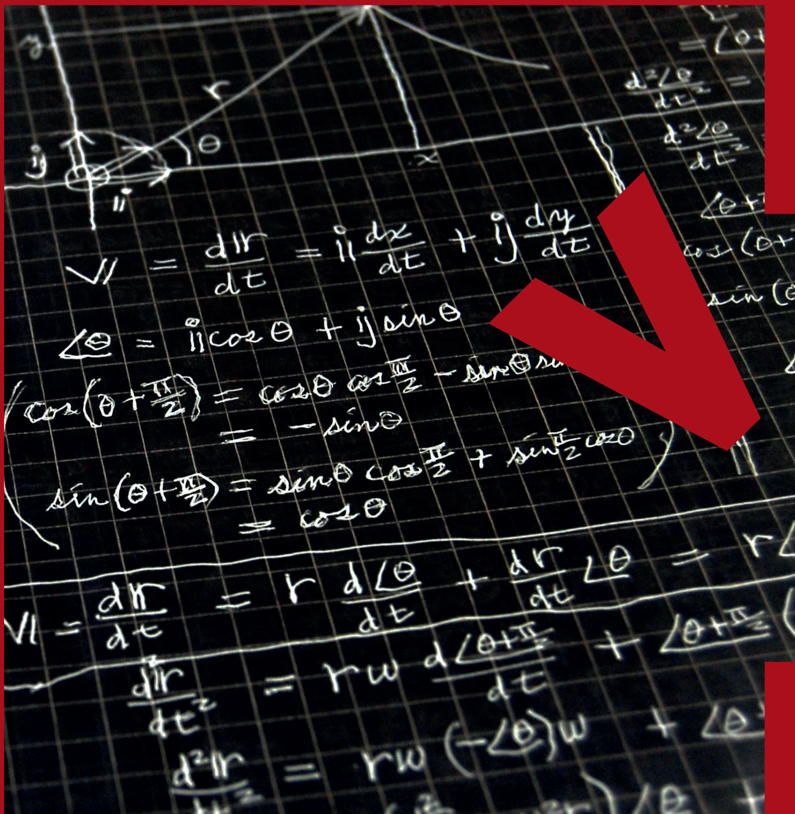
MATEMÁTICAS, FÍSICA Y QUÍMICA



PROBLEMAS DE CÁLCULO EN UNA VARIABLE

Francisco I. Chicharro | Alicia Cordero | Eulalia Martínez | Juan R. Torregrosa

UPV punto de partida

Editorial Universitat Politècnica de València

Francisco I. Chicharro
Alicia Cordero
Eulalia Martínez
Juan R. Torregrosa

Problemas de cálculo en una variable

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección Punto de Partida

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Chicharro, F. I.; Cordero, A.; Martínez, E.; Torregrosa, J. R. (2019). *Problemas de cálculo en una variable.* Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0283_06_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-814-0
Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Resumen

Este libro presenta parte de las matemáticas básicas que se utilizan en las ciencias aplicadas y las ingenierías. Es el fruto de la experiencia docente de los autores en la enseñanza de la asignatura Matemáticas I en Ingeniería de Telecomunicación y está diseñado para alumnos de primeros cursos universitarios.

Nuestro objetivo es proporcionar un texto de apoyo para el aprendizaje en la resolución de problemas tanto en temas de Cálculo Diferencial como las funciones elementales de una variable, el estudio de su continuidad, su derivabilidad e integrabilidad, o el cálculo de sucesiones y series. Asimismo, se trata el tema de Números Complejos que será extremadamente útil para el seguimiento de asignaturas básicas dentro de las Telecomunicaciones, tales como Teoría de Circuitos, Circuitos Electrónicos o Señales y Sistemas, entre otras.

Los autores

Índice general

Resumen III

Índice general V

1 Funciones reales de variable real 1
- 1.1 Problemas resueltos 2
  - 1.1.1 Funciones elementales 2
  - 1.1.2 Operaciones con funciones 6
  - 1.1.3 Función inversa 8
  - 1.1.4 Función valor absoluto. Inecuaciones. 11
  - 1.1.5 Función parte entera 14
- 1.2 Problemas propuestos. 18

2 Límites y continuidad 23
- 2.1 Problemas resueltos 24
- 2.2 Problemas propuestos 39

3 Derivación en una variable y aplicaciones 43
- 3.1 Problemas resueltos 44
  - 3.1.1 La derivada: definición, reglas, ... 44
  - 3.1.2 Aplicaciones de la derivada 56
  - 3.1.3 Polinomios de Taylor. 62
- 3.2 Problemas de examen 64
- 3.3 Problemas propuestos 76

4 Integración en una variable y aplicaciones 79
- 4.1 Problemas resueltos 80
  - 4.1.1 Integrales inmediatas 80
  - 4.1.2 Integración por partes e integrales recursivas 84
  - 4.1.3 Integración de funciones racionales 86

4.1.4 Cambios de variable 90
4.1.5 Integrales impropias e infinitas 94
4.1.6 Aplicaciones: cálculo de áreas, longitudes de arco, promedios, ... 96
4.2 Problemas de examen 106
4.3 Problemas propuestos 122

5 Sucesiones y Series de números reales 125
5.1 Problemas resueltos 126
5.1.1 Sucesiones de números reales 126
5.1.2 Series numéricas 133
5.2 Problemas de examen 142
5.3 Problemas propuestos 156

6 Números complejos 161
6.1 Problemas resueltos 162
6.1.1 Operaciones con números complejos 162
6.1.2 Ecuaciones con números complejos 171
6.1.3 Polinomios complejos 177
6.1.4 Geometría de números complejos 178
6.1.5 Problemas de aplicación 186
6.2 Problemas de examen 189
6.3 Problemas propuestos 201

Capítulo 1

Funciones reales de variable real

En este primer tema tratamos los objetos fundamentales del cálculo: las funciones. Estas aparecen de forma natural cuando una cantidad y *depende de otra,* x*. El tipo de dependencia es muy variado pero si podemos expresar dicha dependencia en términos matemáticos, mediante una función,* $y = f(x)$*, tenemos asegurado un buen comienzo para realizar un estudio del fenómeno. Ya son conocidas las funciones elementales, polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. Es conveniente recordar sus propiedades, las operaciones entre ellas y por supuesto sus gráficas, puesto que en ingeniería, en numerosas ocasiones, una función viene dada mediante una tabla de valores o una gráfica que modeliza un fenómeno. Sin duda la representación gráfica de una función es sumamente útil para describirla y analizarla.*

1.1 Problemas resueltos

Resolveremos en esta sección problemas que involucran funciones de una variable analizando sus propiedades y, ayudándonos de sus representaciones gráficas, intentaremos que el lector se familiarice con las funciones que van a ser la base para adentrarse en temas posteriores con contenidos más específicos.

Cabe destacar que, dentro de esta sección, no hay problemas de examen, puesto que las preguntas relativas a funciones forman parte de problemas correspondientes a otros temas.

1.1.1 Funciones elementales

Problema 1. Determina el dominio de definición y el rango o conjunto imagen de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

(b) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^3 + 5x + 6}{4 - x^2}\right)$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

Solución

(a) La raíz cuadrada está definida cuando el radicando es mayor o igual que cero. En este caso es una parábola cóncava como se observa en la Figura 1.1, con raíces $x = 0$ y $x = 6$, por tanto es positiva en $x \in]-\infty, 0] \cup [6, +\infty[$ conjunto que constituye el dominio de la función.

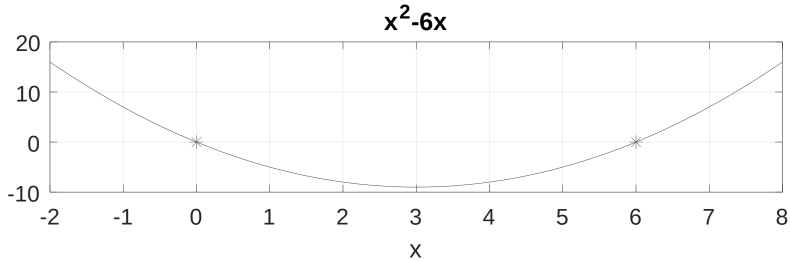


Figura 1.1: La parábola y sus puntos de corte.

En cuanto al rango de valores que toma la función es $[0, +\infty[$, notemos que para que $f(x)$ sea función hemos de considerar la raíz positiva como se indica en el enunciado, su menor valor se alcanza para $x = 0$ y $x = 6$, como podemos observar en su representación gráfica de la Figura 1.2.

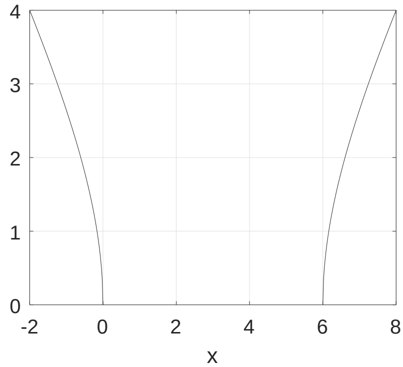


Figura 1.2: La raíz cuadrada positiva.

(b) La función logarítmica está definida para valores estrictamente positivos. Por tanto hemos de estudiar cuando esta función racional es positiva. Puede comprobarse que el numerador tiene una única raíz real en $x = -1$ siendo positivo en $]-1, +\infty[$ mientras que el denominador es positivo en $]-2, 2[$ por lo que el cociente será positivo en $D =]-\infty, -2[\cup]-1, 2[$. Vemos la gráfica de la función racional en la Figura 1.3.

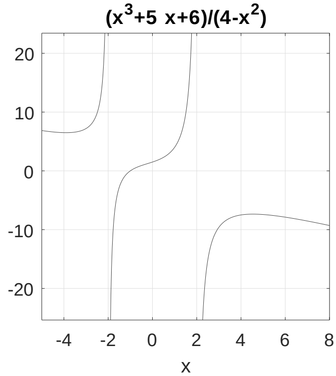


Figura 1.3: La función racional argumento de la función logarítmica.

En cuanto al rango de valores que toma la función $f(x)$ definida en b) es $]-\infty, +\infty[$, ya que el logaritmo alcanza cualquier número real cuando el dominio toma valores desde $]0, +\infty[$, como ocurre en este ejemplo al evaluar la función racional en D. Podemos observar la representación gráfica de $f(x)$ en la Figura 1.4.

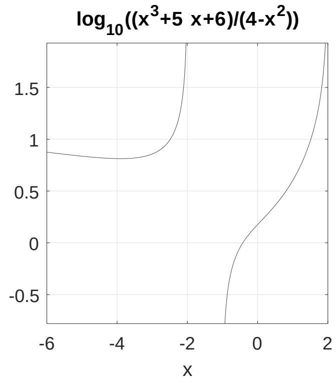


Figura 1.4: La función logarítmica.

(c) La raíz cúbica está definida en todo $\mathbb{R}$ y su rango también es toda la recta real.

Problema 2. Indica cómo se obtiene la gráfica de cada una de las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

$$(a) \quad y = f(x) - 3, \; (b) \quad y = f(x) + 3,$$
$$(c) \quad y = f(x+3), \; (d) \quad y = f(x-3).$$

Solución

(a) La función se desplaza sobre el eje y hacia abajo tres unidades en todo su dominio.

(b) La función se desplaza sobre el eje y hacia arriba tres unidades en todo su dominio.

(c) La función se desplaza sobre el eje x hacia la izquierda tres unidades en todo su dominio.

(d) La función se desplaza sobre el eje x hacia la derecha tres unidades en todo su dominio.

Mostramos en la Figura 1.5 las representaciones gráficas de las tres primeras opciones. Compárense con la gráfica de la parábola $y = x^2$.

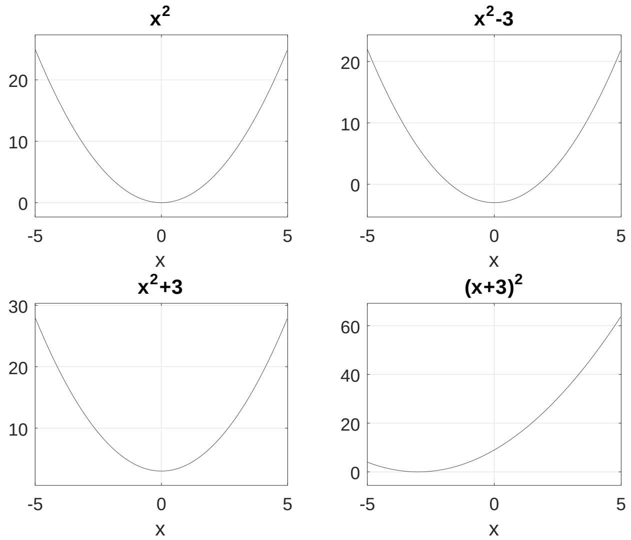


Figura 1.5: Desplazamiento de funciones.

Problema 3. Comprueba si la función f es par, impar o ninguna de las dos cosas:

(a) $f(x) = x^2 - 4$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, (c) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$,
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, (e) $f(x) = \cos(1/x)$, (f) $f(x) = \sqrt{1-x}$,
(g) $f(x) = 1/x^2$, (h) $f(x) = x^3 - x$, (i) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 1$.

Solución

Una función es par si verifica $f(-x) = f(x)$, por lo tanto las funciones pares siempre son simétricas respecto al eje y. Es fácil comprobar que las funciones dadas en (a), (d), (e) y (g) son funciones pares, mientras que las funciones dadas en (b), (c) y (h) son impares; el resto no son pares ni impares. Mostremos el razonamiento formalmente para algún caso.

Por ejemplo en (b) tendríamos $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ por lo que se trata de una función impar.

Por lo que respecta al apartado (e) basta utilizar el hecho de que $\cos(x)$ es una función par para concluir que esta también lo es, así tenemos $f(-x) = \cos(\frac{1}{-x}) = \cos(\frac{-1}{x}) = \cos(\frac{1}{x}) = f(x)$.

Problema 4. Representa una función que cumpla las siguientes características:

(a) Su dominio es todo $\mathbb{R}$.
(b) Sólo corta al eje X en el punto $(0, 0)$.
(c) Su rango es el intervalo $]-1, 1[$.
(d) Es creciente en todo su dominio.

Solución

La función $y = f(x) = \arctan(x)$ verifica las condiciones (a), (b) y (d) pero su rango es $]-\pi/2, \pi/2[$ por tanto la función $y = \frac{2}{\pi} f(x)$ verifica también la opción (c), como se observa en la Figura 1.6.

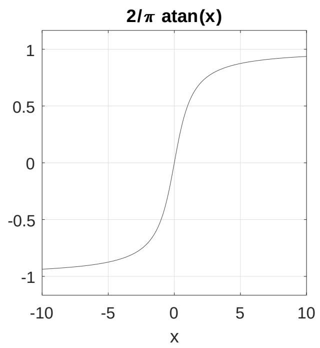


Figura 1.6: La función arco tangente.

1.1.2 Operaciones con funciones

Problema 5. Dadas las funciones f, g, h y k definidas como sigue:

$$f(x) = 2x^2 - x, \quad g(x) = 3x + 2, \quad h(x) = \operatorname{sen} x, \quad k(x) = 1 - \sqrt{x}.$$

Determina las siguientes funciones:
(a) $g + k$, (b) f/g, (c) $h \circ k$, (d) $k \circ h$, (e) $3k$.

Solución Las nuevas funciones vienen dadas por:

(a) $(g + k)(x) = g(x) + k(x) = 3x + 3 - \sqrt{x}$

(b) $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \dfrac{2x^2 - x}{3x + 2}$

(c) $(h \circ k)(x) = h(k(x)) = h(1 - \sqrt{x}) = \operatorname{sen}(1 - \sqrt{x})$

(d) $(k \circ h)(x) = k(h(x)) = k(\operatorname{sen} x) = 1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}$

(e) $(3k)(x) = 3k(x) = 3(1 - \sqrt{x})$

Problema 6. Sean f y g funciones pares.

(a) ¿La función $f + g$ es una función par?
(b) ¿La función fg es una función par?
(c) ¿La función $f \circ g$ es una función par?, ¿y $g \circ f$?
(d) ¿Se pueden generalizar estos resultados para el caso de funciones impares?

Solución

Teniendo como hipótesis que f y g son pares, comprobemos si se verifica la definición de función par para las funciones propuestas.

(a) $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$.

(b) $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$.

(c) $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

En definitiva la suma, el producto y la composición de funciones pares resulta ser una nueva función par. Análogamente se verifica la tesis para la composición $g \circ f$.

(d) En el caso de que f y g sean impares se tiene que la suma y la composición de funciones impares resultan también funciones impares pero el producto resulta ser una función par.

Problema 7. Supongamos que g es una función par y $h = f \circ g$. ¿Será h siempre una función par?

Solución

Veamos que es suficiente que la función g sea par para que lo sea la composición $f \circ g$ para cualquier función f.

$$h(-x) = (f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = h(x),$$

por lo que $h(x)$ es una función par. Obviamente no ocurre lo mismo con la composición $g \circ f$; intente aplicar la definición para verificarlo.

1.1.3 Función inversa

Problema 8. Determina una expresión para definir la función inversa de las siguientes funciones:

$(a)\ f(x) = x^2 + 2,\qquad (b)\ f(x) = \ln(x+3),\qquad (c)\ f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x},$

$(d)\ f(x) = \sqrt{2+5x},\qquad (e)\ f(x) = 2^{10^x},\qquad (f)\ f(x) = \operatorname{sen} x.$

Solución

Recordemos que para que exista la inversa de una función ha de ser biyectiva, en este caso la inversa de una función es otra de manera que al componerlas resulta la función identidad. En general en un dominio donde exista la función inversa resulta cómodo realizar los siguientes pasos para obtenerla:

1. Escribe $y = f(x)$.
2. Intercambia valores de x e y escribiendo $x = f(y)$.
3. Al despejar y de $x = f(y)$ se obtiene la función inversa $f^{-1}(x)$.

(a) $f(x) = x^2 + 2$, es una función par, (simétrica respecto al eje Y), definida en todo $\mathbb{R}$, para que sea biyectiva la restringimos al intervalo $[0, +\infty[$ cuya imagen es $[2, +\infty[$. Para obtener la inversa de $f(x) = x^2 + 2$, tendremos que restar 2 y después realizar la raíz cuadrada obteniendo como resultado final x, por lo que la inversa de f es $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$.

(b) La función $f(x) = \ln(x+3)$ es biyectiva entre $]0, +\infty[$ y $]-\infty + \infty[$, por tanto siguiendo el procedimiento anterior tenemos que $y = \ln\ (x + 3)$ nos proporciona $x = \ln(y+3)$ y por tanto $y = e^x - 3$, podemos escribir $f^{-1}(x) = e^x - 3$.

(c) La función $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{1\}$ y su rango de valores es $\mathbb{R} - [-1, 1]$, por lo que su inversa está definida en ese conjunto, viene dada por $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)$.

(d) La función $f(x) = \sqrt{2+5x}$ es biyectiva entre $[-2/5, +\infty[$ y su conjunto imagen $[0, +\infty]$ en el que se define su inversa dada por $y = \dfrac{x^2-2}{5}$

(e) Para este caso la función inversa está definida en $]0, +\infty[$ y es $y = \log_{10}(\log_2(x))$.

(f) Por último la función $\operatorname{sen}(x)$ toma valores en $[-1, 1]$ donde su inversa se obtiene con $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$.

En la Figura 1.7 podemos observar la simetría de una función y su inversa respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Pueden realizarse otras representaciones gráficas de las funciones dadas junto a su inversa y observar esta simetría.

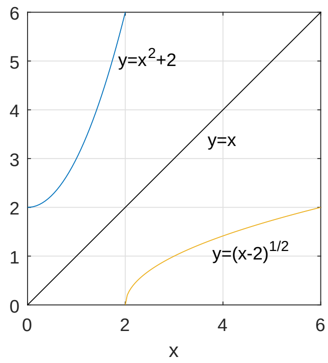


Figura 1.7: Simetría de una función y su inversa respecto a $y = x$.

Problema 9. La población de cierta especie en un ecosistema limitado, con una población inicial de 100 individuos y que soporta una capacidad máxima de 1000, es

$$P(t) = \frac{100000}{100 + 900e^{-t}},$$

donde t se mide en años.

(a) Representa la función y estima cuánto tardará la población en alcanzar los 900 individuos.

(b) Encuentra la inversa de la función $P(t)$.

(c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población alcance la capacidad máxima?

Solución

(a) En la Figura 1.8 podemos observar el crecimiento logístico de la población hasta alcanzar los 1000 habitantes.

Resolviendo la ecuación

$$P(t) = \frac{100000}{100 + 900e^{-t}} = 900,$$

obtenemos $t = \ln(81) = 4.3944$ años tardará la población en alcanzarlos 900 hab.

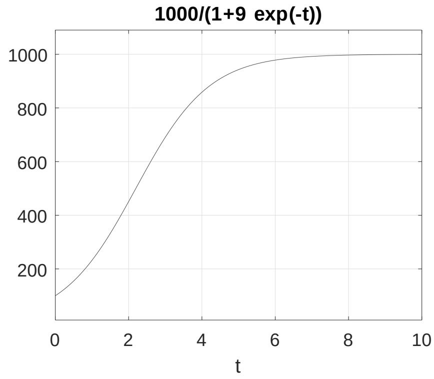


Figura 1.8: Crecimiento logístico poblacional.

(b) Consideraremos la función $P(t)$ definida en$[0, +\infty[$ de forma que su imagen es $[100, 1000[$, este es el dominio de la inversa que viene dada por $t(P) = \ln\left(\dfrac{9P}{1000-P}\right)$ y nos proporcionará los años que han de pasar para que la población sea de P habitantes.

(c) La capacidad máxima no llega a alcanzarse ya que se trata de un comportamiento límite, no obstante si calculamos $P(10)$ obtenemos 999.59 y $P(18) = 999.99$.

Problema 10. Encuentra valores de a y b para los cuáles:

(a) $\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$

(b) $\cos(a/2) \neq \dfrac{\cos a}{2}$

(c) $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$

Solución Es fácil encontrar valores para los que no se obtengan las desigualdades anteriores ya que las relaciones que se verifican son las siguientes:

(a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

(b) $\cos(a/2) = \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$

(c) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Por ejemplo:

(a) $1 = \cos(\pi + \pi) \neq \cos\pi + \cos\pi = -2$

(b) $0 = \cos(\pi/2) \neq \frac{\cos\pi}{2} = -1/2$

(c) $1.3132 = \ln(1 + e) \neq \ln 1 + \ln e = 1$

1.1.4 Funciónvalor absoluto. Inecuaciones

Problema 11. Representa las gráficas de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = |x|, \quad (b) \quad f(x) = |\operatorname{sen} x|, \quad (c) \quad f(x) = \operatorname{sen}|x|, \quad (d) \quad f(x) = x + |x|.$$

Solución

Es importante conocer la expresión de $|x|$ como función definida a trozos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

por tanto

$$f(x) = |\operatorname{sen} x| = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ -\operatorname{sen} x, & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$$

mientras que

$$f(x) = \operatorname{sen}|x| = \begin{cases} \operatorname{sen}(-x), & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

por último

$$f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Con estas consideraciones obtenemos las gráficas de estas funciones en la Figura 1.9.

Problema 12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a) } |x + 5| = 3, \text{ (b) } |x|^2 + x = 0, \text{ (c) } 2x - |x^2 - 5| = 0.$$

Solución

(a) Si $x > -5$ tenemos $x + 5 > 0$. La ecuación a resolver será $x + 5 = 3$, por tanto $x = -2$.

Por el contrario si $x \leq -5$ tenemos $x + 5 \leq 0$. La ecuación a resolver será $-(x + 5) = 3$, por tanto $x = -8$.

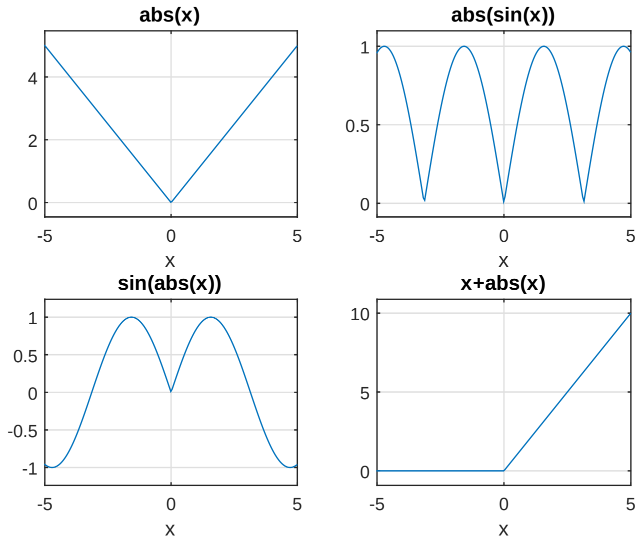


Figura 1.9: La función valor absoluto y variantes.

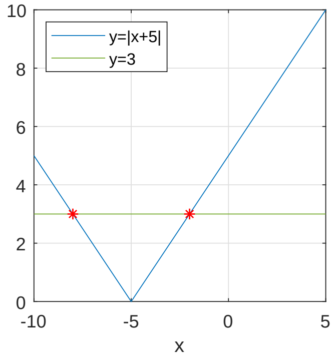


Figura 1.10: Gráfica para inecuación $|x+5| = 3$.

Gráficamente la solución resulta obvia observando los puntos de corte de las gráficas involucradas, representadas en la Figura 1.10

(b) La ecuación $|x|^2 + x = 0$ es equivalente a $x^2 + x = 0$. Por tanto las soluciones son $x = 0$ y $x = -1$;

(c) La parábola $x^2 - 5$ es negativa en $]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$. Por tanto la ecuación en este intervalo queda de la forma $x^2 + 2x - 5 = 0$, cuyas soluciones son $x = -1 \pm \sqrt{6}$.

Solo $x = -1 + \sqrt{6}$ pertenece al intervalo considerado. En el resto de valores la parábola es positiva y tendremos la ecuación $-x^2 + 2x + 5 = 0$ de cuyas soluciones $x = 1 \pm \sqrt{6}$ solo es válida $1 + \sqrt{6}$, obsérvese la Figura 1.11.

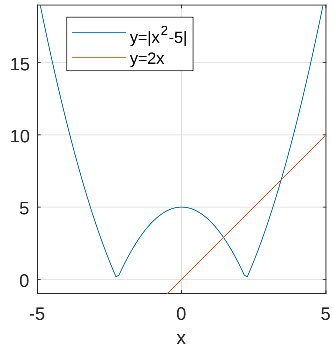


Figura 1.11: Obsérvese el rango de la parábola con valores positivos.

Problema 13. Resuelve las siguientes inecuaciones:
(a) $|2x - 1| \leq 3$, (b) $x^2 + x \geq 6$, (c) $x^4 - 6x^2 + 8 < 0$.

Solución

(a) Se tienen las siguientes equivalencias:

$$|2x-1| \leq 3 \leftrightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 3 \leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 2x - 1 \\ 2x - 1 \leq 3 \end{cases}$$

La primera inecuación conduce a $x \geq -1$ y la segunda se verifica si $x \leq 2$ por lo que la solución es el intervalo $[-1, 2]$.

(b) La ecuación $x^2 + x \geq 6$ es equivalente a $x^2 + x - 6 \geq 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado $x^2 + x - 6 \geq 0$, tiene soluciones $x = 2$ y $x = -3$ y la parábola es cóncava, por tanto concluimos que la solución de la inecuación es $]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$.

(c) La ecuación bicuadrada $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ tiene soluciones $\pm\sqrt{2}$ y ± 2. Basta comprobar que en $\pm\infty$ la función es $+\infty$ para tener su representación gráfica. Veáse Figura 1.12, de ella se deduce que la solución de nuestra inecuación es $]-2, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2[$.

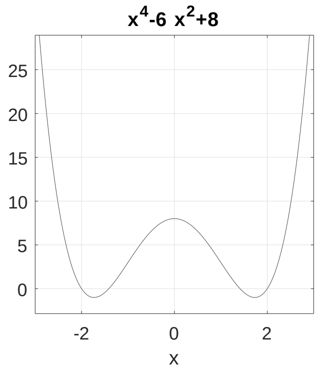


Figura 1.12: Obsérvese los valores donde la ecuación bicuadrada $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ toma valores positivos.

1.1.5 Función parte entera

Problema 14. (a) Representa la función de Heaviside H definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ t < 0 \\ 1, & \text{si } \ t \geq 0 \end{cases}$$

(b) Traza la gráfica de la función $E(x) = [x]$, donde $[x]$ representa la parte entera del valor x.
(c) Traza la gráfica de la función $f(x) = [x] + x$.
(d) Traza la gráfica de la función $f(x) = abs([x])$.

Solución

(a) Evidentemente la función de Heaviside es una función discontinua en $x = 0$, cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1 para cualquier positivo. Esta función tiene numerosas aplicaciones en procesado de señales, y se conoce como función escalón, describiendo una señal que se activa en un instante específico, y se queda activa indefinidamente, como puede verse en la primera gráfica de la Figura 1.13.

(b) Si definimos la parte entera de un número x como el máximo número entero no superior a x tenemos la segunda gráfica mencionada de la Figura 1.13.

(c),(d) Basta analizar estas funciones definidas a trozos para obtener la tercera y cuarta gráfica de la Figura 1.13.

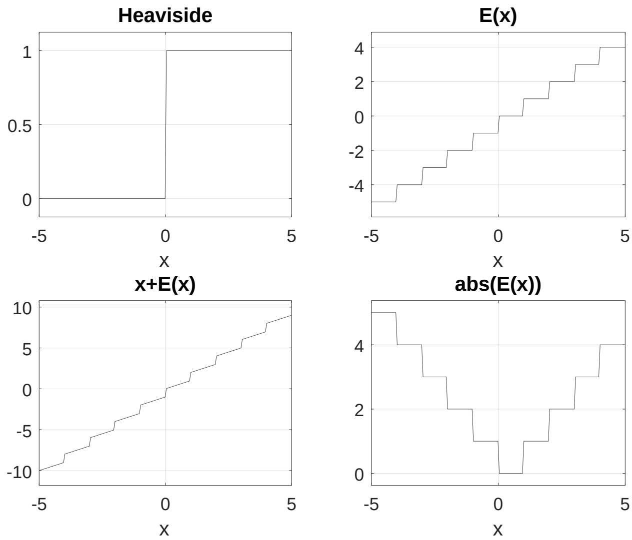


Figura 1.13: Representación de funciones (arriba izquierda) $H(t)$, (arriba derecha) $[x]$, (abajo izquierda) $x + [x]$, (abajo derecha) $abs([x])$.

Problema 15. Determina el dominio y la imagen de la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

¿Podemos calcular la inversa de esta función?

Solución

El dominio de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$. En cuanto a la imagen es $[0, +\infty[$, como puede observarse en la Figura 2.5.

La función inversa no está definida por no ser $f(x)$ una función biyectiva ya que $f(0) = f(2) = 1$. Ahora bien podemos calcular las funciones inversas de cada uno de los trozos que definen a $f(x)$. Es decir en el intervalo $]-\infty, 1]$ la función definida tiene rango o imagen $[0, +\infty[$ y sobre este intervalo podemos comprobar que la inversa coincide con la propia función, es $y = 1 - x$. Un razonamiento análogo nos llevaría a establecer que la inversa del segundo trozo es $y = x^2 + 1$.

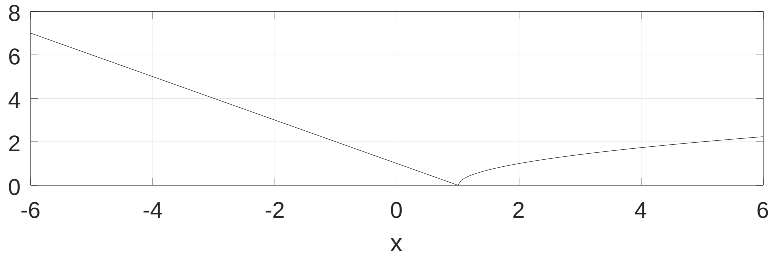


Figura 1.14: Función a trozos.

Problema 16. Comprueba que $f(x) = g^{-1}(x)$ y $g(x) = f^{-1}(x)$, siendo

$$f(x) = 2x^3 - 1, \qquad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}.$$

Solución

La función $f(x)$ dada tiene dominio e imagen toda la recta real y es biyectiva, por lo tanto basta comprobar que tanto $(f \circ g)$ como $(g \circ f)$ son la identidad, veámoslo en un caso, el otro será análogo.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^3 - 1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} = x.$$

Como ejercicio práctico puede comprobarse la simetría de ambas funciones respecto a la bisectriz del primer cuadrante al realizar la representación gráfica.

Problema 17. La producción de x unidades supone para una empresa un coste $C(x) = 0.5x + 500$. El coste medio por unidad viene dado por C/x. Determina el comportamiento del coste medio si hiciéramos crecer la producción indefinidamente e interpreta el resultado.

Solución

La función de costes de la empresa puede interpretarse en términos económicos como un coste fijo de 500 euros mas un coste variable de 0.5 euros por unidad producida. El coste medio por unidad viene dado por

$$C_m(x) = 0.5 + \frac{500}{x}.$$

Si aumentamos la producción el coste medio decrece y su valor límite es 0.5. Obviamente la situación límite no es factible en términos económicos pues la producción

Para seguir leyendo haga click aquí