UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

La construcción matemática de algunas funciones de interés económico: una aproximación

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores (jccortes@mat.upv.es;jvromero@mat.upv.es;drosello@mat.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo docente se aborda, a través de varios ejemplos, la construcción de algunas funciones económicas que frecuentemente suponen un punto de partida prefijado en muchos textos universitarios económicos con intensificación en matemáticas. En esencia, como docentes nos plantemos la búsqueda de contextos generales donde podamos mostrar de un modo sencillo, verosímil y enriquecedor situaciones donde las funciones económicas más usuales surgen de forma natural.

Focalizamos la exposición en la construcción de funciones tanto de interés para los productores como para los consumidores. Para los primeros, mostraremos cómo construir funciones tales como la función de costes totales, la función de oferta y las funciones de demanda de los factores productivos que intervienen en la fabricación del bien que produce la empresa. La construcción de dichas funciones se basará en los objetivos empresariales orientados a la minimización de costes totales y la maximización de beneficios. Respecto de los consumidores, plantearemos la construcción de la función de demanda a partir del objetivo natural del consumidor, maximizar su satisfacción o utilidad. El elemento unificador de ambos problemas se basará en la consideración de un mismo tipo de función de partida: asumiremos que tanto la producción de la empresa como la utilidad del consumidor, están representadas por funciones de la familia Cobb-Douglas. Este tipo de funciones dependen de ciertos parámetros y tienen la ventaja de ser sencillas de tratar desde el punto de vista matemático, así como de capturar, para diferentes casos particulares de sus parámetros, situaciones de interés económico.

2 Introducción

Una de las partes más importantes en la formación matemática universitaria orientada a la economía con intensificación en matemáticas es la representación matemática adecuada de las diferentes funciones económicas ligadas a la producción y el consumo de un bien. Funciones tales como los costes totales, las funciones de oferta del bien que produce una empresa, las funciones de demanda de los factores productivos que utiliza una empresa para su planificación, o las funciones de demanda de los consumidores son fundamentales en la presentación de una teoría económica de la empresa. De hecho aparecen continuamente en áreas de conocimiento orientadas a la formación en la modelización matemático-económica.

En la práctica docente con frecuencia se parte de enunciados y situaciones prácticas donde las funciones económicas (como las anteriormente citadas) vienen dadas *automáticamente*, y a partir de las mismas se plantean otro tipo de cuestiones relacionadas con ellas. Sin embargo, nos parece oportuno detenernos en estas páginas para mostrar, a través de varios ejemplos sencillos, pero ilustrativos, para reflexionar acerca de la forma de construir dicho tipo de funciones. Pretendemos con ello que el lector interesado encuentre en estas líneas un estímulo sobre la necesidad de replantearse en general los puntos de partida, a los que quizás, por la inercia docente del paso de los cursos y la premura de impartir las técnicas básicas de los programas de las distintas asignaturas, los profesores casi nunca nos detenemos a presentar y discutir dichos enfoques con la pausa y reflexión que sin duda se merecen.

3 Objetivos

Los objetivos docentes de este artículo están dirigidos a los lectores interesados en la modelización matemático-económica y son:

- Proporcionar al alumno una justificación a la forma funcional que tienen algunas funciones de interés económico, tales como la función de costes totales, las funciones de oferta y demanda ligadas al proceso productivo y la función de demanda del consumidor.
- Dotar al alumno un enfoque deductivo general susceptible de poder ser aprovecharlo a lo largo de su formación universitaria para deducir el patrón funcional que se asume para otras funciones económicas distintas a las estudiadas en estas páginas.

4 Desarrollo

4.1 Planteando la función de costes totales de una empresa

En este apartado vamos a presentar mediante un ejemplo sencillo, pero ilustrativo, una forma natural de plantear la función de costes totales de una empresa. Como consecuencia de la búsqueda de dicha función económica, también obtendremos otras conclusiones interesantes relativas a la manera de fijar los niveles de los factores de producción que utilice la empresa para fabricar el bien que produce.

Como en todo análisis teórico, partiremos de una serie de premisas simplificadoras, pero plausibles desde el punto de vista de la teoría económica. Por ello, asumiremos que la empresa conoce su propia función de producción y que ésta viene especificada por cierta expresión matemática, como por ejemplo, la dada en la Ecuación 1.

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad A, \alpha, \beta > 0.$$

Ecuación 1. Función de producción de la empresa.

F(K,L) representa el número de unidades fabricadas por la empresa a partir de los factores productivos K y L, que usualmente representan el capital y el trabajo, respectivamente (ambos expresados en las correspondientes unidades). Aunque ahora no profundizaremos en ello, cabe señalar que la forma de la función de producción responde a un modelo estándar denominado función de producción de Cobb-Douglas, la cual es comúnmente aceptada en los textos económicos para representar adecuadamente la producción de una empresa en situaciones bastantes generales (véase la referencia bibliográfica [1] para ampliar este comentario). A partir de los factores K y L, cuyos precios unitarios son conocidos por la empresa en la práctica, digamos π_K y π_L, respectivamente, la empresa fabricará un producto al precio final unitario que representaremos por P. La Ecuación 2 recoge toda esta información.

$$\begin{aligned} P &= \text{precio unitario del producto final} \\ \pi_K &= \text{precio unitario del factor K} \\ \pi_L &= \text{precio unitario del factor L} \end{aligned}$$

Ecuación 2. Datos relativos a los precios.

Para facilitar los cálculos posteriores, supondremos que la empresa está situada en un mercado con ***competencia perfecta***, lo que implicará que los valores P, π_K y π_L son constantes paramétricas y por tanto quedan fijadas por las leyes del mercado, es decir, estos valores le son dados a la empresa, la cual no puede ejercer influencia alguna sobre ellos para modificarlos a su conveniencia.

En primer lugar, nos planteamos a partir del contexto anterior la forma en que quedan determinados los costes totales de la empresa. Desde luego, la empresa fijará su producción respecto del objetivo empresarial de minimizar los costes totales. Es importante señalar en este momento que el valor de la producción no considera el hecho de que dicha producción vaya a venderse completamente en el mercado (lo cual desde luego es también un objetivo para la empresa, pero que no tiene que ver con la ***minimización de costes totales*** de producción).

Buscamos por tanto valores K^* y L^* de los factores productivos que minimicen los costes totales a partir de un valor Q de la producción que fijará la empresa en cada momento en que decida producir el bien que fabrica. Esto es, se pretende resolver el programa de minimización especificado en la Ecuación 3.

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{Minimizar} \quad C(K,L) &=& \pi_K K + \pi_L L \\ \text{sujeto a:} \quad F(K,L) &=& Q \end{array}\right\}$$

Ecuación 3. Programa de minimización de la función de costes totales.

Obsérvese que aunque la restricción $F(K,L) \geq Q$ es más general, por motivos de claridad en la exposición nos ceñiremos al caso en que la función de producción es un valor fijo Q, lo cual por otra parte es plausible desde el punto de vista real, ya que, la empresa fija su producción en un nivel específico Q.

Para resolver el programa anterior basta despejar de la restricción una de las variables, por ejemplo, L. A continuación sustituirla en la función objetivo C(K,L), la cual dependerá entonces solo de K, y que en lo sucesivo denotaremos por C(K). Obsérvese que esta notación no es ambigua respecto de la función de costes totales, ya que ahora esta nueva función sólo depende de una variable. Procediendo de esta forma se obtiene para L y C(K) los valores dados en la Ecuación 4.

$$L = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} K^{-\frac{\alpha}{\beta}} \Rightarrow C(K) = \pi_K K + \pi_L \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} K^{-\frac{\alpha}{\beta}} \quad .$$

Ecuación 4. Planteamiento de la función de costes totales en términos de K.

Obsérvese que el dominio de la función C(K) es un conjunto convexo (es el intervalo $]0,\infty[$) y su segunda derivada es siempre positiva (véase Ecuación 5) por lo que la función es estrictamente convexa.

$$C''(K) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta^2}\pi_L K^{-\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\beta}} > 0 .$$

Ecuación 5. Convexidad de la función C(K).

Por tanto, el punto crítico K^* de C(K) es el valor que minimiza globalmente los costes totales (véase Ecuación 6).

$$C'(K^*) = 0 \Rightarrow K^* = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta\pi_K}{\alpha\pi_L}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} > 0 .$$

Ecuación 6. Valor K^* del factor K que minimiza globalmente la función C(K).

Ahora llevamos el valor K^* a la expresión de L en términos de K dada en la Ecuación 4, y obtendremos el valor L^* del factor L asociado a la minimización global de la función de costes (véase Ecuación 7).

$$L^* = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta\pi_K}{\alpha\pi_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} > 0 .$$

Ecuación 7. Valor del factor L que minimiza globalmente los costes totales.

Y con todo ello, sin más que sustituir K^* en la expresión de C(K) dada en la Ecuación 7 obtenemos la función de costes totales de la empresa (véase Ecuación 8). Ahora es fundamental observar que dicha función está en términos de los datos y que depende, como función matemática, del valor de la producción Q fijada por la empresa en la restricción del programa de minimización dado en la Ecuación 3.

$$C(Q) = H_1 Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad \text{siendo} \quad H_1 = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left\{\pi_K\left(\frac{\beta\pi_K}{\alpha\pi_L}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \pi_L\left(\frac{\beta\pi_K}{\alpha\pi_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right\} > 0 .$$

Ecuación 8. Función de costes totales.

Por tanto, y resumiendo, para cada nivel de producción de que la empresa desee fijar (en el siguiente apartado veremos que dicho nivel se fija buscando que los beneficios sean máximos), el valor de C(Q) dado en la Ecuación 8 proporciona la forma de los costes totales en que incurrirá la empresa en términos de los datos. De esta representación deducimos que, asumiendo una función Cobb-Douglas para representar la tecnología de producción, los costes totales están dados por una función tipo potencial, y por tanto creciente con la producción Q, tal y como cabría esperar a priori.

4.2 Planteando las funciones de oferta y demanda de la empresa

En el apartado anterior hemos planteado la forma racional de representar la función matemática que represente los costes totales C(Q) de una empresa. Dicha función obviamente depende de su producción Q, y en la práctica se busca un valor Q^* de manera que se **maximicen los beneficios de la empresa**. La búsqueda de dicho objetivo, como veremos a continuación, permite establecer de un modo razonado la **función de oferta de la empresa** (respecto del bien fabricado), así como las **funciones de demanda de los factores** que intervienen en la producción del bien (en este caso, el capital K y la mano de obra L).

Observemos que el beneficio de la empresa está dado por la Ecuación 9.

$$B(Q) = PQ - C(Q) = PQ - H_1 Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Ecuación 9. Función de beneficios.

Buscaremos el nivel de producción Q^* que maximiza dicha función. Derivando dicha función respecto de Q, esto equivale a determinar el valor Q^* que iguala el coste marginal al precio (obsérvese que ello se desprende de considerar que C'(Q) es el coste marginal y de exigir la condición necesaria de máximo B'(Q^*) = 0). En nuestro caso particular esto nos conduce a la relación dada en la Ecuación 10, que es la función de oferta de la empresa, la cual establece la cantidad Q de producto que la empresa fabricará si el precio del producto en el mercado es P, asumiendo que a ese precio se venderá toda la producción.

$$Q = S(P), \quad \text{siendo } S(P) = H_2 P^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}}, \quad H_2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{H_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}}.$$

Ecuación 10. Función de oferta de la empresa.

En Economía, las funciones estándar de oferta son crecientes con el precio, ya que, el productor ofrecerá mayor cantidad de producto cuando el precio del mismo aumente (esperando así aumentar sus beneficios debido al aumento de sus ventas). La función de oferta deducida en la Ecuación 10 satisface este comportamiento cuando las constantes positivas α y β cumplen que $\alpha + \beta < 1$. Las funciones Cobb-Douglas que satisfacen esta condición se denominan funciones de producción de rendimientos decrecientes a escala (véase [1]).

Ahora estamos en condiciones de explicitar también las funciones de demanda de los factores productivos que necesita adquirir la empresa para alcanzar el objetivo de maximizar sus beneficios. Para ello es suficiente con sustituir el valor de Q de la función de oferta de la empresa (dado en la Ecuación 10) en las expresiones de K^* y L^* dadas en las Ecuaciones 6 y 7, respectivamente. Obsérvese que dichas funciones dependen de los precios unitarios de dichos factores, así como del precio del producto que la empresa produce. Ambas son funciones de demanda ordinarias, es decir, a medida que π_K (respectivamente π_L) aumenta, la cantidad demandada del bien K (respectivamente L) disminuye.

En este ejemplo, la función de demanda de cualquiera de los factores productivos depende del precio de ambos factores, la cual es verosímil ya que dichos factores están interrelacionados desde el punto de vista económico.

$$K^* = H_3 \left(\frac{1}{\pi_K}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}, \quad H_3 = \left(\frac{H_2}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha \pi_L}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} P^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}},$$

$$L^* = H_4 \left(\frac{1}{\pi_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}, \quad H_4 = \left(\frac{H_2}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta \pi_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} P^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}.$$

Ecuación 11. Funciones de demanda de los factores productivos.

4.3 Planteando la función de demanda del consumidor

Los ejemplos planteados en los dos epígrafes anteriores hacen referencia a funciones económicas de interés para la empresa. Abordamos ahora el planteamiento de una función básica para el otro actor del mercado, el consumidor. Nos referimos a la función de demanda. A priori esperamos que dicha función $Q^D = f(P)$ satisfaga que sea positiva y decreciente con el precio, ya que, si el precio del bien aumenta, el consumidor demandará menor cantidad de dicho bien.

La formulación de tal función nace del objetivo natural de los consumidores: maximizar su satisfacción (también denominada utilidad) como resultado de consumir una cesta de bienes o productos. Por simplicidad, asumiremos que nuestro consumidor consume dos bienes X e Y, y que su satisfacción está modelizada por una función del tipo Cobb-Douglas como la dada en la Ecuación 12 (obsérvese que es un caso particular de la función dada en la Ecuación 1, para el caso en que las constantes α y β cumplen que $\alpha + \beta = 1$).

$$U(X,Y) = AX^{\alpha}Y^{1-\alpha}, \quad A>0, 0<\alpha<1.$$

Ecuación 12. Función utilidad del consumidor.

U(X,Y) es un índice que permite ordenar las preferencias del consumidor al poseer X unidades del bien X e Y unidades el bien Y. Asumiendo que los precios unitarios de los bienes X e son, respectivamente, π_X y π_Y, y que el consumidor dispone de una renta disponible r para adquirir dichos bienes, el problema al que se enfrenta el consumidor es la maximización de su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria. Este programa de optimización se resume en la Ecuación 13.

$$\left.\begin{array}{lccc} \text{Maximizar} & U(X,Y) & = & AX^{\alpha}Y^{1-\alpha} \\ \text{sujeto a:} & \pi_X X + \pi_Y Y & = & r \end{array}\right\}$$

Ecuación 13. Programa de maximización de la función de utilidad.

Para obtener los valores óptimos X* e Y* que denotan las cantidades que debe de consumir de cada bien para maximizar su satisfacción procederemos como con el problema anterior. En primer lugar, escribimos la función objetivo U(X,Y) en función de una única variable (despejamos Y en función de X de la restricción presupuestaria, y sustituimos en la función U(X,Y), la cual sólo dependerá de X, y que denotaremos por U(X), véase Ecuación 14).

$$Y = \frac{r - \pi_X X}{\pi_Y} \Rightarrow U(X) = AX^{\alpha}\left(\frac{r-\pi_X X}{\pi_Y}\right)^{1-\alpha}$$

Ecuación 14. Planteamiento de la función de utilidad en términos de X.

Considerando que A > 0 y 0 < α < 1, es sencillo ver que U''(X) > 0 sobre el dominio convexo X > 0 (véase Ecuación 15).

$$U''(X) = -A\left(\frac{r}{\pi_Y}\right)^{2}(1-\alpha)\alpha\left(\frac{\pi_Y}{r-\pi_X X}\right)^{1+\alpha} x^{\alpha-2} < 0\,.$$

Ecuación 15. Convexidad de la función U(X).

Por tanto al ser la función U(X) estrictamente cóncava, su punto crítico X^* es el máximo global (véase Ecuación 16).

$$U'(X^*) = \frac{A}{\pi_Y}\left(\frac{\pi_Y}{r-\pi_X X}\right)^{\alpha}(r\alpha - \pi_X X)\, x^{\alpha-1} = 0 \Rightarrow X^* = \frac{r\alpha}{\pi_X} > 0\,.$$

Ecuación 16. Valor X^* que maximiza globalmente la función U(X).

Esta expresión que hemos obtenido para X^* como función de su precio π_X es precisamente la función de demanda del bien X. Del mismo modo, sin más que sustituir este valor X^* en la expresión de Y dada en la Ecuación 14, obtenemos la función de demanda del bien Y. La Ecuación 17 resume ambas expresiones.

$$X^* = \frac{r\alpha}{\pi_X} > 0, \quad Y^* = \frac{r(1-\alpha)}{\pi_Y} > 0\,.$$

Ecuación 17. Funciones de demanda de X e Y.

Estas expresiones cumplen que son funciones positivas y decrecientes (tienen forma de hipérbolas) con el aumento de cada uno de los precios, como es deseable. Aunque no se cumple en general, en este caso, la cantidad demanda por el consumidor de cada producto sólo depende del precio de dicho producto y no del precio del otro bien.

5 Cierre

En estas páginas hemos abordado el estudio del planteamiento razonado de algunas funciones económicas de interés desde el punto de vista del productor y del consumidor. En esta ocasión hemos estudiado las funciones de coste total, la función de oferta y las funciones de demanda de los factores productivos que requiere la empresa para fabricar el bien y de la función de demanda del consumidor. El objeto del trabajo es ayudar al lector a entender la construcción matemática de las anteriores funciones económicas, al tiempo que contribuir a que el lector se replantee -mediante argumentos similares a los aquí presentado-, la coherencia de éstas y otras funciones económicas que muchas veces encontrará como punto de partida de problemas y ejercicios que deberá resolver en su formación académica universitaria.

6 Bibliografía

[1] Chiang, A.: “Métodos Fundamentales de Economía Matemática”, Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar su utilidad de los mismos a la economía. En general, estas explicaciones son de agradecer, pero en ocasiones la extensión de las mismas resulta incluso injustificada.

[2] Fernández Pérez, C.; Vázquez Hernández, F.J.; Vegas Montaner, J.M: "Cálculo Diferencial en Varias Variables", Ed. Thomson, 2003.

Es un excelente libro que desarrollo con rigor los conceptos clásicos sobre la temática que indica su título. A final contiene dos capítulos muy breves donde se exponen nociones de economía marginalista y la teoría clásica de la oferta y la demanda.