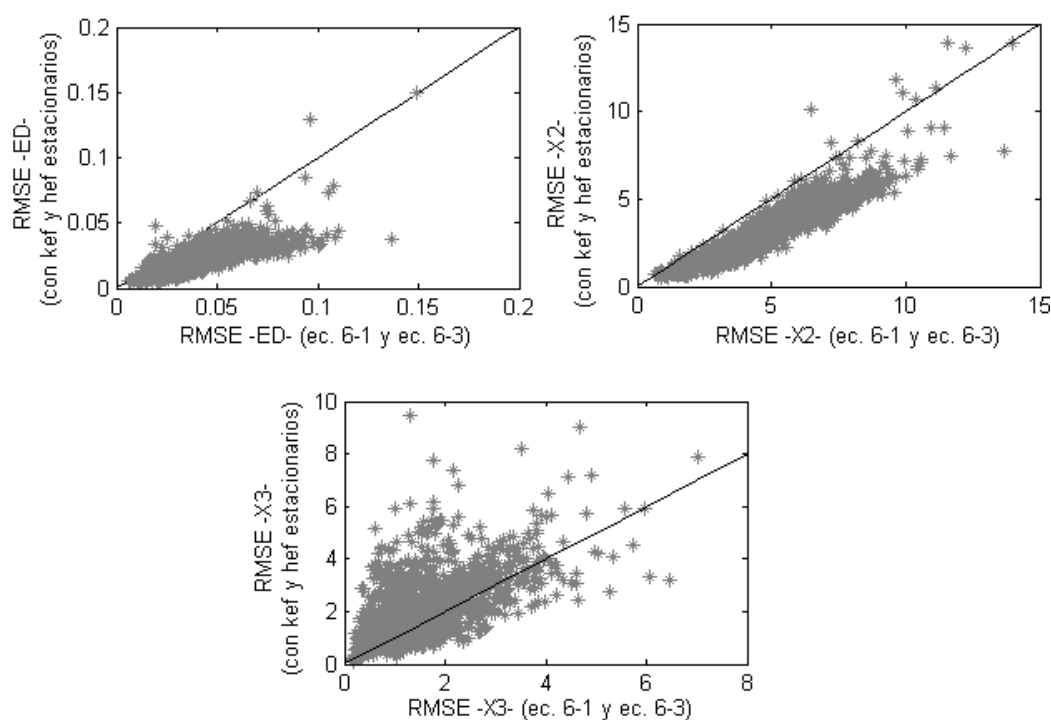
**Figura 6-25.** Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización del valor promedio de h y k. para el escenario de tormenta 3.

### 6.3.2 COMPARACIÓN CON PARÁMETROS CALIBRADOS

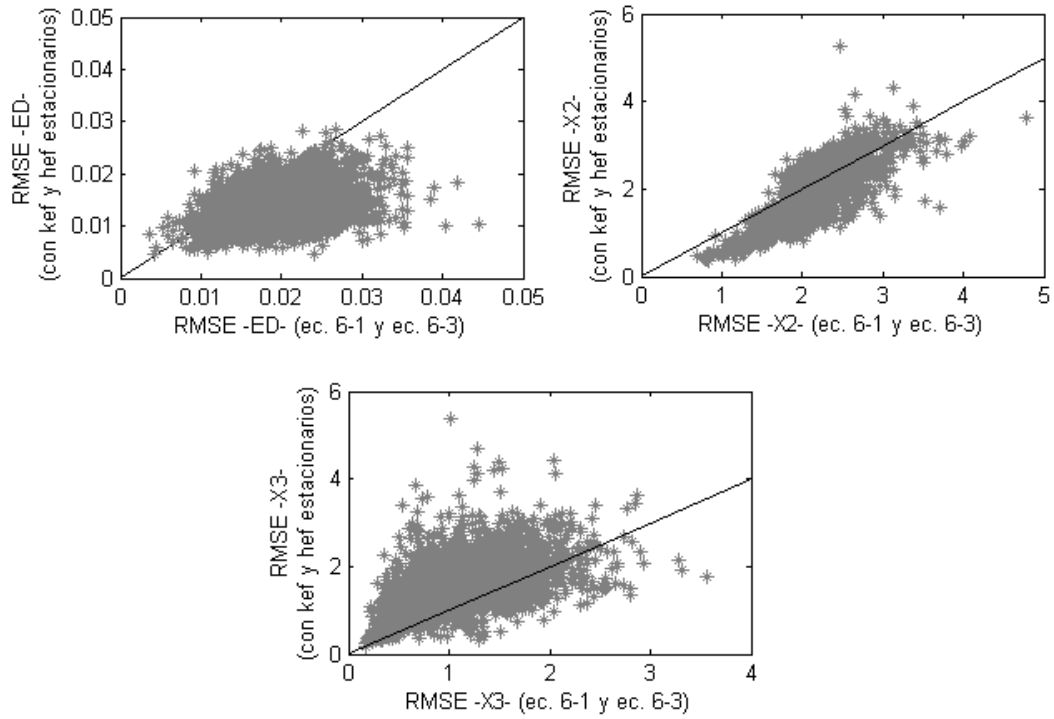
Finalmente, se presenta una comparación entre los resultados de las simulaciones utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3], y simulaciones realizadas con parámetros  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  calibrados. La calibración se realizó sobre la escorrentía directa (ED) para el escenario de tormenta 1, y se minimizó su error cuadrático medio empleando el método cuasi-newton. En el escenario de tormenta 1, se encontró que los parámetros calibrados tienden a generar valores de RMSE más pequeños en el caso de ED (Figura 6-26). Sin embargo, el RMSE del flujo X3 no mejora con respecto a la estimación hecha por las ecuaciones [6-1] y [6-3] (Figura 6-26, Figura 6-27 y Figura 6-28).

Los resultados de la calibración de parámetros efectivos están sujetos a la magnitud del evento de calibración, ya que el RMSE para el flujo ED tiende a ser pequeño de manera persistente en comparación con el RMSE obtenido a partir de las ecuaciones [6-1] y [6-3] (escenario de tormenta 1, Figura 6-26), y en los escenarios de tormenta 2 y 3 el RMSE de ED calculado con los parámetros efectivos estacionarios va aumentando con relación a la estimación hecha por las ecuaciones [6-1] y [6-3] (Figura 6-27 y Figura 6-28).

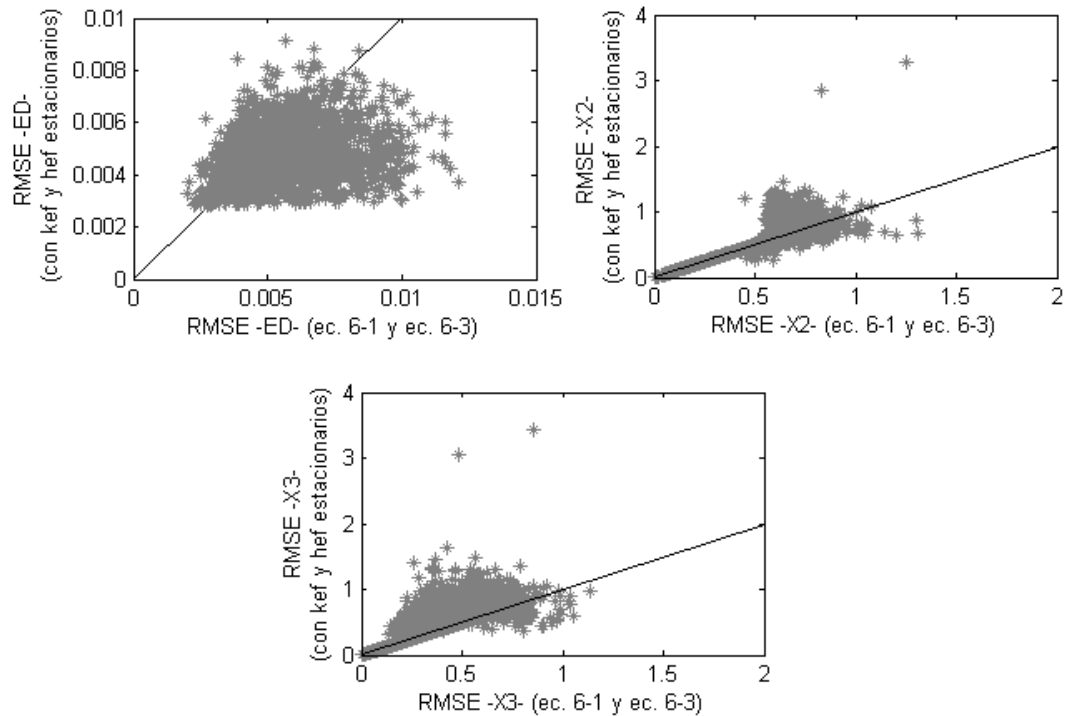
Las figuras 6-26, 6-27 y 6-28, muestran que a pesar de que los parámetros efectivos calibrados tienden a hacer una buena representación del flujo ED, tienden a no representar de manera adecuada el flujo X3. En los tres casos, el flujo X3 tiende a ser mejor representado por la ecuación [6-3] que con el valor calibrado.



**Figura 6-26.** Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización de parámetros efectivos  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  estacionarios. para el escenario de tormenta 1.



**Figura 6-27.** Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización de parámetros efectivos hef y kef estacionarios. Para el escenario de tormenta 2.



**Figura 6-28.** Comparación de la raíz cuadrada del error cuadrático medio de ED, X2 y X3 utilizando las ecuaciones [6-1] y [6-3] en contraste con la utilización de parámetros efectivos hef y kef estacionarios. Para el escenario de tormenta 3.



# 7. CONCLUSIONES Y APORTES DE LA TESINA

## 7.1 CONCLUSIONES DEL TRABAJO

Los efectos de escala se deben a la naturaleza heterogénea de las características medioambientales presentes en los sistemas hidrológicos y a la fuerte variabilidad asociada a los procesos que allí ocurren sobre un amplio rango de escalas espacio-temporales; además, la no-linealidad presente en dichos procesos se constituye en un factor que hace aún más complejo el entendimiento y la deducción de leyes de escalamiento en la ciencia hidrológica.

A pesar de que históricamente se han hecho esfuerzos científico para tratar el tema de los efectos de escala en Hidrología, aún permanece abierto el problema fundamental, cuya solución implica postular leyes generales para el escalado de procesos y semejanza hidrológica; para lo cual se requiere enfocar las investigaciones en la búsqueda de un entendimiento de los procesos hidrológicos a diferentes escalas más que calibrar un modelo hidrológico en casos particulares.

En contraste con la técnica de Monte Carlo tradicional, la técnica de muestreo Hipercubo Latino (LHS) consiguió una buena representación de la variabilidad dentro de la celda de modelación de una manera eficiente, ya que redujo notablemente el número de realizaciones e iteraciones necesarias para obtener la función de densidad lognormal especificados, para los diferentes grados de variabilidad espacial a nivel de sub-celda.

La técnica LHS con 500 realizaciones reproduce valores extremos de la variable aleatoria, conservando los estadísticos media y varianza, aún en casos de coeficientes de variación altos ( $CV = 2$ ). Los test Chi cuadrado y Kolmogorov-Smirnov mostraron que las variables aleatorias transformadas se ajustan a la distribución normal con un nivel de significancia del 5%.

Al comparar los valores de los parámetros  $h$  y  $k$  a nivel de sub-celda ( $E1$ ) con los valores de  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  a escala de celda ( $E2$ ) obtenidos por simulación inversa, se observa que hay un efecto de escala espacial significativo a medida que aumenta la variabilidad de cada parámetro a nivel de sub-celda.

El valor de los parámetros efectivos en todos los casos analizados se encuentra entre cero y el valor promedio del parámetro a nivel de sub-celda ( $E1$ ) para cada realización. Su valor en cada instante de tiempo depende del valor de las variables de entrada y del estado de almacenamiento en cada uno de los tanques conceptuales.

A medida que aumenta la variabilidad a nivel de sub-celda, se observa que la curva  $h_{ef} = f(X1, H1)$  tiende a disminuir su pendiente; lo cual implica que cuando el parámetro  $h$  tiene una alta variabilidad a escala  $[E1]$  es más probable que el parámetro efectivo  $h_{ef}$  tome valores menores a la media de  $h[E1]$ . En el caso del parámetro  $k$  ocurre una situación idéntica.

El parámetro efectivo no podrá ser superior al valor medio a nivel de sub-celda, ya que cuando todas las sub-celdas están contribuyendo a la generación de flujo se está “utilizando” toda la capacidad de almacenamiento estático de las sub-celdas (en el caso de  $h[E1]$ ) o toda la capacidad de infiltración de las sub-celdas (en el caso de  $k[E1]$ ) y no es posible “utilizar” más capacidad. En ese caso el problema toma un aspecto lineal, en el cual el parámetro a escala  $E2$  es determinado solamente por el valor medio a escala  $E1$ .

Para el hipotético caso de independencia espacial del parámetro  $h$  y  $k$ , la probabilidad conjunta de las variables aleatorias en cada realización es el producto de las probabilidades individuales y es muy similar entre realizaciones en los campos de parámetros con un alto número de variables aleatorias (ej. 2025 variables aleatorias); por tanto, el valor esperado en cada realización tiende a la media común de la función aleatoria.

El hecho de que la esperanza sea muy similar entre realizaciones y sigan la misma función de distribución de probabilidad para el caso de independencia espacial, implica que los valores de los parámetros efectivos calculados a escala  $E2$  tiendan con poca varianza a un mismo valor y, por lo tanto, tengan significativamente menor variabilidad e incertidumbre que los parámetros a la escala de detalle  $E1$ .

Cuando exista una alta incertidumbre en la estimación de los valores del parámetro a escala de detalle y sea asumible la hipótesis de iid, es preferible utilizar tamaños de celda iguales o superiores a  $90 \times 90 m^2$  con el fin de disminuir en el espacio probable de valores del parámetro efectivo su nivel de incertidumbre, ya que si se tomaran tamaños menores de celda, la incertidumbre en los valores a escala de detalle se transferiría con mayor magnitud a la escala de celda o escala de modelación.

En el caso de los campos aleatorios con dependencia espacial, hay una influencia mucho más dominante de la incertidumbre del valor de los parámetros a escala de detalle sobre la incertidumbre de los parámetros efectivos a escala de modelación. Lo cual se debe a que si el error de estimación de un valor a nivel de sub-celda es alto, es muy probable que los valores de otras sub-celdas contenidas en el radio de influencia de su longitud de correlación también tengan errores de estimación altos, lo que se transfiere como error de estimación al parámetro efectivo.

Al igual que en el caso de independencia espacial, el tamaño de celda es un factor relevante en la transferencia de incertidumbre entre escalas para campos con dependencia espacial, ya que para las celdas de mayor tamaño ( $90 \times 90 m^2$ ) se experimenta una significativa disminución de la varianza de estimación del

parámetro (del orden de  $\sim 70$  a  $\sim 90\%$ ), mientras que para las celdas de menor tamaño la reducción en la varianza de estimación es menor (del orden de  $\sim 10$  a  $\sim 25\%$ ).

Para un mismo tamaño de celda, a medida que se incrementa el grado de dependencia espacial (incremento en la escala integral  $a$ ), se incrementa la incertidumbre de la estimación del parámetro efectivo expresada como la varianza de estimación, debido a que las variables aleatorias a nivel de sub-celda aportan relativamente la misma información para generar el parámetro efectivo cuando  $a$  es alto con relación al tamaño de celda.

Las ecuaciones [6-1] y [6-3] muestran un comportamiento satisfactorio para estimar  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  respectivamente en el escenario de tormenta 1. Los resultados de las simulaciones hidrológicas para 2500 casos, reportan que las ecuaciones [6-1] y [6-3] son estimadores fiables de  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$ ; dado que los cuartiles inferiores ( $Q_{25\%}$ ) para el índice NSE de la escorrentía directa, excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3) son de 0.949, 0.945 y 0.750 respectivamente; por lo cual hay una alta probabilidad de obtener buenos resultados al aplicar estas ecuaciones de escalado para casos de tormentas extremas para un amplio rango de variabilidad a escala de detalle (CV 0.96 a 2.4).

Con relación al escenario de tormenta 2 (evento ordinario), el índice NSE de la escorrentía directa tiene un valor superior a 0.675 para el 75% de las simulaciones; el valor del índice NSE del excedente de precipitación (X2) tiene un valor superior a 0.768 en el 75% de las simulaciones. Sin embargo, en el índice NSE de la infiltración gravitacional (X3), el valor del cuartil inferior ( $Q_{25\%}$ ) para las 2500 simulaciones es de 0.034 y la mediana es 0.549, lo cual indica que el 50% de las simulaciones presentan un NSE superior a 0.549 con relación a la variable "X3".

Las simulaciones para el escenario de tormenta 3 (que corresponde a una tormenta ordinaria) presentan valores del índice NSE que tienden a ser muy bajos: en el caso de la escorrentía directa, solo un 25% de las simulaciones tiene valores de NSE superiores a 0.443, en el caso del excedente de precipitación (X2) un 25% de las simulaciones tiene un NSE superior a 0.719 y para la infiltración gravitacional un 25% de las simulaciones tiene un NSE superior a 0.178.

A la luz de las simulaciones realizadas, se reconoce que las ecuaciones [6-1] y [6-3] son unos buenos estimadores de los parámetros efectivos para eventos de tormentas extraordinarias, pero su fiabilidad se reduce para la simulación de eventos de pequeña magnitud. Sin embargo, se destaca la importancia de demostrar que las estructuras matemáticas propuestas en estas ecuaciones son una representación adecuada del funcionamiento y tendencia de los parámetros efectivos  $h$  y  $k$  para una gran familia de casos posibles.

El flujo por escorrentía directa (ED) y el flujo por excedente de precipitación (X2) simulados con parámetros efectivos estacionarios ofrecen resultados similares a los obtenidos aplicando las ecuaciones [6-1] y [6-3]. Sin embargo, el flujo por infiltración gravitacional (X3) se simula con mejores resultados utilizando las ecuaciones de agregación [6-1] y [6-3] en comparación con la simulación con

parámetros efectivos estacionarios. Por tanto, para tener una mejor representación de los flujos intermedios de una cuenca particular sería más útil emplear dichas ecuaciones.

Al calibrar los parámetros efectivos para la escorrentía directa, se obtiene un mejor RMSE en comparación con el RMSE obtenido a partir de las ecuaciones [6-1] y [6-3] (en el escenario de tormenta 1). Sin embargo, los parámetros efectivos calibrados tienden a no representar de manera adecuada el flujo por infiltración, el cual es mejor representado por la ecuación [6-3] en los tres casos.

## 7.2 APORTES DE LA INVESTIGACIÓN

Los principales aportes de la investigación son:

1. En esta investigación se comprobó que el tamaño de celda más adecuado para minimizar la incertidumbre de la estimación de los parámetros efectivos depende de la longitud de correlación. Se propuso que para hacer mínima la varianza de estimación de  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$  se debe utilizar un tamaño de celda mayor al valor de la longitud de correlación. A través de simulaciones estocásticas se demostró que al disminuir la relación  $a/\Delta L$  también disminuye la varianza de estimación de los parámetros efectivos.
2. Se propusieron dos modelos matemáticos para representar el comportamiento no estacionario de los parámetros efectivos  $h_{ef}$  y  $k_{ef}$ . Dichos modelos ofrecen una buena representación de los flujos por escorrentía directa (ED), excedente de precipitación (X2) e infiltración gravitacional (X3). Se mostró que el flujo X3 no se representa adecuadamente al utilizar parámetros efectivos estacionarios, por lo cual la ecuación [6-3] es una buena alternativa para representar dicho flujo, ya que al ser un flujo intermedio no se puede calibrar en la práctica.

## 7.3 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

El estudio del efecto de la incertidumbre en la estimación de los parámetros a escala de detalle (E1) sobre la incertidumbre de los parámetros efectivos a escala de modelación (E2) debe ampliarse para diferentes condiciones de contorno y realizar el análisis con base en otros indicadores de la incertidumbre además de la varianza de estimación, haciendo una descripción completa de las funciones de distribución de probabilidad en cada caso.

Debido a que la fiabilidad de las ecuaciones determinísticas de agregación ([6-1] y [6-3]) se reduce para eventos ordinarios de precipitación, es importante estudiar su



aplicación y optimización para este tipo de eventos en detalle, ya que en la presente investigación se ha demostrado que son estructuras matemáticas aptas para representar la relación de escalamiento espacial para el módulo de producción de escorrentía del modelo hidrológico TETIS.

Es importante analizar el efecto de la escala espacial partiendo de ecuaciones físicamente basadas (ej. Ecuación de Richards para zona no saturada) y tener en cuenta la influencia de los caminos preferenciales de flujo, así como el proceso de exfiltración. Y hacer una contrastación de los resultados de dicho análisis en un área de estudio particular.



## 8. REFERENCIAS

Armstrong, R., Mathur, D.P. (2003) Topographic parameterization in continental hydrology: a study in scale. *Hydrological Processes* **17** 3763-3781.

Becker, A., Braun, P. (1999) Disaggregation, aggregation and spatial scaling in hydrological modeling. *Journal of Hydrology* **217** 239-252.

Bertalanffy, L.V. (1976) *General System Theory: Foundations, Development, Applications.*, George Braziller.

Beven, K. (2006) A manifesto for the equifinality thesis. *Journal of Hydrology* **320** 18-36.

Beven, K., Feyen, J. (2002) The future of distributed modelling. *Hydrological Processes* **16** 169-172.

Bierkens, M., Finke, A., Willigen, P. (2000) *Upscaling and Downscaling Methods for Environmental Research.*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Bloschl, G. (1999) Scaling issues in snow hydrology. *Hydrological Processes* **13** 2149-2175.

Bloschl, G. (2001) Scaling in hydrology. *Hydrological Processes* **15** 709-711.

Bloschl, G. (2005) Statistical upscaling and downscaling in hydrology. En: Anderson, M.G., McDonnell, J.J. (eds), *Encyclopedia of hydrological sciences*. 136-150, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido.

Bloschl, G., Grayson, R., Sivapalan, M. (1995) On the representative elementary area (REA) concept and its utility for distributed rainfall-runoff modelling. En: Kalma, J.D., Sivapalan, M. (eds), *Scale issues in hydrological modelling*. 71-88, John Wiley and Sons, Chichester, Reino Unido.

Bloschl, G., Sivapalan, M. (1995) Scale issues in hydrological modelling: a review. En: Kalma, J.D., Sivapalan, M. (eds), *Scale issues in hydrological modelling*. 9-48, John Wiley and Sons, Chichester, Reino Unido.

Bloschl, G., Sivapalan, M., Gupta, V.K., Beven, K., Lettenmaier, D. (1997) Preface to the special section on scale problems in hydrology. *Water Resources Research* **33** (12), 2881.

Chen, Z., Govindraju, R.S., Kavvas, M.L. (1994) Spatial averaging of unsaturated flow equations under infiltration conditions over areally heterogeneous fields 1. Development of models. *Water Resources Research* **30** (2), 523-533.

- Dehotin, J., Braud, I. (2008) Which spatial discretization for distributed hydrological models? Proposition of a methodology and illustration for medium to large-scale catchments. *Hydrology and Earth System Sciences* **12** 769-796.
- Francés, F., Vélez, J.I., Vélez, J.J. (2007) Split-parameter structure for the automatic calibration of distributed hydrological models. *Journal of Hydrology* **332** (1-2), 226-240.
- Francés, F., Vélez, J.J. Descripción del modelo conceptual distribuido de simulación hidrológica TETIS V.7.3. 2008.
- García, S., Francés, F., Andreu, J. (2002) Simulación hidrológica basada en SIG: Sensibilidad a factores de escala. *Ingeniería del Agua* **9** (3), 295-308.
- Gottschalk, L. (2005) Methods of analyzing variability. En: Anderson, M.G., McDonnell, J.J. (eds), *Encyclopedia of hydrological sciences*. 95-122, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido.
- Govindaraju, R.S., Morbidelli, R., Corradini, C. (2001) Areal infiltration modeling over soils with spatially correlated hydraulic conductivities. *Journal of Hydrologic Engineering* **6** (2), 150-158.
- Gray, W. (2000) *Mathematical tools for changing spatial scales in the analysis of physical systems.*, CRC Press, United States of America.
- Gupta, V.K. Introduction to multiscale hydrologic phenomena I. 2007. Boulder, Colorado, Estados Unidos de America.
- Gupta, V.K., Castro, S., Over, T. (1996) On scaling exponents of spatial peak flows from rainfall and river network geometry. *Journal of Hydrology* **187** 81-104.
- Gupta, V.K., Mesa, O.J., Dawdy, D.R. (1994) Multiscaling theory of flood peaks: Regional quantile analysis. *Water Resources Research* **30** (12), 3405-3421.
- Haltas, I. (2006) Scaling of governing equations in hydrology. Doctor of philosophy in civil and environmental engineering PhD, University of California, Davis, Estados Unidos de America.
- Kandel, D.D., Western, A., Grayson, R., Turrall, H.N. (2004) Process parametrization and temporal scaling in surface runoff and erosion modelling. *Hydrological Processes* **18** (8), 1423-1446.
- Karssenber, D. (2006) Upscaling of saturated conductivity for hortonian runoff modelling. *Advances in Water Resources* **29** 735-759.
- Kim, S., Kavvas, M.L., Yoon, J. (2005) Upscaling of vertical unsaturated flow model under infiltration condition. *Journal of Hydrologic Engineering* **10** (2), 151-159.

- Lee, G., Tachikawa, Y., Takara, K. (2009) Interaction between topographic and process parameters due to the spatial resolution of DEMs in distributed rainfall-runoff modeling. *Journal of Hydrologic Engineering* **In press**.
- Martínez, F.S.J., Caniego, F.J., García-Gutiérrez, C., Espejo, R. (2007) Representative elementary area for multifractal analysis of soil porosity using entropy dimension. *Nonlinear Processes in Geophysics* **14** (4), 503-511.
- Menabde, M., Sivapalan, M. (2001) Linking space-time variability of river runoff and rainfall fields: a dynamic approach. *Advances in Water Resources* **24** 1001-1014.
- Moglen, G.E., Hartman, G.L. (2001) Resolution effects on hydrologic modeling parameters and peak discharge. *Journal of Hydrologic Engineering* **6** (6), 490-497.
- Molnár, D.K., Julien, P.Y. (2000) Grid-size effects on surface runoff modeling. *Journal of Hydrologic Engineering* **5** (1), 8-16.
- Moreda, F., Koren, V., Zhang, Z., Reed, S., Smith, M. (2006) Parameterization of distributed hydrological models: learning from the experiences of lumped modeling. *Journal of Hydrology* **320** 218-237.
- Ohara, N., Kavvas, M.L., Chen, Z. (2008) Stochastic upscaling for snow accumulation and melt processes with PDF approach. *Journal of Hydrologic Engineering* **13** (12), 1103-1118.
- Pedraza, R.A. (2007) Efectos de escala sobre la simulación del flujo de agua superficial en áreas urbanas usando modelos basados en la onda cinemática. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.
- Rodríguez-Iturbe, I., Gupta, V.K. (1983) Scale problems in hydrology (special issue). *Journal of Hydrology* **65** (1-3).
- Rojas, R., Velleux, M., Julien, P.Y., Johnson, B.E. (2008) Grid scale effects on watershed soil erosion models. *Journal of Hydrologic Engineering* **13** (9), 793-802.
- Schmidt, J., Hennrich, K., Dikau, R. (2000) Scales and similarities in runoff processes with respect to geomorphometry. *Hydrological Processes* **14** 1963-1979.
- Shrestha, R., Tachikawa, Y., Takara, K. (2006) Input data resolution analysis for distributed hydrological modeling. *Journal of Hydrology* **319** 36-50.
- Sivapalan, M. (2003) Prediction in ungauged basins: a grand challenge for theoretical hydrology. *Hydrological Processes* **17** 3163-3170.
- Sivapalan, M. (2005) Pattern, process and function: elements of a unified theory of hydrology at the catchment scale. En: Anderson, M.G., McDonnell, J.J. (eds),

*Encyclopedia of hydrological sciences*. 193-219, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido.

Sivapalan, M., Grayson, R., Woods, R. (2004) Scale and Scaling in Hydrology. *Hydrological Processes* **18** 1369-1371.

Sivapalan, M., Kalma, J.D. (1995) Scale problems in hydrology: contributions of the Robertson workshop. En: Kalma, J.D., Sivapalan, M. (eds), *Scale issues in hydrological modelling*. 1-8, John Wiley and Sons, Chichester, Reino Unido.

Sivapalan, M., Wood, E.F., Beven, K. (1990) On hydrological similarity 3. A dimensionless flood frequency model using a generalized geomorphologic unit hydrograph and partial area runoff generation. *Water Resources Research* **26** 43-58.

Skøien, J.O., Blöschl, G. (2006) Scale effects in estimating the variogram and implications for soil hydrology. *Vadose Zone Journal* **5** 153-167.

Tetzlaff, D., McDonnell, J.J., Uhlenbrook, S., McGuire, K.J., Bogaart, P.W., Naef, F., Baird, A.J., Dunn, S.M., Soulsby, C. (2008) Conceptualizing catchment processes: simply too complex? *Hydrological Processes* **22** 1727-1730.

Tuli, A., Kosugi, K., Hopmans, J.W. (2001) Simultaneous scaling of soil water retention and unsaturated hydraulic conductivity functions assuming lognormal pore-size distribution. *Advances in Water Resources* **24** 677-688.

Vélez, J.I. (2001) Desarrollo de un modelo hidrológico conceptual y distribuido orientado a la simulación de las crecidas. Doctorado Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

Vélez, J.J., Francés, F. (2008) Calibración automática de las condiciones iniciales de humedad para mejorar la predicción de eventos de crecida. *Avances en recursos hidráulicos* **18** 25-36.

Vélez, J.J., Francés, F., López, F. Calibration strategy for hydrological distributed conceptual models. IUGG XXIV General Assembly, "Earth: our changing planet", IAHS-PUB session HW2005: From Measurements and Calibration to Understanding and Predictions . 2007. Perugia, Italia.

Vélez, J.J., Puricelli, M., López Unzu, F., Francés, F. (2009) Parameter extrapolation to ungauged basins with a hydrological distributed model in a regional framework. *Hydrology and Earth System Sciences* **13** 229-246.

Viney, N., Sivapalan, M. (2004) A framework for scaling of hydrologic conceptualization based on disaggregation-aggregation approach. Hydrological processes. *Hydrological Processes* **18** 1395-1408.

Western, A., Blöschl, G. (1999) On the spatial scaling of soil moisture. *Journal of Hydrology* **217** 203-224.

Wigmosta, M., Prasad, R. (2005) Upscaling and downscaling – dynamic models. En: Anderson, M.G., McDonnell, J.J. (eds), *Encyclopedia of hydrological sciences*. 165-176, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido.

Wood, E.F., Sivapalan, M., Beven, K., Band, L. (1988) Effects of spatial variability and scale with implications to hydrologic modeling. *Journal of Hydrology* **102** 29-47.

Woods, R. (2005) Hydrologic concepts of variability and scale. En: Anderson, M.G., McDonnell, J.J. (eds), *Encyclopedia of hydrological sciences*. 23-40, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido.

Zhang, W., Montgomery, D. (1994) Digital elevation model grid size, landscape representation, and hydrologic simulations. *Water Resources Research* **30** (4), 1019-1028.

Zhu, J., Mohanty, B.P. (2002) Upscaling of soil hydraulic properties for steady state evaporation and infiltration. *Water Resources Research* **38** (9), 1178.





## 9. APÉNDICE I: LISTA DE SÍMBOLOS

$h$  = capacidad máxima de almacenamiento estático (mm)  
 $k$  = conductividad hidráulica saturada (mm/h)  
LHS = muestreo hipercubo latino  
E1 = escala de detalle, escala puntual ó microescala  
E2 = escala de celda o macroescala  
NSE = índice de eficiencia de Nash-Surffle  
RMSE = raíz cuadrada del error cuadrático medio  
 $a$  = distancia de correlación (m)  
REA = área elemental representativa  
REW = cueca elemental representativa  
HRU = unidad de respuesta hidrológica  
REV = volumen elemental representativo  
X2 = excedente de precipitación (mm)  
H1 = almacenamiento estático (mm)  
X1 = precipitación (mm)  
ETP = evapotranspiración potencial (mm)  
Y1 = evapotranspiración (mm)  
 $\lambda$  = índice de cobertura vegetal  
X3 = infiltración gravitacional (mm)  
 $\Delta t$  = discretización temporal  
Y2 = flujo superficial (m<sup>3</sup>/s)  
 $u$  = velocidad del flujo superficial (m/s)  
 $\mu$  y  $\sigma$  = parámetros de la distribución lognormal  
 $q$  = número de variables aleatorias dentro de cada celda  
 $\underline{F}$  = matriz de cada campo de parámetros generados  
 $\underline{R}$  = matriz de correlación de cada campo de parámetros con iid  
 $\underline{R}^*$  = matriz de correlación del modelo de dependencia espacial exponencial para cada  $a$   
F1 = tamaño de celda 10x10m<sup>2</sup>  
F2 = tamaño de celda 30x30m<sup>2</sup>  
F3 = tamaño de celda 90x90m<sup>2</sup>  
CV = coeficiente de variación  
 $d$  = distancia de separación entre dos variables aleatorias de un mismo campo de parámetros (m)  
 $k_{ef}$  = conductividad hidráulica saturada efectiva (mm/h)  
 $h_{ef}$  = capacidad máxima de almacenamiento estático efectiva (mm)  
 $\Phi$  = Función de densidad acumulada de la distribución de probabilidad normal  
 $\varepsilon$  = Función de densidad de la distribución de probabilidad exponencial  
 $\alpha$  = Parámetro de la ecuación [6-3]  
 $\sigma(k[E1])$  = Desviación estándar de  $k$  con soporte E1  
iid = independencia e idéntica distribución de probabilidad  
 $\omega_1, \omega_2$  = Parámetros de la ecuación [6-1]



# 10. APÉNDICE II: MODELOS DESCARTADOS

A continuación se presentan los adicionales modelos matemáticos que fueron optimizados y que no presentaron un buen ajuste para el escalamiento de los parámetros  $h$  y  $k$ .

## ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE TIPO 1:

$$h_{ef}[E2]_t = \bar{h}[E1] - \bar{h}[E1] \times \exp\left\{-\beta_1 \exp(-\beta_2 \mu) \times (X_1[E2]_t + H_1[E2]_t)^{(\beta_3 \times \mu \beta_4)}\right\}$$

$$k_{ef}[E2]_t = \bar{k}[E1] - \bar{k}[E1] \times \exp\left\{-\beta_1 \exp(-\beta_2 \mu) \times (X_2[E2]_t)^{(\beta_3 \times \mu \beta_4)}\right\}$$

## ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE TIPO 2:

$$h_{ef}[E2]_t = \bar{h}[E1] - \bar{h}[E1] \times \exp\left\{(-\beta_1) \times (X_1[E2]_t + H_1[E2]_t)^{(\beta_2)}\right\}$$

$$k_{ef}[E2]_t = \bar{k}[E1] - \bar{k}[E1] \times \exp\left\{(-\beta_1) \times (X_2[E2]_t)^{(\beta_2)}\right\}$$

## ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE TIPO 3:

$$h_{ef}[E2]_t = \bar{h}[E1] - \frac{\bar{h}[E1]}{1 + (-\beta_1) \times (X_1[E2]_t + H_1[E2]_t)^{(\beta_2)}}$$

$$k_{ef}[E2]_t = \bar{k}[E1] - \frac{\bar{k}[E1]}{1 + (-\beta_1) \times (X_2[E2]_t)^{(\beta_2)}}$$

#### **ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE TIPO 4:**

$$h_{ef}[E2]_t = \bar{h}[E1] \times \beta_1 \times \{1 - \beta_2 \times \exp(-\beta_3 \times (X_1[E2]_t + H_1[E2]_t))\}$$

$$k_{ef}[E2]_t = \bar{k}[E1] \times \beta_1 \times \{1 - \beta_2 \times \exp(-\beta_3 \times (X_2)_t)\}$$

Donde,

$h_{ef}[E2]_t$  = Capacidad de almacenamiento estático efectivo en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros

$X_1[E2]_t$  = Precipitación en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros

$H_1[E2]_t$  = Almacenamiento estático en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros

$\mu, \sigma$  = Parámetros de la función de distribución Lognormal del parámetro hidrológico  $h$  a nivel de sub-celda y para  $k$  respectivamente.

$\bar{h}[E1]$  = Promedio de  $h$  a nivel de sub-celda

$k_{ef}[E2]_t$  = Conductividad hidráulica saturada efectiva en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros por hora.

$X_2[E2]_t$  = Excedente de precipitación en el intervalo de tiempo  $t$  (a escala de celda) en milímetros.

$\bar{k}[E1]$  = Promedio de  $k$  a nivel de sub-celda.

$\beta_1$  = parámetro constante optimizado

$\beta_2$  = parámetro constante optimizado

$\beta_3$  = parámetro constante optimizado

$\beta_4$  = parámetro constante optimizado

# 11. APÉNDICE III: CÓDIGOS DESARROLLADOS EN MATLAB

A continuación se presentan los códigos que fueron empleados para generar los campos aleatorios de parámetros, y la simulación inversa.

## 11.1 GENERACIÓN DE CAMPOS ALEATORIOS DE PARÁMEROS

```
%Generación de parámetros; inputs:m,v,mHU,vHU,p,q.
clc,timer=now;
mu = log((m^2)/sqrt(v+m^2));
sigma = sqrt(log(v/(m^2)+1));
muHU = log((mHU^2)/sqrt(vHU+mHU^2));
sigmaHU = sqrt(log(vHU/(mHU^2)+1));
CVk=(v^0.5)./m;CVHU=(vHU^0.5)./mHU;
for n=1:q
    cvk(1,n)=0.8*CVk;
    while cvk(1,n) < 0.99*CVk || cvk(1,n) > 1.01*CVk
        %hipercubo-latino,p=numero de realizaciones**q=numero de
variables
        %aleatorias
        X(:,n) = lhsdesign(p,1);
        %campo de k
        ks(:,n)=icdf('lognormal',X(:,n),mu,sigma);mks=mean(ks(:,n));stdks=
std(ks(:,n));vks=var(ks(:,n));
        cvk(1,n)=stdks/mks;
        muks(1,n) = log(((mks).^2)./sqrt(vks+(mks).^2));
        sigmaks(1,n) = sqrt(log(vks./((mks).^2)+1));
        %transformada a normal y test de hipotesis de normalidad al
0.05:
        Z(:,n)=(log(ks(:,n))-muks(1,n))./sigmaks(1,n);
        [h(1,n),signif(1,n)] = chi2gof(Z(:,n));
        [h(2,n),signif(2,n)] = kstest(Z(:,n),[],0.05);
    end
    %campo de HU
    cvHU(1,n)=0.8*CVHU;
    while cvHU(1,n) < 0.99*CVHU || cvHU(1,n) > 1.01*CVHU
        Y(:,n) = lhsdesign(p,1);
        HUs(:,n)=icdf('lognormal',Y(:,n),muHU,sigmaHU);mHUr=mean(HUs(:,n))
;stdHUr=std(HUs(:,n));vHUr=var(HUs(:,n));
        cvHU(1,n)=stdHUr/mHUr;
        muHUr(1,n) = log(((mHUr).^2)./sqrt(vHUr+(mHUr).^2));
        sigmaHUr(1,n) = sqrt(log(vHUr./((mHUr).^2)+1));
        %transformada a normal y test de hipotesis de normalidad al
0.05:
        ZHUs(:,n)=(log(HUs(:,n))-muHUr(1,n))./sigmaHUr(1,n);
        [h(3,n),signif(3,n)] = chi2gof(ZHUs(:,n));
        [h(4,n),signif(4,n)] = kstest(ZHUs(:,n),[],0.05);
    end
end
```

```

    end
    transc=datestr(now-timer,13);
    fprintf(['n: ' num2str(n) '/' num2str(q) ' (' transc ')\n']);
end
clear Z muks sigmaks
clear ZHUs muHUr sigmaHUr

%Dependencia espacial:

function distan=distancias(e,deltax)
%matriz de distancias***e=numero de
%subceldas por lado.deltax, tamaño de subcelda en metros.
%posición=matriz de coordenadas.
posicion=gridtop(e,e)*deltax;
distan=dist(posicion);
return

%calcula la matriz de correlación teórica con el modelo
exponencial,
%distan=matriz de distancias (calculada con la función
"distanancias.m"), a =
%longitud de correlación.
function c=corrmatriz(distan,a)
c=exp(-3.*distan./a);
return

%a=matriz del parametro simulado con correlación igual a la
correlación teórica, pero con datos diferentes a los simulados
originalmente.
%b=matriz de correlacion de la matriz a (debe ser aprox. igual a
"c".
%corrteorica=matriz de correlacion teorica (calculada con un
semivariograma o una
%funcion de correlación o una funcion de covarianza),
%d=matriz del parametro simulado con LHS asumiendo iid.
%la matriz "d" deberá ser ordenada posteriormente con el orden de
la matriz a
%a través de la función "OrdenarMatriz.m", de esta manera la
matriz de
%correlación de "d" será aprox. igual a la teorica.
function [a, b]=cholesky(c,d)
r=corrcoef(d);
[Q]=chol(r);P=chol(c);
P=P';Q=Q';
a=d*((P*inv(Q))');b=corrcoef(a);
return

%se obtiene una matriz k con los valores de las columnas de la
matriz d
%ordenada de acuerdo al ordenamiento de la matriz a. (paso
necesario para
%cambiar los valores de la matriz de correlaciones de d a los
valores de a)
%p= numero de realizaciones (número de filas); q numero de
variables
%aleatorias (número de columnas); matriz a= matriz producida en la
%descomposición de cholesky, matriz d= muestra generada con LHS.
function k=OrdenarMatriz(a,d,p,q)
[ordenado,estaba]=sort(a);
posicion=[];

```

```

for u=1:q
    posicion=[posicion,estaba(:,u)+(u-1)*p];
end
d=sort(d);
k=zeros(p,q);
k(posicion)=d;

```

## 11.2 MODELO HIDROLÓGICO Y SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA INVERSA

```

%***modelo de producción de escorrentía TETIS***; input: vector
X1(precipitación en t instantes), escalar deltat (discretización
temporal en horas),
% escalar e (numero de subceldas en una fila), H1 (matriz con e
columnas y q/e*p
%filas representando el estado de almacenamiento estático
inicial), H2(matriz con e columnas y q/e*p
%filas representando el estado de almacenamiento superficial
inicial), q
%(es el número de variables aleatorias dentro de la celda), p (es
el número
%de realizaciones), HU (matriz con e columnas y q/e*p filas,
representa el
%parámetro simulado con LHS y organizado con el script
"transfAcell.m"), k(matriz con e columnas y q/e*p filas,
representa el
%parámetro simulado con LHS y organizado con el script
"transfAcell.m").
clc,timer=now;
for t=1:fin
    %tanque uno:
    X2(:,1:e)=max(0,X1(t)+H1(:,1:e)-HU(:,1:e));
    for r=1:p
        X2_E2(r,t)=mean(mean(X2((r-1)*e+1:e*r,1:e)));
        H1_E2(r,t)=mean(mean(H1((r-1)*e+1:e*r,1:e)));
        if X2_E2(r,t) ~= 0
            HUef(r,t)=X1(t)+H1_E2(r,t)-X2_E2(r,t);
        else
            HUef(r,t)=X1(t)+H1_E2(r,t);
        end
    end
    H1(:,1:e)=X1(t)+H1(:,1:e)-X2(:,1:e);
    Y1(:,1:e)=min(ETP*lamda,H1(:,1:e));
    H1(:,1:e)=H1(:,1:e)-Y1(:,1:e);
    %tanque dos;
    X3(:,1:e)=min(X2(:,1:e),deltat.*k(:,1:e));
    for r=1:p
        X3_E2(r,t)=mean(mean(X3((r-1)*e+1:e*r,1:e)));
        if X3_E2(r,t)~= X2_E2(r,t)
            kef(r,t)=X3_E2(r,t)./deltat;
        else
            kef(r,t)=X2_E2(r,t)./deltat;
        end
    end
    H2(:,1:e)=H2(:,1:e)+X2(:,1:e)-X3(:,1:e);

```

```

Y2(:,1:e)=H2(:,1:e).*alfa;
H2(:,1:e)=H2(:,1:e)-Y2(:,1:e);
%
for r=1:p
    H2((r-1)*e+1,1:e)=H2((r-1)*e+1,1:e)+Y2borde;
    Y2_E2(r,t)=mean(mean(Y2((r-1)*e+1:e*r,1:e)));
    H2_E2(r,t)=mean(mean(H2((r-1)*e+1:e*r,1:e)));
    Out_E2(r,t)=Y2_E2(r,t)*deltax*deltax*e*e/1000/600;
end
clear X2 Y1 X3 Y2;
transc=datestr(now-timer,13);
fprintf(['t: ' num2str(t) '/' num2str(fin) ' (' transc
')\n']);
end

```