UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

El rol de las funciones polinómicas cúbicas para representar adecuadamente los costes totales en Economía

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores (jccortes@mat.upv.es;jvromero@mat.upv.es;drosello@mat.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo docente se aborda el estudio del papel que desempeñan en economía las funciones polinómicas de grado tres para modelizar razonablemente las funciones de costes totales. El estudio incluye la determinación de ciertas condiciones algebraicas que deben de satisfacer los coeficientes de dichos polinomios para que sean efectivamente modelos razonables de tales funciones de coste. El trabajo concluye con la justificación matemática, en base a dichas funciones polinómicas, de una propiedad relevante en economía matemática que permite obtener el mínimo global de una función de costes medios (basada en una función de costes totales de tipo polinómica de grado 3) como el punto de intersección de dicha función de costes medios con la función de costes marginales.

El trabajo pretende ilustrar con un ejemplo sencillo, el rol formativo de las matemáticas como herramienta de apoyo en el análisis de la teoría económica susceptible de ser tratada matemáticamente.

2 Introducción

El objetivo de este artículo docente es mostrar el papel que juegan las funciones polinómicas de grado 3 como modelos adecuados para representar funciones de costes totales en la teoría economía. Con frecuencia este tipo de funciones se proponen en las actividades prácticas de textos económicos (principalmente en el área de microeconomía).

Un ejemplo de tal función es

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 7q^2 + 111q + 50, \quad q \geq 0\,,$$

Ecuación 1. Ejemplo de función de costes totales.

y cabría entonces plantearse cuestiones tales como: ¿representa cualquier polinomio cúbico de forma adecuada los costes totales de una empresa?, o por el contrario, ¿los coeficientes que lo definen deben satisfacer ciertas condiciones para que así sea? Desde luego, como una primera aproximación es claro que dichas funciones no pueden ser en modo alguno elegidas a nuestro antojo porque deben de ser funciones positivas (ya que los costes que representan siempre lo son) y crecientes (ya que a medida que crece la cantidad producida, los costes aumentan, aunque dicho aumento sólo proceda de la materia prima empleada en la fabricación del producto.

Pero quizás -y esto se desmenuzará más adelante- haya que imponer más condiciones tales como que dichas funciones deben de gozar de propiedades algebraicas que garanticen la existencia de costes *medios* mínimos (absolutos) para las empresas u otras restricciones que, desde el punto de vista económico, sean razonables.

3 Objetivos

Los objetivos docentes de este artículo son que el lector interesado sea capaz de:

- Razonar a partir de premisas económicas sencillas las condiciones que debe satisfacer un polinomio de grado 3 para que sea un modelo verosímil para representar la función de costes totales de una empresa.
- Comprobar que las condiciones anteriores son compatibles con los resultados económicos generales que permiten obtener el mínimo global de una función de costes medios como el punto de intersección de dicha función con la función de costes marginales asociada.

4 Desarrollo

4.1 Funciones de coste totales, medios y marginales: algunas relaciones y propiedades económicas de interés

Dada una función de **costes totales** $C(q)$, en Economía se le suele asociar dos funciones con interpretación económica, la función de **costes medios**, $\overline{C}(q)$, definida como $\overline{C}(q) = C(q)/q$, y la función de **costes marginales**, $C_M(q)$, definida como la derivada $C'(q)$ de la función de costes totales (véase Ecuación 2).

$$\text{Costes medios: } \overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q} \quad ; \quad \text{Costes marginales: } C_M(q) = C'(q)\,.$$

Ecuación 2. Definición de las funciones de costes medios y de costes marginales.

En competencia perfecta, esto es, cuando ningún agente del mercado domina el precio a través de su producción, el precio p es un valor constante que viene determinado por las leyes de oferta y demanda, y en ese caso, como $C(q) = pq$, la función de costes medios resulta ser precisamente el precio: $\overline{C}(q) = p$. Por otra parte, atendiendo a la definición matemática de derivada, la función de costes marginales suele interpretarse en microeconomía del siguiente modo: el coste en que la empresa productora incurre por producir una unidad más. Para ello se hace uso de la siguiente aproximación de la derivada: se toma en la definición de derivada (véase Ecuación 3) $\Delta q = 1$, con lo cual resulta: $C_M(q) \approx C(q+\Delta q) - C(q)$, que permite dar la mencionada interpretación (obsérvese que la legitimidad de la aproximación se basa en que cuando se expresa la producción q de una empresa, habitualmente q es un valor grande, y en ese caso, el valor de Δq resulta despreciable frente al valor de q).

$$C_M(q) = C'(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q}\,.$$

Ecuación 3. La función de costes marginales interpretada como una derivada.

Si calculamos ahora la derivada de la función de costes medios (véase Ecuación 4)

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}\Rightarrow\overline{C}'(q)=\frac{C_M(q)q-C(q)}{q^2}=\frac{1}{q}\left(C_M(q)-\overline{C}(q)\right),$$

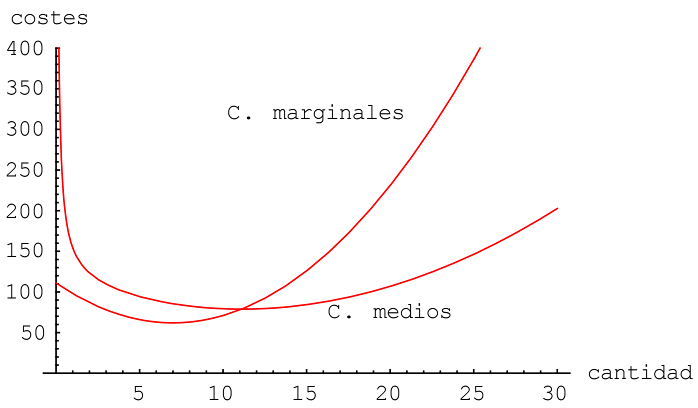
Ecuación 4. La derivada de la función de costes medios.

claramente al productor le interesa la situación en que los costes medios sean decrecientes, es decir, los valores de q para los cuales la $\overline{C}'(q)<0$. A partir de la Ecuación 4 se deduce que esto es equivalente a encontrar los valores de la producción q para los cuales se cumple: $C_M(q)<\overline{C}(q)$. En el caso particular de la función de costes totales dada en la Ecuación 1, las funciones de costes marginales y medios están dadas en la Ecuación 5.

$$\overline{C}(q)=\frac{1}{3}q^2-7q+111+\frac{50}{q}\quad;\quad C_M(q)=q^2-14q+111,$$

Ecuación 5. Funciones particulares de costes medios y de costes marginales.

cuyas gráficas se muestran en la Gráfica 1.



Gráfica 1. Representación de las funciones particulares de costes medios y de costes marginales.

Para determinar el intervalo de valores q donde se cumple $C_M(q)<\overline{C}(q)$, necesitamos primero determinar el punto de corte de ambas funciones, cuyo valor resulta de resolver la ecuación $C_M(q)=\overline{C}(q)$. Esto puede hacerse, por ejemplo, con algún software matemático como *Mathematica®*, el resultado (después de descartar las soluciones complejas) es $q\approx 11.1079$, con lo cual el intervalo buscado es $[0,11.1079]$. Aprovechemos ahora la exposición para obtener información económica relevante a partir de la Gráfica 1 en relación con las interpretaciones que anteriormente hemos introducido. El valor mínimo que toma la función de costes marginales (que al ser una parábola convexa se alcanza en su vértice: $q=7$), nos indica que a partir de una producción superior a 7 unidades físicas, el coste por producir una unidad más, aumentará y ello será debido a que se habrá agotado la capacidad productiva de la empresa, y para alcanzar una producción superior a 7 unidades, se deberán realizar nuevas inversiones (como por ejemplo, el aumento de plantilla, la compra de nuevas máquinas, la adquisición de nuevos locales de producción, etc).

Por otra parte el valor mínimo de la función de costes medios que se obtiene, utilizando las técnicas clásicas del Cálculo Diferencial, es precisamente $q \approx 11.1079$. Este mínimo es global, ya que, la función de costes medios es convexa al tener segunda derivada positiva en todo su dominio (véase Ecuación 6).

$$\overline{C}(q)=\frac{1}{3}q^2-7q+111+\frac{50}{q}\Rightarrow \quad \overline{C}'(q)=\frac{2}{3}q-7-\frac{50}{q^2}=0\Rightarrow q\approx 11.1079,$$

$$\overline{C}''(q)=\frac{2}{3}+\frac{100}{q^3}>0$$

Ecuación 6. Mínimo global de la función de costes medios.

Observamos que el punto de corte de las funciones de costes marginales y de costes medios, es precisamente el mínimo de la función de costes medios.

Nos planteamos ahora si esta conclusión es sólo válida en este caso particular en que la función de costes totales está dada por la Ecuación 1, o por el contrario es una propiedad general de la que gozan las funciones de costes totales polinómicas cúbicas, de las cuales, la dada en la Ecuación 1 es un caso particular. Para responder a esta pregunta, primero cabe analizar qué condiciones deben cumplir las funciones polinómicas de grado 3 para que sean coherentes desde el punto de vista económico como modelos (básicos) de funciones de costes totales de una empresa.

4.2 Funciones polinómicas cúbicas de costes totales: condiciones necesarias para su obtención

Para responder a la cuestión planteada vamos a considerar una función de costes polinómica cúbica genérica (véase Ecuación 7).

$$C(q)=aq^3+bq^2+cq+d,\quad q\geq 0,$$

Ecuación 7. Función polinómica cúbica general.

La parte del polinomio que depende de q: aq^3+bq^2+cq, refleja los denominados **costes variables** que van variando al aumentar la producción, mientras que el término independiente, d, representa los **costes fijos**. Estos cuatro coeficientes a, b, c, d, que definen la función de costes totales no pueden elegirse de forma arbitraria, ya que, dicha función debe ser coherente con las condiciones generales que deben satisfacer los costes totales. En particular, los coeficientes de $C(q)$ deben cumplir:

- $d>0$. En efecto, cuando no hay producción ($q=0$), existen unos costes fijos que tiene obviamente signo positivo: $C(0)=d>0$, esto permite deducir el signo de d.

- $a>0$, $b<0$ y $3ac>b^2$. En efecto, claramente los costes totales crecen cuando la producción aumenta. En términos de la derivada, se debe entonces exigir que $C'(q)>0,\quad q\geq 0$. Como la función de costes totales es un polinomio cúbico, su derivada es una función polinómica de grado dos (parábola): $C'(q) = 3aq^2 + 2bq + c, \quad q \geq 0$, la cual al ser positiva, debe ser tal que sea convexa (esto nos indica que su coeficiente director debe ser positivo: $a > 0$) y con vértice (valor mínimo) con coordenadas positivas. Obsérvese que la existencia de este mínimo con abscisa positiva puede argumentarse desde el punto de vista económico como sigue: la función cuadrática que define $C'(q)$ representa los costes marginales, lo cual, fijada una producción, q, se interpreta económicamente como los costes en que se incurren por producir una unidad más, $q+1$. Claramente, asumiendo la ley de rendimientos decrecientes, para cualquier empresa con una capacidad productiva fijada (determinada por el capital y la mano de obra, básicamente), estos costes marginales se van reduciendo durante las primeras unidades producidas hasta que sobrepasan un umbral de producción a partir del cual dichos costes comienzan de nuevo a crecer, salvo que se decida cambiar la estructura productiva aumentando los factores productivos (mano de obra y/o capital). Todo esto nos permite deducir condiciones sobre los coeficientes. En primer lugar, la abscisa del vértice $q^* = -b/3a$ ha de ser positiva, luego se deduce $b < 0$ (pues $a > 0$). Y para que dicha parábola no corte al eje de abscisas, la ordenada del vértice debe ser también positiva, esto implica que $3ac > b^2$ (véase Ecuación 8).

$$C'(q^*) = 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = \frac{3ac - b^2}{3a} > 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} 3ac - b^2 > 0 \Rightarrow 3ac > b^2 .$$

Ecuación 8. Deducción de una de las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de una función polinómica cúbica general de costes totales.

La Ecuación 9 resume las condiciones que debe satisfacer una función polinómica cúbica para que pueda representar una función de costes totales.

$$C(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d, \quad q \geq 0 \quad , \quad a, d > 0, b < 0, 3ac > b^2 .$$

Ecuación 9. Función polinómica cúbica general de costes totales.

Obsérvese que de las condiciones que cumplen los coeficientes se infiere que $c > 0$. Por otra parte, y a modo de comprobación, observamos que la función polinómica de costes cúbicas dada en la Ecuación 1 satisface las restricciones establecidas en la Ecuación 9.

4.3 Justificando matemáticamente una propiedad fundamental de interés en Microeconomía

Vamos a demostrar que para las funciones polinómicas de grado 3 que representan los costes totales, el mínimo global de su función de costes medios (¡que es el único mínimo que realmente interesa al productor!) es el punto de corte entre las funciones de coste marginal y medio. Esta es una propiedad general, que en particular se satisface cuando la función de costes totales es un polinomio de grado 3, y de la cual se hace uso en Microeconomía.

La función de costes medios está especificada en la Ecuación 10, así como la ecuación polinómica de grado tres, $f(q) = 0$, que determina sus puntos críticos. Al ser $f(q) = 2aq^3 + bq^2 - d = 0$ un polinomio de grado tres, sabemos que al menos una de sus raíces (es decir un candidato a mínimo de la función de costes medios) es un número real, pero además podemos asegurar que al menos una de esas tres raíces es positiva, ya que, $f(q)$ es una función continua que cumple: $f(0) = -d < 0$ (pues $d > 0$) y $f(q) \xrightarrow{q\to\infty} +\infty$ (pues $a > 0$). A continuación, demostraremos que este candidato a mínimo es único. Observemos primero que está garantizado que es mínimo y global, ya que, la segunda derivada de la función de costes medios es siempre positiva (véase Ecuación 10), con lo que la función de costes medios es convexa sobre su dominio $q \geq 0$ -que es un conjunto convexo-, lo que justifica que el (único) punto crítico es mínimo global.

$$\overline{C}(q) = aq^2 + bq + c + \frac{d}{q}, \quad q \geq 0$$
$$\overline{C}'(q) = 2aq + b - \frac{d}{q^2} = 0 \Rightarrow f(q) = 2aq^3 + bq^2 - d = 0\,.$$
$$\overline{C}''(q) = 2a + \frac{2d}{q^3} > 0, \quad q \geq 0$$

Ecuación 10. Función de costes medios: cálculo de su mínimo global.

Abordemos ahora la justificación de que, la ecuación $f(q) = 2aq^3 + bq^2 - d = 0$ que determina el mínimo global tiene una única solución positiva, lo que demuestra que, en efecto, el mínimo global es único, tal y como queríamos. Para ello haremos uso de la llamada **regla de Descartes** que puede enunciarse como sigue:

"Para una ecuación polinómica $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\lambda + a_{n+1} = 0$, se cumple que si P denota el número de sus raíces positivas (contando la multiplicidad algebraica de cada raíz) y V denota el número de variaciones de signo de los coeficientes que definen la anterior ecuación polinómica, es decir, $a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$, entonces se cumple que P y V tienen la misma paridad, o equivalentemente, $P = V - \dot{2}$, donde $\dot{2}$ denota los números múltiplos de 2 incluyendo el cero".

En nuestro caso los signos de los coeficientes de la ecuación son: $2a > 0$, $b < 0$ y $-d < 0$, es decir, se presenta una única variación de signo: $V = 1$, y por tanto, $P = 1$, que nos asegura que el número de raíces positivas de la ecuación es exactamente 1.

Falta por demostrar, que en el caso general que nos ocupa (pues ello ya se hizo en el ejemplo introductorio) que el punto de corte entre las funciones de costes marginales y medios, es precisamente el mismo que el mínimo global de la función de costes medios. Para ello igualamos ambas funciones (véase Ecuación 11), y esto nos conduce precisamente la misma ecuación que ha permitido el cálculo de los puntos críticos de la función de costes medios, o equivalentemente como se ha visto anteriormente, la misma ecuación que determina su mínimo global.

$$C'(q) = 3aq^2 + 2bq + c = aq^2 + bq + c + \frac{d}{q} = \overline{C}(q) \Rightarrow 2aq + b - \frac{d}{q^2} = 0\,.$$

Ecuación 11. Ecuación que determina el punto de corte de las funciones de costes medios y marginales.

5 Cierre

La búsqueda de puentes formativos que conecten diferentes áreas de conocimiento en la formación universitaria entendemos que es un compromiso docente que debemos asumir en el marco de la docencia universitaria actual. En este trabajo, se ha tratado de materializar esta idea conectando las área de Matemáticas y Microeconomía, a través del estudio de funciones polinómicas de grado 3 que modelizan, como un punto de partida razonable, los costes totales de una empresa y, obteniendo a partir de ellas propiedades de interés económico bajo la potente maquinaria deductiva de las Matemáticas. Nos gustaría que el trabajo aquí presentado sirviera para que los lectores interesados tuvieran la oportunidad de encontrar ejemplos específicos en este.

6 Bibliografía

[1] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos a la economía.