



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

**Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Aplicadas y calidad**

**Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos,
Mejora de Procesos y Toma de Decisiones**

Trabajo fin de máster:

**GRÁFICOS DE CONTROL PARA EL COEFICIENTE DE
VARIACIÓN MULTIVARIANTE: ESTADO ACTUAL Y
ANÁLISIS COMPARATIVO**

Autor:

Suárez Cabello, Mauricio Jhonatan

Tutor:

Giner Bosch, Vicent

Cotutor externo:

Castagliola, Philippe

Valencia - España

2019

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a cada uno de mis profesores por las enseñanzas impartidas y consejos brindados, especialmente al D. Vicent Giner Bosch por ser mi tutor en el presente trabajo y depositar su confianza en mí.

DEDICATORIA

A mis padres quienes siempre serán mi inspiración y partícipes de todos mis sueños, a mi hermana por ser mi incondicional compañera de vida, a mis hermanos de las Tunas de la UCSM y de la UPV por acompañarme en esta aventura tan lejos de casa.

Resumen

El coeficiente de variación multivariante es una medida relativa de la dispersión de un proceso que toma en cuenta las desviaciones típicas, covarianzas y las medias del conjunto de variables involucradas, dando como resultado un escalar, el cual es susceptible de ser monitorizado y controlado mediante la herramienta estrella para el control estadístico de procesos, los gráficos de control.

En este trabajo de fin de máster, se tiene como objetivo el realizar una revisión comparativa sobre los gráficos para el coeficiente de variación multivariante que se encuentran publicados hasta agosto de 2019.

Para ello, en primer lugar, se realiza una revisión exhaustiva de las diferentes propuestas existentes en la literatura en torno a gráficos de control para el coeficiente de variación multivariante.

Posteriormente, se realiza una agrupación entre: gráficos de control de parámetros de diseño fijos y gráficos de control de parámetros variables o adaptativos, y se comparan entre sí los gráficos dentro de estos dos grupos, y entre grupos posteriormente. Para todas las comparativas realizadas, se tuvieron en cuenta los resultados publicados por los diferentes autores que compartían los mismos parámetros del proceso, para poder realizar un diseño de experimentos ortogonal y evitar confusión de efectos.

Se eligió utilizar la técnica clásica de ANOVA paramétrico para extraer resultados de los diseños de experimentos planteados, programando en R y utilizando sus librerías para visualizar y realizar comparativas de los efectos principales e interacciones de segundo orden.

Las comparativas revelan que, de los datos publicados y los artículos analizados, el gráfico de control más eficiente para el coeficiente de variación multivariante de parámetros fijos es el gráfico EWMA. Comparado éste con los gráficos adaptativos, resulta mejor el gráfico VP, luego el gráfico VSSI y por último el gráfico EWMA adaptativo, solo siendo peor el gráfico VSI-SH.

Palabras clave: Coeficiente de variación multivariante, control estadístico de procesos, gráfico de control, diseño de experimentos.

Resum

El coeficient de variació multivariant és una mesura relativa de la dispersió d'un procés que pren en compte les desviacions típiques, covariàncies i les mitjanes del conjunt de variables involucrades, tot donant-hi un escalar com a resultat, el qual és susceptible de ser monitoritzat i controlat mitjançant l'eina estrella per al control estadístic de processos, els gràfics de control.

En este treball final de màster, l'objectiu és realitzar una revisió comparativa sobre els gràfics per al coeficient de variació multivariant que es troben publicats fins a agost de 2019.

Per a això, en primer lloc, es realitza una revisió exhaustiva de les diferents propostes existents en la literatura en relació a gràfics de control per al coeficient de variació multivariant.

Posteriorment, es realitza una agrupació entre: gràfics de control de paràmetres de disseny fixos i gràfics de control de paràmetres variables o adaptatius, i es comparen entre si els gràfics dins d'estos dos grups, i després entre grups. Per a totes les comparatives realitzades, es varen tindre en compte els resultats publicats pels diferents autors que compartien els mateixos paràmetres del procés, per a poder realitzar un disseny d'experiments ortogonal i evitar confusió d'efectes.

Es va triar utilitzar la tècnica clàssica de l'ANOVA paramètric per a extraure resultats dels dissenys d'experiments plantejats, programant en R i utilitzant-ne llibreries per tal de visualitzar i realitzar comparatives dels efectes principals i d'interaccions de segon ordre.

Les comparatives revelen que, de les dades publicades i els articles analitzats, el gràfic de control més eficient per al coeficient de variació multivariant de paràmetres fixos és el gràfic EWMA. En comparar aquest amb els gràfics adaptatius, resulta millor el gràfic VP, després el VSSI i per últim el gràfic EWMA adaptatiu; només el gràfic VSI-SH presenta un comportament inferior.

Paraules clau: Coeficient de variació multivariant, control estadístic de processos, gràfic de control, disseny d'experiments.

Abstract

The multivariate coefficient of variation is a relative measure of a process dispersion that takes into account the standard deviations, covariances and averages of the set of variables involved, giving a scalar as a result, which can be monitored and controlled by means of the main tool of statistical process control: control charts.

This Master's final project aims at offering a comparative review on the charts for the multivariate coefficient of variation being published up to August 2019.

To this aim, firstly, an exhaustive review of the different existing proposals in the literature on control charts for the multivariate coefficient of variation is performed.

Then, the charts are divided into two groups: those with fixed design parameters, and those with variable parameters, also called adaptive. The charts are compared within each group and then between groups. All comparisons are performed only taking the results published that share equal process parameters, in order to set an orthogonal design of experiments and to avoid confounding effects.

The classical parametric ANOVA technique is chosen to draw results from the designs of experiments. R programming and libraries are used in order to visualise and perform comparisons on principal effects and second order interactions.

The comparisons performed show that, from those data published in the articles analysed, the more efficient fixed-parameter control chart for the multivariate coefficient of variation is the EWMA chart. When comparing this chart against the adaptive charts, the VP chart is shown to perform better, then the VSSI chart and then the EWMA adaptive chart; only the VSI-SH is outperformed by the EWMA.

Keywords: multivariate coefficient of variation, statistical process control, control charts, design of experiments.

Índice general

1.	Introducción.....	1
1.1	Control de calidad. Control estadístico de procesos.....	1
1.2	Gráficos de control para el coeficiente de variación uni- y multivariante	4
1.3	Motivación	5
1.4	Objetivos.....	6
1.5	Estructura del trabajo.....	6
2.	Fundamentos y marco teórico.....	7
2.1	Notación y suposiciones básicas	7
2.2	El coeficiente de variación multivariante.....	8
2.3	Las distribuciones F de Snedecor no centrales.....	10
2.4	El MCV muestral.....	11
3.	Gráficos de control para el MCV. Revisión bibliográfica	13
3.1	Gráfico tipo Shewhart de Yeong et al. (2016).....	13
3.2	Gráfico basado en suma de rachas de Lim et al. (2017).....	15
3.3	Gráfico para ejecuciones cortas de Khatun et al. (2019).....	16
3.4	Estudio de la fase I de Abbasi y Adegoke (2018).....	16
3.5	Gráficos adaptativos (VSI, VSS y VSSI) de Khaw et al. (2018).....	16
3.6	Gráfico sintético de Khaw et al. (2019).....	18
3.7	Gráfico EWMA adaptativo de Haq y Khoo (2019).....	18
3.8	Gráfico EWMA de Giner-Bosch et al. (2019).....	18
3.9	Gráfico sintético de Nguyen et al. (2019a).....	19
3.10	Gráfico de parámetros variables de Chew et al. (2019)	19
3.11	Gráfico de intervalo de muestreo variable de Nguyen et al. (2019b).....	21
4.	Diseño de experimentos para el análisis comparativo de gráficos de control	23
4.1	Calibración y comparación de gráficos de control mediante análisis de la varianza 23	
4.2	Estrategia y herramientas de análisis.....	23
5.	Análisis comparativo de los principales gráficos de control para el MCV.....	25

5.1	Software y hardware utilizado.....	25
5.2	Métodos de parámetros fijos (no adaptativos).....	25
5.3	VSSI vs VSS vs VSI.....	30
5.4	Métodos adaptativos frente al EWMA de Giner-Bosch et al. (2019).....	34
6.	Conclusiones	46
	Bibliografía.....	47
	Anexos.....	51

1. Introducción

A lo largo de la historia, se han tomado como base para el entendimiento y aceptación del concepto de calidad palabras como: disponibilidad, fiabilidad, facilidad de uso, mantenimiento, seguridad, etc., definiendo, así, que un producto o servicio es de calidad si cumple ciertos estándares y especificaciones previas.

La estadística tiene un rol claro en lo anteriormente descrito. Es ampliamente extendida la idea de que que la variabilidad en un proceso productivo o servicio es inversamente proporcional a la calidad de su resultado; es decir, a mayor variación en el proceso productivo, la calidad empeorará en la misma proporción, relación que podemos analizar gracias a la estadística.

La calidad también tiene que ver con la comprobación de que el producto final (o cualquier resultado intermedio del proceso productivo) cumple con unas especificaciones o tolerancias fijadas de antemano. La estadística proporciona las herramientas adecuadas para detectar productos defectuosos o no conformes de un modo eficiente (Alfaro-Cortés, 2004).

En este primer capítulo se presentan los conceptos necesarios sobre control de la calidad y centrándose en el control estadístico de procesos, permitiendo así contextualizar el presente trabajo. Los conceptos básicos relacionados con el control de la calidad descritos en este capítulo han sido extraídos, principalmente, de Juran y Gryna (1993), Romero Villafra y Zúñica Ramajo (2008), Montgomery (2012) y Giner-Bosch (2014).

1.1 Control de calidad. Control estadístico de procesos

Podemos definir el control de calidad como un conjunto de actividades y técnicas que, con las herramientas adecuadas, ayudan a verificar el cumplimiento de los diferentes requerimientos de calidad predefinidos para un producto. Cabe mencionar que, durante la etapa de control, existen tres tareas que se llevan a cabo como un bucle auto-retroalimentado:

- La valoración de los resultados operativos reales.
- La comparación de los resultados con el objetivo y la norma.
- La realización de acciones a consecuencia de las diferencias encontradas.

Cuanto más rápido se detecte una desviación y más rápida sea la acción por tomar, más uniforme será la calidad del producto.

Por otro lado, si de control estadístico de la calidad hablamos, se pueden encontrar estudios como los de Zorriassatine y Tannock, (1998) y Guh et al. (1999) o los centrados en aplicaciones que utilizan herramientas de optimización (véanse Chung, 1991, Zhou y Zhao, 2002, Kethler y Peters, 2004, García-Díaz y Aparisi, 2005, Aparisi y de Luna, 2009 y Young, 2010, entre otros). Cada uno de estos estudios y técnicas están centrados en un principal objetivo o fin: la *reducción de la variabilidad*, ya que esta es *inversamente proporcional a la calidad*; es decir, *cuanta más variabilidad, menor calidad*.

Como una subárea del control estadístico de la calidad nace el concepto de *control estadístico de procesos* (SPC o SPM, por sus siglas en inglés), que se define como el uso de técnicas estadísticas para la medición, monitorización y análisis de las variaciones de los procesos, con la finalidad de conseguir que estén estables. Como expone Ferrer-Riquelme (2009), el

objetivo del SPM es monitorizar el rendimiento de un proceso a lo largo del tiempo para comprobar si el proceso se comporta como se espera y poder así detectar un evento inusual.

Como herramienta estrella para el control estadístico de procesos, se tiene a los *gráficos de control*, de los cuales se hablará en la sección 1.1.1. Buscan estabilizar un proceso, detectar la variabilidad debida a causas no aleatorias, o asignables.

1.1.1 Gráficos de control

Entre las diferentes técnicas y herramientas para el control estadístico de procesos (como los diagramas de Pareto, el histograma, diagrama de dispersión, estratificación), destacan, como herramienta por excelencia, los gráficos de control.

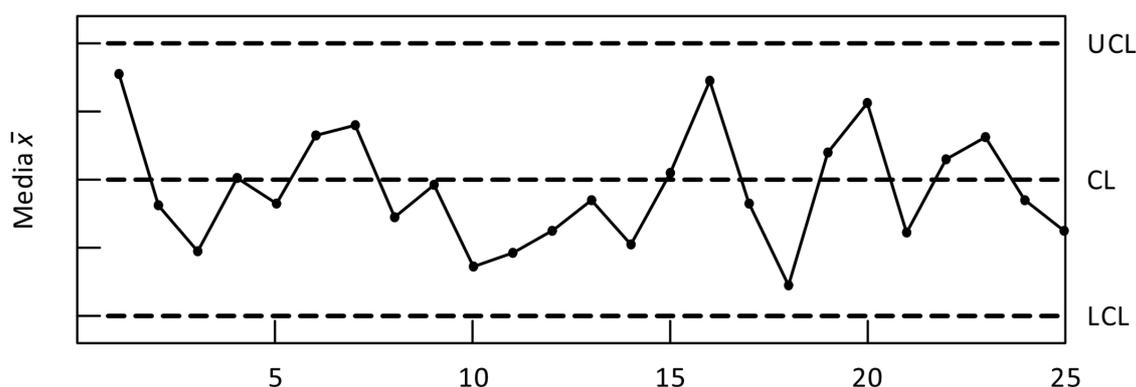


Figura 1.1: Ejemplo de gráfico de control \bar{X} . Fuente: Giner-Bosch (2014).

Walter Andrew Shewhart sería el que propondría una primera aproximación para abordar estadísticamente la calidad mediante gráficos de control que indicarían si un proceso está bajo control estadístico (esto es, el proceso presenta una variación natural), o si un proceso se encuentra fuera de control estadístico, cuando el proceso se comportara de una manera diferente a la habitual y menos predecible. Un gráfico de control es, en palabras de Shewhart: “Un proceso dinámico, continuo y autocorrectivo diseñado con el propósito de conseguir y mantener un estado de control estadístico” (Shewhart, 1986).

“Un gráfico de control consiste básicamente en representar en un diagrama la evolución en el tiempo de una o varias medidas o estadísticos derivados a partir de muestras del proceso que son tomadas periódicamente” (Giner-Bosch, 2014). Por ejemplo, en la figura 1.1 se representa el gráfico de control \bar{X} , el cual contiene una línea central (en inglés, *central line*; CL), que representa el valor en torno al cual oscila o varía en condiciones normales la medida graficada, y, dos líneas más, llamadas límites de control, descritos en la siguiente subsección. Cabe resaltar que existen diversos tipos de gráficos de control con diferentes configuraciones y que no necesariamente siguen el mismo esquema de la figura 1.1.

En Montgomery (2012) se encuentra una descripción completa y detallada de los gráficos de control más comunes o clásicos. Los gráficos de control analizados en el presente trabajo se encuentran descritos detalladamente en el capítulo 3. Algunas medidas de desempeño y conceptos clave de los parámetros de control se describirán en las siguientes subsecciones.

Límites de control

Los límites de control son líneas trazadas en los gráficos de control, cuyos valores sirven para delimitar zonas en que, estadísticamente, la gran mayoría de los valores calculados deberían situarse si el proceso opera *bajo control estadístico* (es decir, en presencia solo de causas no asignables de variabilidad), también en otros tipos de gráficos de control como en los adaptativos, sirven para delimitar zonas de atención, que son para tomar alguna medida preventiva para incrementar el rendimiento del gráfico por un posible cambio en el proceso. De tal modo que el hecho de que un valor se grafique fuera de dichas zonas se interpreta como una señal de falta de control (es decir, un síntoma de que el proceso puede estar fuera de control, en presencia de causas asignables de variabilidad).

Longitud media de racha (ARL)

La *longitud media de racha* (en inglés, *average run length*; ARL) es un escalar utilizado como medida de rendimiento o comportamiento de las herramientas para el control estadístico de procesos. En definición, la ARL es el número promedio de puntos que deben trazarse en un gráfico de control antes de que un punto indique una condición fuera de control. Cuando las muestras no están correlacionadas, la ARL se puede calcular mediante la siguiente fórmula si el proceso se encuentra *bajo control estadístico* (ARL_0):

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha},$$

donde α es la tasa de falsa alarma o también llamado *error de tipo I*, es decir la probabilidad de que, aunque el proceso este bajo control estadístico, se observe un punto fuera de los límites de control.

También se puede calcular de la siguiente manera cuando el proceso se encuentra *fuera de control estadístico* (ARL_1):

$$ARL_1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - \beta},$$

donde p es la potencia, probabilidad de que cualquier punto exceda el límite de control, β es la probabilidad de que, aunque el proceso esté fuera de control, los puntos salgan dentro de los límites permitidos también llamado *error tipo II*.

Como se ha mencionado antes, esta ecuación puede ser utilizada para evaluar el rendimiento o desempeño de los gráficos de control.

Tiempo medio de señal (ATS)

Cuando se habla del tiempo medio hasta detectar un cambio por un proceso fuera de control se habla del *tiempo medio de señal* o en inglés, *average time to signal* (ATS), cuya función es:

$$ATS = ARL \cdot t,$$

donde t es el tiempo entre muestras. Cabe mencionar que, teniendo este parámetro igualado a la unidad, el ATS sería comparable con la ARL.

Parámetros de diseño

Los parámetros de diseño de un gráfico de control son parámetros numéricos, que son configurables por el usuario final para diferentes situaciones necesarias o condiciones del proceso a analizar por el gráfico de control, intervienen en el cálculo del estadístico monitorizado, en el cálculo de los límites del gráfico, en el tamaño de muestra o incluso, en la frecuencia de muestreo. Cada uno de estos parámetros influye definitivamente en el desempeño final del gráfico de control.

1.2 Gráficos de control para el coeficiente de variación uni- y multivariante

El CV es una medida relativa de dispersión y, por tanto, un gráfico de control para el CV permite la detección de cambios inesperados en la variabilidad del proceso con respecto a su media (Giner-Bosch et al., 2019).

En los últimos años, se han propuesto numerosos gráficos de control destinados a monitorear el CV de una distribución normal, comenzando con el gráfico tipo Shewhart de Kang et al. (2007) además de algunos trabajos destacables y recientes como el gráfico de tamaño de muestra variable a corto plazo de Amdouni et al. (2015), un gráfico de intervalo de muestreo variable a corto plazo también de Amdouni et al. (2017) y un gráfico de promedio móvil ponderado exponencial (EWMA) de intervalo de muestreo variable de Yeong et al. (2017b).

El control estadístico de procesos no sólo se aplica a características de calidad univariantes, sino también a situaciones en las que varias variables aleatorias, correlacionadas, están involucradas en los requisitos de calidad que se establecen y, por lo tanto, tienen que monitorearse conjuntamente para garantizar un rendimiento estable del proceso. Como señalaron MacGregor y Kourti (1995), este es en realidad un enfoque más realista y apropiado para la vigilancia y la mejora de la calidad, ya que todas las características clave de calidad para un proceso o producto dado generalmente no son independientes entre sí.

Varios autores han intentado extender el CV al caso multivariante. Reyment (1960) dio la primera definición de un CV multivariante (MCV, por sus siglas en inglés). Otras propuestas fueron formuladas posteriormente por Van Valen (1974), Voinov y Nikulin (1996), y Albert y Zhang (2010); el último también incluye una revisión de todos los primeros. Un trabajo de Aerts et al. (2015) destaca la importancia de utilizar un MCV para medir la dispersión relativa de datos multidimensionales y examina las propiedades de la muestra (como la variabilidad y la robustez) de todas las propuestas antes mencionadas. También destacan las dificultades de trabajar con una matriz de coeficientes de variación en lugar de un solo escalar, que es otro enfoque posible (Giner-Bosch, 2019). Las diferentes definiciones del MCV son detalladas posteriormente en la subsección 2.2.1.

Muy recientemente, han comenzado a ser publicados diversos gráficos de control para el MCV. Hasta no hace mucho tiempo, solo existía la propuesta de Yeong et al. (2016) de un gráfico de control tipo Shewhart, así como un gráfico de suma de rachas propuesto por Lim et al. (2017). Recientemente, se han realizado otras propuestas tales como los gráficos sintéticos de Khaw et al. (2019) y Nguyen et al. (2019a), un gráfico tipo EWMA (Giner-Bosh et al. 2019) y su variación adaptativa presentada por Haq y Khoo (2019) y gráficos de control de parámetros variables o adaptativos como los propuestos por Khaw et al. (2018), Chew

et al. (2019) y Nguyen et al. (2019b). El capítulo 3 se centrará en describir cada uno de estos para su posterior análisis y comparativa en los capítulos 4 y 5.

1.2.1 Algunas situaciones de aplicación

Teoh et al. (2017), entre otros, reportan ejemplos de diferentes dominios en los cuales el monitoreo del CV y mantenerlo constante es un objetivo, que incluye la ingeniería de materiales, mecánica, fabricación y vertederos, así como las ciencias de la salud. El CV también se usa en finanzas como una forma de medir el riesgo de inversión con respecto al rendimiento esperado, como lo muestra Sharpe (1994).

Un ejemplo donde se utiliza el CV y MCV es en la industria textil, la variación entre las mediciones de resistencia a la tracción del hilo delgado es significativamente menor que la del hilo pesado. Esto es el resultado de las propiedades físicas inherentes de la fibra (Yeong et al., 2016).

Otro uso del CV es la comparación de elementos con diferentes medias, pero que tienen una variación relativa común. Por ejemplo, comparar múltiples soluciones con diferentes concentraciones químicas compuestas en la misma línea de mezcla puede analizarse mejor con el CV (Yeong et al., 2016).

1.2.2 Ventajas y limitaciones

¿Son los gráficos de control para el MCV una herramienta válida para monitorizar la dispersión de un conjunto de datos a lo largo del tiempo? A tenor de las aplicaciones prácticas reportadas en diversos trabajos, se trata de un enfoque válido. La principal ventaja es la facilidad de trabajar con un número escalar, haciendo más sencillo el procedimiento de monitorizar un solo indicador.

Por otro lado, es cierto que, al reducir todas las variables del proceso a un solo valor numérico, podemos estar perdiendo información valiosa sobre el proceso. Además, atendiendo al desarrollo matemático que se detallará más adelante, este enfoque está limitado a casos en los que la dimensionalidad no sea muy alta y, en todo caso, sea menor que el tamaño muestral empleado para monitorizar el proceso.

1.3 Motivación

Tal y como se ha mencionado en la sección 1.2, la mayoría de los gráficos de control para el MCV han sido publicados durante los años 2018 y 2019. Al haber sido desarrollados y publicados casi simultáneamente, muchos de ellos no se comparan entre sí; de hecho, la mayoría de ellos sólo se compara con los trabajos iniciales de Yeong et al. (2016) y Lim et al. (2017). Por otro lado, cada artículo publica resultados numéricos sobre el comportamiento de su respectivo gráfico bajo un determinado conjunto de condiciones iniciales (o, en terminología de control estadístico de procesos, diferentes combinaciones de valores de los parámetros del proceso). Todo esto hace que sea difícil evaluar cuál o cuáles de los gráficos publicados para el MCV presentan un mejor desempeño que otros, y en qué condiciones. Asimismo, sería interesante conocer más en profundidad qué parámetros del proceso tienen una mayor influencia en dicho desempeño.

1.4 Objetivos

En este trabajo de fin de máster, se aborda, como objetivo general, la realización de una revisión comparativa sobre los gráficos para el MCV.

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Realizar una revisión bibliográfica de los trabajos publicados sobre gráficos de control para el MCV.
- Realizar un análisis comparativo del desempeño de los diferentes gráficos, con el fin de determinar qué gráficos son mejores que otros bajo qué circunstancias.

1.5 Estructura del trabajo

El resto del trabajo se estructura de la siguiente forma. En el **capítulo 2** se describe en detalle la notación necesaria para el entendimiento del presente trabajo tomando en cuenta las distintas variaciones en cuanto a propuestas de MCV, un ejemplo numérico y visual del comportamiento del MCV, se habla de las distribuciones F de Snedecor no centrales y su relación con el MCV.

En el **capítulo 3**, se describe detalladamente cada uno de los gráficos de control multivariante a comparar, describiendo sus parámetros y la correcta calibración de estos para su buen funcionamiento.

En el **capítulo 4**, se describe la metodología a seguir para llevar a cabo la comparativa de los diferentes gráficos de control, explicando las consideraciones previas para realizar una justa comparativa.

En el **capítulo 5**, se muestran los resultados obtenidos de las comparativas, se analizan y se interpretan para que, posteriormente, en el **capítulo 6**, se recojan las conclusiones que se derivan de todo el trabajo realizado.

2. Fundamentos y marco teórico

Este capítulo consistirá en profundizar las notaciones y suposiciones básicas para el entendimiento del trabajo, se describe a detalle el MCV y se da un ejemplo numérico para el entendimiento de este.

2.1 Notación y suposiciones básicas

En este trabajo, se asumirá que la característica de calidad objeto de interés \mathbf{X} tiene dimensión p y sigue una distribución *normal multivariante* con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de varianzas-covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$; es decir: $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Las componentes de \mathbf{X} se denotarán por X_1, \dots, X_p . Supondremos también que $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ y que $\boldsymbol{\Sigma}$ es definida positiva y, por tanto, invertible.

Asimismo, se considerará un procedimiento de control del proceso consistente en obtener muestras aleatorias de \mathbf{X} a lo largo del tiempo, las cuales se supondrán independientes entre sí. En algunos de los esquemas de monitorización que estudiaremos y compararemos en este trabajo, el tamaño n de cada muestra puede ser variado en tiempo real durante la monitorización con el fin de mejorar su eficiencia, mientras que en otros permanece constante; y lo mismo puede decirse del intervalo de tiempo transcurrido entre la extracción de muestras consecutivas. En cualquier caso, para cada muestra, se denotará por $X_{i,j}$ a la observación i -ésima de la j -ésima componente de \mathbf{X} , con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$. El vector columna $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,p})^T$ representará, por tanto, la observación i -ésima de la muestra, con $1 \leq i \leq n$.

Para cada muestra $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$, el vector de medias $\bar{\mathbf{X}}$ y la matriz de varianzas-covarianzas \mathbf{S} se calculan de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{X}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,1}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,p} \right)^T, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^T. \quad (2.2)$$

Ambos son estimadores máximo-verosímiles de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$, respectivamente (Giri, 2013).

2.2 El coeficiente de variación multivariante

En este apartado, se detallan las diferentes formas de definir el MCV, y se presenta un pequeño ejemplo numérico y visual del comportamiento del MCV de Voinov y Nikulin (1996), que es el que utilizaremos en el resto del trabajo.

2.2.1 Definiciones históricas

En la literatura, existen diferentes propuestas para extender el concepto del CV (univariante) al caso multivariante. Todas ellas intentan, de alguna forma, representar y medir el *tamaño* relativo de la variabilidad de la variable aleatoria (v.a.) multivariante \mathbf{X} objeto de interés frente al de su media. La primera definición de un MCV es debida a Reyment (1960):

$$\gamma_{\text{Rey}} = \left(\frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{p}}}{\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $|\cdot|$ denota la función determinante. Posteriormente, Van Valen (1974) presenta una alternativa:

$$\gamma_{\text{Van}} = \left(\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma})}{\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

siendo $\text{tr}(\cdot)$ la función traza (la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz; es decir, en este caso, las varianzas de las variables X_1, \dots, X_p). Más tarde, Voinov y Nikulin (1996) realizan otra propuesta:

$$\gamma_{\text{Voi}} = (\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

Albert y Zhang (2010) publican un análisis detallado de todas las variantes anteriores. Como limitaciones de éstas, señalan que las fórmulas de Reyment y Van Valen dependen de la escala en la que estén expresadas las componentes de \mathbf{X} ; la propuesta de Van Valen no tiene en cuenta la correlación entre las componentes; y las propuestas de Reyment y de Voinov y Nikulin requieren que la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ sea invertible. Asimismo, para sortear estos problemas, proponen la siguiente forma de calcular el MCV:

$$\gamma_{\text{Alb}} = \left(\frac{\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\mu}}{(\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu})^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

la cual, de alguna forma, está inspirada en los mismos principios que (2.3) —si bien *no* son equivalentes—, pero presenta la ventaja de que evita calcular la inversa de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$.

En el caso $p = 1$, todas las fórmulas detalladas arriba confluyen en la definición conocida del CV unidimensional, $\sigma/|\mu|$, con $X \sim N(\mu, \sigma)$. Por otro lado, volviendo al caso multidimensional, la definición de MCV de Voinov y Nikulin es la única verdaderamente invariante frente a cambios de escala en las variables, mientras que las demás (incluida la de Albert y Zhang) sólo lo son en el caso particular de que todas las componentes de \mathbf{X} sean

multiplicadas por la misma constante. Esto es apuntado tanto por Albert y Zhang (2010) como, más tarde, por Aerts et al. (2015). Estos últimos, además, estudian las propiedades muestrales de las diferentes definiciones del MCV, y destacan la propuesta de Voinov y Nikulin frente al resto por su robustez.

Por todo ello, parece razonable tomar en consideración la definición del MCV realizada por Voinov y Nikulin (1996). De hecho, todos los gráficos de control orientados a monitorizar el MCV que se han publicado hasta la fecha adoptan dicha definición. *De aquí en adelante, en este trabajo se sobreentenderá que el MCV al que nos referimos es el de Voinov y Nikulin, γ_{Voi} , calculado a nivel poblacional según (2.3), el cual pasaremos a denotar simplemente como γ .*

2.2.2 Ejemplo numérico

El siguiente ejemplo numérico pretende ilustrar, de forma sencilla, el cálculo del MCV y clarificar qué tipo de situaciones son aquellas en las que éste se mantiene constante (o está bajo control, en terminología de control estadístico de procesos) o, por el contrario, varía (o está fuera de control).

Consideremos la variable aleatoria normal bidimensional $\mathbf{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, siendo

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Según (2.3), su MCV es

$$\gamma = \left((10 \quad 21) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \end{pmatrix} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{57}} \cong 0,132453.$$

Consideremos ahora la variable $\mathbf{X}' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\Sigma}')$, con

$$\boldsymbol{\mu}' = 2\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 20 \\ 42 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Sigma}' = 4\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 36 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que su MCV es $\gamma' = \gamma \cong 0,132453$. Por tanto, \mathbf{X} y \mathbf{X}' tienen vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas distintos, pero *tienen el mismo MCV*. En control de calidad, diríamos que al cambiar el proceso de \mathbf{X} a \mathbf{X}' , éste sigue bajo control, por lo que se refiere a su MCV; en otras palabras, el *tamaño* relativo de su variabilidad (recogida en $\boldsymbol{\Sigma}$) respecto al de su posición (representada por $\boldsymbol{\mu}$), que es lo que mide γ , se mantiene constante. También podría decirse que la variabilidad se incrementa *en la misma proporción* en la que lo hace la posición. La figura 2.1 ilustra esta situación.

Definamos ahora $\mathbf{X}'' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}'', \boldsymbol{\Sigma}'')$. Su MCV, según (2.3), es $\gamma'' = \dots \cong 0,0662266 \neq \gamma$. Por tanto, a pesar de tener la misma matriz de varianzas-covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$, el parámetro que mide la dispersión relativa de \mathbf{X} y \mathbf{X}'' respecto de sus respectivas medias es *distinto*; en terminología de control estadístico de procesos, diríamos que, por lo que respecta al MCV, el proceso se encuentra fuera de control cuando éste cambia de \mathbf{X} a \mathbf{X}'' . Todo esto se ilustra en la figura 2.2.

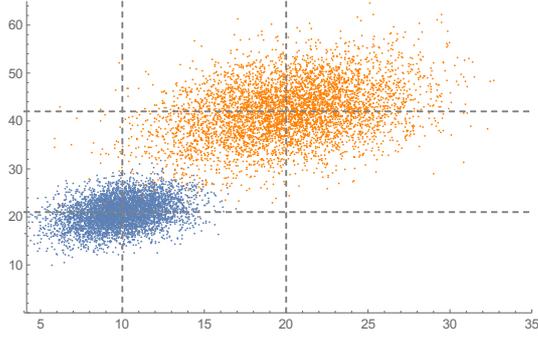


Figura 2.1: Representación gráfica de una muestra aleatoria de 5.000 valores de la variable X definida en el ejemplo la sección 2.2.2 (en azul), junto con otros 5.000 valores aleatorios de la variable X' definida en la misma sección (en naranja). Ambas variables comparten el mismo MCV (0,1324).

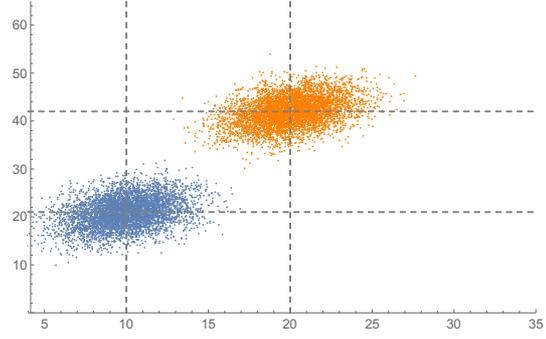


Figura 2.2: Representación gráfica de una muestra aleatoria de 5.000 valores de la variable X definida en el ejemplo la sección 2.2.2 (en azul), junto con otros 5.000 valores aleatorios de la variable X'' definida en la misma sección (en naranja). Las dos variables tienen MCV distinto (0,1324 vs 0,0662), a pesar de compartir la misma matriz de varianzas-covarianzas.

2.3 Las distribuciones F de Snedecor no centrales

Las distribuciones F (simplemente) no central y F doblemente no central surgen al estudiar la distribución en el muestreo del MCV muestral $\hat{\gamma}$ (véase la sección 2.4).

Consideremos dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución ji-cuadrado no central, $\chi^2(v_1, \delta_1)$ y $\chi^2(v_2, \delta_2)$, donde $v_1, v_2 > 0$ representan los respectivos grados de libertad, y $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ representan los respectivos parámetros de no-centralidad. Entonces, la variable aleatoria F'' definida como

$$F'' \sim \frac{\chi^2(v_1, \delta_1)/v_1}{\chi^2(v_2, \delta_2)/v_2} \quad (2.4)$$

sigue una distribución F doblemente no central de parámetros v_1, v_2, δ_1 y δ_2 , lo cual se puede expresar como $F'' \sim F(v_1, v_2, \delta_1, \delta_2)$.

En el caso en el que $\delta_2 = 0$ (es decir, la ji-cuadrado del denominador es central), se dice que $F' \sim (\chi^2(v_1, \delta_1)/v_1)/(\chi^2(v_2, 0)/v_2)$ sigue una distribución F (simplemente) no central de parámetros v_1, v_2 y δ_1 , y se expresa como $F' \sim F(v_1, v_2, \delta_1)$. Sin embargo, en este trabajo, por simplificar la notación, seguiremos denotando a la distribución F (simplemente) no central con cuatro parámetros; es decir: $F' \sim F(v_1, v_2, \delta_1, 0)$.

El caso en el que $\delta_1 = 0$ (es decir, la ji-cuadrado del numerador es central), puede ser visto como un recíproco de la F (simplemente) no central. Es decir, por (2.4), se tiene que

$$\frac{1}{F'} \sim \frac{\chi^2(v_1, 0)/v_1}{\chi^2(v_2, \delta_2)/v_2} \equiv F(v_1, v_2, 0, \delta_2), \quad (2.5)$$

donde F' sigue una distribución F (simplemente) no central $F(v_2, v_1, \delta_2, 0)$.

Por último, en el caso en el que simultáneamente $\delta_1 = \delta_2 = 0$, se tendría como resultado la (conocida) distribución F de Snedecor (central) $F(\nu_1, \nu_2, 0, 0) \equiv F(\nu_1, \nu_2)$.

Las propiedades de las distribuciones F simple y doblemente no centrales han sido estudiadas y recogidas por diversos autores; Fisher (1928), Tang (1938), Patnaik (1949), Johnson et al. (1995), Paolella (2007), Walck (2007) y Forbes et al. (2011), entre otros.

Hoy en día, bastantes paquetes informáticos de uso habitual en la investigación científica incluyen funciones para el cálculo de probabilidades o valores críticos relativos a las distribuciones F no centrales, así como para el cálculo de su media y desviación típica. Aun así, hay que hacer notar que, en ocasiones, es difícil evitar errores computacionales de cálculo o imprecisiones debido a redondeos, para ciertos valores de los parámetros de dichas distribuciones y/o ciertos casos extremos (sobre todo, en las colas de la distribución). Por otro lado, matemáticamente, la distribución $F(\nu_1, \nu_2, \delta_1, \delta_2)$ *no tiene* definida la media cuando $\nu_2 \leq 2$, ni la desviación típica en el caso $\nu_2 \leq 4$. Todo esto es mencionado por Giner-Bosch et al. (2019).

La figura 2.3 muestra la función de densidad de la distribución $F(\nu_1, \nu_2, \delta_1, \delta_2)$ para distintos valores de sus parámetros.

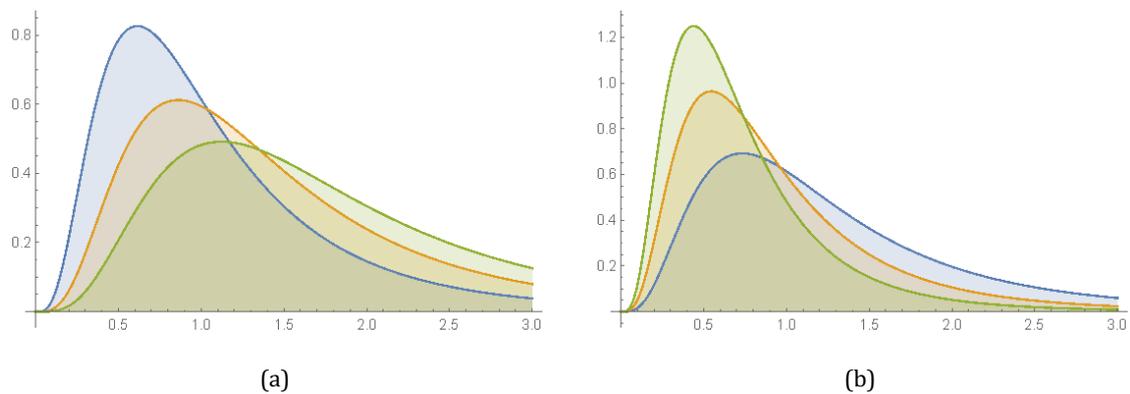


Figura 2.3: Funciones de densidad de probabilidad de las distribuciones F doblemente no centrales $F(10, 10, \delta, 2)$ (a) y $F(10, 10, 2, \delta)$ (b), con $\delta = 1$ (azul), 5 (naranja) y 9 (verde).

2.4 El MCV muestral

2.4.1 Definición

Dada una muestra aleatoria de la característica de calidad \mathbf{X} , el MCV muestral $\hat{\gamma}$ se define de la siguiente forma:

$$\hat{\gamma} = (\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{X}})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

con $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} calculados como en (2.1) y (2.2), respectivamente.

Por su definición y sus propiedades, el MCV muestral es un estimador (sesgado) natural del MCV poblacional.

2.4.2 Distribución en el muestreo

La distribución en el muestreo de $\hat{\gamma}$ fue derivada por Yeong et al. (2017) a partir de un resultado publicado por Wijsman (1957). En concreto, Yeong et al. deducen que

$$\frac{n(n-p)}{(n-1)p\hat{\gamma}^2} \sim F\left(p, n-p, \frac{n}{\gamma^2}, 0\right), \quad (2.7)$$

donde recordemos que n representa el tamaño muestral, p la dimensión de la v.a. \mathbf{X} objeto de interés, y γ el valor poblacional del MCV de \mathbf{X} ; asimismo, $F(v_1, v_2, \delta_1, 0)$ representa la distribución F (simplemente) no central descrita en la sección 2.3.

A partir de (2.7) y de la propiedad de reciprocidad (2.5), se deduce esta expresión alternativa (Giner-Bosch et al., 2019):

$$\frac{(n-1)p}{n(n-p)}\hat{\gamma}^2 \sim F\left(n-p, p, 0, \frac{n}{\gamma^2}\right), \quad (2.8)$$

donde $F(v_1, v_2, \delta_1, \delta_2)$ representa la distribución F doblemente no central, también descrita en la sección 2.3.

A partir de (2.7) y (2.8) es posible deducir las siguientes expresiones para la función de distribución acumulada (cdf, por sus siglas en inglés) de $\hat{\gamma}$:

$$\begin{aligned} F_{\hat{\gamma}}(u \mid n, p, \gamma) &= 1 - F_{F'}\left(\frac{n(n-p)}{(n-1)pu^2} \mid p, n-p, \frac{n}{\gamma^2}, 0\right) \\ &= F_{F''}\left(\frac{(n-1)p}{n(n-p)}u^2 \mid n-p, p, 0, \frac{n}{\gamma^2}\right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

así como para su función inversa:

$$\begin{aligned} F_{\hat{\gamma}}^{-1}(\alpha \mid n, p, \gamma) &= \sqrt{\frac{n(n-p)}{(n-1)pF_{F'}^{-1}\left(1-\alpha \mid p, n-p, \frac{n}{\gamma^2}, 0\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{(n-1)p}{n(n-p)}F_{F''}^{-1}\left(\alpha \mid n-p, p, 0, \frac{n}{\gamma^2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aquí, $F_{F'}$ y $F_{F''}$ representan las cdf de $F' \sim F\left(p, n-p, \frac{n}{\gamma^2}, 0\right)$ y $F'' \sim F\left(n-p, p, 0, \frac{n}{\gamma^2}\right)$, respectivamente.

Algunos autores, como Giner-Bosch et al. (2019), trabajan con $\hat{\gamma}^2$ en lugar de $\hat{\gamma}$. En este caso, las expresiones de la cdf y su inversa se pueden deducir de manera muy parecida a (2.9) y (2.10), manteniendo la relación con las distribuciones F no centrales.

Pueden derivarse, también, expresiones para la media y la desviación típica de $\hat{\gamma}$, a partir de las respectivas expresiones para las distribuciones F no centrales.

3. Gráficos de control para el MCV. Revisión bibliográfica

En este capítulo, describimos con detalle los gráficos de control para el MCV existentes en la literatura. Se incluyen todos los publicados hasta agosto de 2019. Se presentan en orden cronológico, según su fecha de publicación *on-line*. Asimismo, la tabla 3.1 recoge, de forma resumida, las características principales de estos gráficos.

3.1 Gráfico tipo Shewhart de Yeong et al. (2016)

El primer gráfico publicado para el MCV es debido a Yeong et al. (2016). Se trata, en realidad, de dos gráficos tipo Shewhart unilaterales; es decir: en ellos, se monitoriza el MCV muestral (2.6), siguiendo un procedimiento con tamaño de muestra e intervalo de muestreo constantes, y sus límites de control se determinan en función de una tasa de falsa alarma α_0 establecida por el usuario, de la forma habitual; es decir:

$$\text{LCL} = F_{\hat{\gamma}}^{-1}(\alpha_0 | n, p, \gamma_0) \quad (3.1)$$

para el gráfico cuyo objeto es detectar *disminuciones* del MCV, y

$$\text{UCL} = F_{\hat{\gamma}}^{-1}(1 - \alpha_0 | n, p, \gamma_0) \quad (3.2)$$

para el que detecta *incrementos* del MCV. En ambos casos, $F_{\hat{\gamma}}^{-1}$ representa la inversa de la función de distribución acumulada del MCV muestral $\hat{\gamma}$ (véase la sección 2.4.2).

De esta forma, el único *parámetro de diseño* de ambos gráficos es α_0 (además del tamaño muestral n , que suele estar fijado de antemano).

El desempeño del gráfico es medido por los autores a través de su ARL (véase la sección 1.1.1), como es habitual. En este caso, dado que el gráfico sigue un esquema tipo Shewhart, con muestras independientes, y tamaño muestral, intervalo de muestreo y límites de control constantes, la ARL puede ser calculado directamente de la siguiente forma:

$$\text{ARL}(\tau) = \frac{1}{\text{AP}(\tau)}. \quad (3.3)$$

En la fórmula precedente, τ representa el tamaño relativo de la desviación o cambio (*shift*, en inglés) del MCV poblacional γ respecto de su valor bajo control γ_0 ; es decir, $\tau = \gamma/\gamma_0$. Por tanto, el caso $\tau = 1$ equivale a la situación en que el proceso se encuentra *bajo control*, y $\tau \neq 1$ representa el caso de un proceso *fuera de control*.

Asimismo, AP representa la *probabilidad de alarma*, es decir, la probabilidad de que una muestra quede fuera de los límites de control. Como función de τ , el valor de AP puede calcularse, en este caso, de la siguiente forma:

$$\text{AP}(\tau) = \Pr(\hat{\gamma} < \text{LCL} | \tau) = F_{\hat{\gamma}}(\text{LCL} | n, p, \gamma = \tau\gamma_0), \quad (3.4)$$

ID	Primera publicación	Revista (abr. ISO 4)	Referencia	Método/enfoque	Hace referencia a	Se compara con
Yeong2016	29/06/15	Qual. Rel. Eng. Int.	Yeong et al. (2016)	Shewhart	-	-
Lim2017	18/04/17	Comput. Ind. Eng.	Lim et al. (2017)	Suma de rachas	Yeong2016	Yeong2016
Khatun2019	23/08/18	Trans. Inst. Meas. Control	Khatun et al. (2019)	Ejecuciones cortas	Yeong2016, Lim2017	-
Abbasi2018	29/08/18	Int. J. Adv. Manuf. Technol.	Abbasi y Adegoke (2018)	Fase I	Yeong2016, Lim2017	-
Khaw2018	10/10/18	Comput. Ind. Eng.	Khaw et al. (2018)	Adaptativo: VSI, VSS, VSSI	Yeong2016, Lim2017	Yeong2016, Lim2017
Khaw2019	6/02/19	Chemom. Intell. Lab. Syst.	Khaw et al. (2019)	Sintético	Yeong2016, Lim2017	Yeong2016, Lim2017
Haq2019	15/03/19	Comput. Ind. Eng.	Haq y Khoo (2019)	EWMA Adaptativo	Yeong2016, Lim2017, Khaw2018, Khatun2019	Yeong2016, Khaw2018
GinerBosch2019	25/03/19	Qual. Rel. Eng. Int.	Giner-Bosch et al. (2019)	EWMA	Yeong2016, Lim2017	Yeong2016, Lim2017
Nguyen2019a	1/04/19	J. Stat. Comp. Simul.	Nguyen et al. (2019a)	Sintético	Yeong2016, Lim2017	Yeong2016, Lim2017
Chew2019	17/07/19	Qual. Rel. Eng. Int.	Chew et al. (2019)	Parámetros variables	Yeong2016, Lim2017, Khaw2018, Khaw2019	Yeong2016, Khaw2018, Khaw2019
Nguyen2019b	1/08/19	Appl. Stochastic Models Bus. Ind.	Nguyen et al. (2019b)	Adaptativo: VSI	Yeong2016, Lim2017	Yeong2016, Lim2017

Tabla 3.1: Características principales de los gráficos encontrados en la revisión bibliográfica.

para el gráfico diseñado para detectar disminuciones del MCV, y

$$AP(\tau) = \Pr(\hat{\gamma} > \text{UCL} \mid \tau) = 1 - F_{\hat{\gamma}}(\text{UCL} \mid n, p, \gamma = \tau\gamma_0), \quad (3.5)$$

para el gráfico diseñado para detectar incrementos del MCV.

Teniendo en cuenta (3.1), (3.2) y (3.3), es claro que la ARL de cualquiera de los dos gráficos cuando el proceso se encuentra bajo control (es decir, cuando $\tau = 1$) es, simplemente:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha_0}. \quad (3.6)$$

Como suele ser habitual, los autores proponen diseñar los gráficos para asegurar que, cuando el proceso esté bajo control, la ARL tome un valor suficientemente elevado, fijado por el usuario final. Habitualmente, se toma $ARL_0 = 370,4$, lo cual, por (3.1.6), se corresponde con $\alpha_0 = 0,0027$, que es la probabilidad de falsa alarma del gráfico de control de Shewhart bilateral para la media muestral \bar{X} cuando los límites de control se definen como $\mu_0 \pm 3\sigma_0/\sqrt{n}$.

Una vez determinados los límites de control de esta forma, la ARL fuera de control, denotada habitualmente como ARL_1 , puede ser calculada utilizando (3.1.3), para una desviación inaceptable del proceso τ dada.

Como se ha explicado en la sección 1.1.1, es concretamente la ARL_1 , para un valor de τ fijado por el usuario, la que se usa habitualmente para medir y comparar el desempeño de los gráficos de control. Yeong et al. calculan la ARL_1 de su gráfico para distintos valores de p , n , γ_0 y τ , fijando $ARL_0 = 370,4$; en concreto: $p \in \{2, 3, 4\}$, $n \in \{5, 10, 15\}$, $\gamma_0 \in \{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5\}$, $\tau \in \{0,30, 0,50, 0,80, 1,20, 1,50, 2,00\}$; los tres primeros valores de τ corresponden al gráfico diseñado para detectar disminuciones del MCV, mientras que los tres últimos fueron aplicados al gráfico para incrementos. Los resultados muestran, como es lógico, que la ARL_1 resulta ser mayor para valores de τ cercanos a 1 (es más difícil detectar que un proceso está fuera de control si la desviación es pequeña). Asimismo, valores mayores de n resultan en valores menores de ARL_1 , como también era esperable (un tamaño muestral más elevado resulta en un incremento de la potencia); esto es más evidente para valores mayores del parámetro p .

Este gráfico, basado en un esquema clásico tipo Shewhart, se convierte en la primera herramienta publicada en la literatura para monitorizar el MCV. Todas las propuestas posteriores intentarán mejorarla en términos de eficiencia (esto es, tratando de reducir la ARL_1 para unas mismas condiciones), mediante la aplicación de diferentes esquemas o estrategias de monitorización.

3.2 Gráfico basado en suma de rachas de Lim et al. (2017)

Lim et al. (2017) desarrollan un gráfico para el MCV basado en una estrategia de suma de rachas (en inglés, *run sum*). Los gráficos basados en suma de rachas fueron propuestos por primera vez por Roberts (1966), y fueron estudiados posteriormente por Reynolds (1971), Jaehn (1987, 1991) y Champ y Rigdon (1997). Estos gráficos, como otros esquemas,

incorporan *memoria* de las observaciones pasadas para mejorar la decisión de si el proceso se encuentra o no bajo control. En concreto, el rango de valores dentro de control se divide en varios intervalos, y a cada intervalo se le asigna una puntuación (no negativa); dicha puntuación es mayor cuanto más cercano esté el intervalo a los límites de control. A cada nueva observación se le asigna la puntuación del intervalo al que pertenece. El valor monitorizado en un gráfico de suma de rachas es la suma de todas las puntuaciones pasadas, reiniciándose cada vez que una nueva observación rompe una racha (esto es, cuando la observación se sitúa en el lado opuesto de la línea central del gráfico respecto de la observación anterior, si el gráfico es bilateral, o cuando la observación se sitúa en el intervalo más alejado del límite de control, en el caso de un gráfico unilateral). El gráfico produce una señal de falta de control cuando la puntuación acumulada supera un cierto umbral, prefijado de antemano.

3.3 Gráfico para ejecuciones cortas de Khatun et al. (2019)

Khatun et al. (2019) proponen un gráfico de control para monitorizar el MCV en ciclos de ejecución cortos (*short production runs*, en inglés). Este tipo de gráficos han sido estudiados por diversos autores, y se aplican en aquellos casos en que, debido a la escasez de muestras, no es posible realizar una monitorización del proceso utilizando gráficos de control tradicionales.

Se trata del primer (y único, hasta el momento) gráfico para monitorizar el MCV en ciclos cortos. Los autores adaptan el gráfico de Yeong et al. (2016) al caso en el que el número de muestras que es posible obtener durante el ciclo productivo en curso está prefijado de antemano.

Por su propia naturaleza, este gráfico *no* es comparable con el resto de los descritos en este capítulo. De hecho, como medida de desempeño se toma la *longitud media de racha truncada* (en inglés, *truncated average run length*; TARL), la cual no es comparable directamente con otras medidas no truncadas tales como la ARL o el ATS (véase el capítulo 1).

3.4 Estudio de la fase I de Abbasi y Adegoke (2018)

Este artículo estudia el comportamiento de un gráfico de control tipo Shewhart para el MCV en la fase I del gráfico (que es la fase inicial en la que se muestrea y, tras eliminar posibles puntos fuera de control, se estiman los parámetros del proceso supuestamente bajo control), bajo diferentes situaciones, y empleando varias de las definiciones de MCV vistas en la sección 2.2.1.

Dada su naturaleza, este trabajo tampoco resulta comparable con el resto de los gráficos diseñados para el MCV.

3.5 Gráficos adaptativos (VSI, VSS y VSSI) de Khaw et al. (2018)

Khaw et al. (2018) presentan tres gráficos de control adaptativos, donde los parámetros que se optimizan son: para VSI, el tamaño del intervalo de muestreo (tiempo entre dos muestras consecutivas); para VSS el tamaño de la muestra y para VSSI la combinación de los dos anteriores. Estos gráficos contienen tres regiones: la región central, la región de advertencia y la región fuera de control (ver figura 3.5.1). Tanto la región central como la de advertencia se consideran regiones bajo control. Similar al gráfico CV VSI (Castagliola et al., 2013b) y los

gráficos CV CVS (Castagliola et al., 2015; Yeong et al., 2017), que no son competitivas en la detección de cambios CV para decrementos, por eso Khaw et al. (2018) consideró en este artículo únicamente cambios de incremento en el MCV.

Además, detectar cambios ascendentes de MCV es más crucial que detectar cambios descendentes de MCV ya que el primero indica un aumento en la variabilidad del proceso multivariante en relación con la media del proceso multivariante.

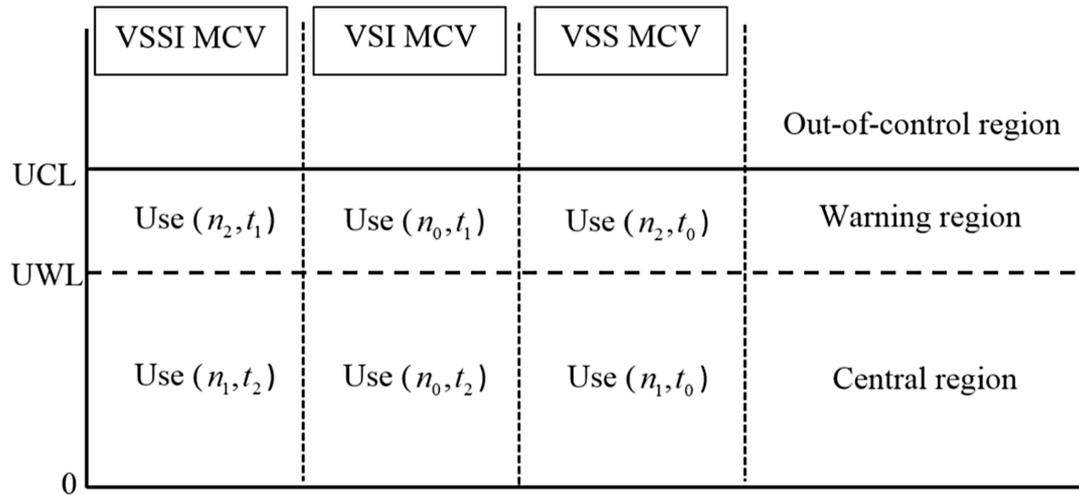


Figura 3.5.1: Esquema de los gráficos adaptativos: VSI, VSS y VSSI. Fuente: Khaw et al. (2018)

Para el gráfico VSSI, el funcionamiento es el siguiente:

- Si la i -ésima muestra cae en la región central ($0 < i < UWL$), el proceso está *bajo control* y no hay indicios de la necesidad de un ajuste del proceso, por lo tanto, se deben adoptar n_1 y t_2 para calcular la siguiente muestra, \hat{y}_{i+1} .
- Si i -ésima muestra cae en la región de advertencia ($UWL < i < UCL$), el proceso aún está *bajo control*, pero hay una mayor probabilidad de que el proceso cambie a la región *fuera de control*, por lo tanto, n_2 y t_1 deben adoptarse, para calcular \hat{y}_{i+1} .
- Si i -ésima muestra cae en la región fuera de control ($i > UCL$), el proceso se declara *fuera de control*, donde se realiza una búsqueda de causas asignables y se toman medidas correctivas.

El gráfico VSI funciona con la noción de variar los intervalos de muestreo (t_1, t_2) pero utiliza un tamaño de muestra fijo. Para garantizar una comparación equitativa, el tamaño de la muestra del gráfico VSI es similar al del gráfico Shewhart, es decir, n_0 .

Mientras tanto, el gráfico VSS utiliza un intervalo de muestreo fijo, t_0 , es decir, similar al intervalo de muestreo del gráfico MCV estándar, Shewhart, mientras que su tamaño de muestra varía entre n_1 y n_2 .

Como medida de desempeño se toma el ATS en los tres gráficos, tomando en cuenta que el tiempo o intervalo de muestra es igual a la unidad, para así poder compararse con los gráficos de control de Yeong et al. (2016) y Lim et al. (2017). Cabe mencionar que está diseñado en base a cadenas de Márkov.

3.6 Gráfico sintético de Khaw et al. (2019)

El gráfico funciona sobre la base de que cuando existe una muestra no conforme, se realiza un recuento del número de muestras entre las muestras no conformes actuales y anteriores. Se dice que el proceso está fuera de control solo cuando este recuento es menor o igual que un valor umbral, L . Tan pronto como se detecta una señal fuera de control y se toman medidas correctivas, el recuento se restablece a cero y el mismo proceso de monitoreo de proceso continúa.

Para la optimización del gráfico se siguen los siguientes pasos:

1. Especificar n, γ_0, ARL_0 y τ , donde $\tau = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ además, γ_1 es el coeficiente de variación fuera de control.
2. Inicializar $L = 1$.
3. Obtener UCL resolviendo $\frac{1}{B(1-A^L)} = ARL_0$ donde $A = F_{\hat{\gamma}}\left(UCL \mid n, p, \frac{n}{\gamma_0^2}\right)$.
4. Después de obtener los límites L y UCL , calcular ARL_1 para el cambio τ especificado en el paso 1, utilizando $ARL = \left(\frac{1}{1-(1-\alpha)^L}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
5. Repetir los pasos 3 y 4 haciendo $L = L + 1$ hasta alcanzar el valor L más grande establecido por el profesional.

Como medida de desempeño se toma la ARL , para así poder compararse con los gráficos de control de Yeong et al. (2016) y Lim et al. (2017).

3.7 Gráfico EWMA adaptativo de Haq y Khoo (2019)

Este gráfico aplica un esquema basado en medias móviles ponderadas exponencialmente (*exponentially weighted moving average*; EWMA), que se describe con mayor detalle en la sección 3.8. A este esquema, se le añade un enfoque adaptativo, en el cual el parámetro λ , el cual da mayor o menor peso a las observaciones pasadas, puede ir variando a lo largo del tiempo.

Como medida de desempeño se toma la ARL , para así poder compararse con los gráficos de control de Yeong et al. (2016) y Khaw et al. (2018). Además, está diseñado en base a simulaciones por Monte Carlo.

3.8 Gráfico EWMA de Giner-Bosch et al. (2019)

Este gráfico aplica el esquema EWMA a la monitorización del MCV. Los gráficos tipo EWMA (Roberts, 1959; Hunter, 1986; Lucas y Saccucci, 1990), al igual que otros esquemas (como los de suma de rachas; véase la sección 3.2), intentan mejorar la capacidad para detectar desviaciones inaceptables del proceso incorporando información de las observaciones pasadas en la muestra en curso. Se sabe que los gráficos EWMA suelen mejorar esta sensibilidad, sobre todo, para desviaciones relativamente pequeñas del proceso, en relación con un gráfico tipo Shewhart.

En concreto, un gráfico tipo EWMA incorpora información de las observaciones pasadas Y_0, Y_1, \dots, Y_{t-1} a cada nuevo valor muestreado Y_t calculando una media ponderada de todos

ellos, que se puede expresar recursivamente como $Z_t = \lambda Y_t + (1 - \lambda)Z_{t-1}$, que es el valor que se dibujará y monitorizará.

Giner-Bosch et al. trabajan con el MCV muestral al cuadrado, $\hat{\gamma}^2$. Describen cómo implementar el gráfico, incluyendo el cálculo de la media y la desviación típica de $\hat{\gamma}^2$, y cómo optimizar los parámetros de diseño del gráfico. Realizan diversas experiencias numéricas que muestran que su gráfico mejora el comportamiento de los gráficos de Yeong et al. (2016) y Lim et al. (2017).

3.9 Gráfico sintético de Nguyen et al. (2019a)

Nguyen et al. (2019a) proponen dos gráficos sintéticos unilaterales para el MCV motivados por las siguientes razones:

- La distribución de MCV es asimétrica, por lo tanto, el diseño de diferentes límites de control permite obtener valores iguales del ARL en control para los dos gráficos de control de MCV sintético unilateral.
- Hay más flexibilidad en el diseño de cada cuadro de control de MCV sintético unilateral, por ejemplo: si los profesionales de calidad saben que una dirección de la condición fuera de control puede ocurrir con más frecuencia que otra, el límite de control de cada uno de los gráficos de control puede ajustarse adecuadamente para tener una mayor sensibilidad frente a la dirección de cambio más frecuente.

Para optimizar los parámetros se sigue la siguiente estrategia:

1. Definir n, p, γ_0, τ y ARL_0 , además igualar el $ARL_{opt} = +\infty$.
2. Inicializar $H^- = 1$.
3. Calcular LCL tomando en cuenta la restricción:

$$ARL(n, p, H^-, LCL, \gamma_0, \tau = 1) = ARL_0$$
4. Calcular la ARL de la solución diseñada con H^- utilizando $ARL_{ZS} = \nu_1$ o $ARL_{SS} = \nu_{s1}$.
5. Si $ARL < ARL_{opt}$, entonces $ARL_{opt} = ARL, H^{-*} = H^-, LCL^* = LCL$. Asignar a $H^- = H^- + 1$ y regresar el paso 3, si no, ir al paso 6.
6. Tomar la solución actual (H^{-*}, LCL^*) como óptima.

Como medida de desempeño se toma la ARL, para compararse con los gráficos de control de Yeong et al. (2016) y Lim et al. (2017). Además, está diseñado en base a cadenas de Márkov.

3.10 Gráfico de parámetros variables de Chew et al. (2019)

Chew et al. (2019) proponen un gráfico de control adaptativo solo para incrementos del MCV (véase figura 3.10.1) que, como demuestra Castagliola et al. (2013a), al ser un adaptativo o de parámetros variables, no es competitivo en la detección de decrementos en el MCV de un proceso.

- Calcular $ATS_1(\tau)$ usando la ecuación:

$$ATS = \mathbf{b}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{t}.$$

- Incrementar n_0 en 1 mientras mantenga el mismo valor de n_2 .
- Repetir los pasos 3 al 5 hasta que $n_1 = n_0 - 1$.
- Asignar $n_1 = p + 1$ e incrementar n_2 en 1.
- Repetir los pasos 3 al 7 hasta que $n_2 = 31$.
- Elegir la combinación de parámetros $(n_1, n_2, t_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_1, \alpha'_2)$ que minimice el $ATS_1(\tau)$ obteniendo la combinación óptima de parámetros.

Como medida de desempeño se toma el ATS, tomando en cuenta que el tiempo o intervalo de muestra es igual a la unidad, para así poder compararse con los gráficos de control de Yeong et al. (2016) y Khaw et al. (2018,2019). Además, está diseñado en base a cadenas de Márkov.

3.11 Gráfico de intervalo de muestreo variable de Nguyen et al. (2019b)

Nguyen et al. (2019b) desarrollan una variación del gráfico propuesto por Shewhart et al. (2016) para mejorar su lenta detección en pequeños y medianos cambios en el proceso. Como se sabe, un enfoque para mejorar el desempeño del gráfico Shewhart es utilizar estrategias adaptativas como el intervalo de muestreo variable (VSI) o el tamaño de muestra variable (VSS), en este artículo los autores sugieren la estrategia VSI para monitorizar el MCV. Presentan dos gráficos unilaterales para el incremento o decremento del MCV, pero para el presente trabajo se comparará solo el gráfico que contempla incrementos en el MCV.

La configuración del gráfico se realiza de la siguiente manera:

- Un gráfico de control VSI Shewhart del lado inferior para el MCV con el objetivo de detectar una disminución en \hat{y}_i , con un solo límite de control inferior LCL^- (es decir, el límite de control superior $UCL^- = +\infty$) y un único límite de advertencia inferior LWL^- (es decir, el límite superior de advertencia $UWL^- = +\infty$).
- Un gráfico de control VSI Shewhart del lado superior para el MCV con el objetivo de detectar una incrementos en \hat{y}_i , con un solo límite de control superior UCL^+ (es decir, el límite de control superior $LCL^+ = 0$) y un único límite de advertencia superior UWL^+ (es decir, el límite inferior de advertencia $LWL^+ = 0$).

La estrategia para el gráfico es la siguiente:

- Cuando $\hat{y}_i > LWL^-$ o cuando $\hat{y}_i < LWL^+$ en el gráfico, el proceso se declara *bajo control estadístico* y la siguiente muestra se recoge después de un intervalo de muestreo más largo h_L .
- Si \hat{y}_i está en la región de advertencia o precaución, significa que, $\hat{y}_i \in [LCL^-, LWL^-]$ o que $\hat{y}_i \in [UWL^+, UCL^+]$, según el gráfico que se trate, el proceso aún se declarará *bajo control estadístico*, pero la siguiente muestra se recogerá después de un intervalo de muestreo más corto h_S .
- En caso de que $\hat{y}_i < LCL^-$ o que $\hat{y}_i > UCL^+$, el proceso se declarará *fuera de control* por lo tanto, se deben encontrar y eliminar las causas asignables.

Como medida de desempeño se toma el ATS, tomando en cuenta que el tiempo o intervalo de muestra es igual a la unidad, para así poder compararse con los gráficos de control de Yeong et al. (2016) y Lim et al. (2017).

4. Diseño de experimentos para el análisis comparativo de gráficos de control

En este capítulo describimos el procedimiento que hemos seguido para realizar un análisis comparativo entre los gráficos que se han descrito en el capítulo 3.

Se toma como medida de desempeño la ARL (véase el capítulo 1) y se realizará una comparación entre los diferentes gráficos, teniendo en cuenta también la posible influencia de los parámetros comunes a todos los gráficos, es decir: p , n , γ_0 y τ .

Esto puede estructurarse como un diseño de experimentos y, por tanto, sus resultados pueden ser analizados mediante Análisis de la varianza (ANOVA).

Dado que algunos de los gráficos objeto de estudio sólo presentan una versión unilateral para detectar *incrementos* del MCV (que es, además, el caso más interesante en la práctica), únicamente compararemos el desempeño de los gráficos para valores de τ mayores que 1.

4.1 Calibración y comparación de gráficos de control mediante análisis de la varianza

Para poder realizar el análisis de los factores más influyentes y decisivos en la comparación del rendimiento de los gráficos de control antes descritos, se recurrirá a herramientas de inferencia estadística: el diseño de experimentos (*design of experiments*; DOE) y el análisis de la varianza (*analysis of variance*; ANOVA) (Fisher, 1925, 1935).

En concreto, tiene sentido plantear un DOE consistente en cruzar los siguientes factores: gráficos o métodos involucrados en la comparación, y los parámetros p , n , γ_0 y τ ; es decir, un diseño de factores cruzados de efectos fijos.

El ANOVA, nos permitirá cuantificar la contribución de cada factor, y en este estudio, la significancia estadística de las interacciones dobles. Por tanto, se ajusta al objetivo planteado de comparar los gráficos de control para el MCV.

Se pueden distinguir dos métodos clásicos de ANOVA: los paramétricos (que asumen que la variable de interés sigue una distribución normal para cada combinación de factores, entre otras hipótesis) y los no paramétricos, que no presuponen ninguna estructura en los datos a analizar. Estudios realizados sobre el ANOVA paramétrico, demuestran gran robustez ante el incumplimiento de sus hipótesis y ofrece resultados por lo menos tan buenos como los que obtendríamos con el ANOVA no paramétrico (Rasch y Guiard, 2004 y Basso et al., 2007).

Por estos motivos, se ha elegido utilizar la técnica clásica de ANOVA paramétrico para analizar los datos expuestos en los artículos asociados a los gráficos de control MCV ya expuestos.

Este uso del DOE y el ANOVA como forma de *calibrar* algoritmos o, en nuestro caso, gráficos de control, está justificado por diversos autores como, por ejemplo, Ridge y Kudenko (2010).

4.2 Estrategia y herramientas de análisis

Se calcularán y graficarán los valores medios dentro de cada nivel los intervalos de confianza respectivos basados en el método de diferencia honestamente significativa de Tukey (1949) (*honestly significant difference*; intervalos HSD) para determinar, qué niveles

de un factor producen desviaciones significativamente distintas al resto, así como el sentido de las interacciones que podrían presentarse. Se aceptará que el factor es significativo tomando un nivel de confianza del 95%.

Del total de los 11 artículos donde se encuentran 13 propuestas de gráficos de control para el MCV, se dejaron dos fuera del estudio: el presentado por Abbasi (2018) ya que, al ser un gráfico de control de rachas cortas, es decir, que obliga a que de una alarma rápidamente debido que se asume una producción finita, no es comparable; además, se dejó fuera de la comparativa al estudio de fase I presentado por Khatun (2019).

De los 11 gráficos de control restantes se hizo una división en dos grupos: los de parámetros fijos (no adaptativos), siendo estos cinco: Shewhart (Yeong et al. 2016), suma de rachas (Lim et al., 2017), gráfico sintético (Khaw et al. 2019), EWMA (Giner-Bosh et al. 2019) y el gráfico sintético de Nguyen (Nguyen et al., 2019a); y los seis restantes, gráficos de control de parámetros variables o adaptativos: VSS, VSI, VSSI (Khaw et al., 2018), EWMA adaptativo (Haq y Khoo. 2019), gráfico de parámetros variables (Chew et al., 2019) y, por último, el gráfico de intervalo de muestro variable (Nguyen et al., 2019b).

Del primer grupo, de parámetros fijos, aplicaremos un ANOVA con cinco factores cruzados (Método, p , n , γ_0 y τ), tomando como variable dependiente la ARL, además, tomaremos en cuenta las interacciones de segundo orden. Así, se obtendrá el gráfico de control de parámetros fijos que será el representante de este grupo.

Del segundo grupo, la idea inicial, consistía en realizar una comparativa de los gráficos de control exactamente igual al primer grupo, todos contra todos, pero, al tener limitaciones por falta de similitud en los parámetros publicados en los datos de los artículos de los autores, se decidió comparar cada uno de los gráficos de parámetros variables contra el ganador del primer grupo, con quien comparten mayor similitud en los parámetros publicados. Cabe mencionar, que de los tres gráficos adaptativos presentados por Khaw: VSS, VSI y VSSI; se eligió al que mejor rendimiento o resultados tuviera en la ARL, teniendo así un representante de este artículo para ser comparado contra el ganador del primer grupo.

Para la comparativa en parejas, en el ANOVA, se analizará la desviación relativa respecto de la mejor solución del gráfico de control de parámetros fijos con mejor ARL mediante la siguiente fórmula:

$$\% \Delta ARL = \frac{ARL_{1_{\text{método}}} - RL_{1_{\text{representante primer grupo}}}}{ARL_{1_{\text{representante primer grupo}}}}$$

5. Análisis comparativo de los principales gráficos de control para el MCV

En este capítulo, se describe todo el análisis comparativo mencionado en el capítulo 4, mostrando los gráficos y tablas resultantes para su visualización y entendimiento.

En los gráficos mostrados y en las tablas de ANOVA presentadas, se utilizará la nomenclatura expuesta en las tablas 5.1 y tabla 5.2.

Símbolo	Nomenclatura en gráficos y tablas
p	p
n	n
γ_0	Gamma0
τ	Tau

Tabla 5.1: Símbolos y nomenclaturas en gráficos y tablas.

Método	Nomenclatura en gráficos
Shewhart (Yeong et al., 2016)	Shewhart
Suma de rachas (Lim et al., 2017)	Run_sum
Adaptativos: VSI, VSS y VSSI (Khaw et al., 2018)	VSI, VSS y VSSI
Sintético de Khaw (Khaw et al., 2019)	Synthetic_1
EWMA adaptativo (Haq y Khoo., 2019)	Adaptive_EWMA
EWMA (Giner-Bosh et al., 2019)	EWMA
Sintético de Nguyen (Nguyen et al., 2019a)	Synthetic_2
Parámetros variables (Chew et al., 2019)	VP
intervalo de muestreo variable (Nguyen et al., 2019b)	VSI-SH

Tabla 5.2: Métodos y nomenclaturas en gráficos.

5.1 Software y hardware utilizado

Para realizar el estudio, se utilizó el lenguaje de programación R versión 3.6.1, en su entorno de desarrollo integrado de software libre RStudio versión 1.2.1335, se ejecutaron en un sistema operativo macOS Mojave versión 10.14.6 con procesador de 2.9GHz Intel Core i7 y memoria RAM de 16GB.

5.2 Métodos de parámetros fijos (no adaptativos)

Comenzaremos analizando los resultados del ANOVA que compara los métodos de parámetros fijos, con: $p \in \{2, 3\}$, $n \in \{5, 10\}$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.3, 0.5\}$ y $\tau \in \{1.1, 1.25, 1.5\}$, los cuales son los parámetros publicados y que coinciden entre los artículos considerados en este análisis. Para cada uno de los cinco métodos a comparar, se tiene 36 registros de las diferentes combinaciones de los parámetros antes mencionados, obteniendo así un diseño de experimentos ortogonal entre todos los métodos, con lo cual, podemos asegurarnos de no confundir los efectos de los factores.

El ANOVA (tabla A.1 del anexo A), reveló que existen diferencias significativas entre los distintos gráficos de control de parámetros fijos, siendo parámetros influyentes con un 95% de error Tipo I: p, n, γ_0 y τ ; además, de e las interacciones de orden dos: $Metodo \cdot Gamma0, Metodo \cdot Tau, Metodo \cdot n, Metodo \cdot p, Gamma0 \cdot Tau, Gamma0 \cdot n, Tau \cdot n, Tau \cdot p$ y $n \cdot p$.

Tal y como se aprecia en la figura 5.1(a) en el gráfico de medias e intervalos HSD de los métodos comparados, el que mejor ARL medio presenta con diferencia estadística significativa es el gráfico EWMA propuesto por Giner-Bosch et al. (2019).

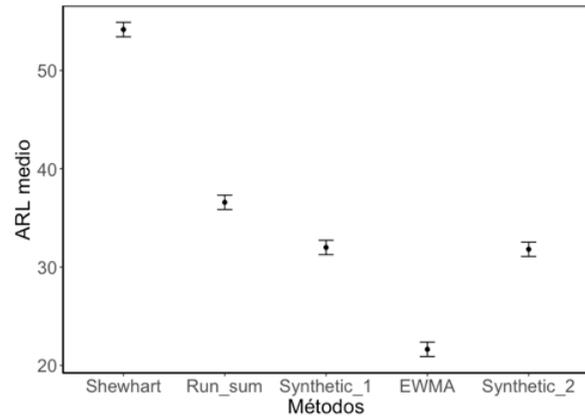
Además, el gráfico de medias e intervalos HSD de la figura 5.1(b) correspondiente al parámetro p , confirma que, existen diferencias significativas en la ARL medio cuando la dimensión es menor. Por su parte, el gráfico de medias e intervalos HSD correspondiente al parámetro n (figura 5.1(c)), como era de esperarse, al tener mayor cantidad de muestras los gráficos de control ganan potencia, lo que hace que incrementen significativamente su rendimiento y reduzcan su ARL medio.

También, el gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro γ_0 , (figura 5.1(d)), nos indica que, a menor tamaño de este parámetro, la ARL será menor.

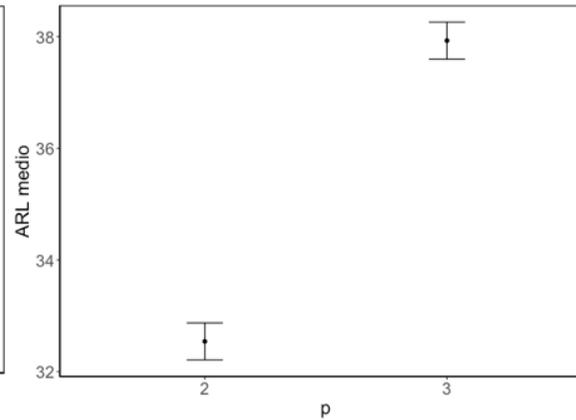
En el gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro τ (figura 5.1(e)), evidencia que el incremento de este parámetro, acentúa la mejoría de los gráficos de control reduciendo significativamente su ARL, ya que se aleja más del valor esperado, logrando que se detecte rápidamente que el proceso está fuera de control estadístico.

Las interacciones significativas detectadas por el análisis evidencian que el método EWMA se comporta mejor que el resto para todos los parámetros analizados en el estudio (véase figuras 5.2(a), (b), (c), (d)).

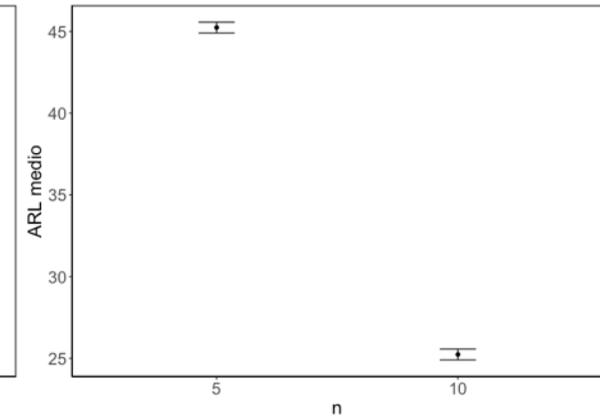
En conclusión, se tomará como referencia y ganador del primer grupo de gráficos de control de parámetros variables a la propuesta de Giner-Bosch et al. para ser comparado con los gráficos de control del grupo de parámetros variables o adaptativos.



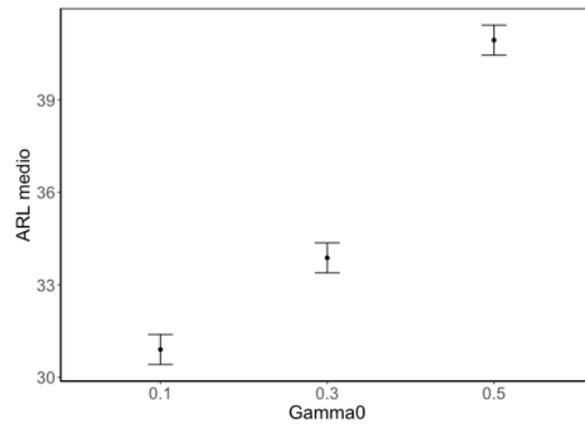
(a) Efecto del método



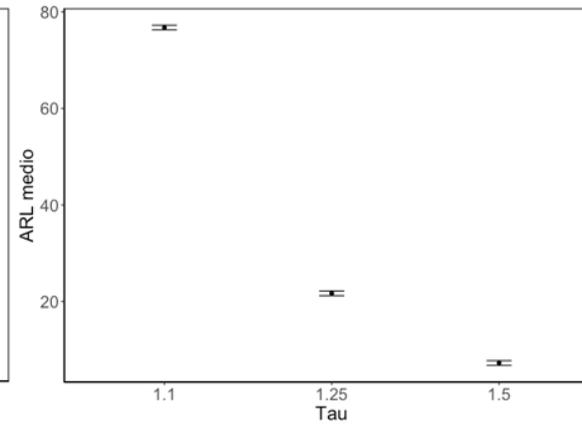
(b) Efecto del parámetro p



(c) Efecto del parámetro n

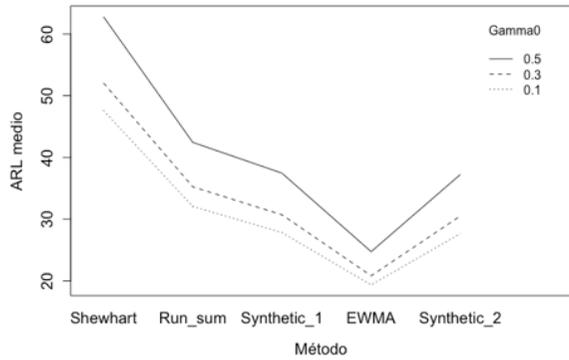


(d) Efecto del parámetro Gamma0

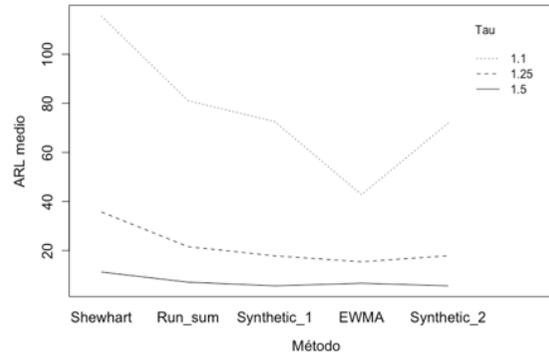


(e) Efecto del parámetro Tau

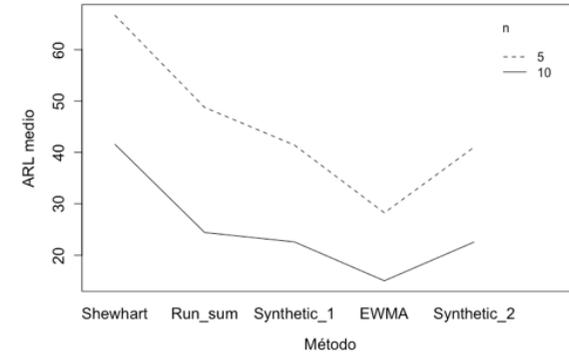
Figura 5.1: Gráfico de medias e intervalos HSD para los efectos principales del ANOVA correspondiente a la comparativa de los gráficos de control de parámetros fijos.



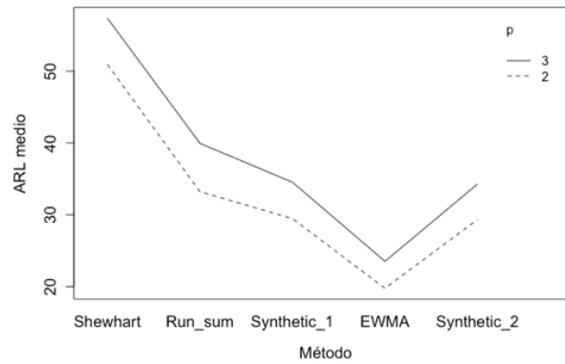
(a) Interacción Metodo·Gamma0



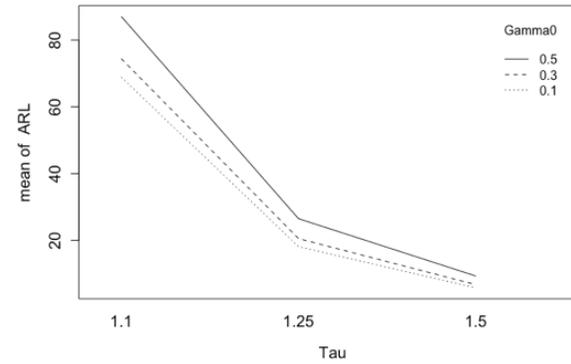
(b) Interacción Metodo·Tau



(c) Interacción Metodo·n

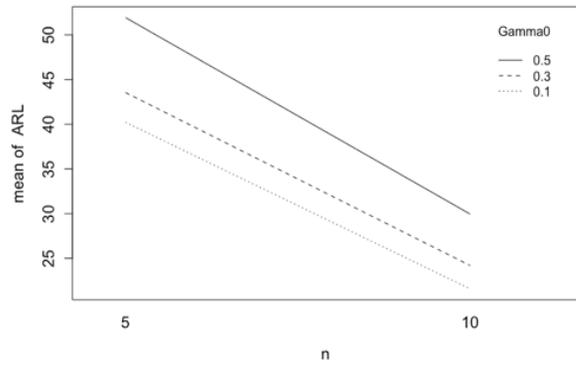


(d) Interacción Metodo·p

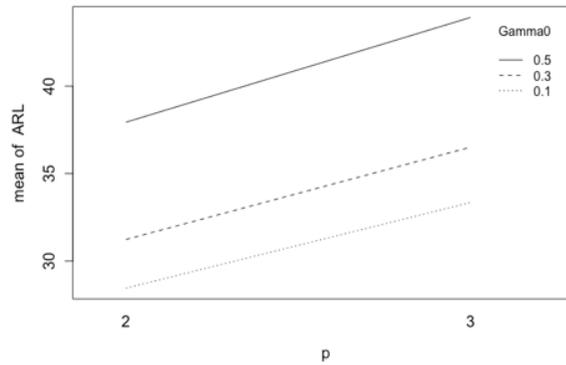


(e) Interacción Gamma0·Tau

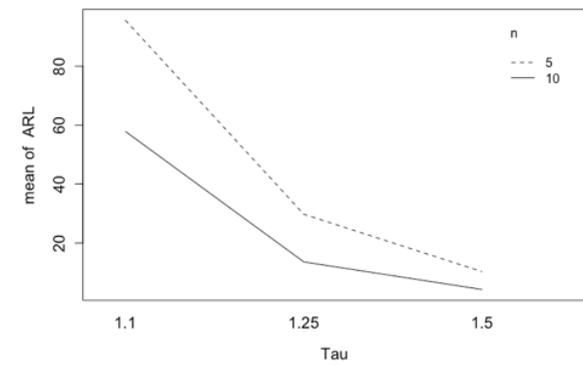
Figura 5.2: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los gráficos de control de parámetros fijos.
Continúa en la página siguiente.



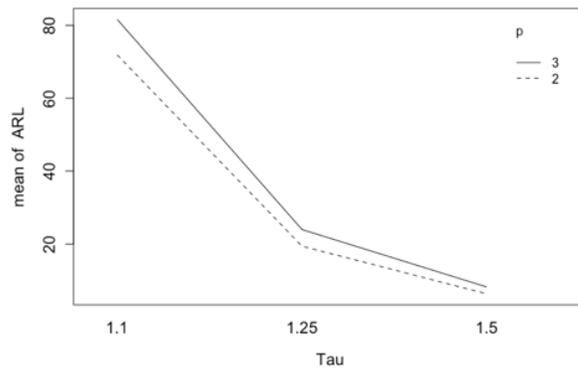
(f) Interacción Gamma0·n



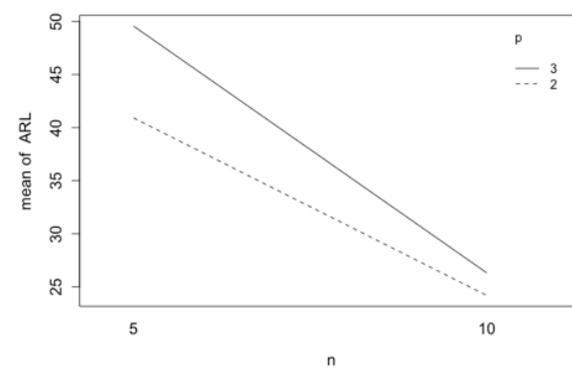
(g) Interacción Gamma0·p



(h) Interacción Tau·n



(i) Interacción Tau·p



(j) Interacción n·p

Figura 5.2: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los gráficos de control de parámetros fijos.

5.3 VSSI vs VSS vs VSI

Como se mencionó en la subsección 4.2, se compararon los métodos propuestos en el artículo de Khaw et al. (2018) analizando los resultados del ANOVA con: $p \in \{2, 3\}$, $n \in \{5, 10\}$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.3, 0.5\}$ y $\tau \in \{1.25, 1.50, 2\}$, los cuales son los parámetros publicados y que coinciden. Formando con los datos recopilados un diseño de experimentos ortogonal, para realizar adecuadamente un análisis de la influencia de los diferentes factores y sus interacciones dobles.

El ANOVA (tabla A.2 del anexo A), reveló que existen diferencias estadísticamente significativas entre los distintos gráficos de control, siendo parámetros estadísticamente significativos con un 95% de error Tipo I: p, n, γ_0 y τ ; además, de las interacciones de orden dos: $Metodo \cdot Tau, Metodo \cdot n, Gamma0 \cdot Tau, Gamma0 \cdot n, Tau \cdot n, Tau \cdot p$ y $n \cdot p$.

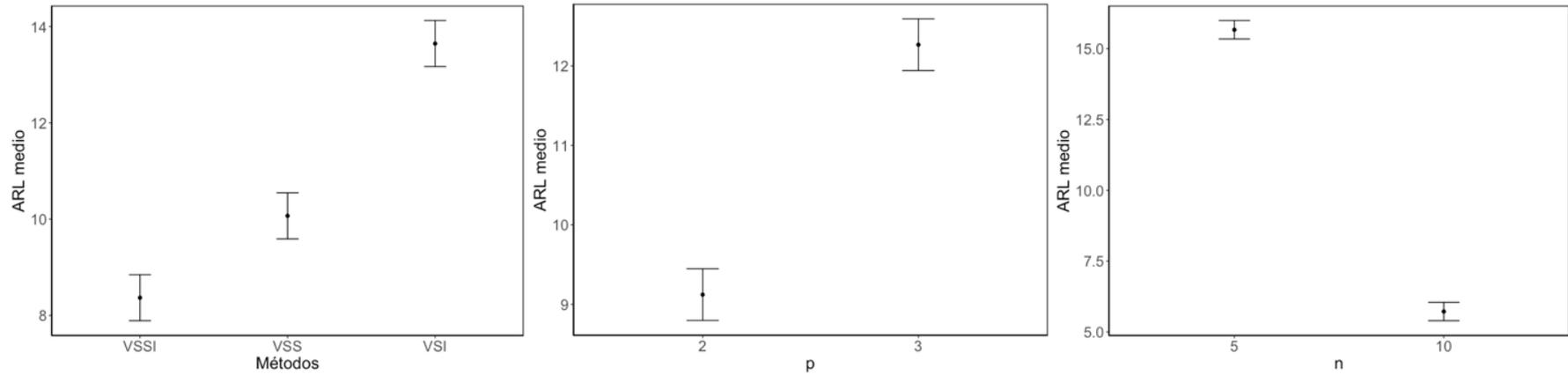
El gráfico de medias e intervalos HSD de la figura 5.3(a) evidencia que, VSSI es el método que mejor rendimiento tiene con respecto a la ARL media de: VSS y VSI.

Por su parte, los gráficos de medias e intervalos HSD de los parámetros p y γ_0 , mostrados en las figuras 5.3(b) y (d), evidencian que, a menor dimensión en las variables a considerar para la configuración de los gráficos de control, la ARL es menor estadísticamente significativa; además, que a menor tamaño del γ_0 los métodos tendrán mejor rendimiento, lo cual se puede apreciar a la disminución en la ARL.

Por el contrario, los efectos de los parámetros n y τ que se muestran en los gráficos de medias e intervalos HSD de las figuras 5.3 (c) y (e), tienen un efecto contrario, ya que a mayor tamaño de muestreo, la ARL será menor, algo que es explicable ya que los gráficos de control ganan potencia con estas condiciones; mientras que al incrementar τ es evidente y previsible que la ARL disminuirá, ya que se alejará más del valor medio del proceso bajo control.

En cuanto a las interacciones significativas, es evidente la superioridad del método VSSI sobre VSS y VSI (figuras 5.4(a), (b), (c) y (d)) reduciendo la ARL.

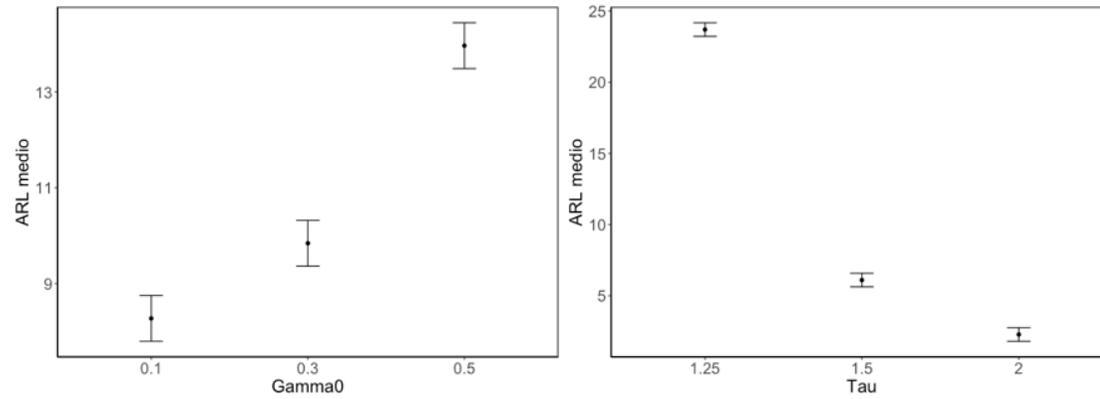
En conclusión, de este análisis se tomará como representante de los gráficos de control propuestos por Khaw et al. (2018) a VSSI, el cual, junto al resto de gráficos de control de parámetros variables o adaptativos, se comparará contra el gráfico EWMA.



(a) Efecto del método

(b) Efecto del parámetro p

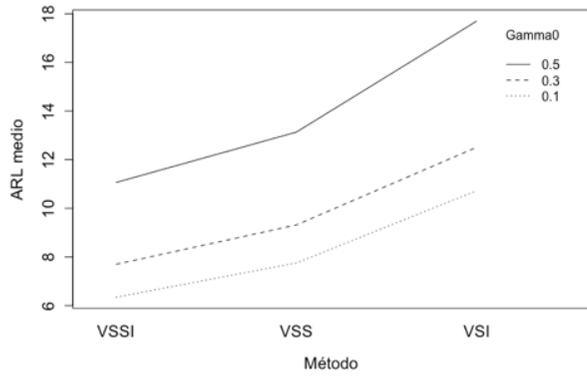
(c) Efecto del parámetro n



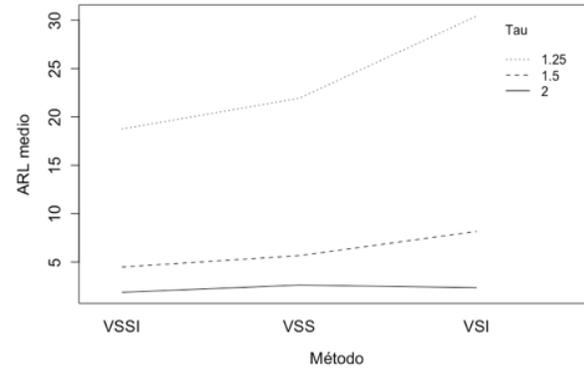
(d) Efecto del parámetro Gamma0

(e) Efecto del parámetro Tau

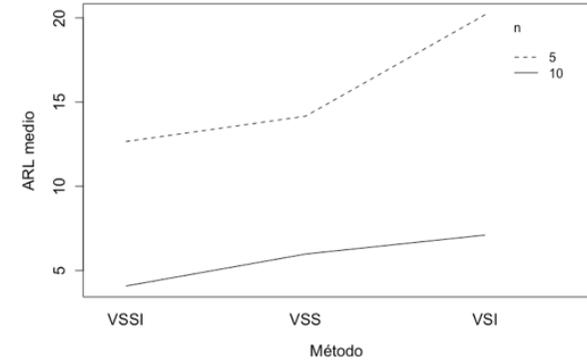
Figura 5.3: Gráfico de medias e intervalos HSD para los efectos principales del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VSSI, VSS y VSI propuestos por Khaw et al.



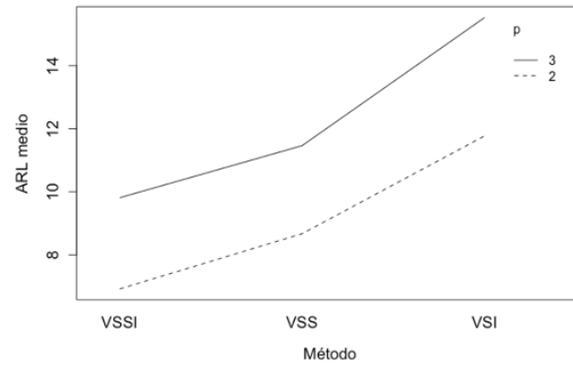
(a) Interacción Metodo-Gamma0



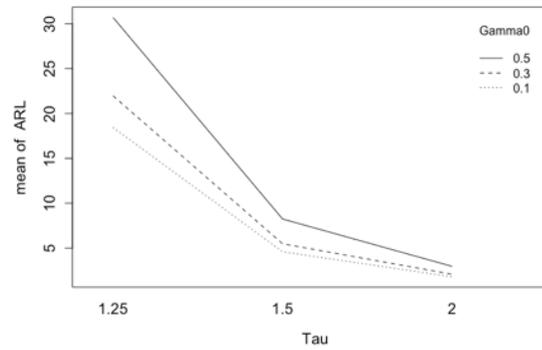
(b) Interacción Metodo-Tau



(c) Interacción Metodo-n

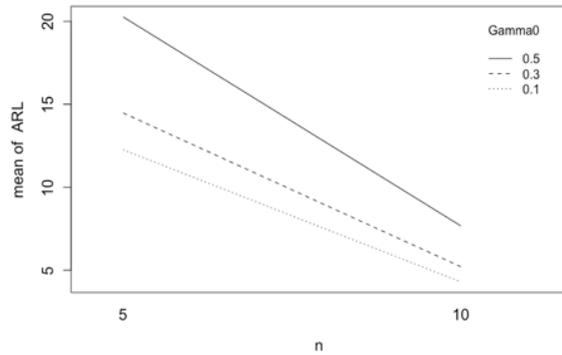


(d) Interacción Metodo-p

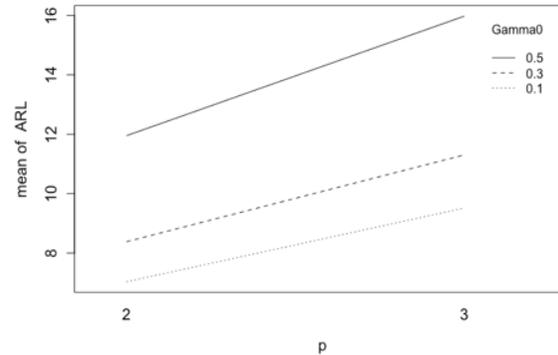


(e) Interacción Gamma0-Tau

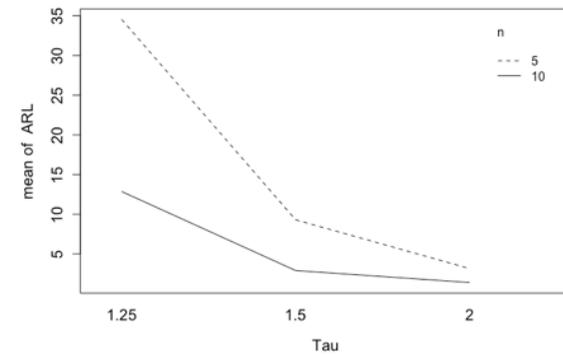
Figura 5.4: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VSSI, VSS y VSI propuestos por Khaw et al.
Continúa en la página siguiente.



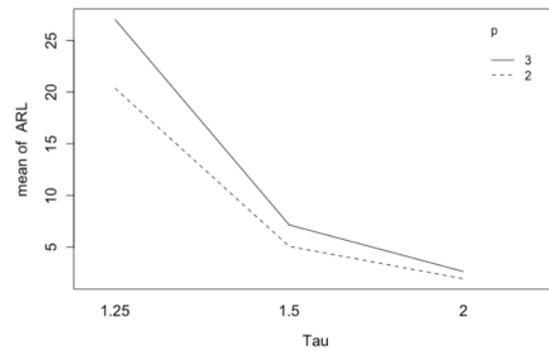
(f) Interacción Gamma0·n



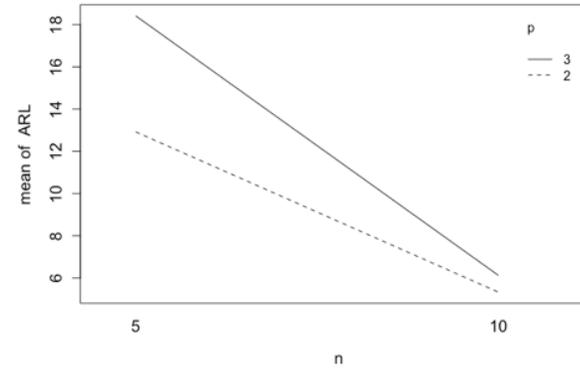
(g) Interacción Gamma0·p



(h) Interacción Tau·n



(i) Interacción Tau·p



(j) Interacción n·p

Figura 5.4: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VSSI, VSS y VSI propuestos por Khaw et al.(2018)

5.4 Métodos adaptativos frente al EWMA de Giner-Bosch et al. (2019)

Como se comentó en la subsección 4.2, se realizaría una comparativa de todos los gráficos de control de parámetros variables o adaptativos contra el ganador del primer grupo, de gráficos de control de parámetros fijos, siendo la propuesta de Giner-Bosch et al. (2019), con un gráfico EWMA el ganador, siendo estas comparativas las que se mostrarán en esta subsección.

Cabe recordar que la comparativa se realizará en pares, analizando $\% \Delta ARL$, el porcentaje de mejora de los gráficos adaptativos sobre el EWMA de Giner-Bosch, analizando los factores influyentes y las interacciones de orden dos. Entiéndase que, al resultar números negativos en los gráficos significará que el método a comparar mejora el rendimiento del EWMA reduciendo la ARL en ese porcentaje.

5.4.1 VSSI vs EWMA

Como se vio en la subsección 5.3, el ganador y representante de las propuestas de gráficos de control para abordar el MCV de Khaw et al. (2018), es el gráfico VSSI, en el cual el intervalo de muestras y el tamaño de estas son variables (explicación del gráfico en la subsección 3.5).

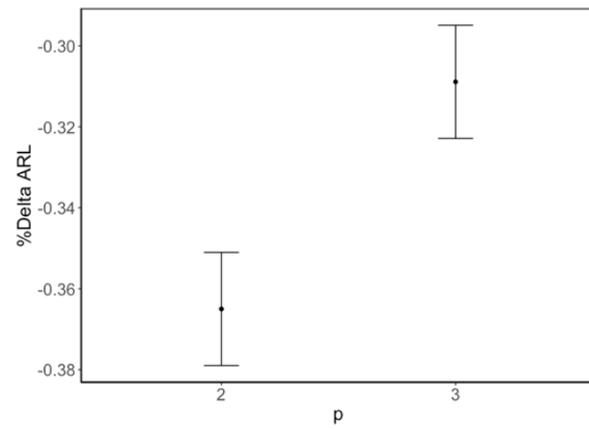
Los resultados del ANOVA se encuentran en la tabla A.3 del anexo A, la cual se realizó con un total de 36 registros que contienen las diferentes combinaciones de: $p \in \{2, 3\}$, $n \in \{5, 10\}$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.3, 0.5\}$ y $\tau \in \{1.25, 1.5, 2\}$, los cuales son los parámetros publicados y que coinciden entre los artículos considerados en este análisis; formando con ellos un diseño de experimentos ortogonal, donde la variable respuesta es $\% \Delta ARL$.

Con el ANOVA se evidencia que, los parámetros estadísticamente significativos con un 95% de error Tipo I son: p, n, γ_0 y τ ; además, de las interacciones de orden dos: $\text{Gamma0} \cdot \text{Tau}$, $\text{Gamma0} \cdot n$, $\text{Tau} \cdot n$, $\text{Tau} \cdot p$ y $n \cdot p$.

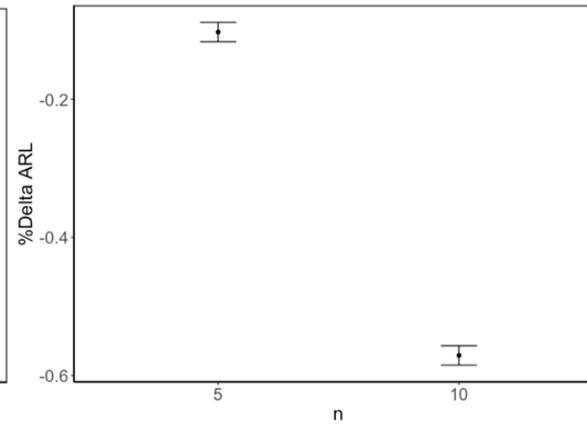
El gráfico de medias e intervalos HSD para el parámetro p que se muestra en la figura 5.5(a), nos deja en evidencia una vez más que a menor dimensión, se obtiene un mejor comportamiento, reduciendo con el gráfico VSSI significativamente la ARL en 36.5% con respecto al gráfico EWMA para una dimensión de dos. Además, se logra una reducción menor, del 30.8% de la ARL con dimensión de tres.

Por otra parte, para el parámetro de número de muestras n , véase figura 5.5(b), la mejoría de VSSI sobre EWMA, se acentúa con mayor efecto para un tamaño de muestra de 10, reduciendo la ARL media en 57.1%, siendo también, significativamente diferente a un tamaño $n = 5$ donde la mejoría es menor. En el gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro γ_0 de la figura 5.5(c) no se encuentran diferencias significativas entre los niveles 0.1 y 0.3, pero sí existe una diferencia significativa de estos contra el nivel 0.5, incrementando el porcentaje de mejora de ARL con los niveles más bajos.

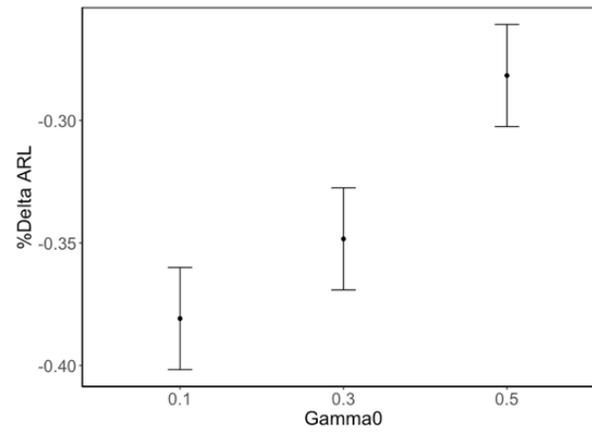
En cuanto a las interacciones significativas, solo cuando $\tau = 1.25$ el gráfico EWMA supera a VSSI, en todo el resto de los casos, *su rendimiento es menor*.



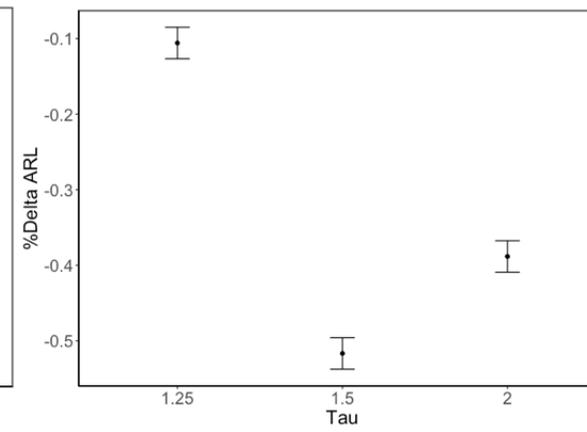
(a) Efecto del parámetro p



(b) Efecto del parámetro n

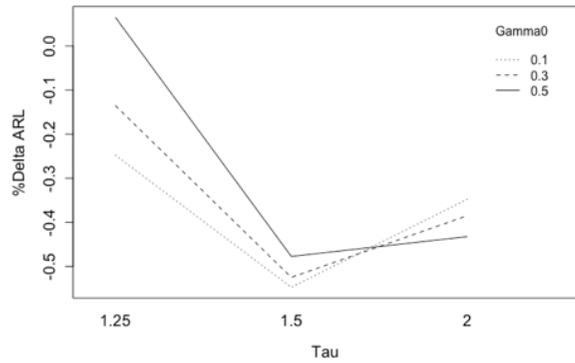


(c) Efecto del parámetro Gamma0

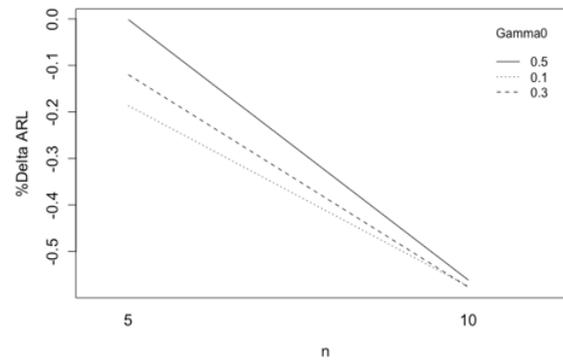


(d) Efecto del parámetro Tau

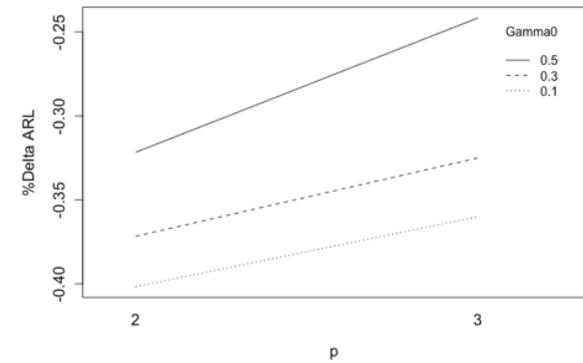
Figura 5.5: Gráfico de medias e intervalos HSD para los efectos principales del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VSSI vs EWMA, con respecto a %Delta ARL.



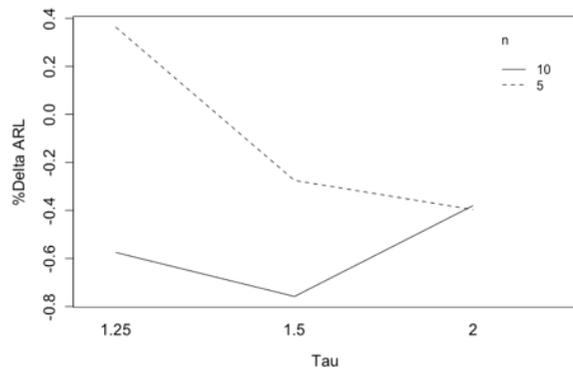
(a) Interacción Gamma0·Tau



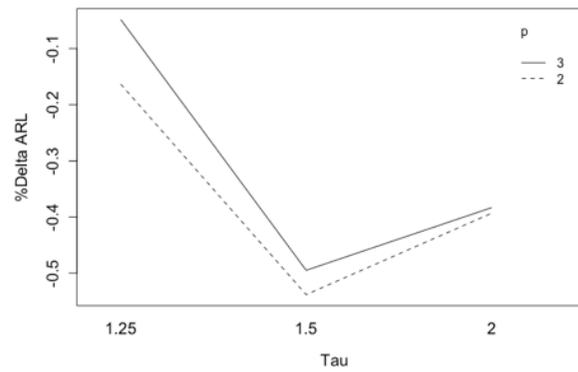
(b) Interacción Gamma0·n



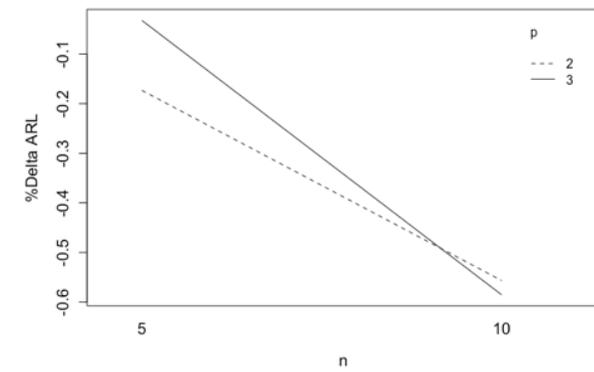
(c) Interacción Gamma0·p



(d) Interacción Tau·n



(e) Interacción Tau·p



(f) Interacción n·p

Figura 5.6: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VSSI vs EWMA.

5.4.2 Adaptive_EWMA vs EWMA

Los resultados del ANOVA se encuentran en la tabla A.4 del anexo A, la cual se realizó con un total de 32 registros que contienen las diferentes combinaciones de: $p \in \{2, 3\}$, $n \in \{5, 10\}$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.2\}$ y $\tau \in \{1.1, 1.2, 1.5, 2\}$, los cuales son los parámetros publicados y que coinciden entre los artículos considerados en este análisis; formando con ellos un diseño de experimentos ortogonal, donde la variable respuesta es $\% \Delta ARL$.

Con el ANOVA se evidencia que, los parámetros estadísticamente significativos con un 95% de error Tipo I son: p, n y τ ; además, de las interacciones de orden dos: $Tau \cdot n, Tau \cdot p$ y $n \cdot p$.

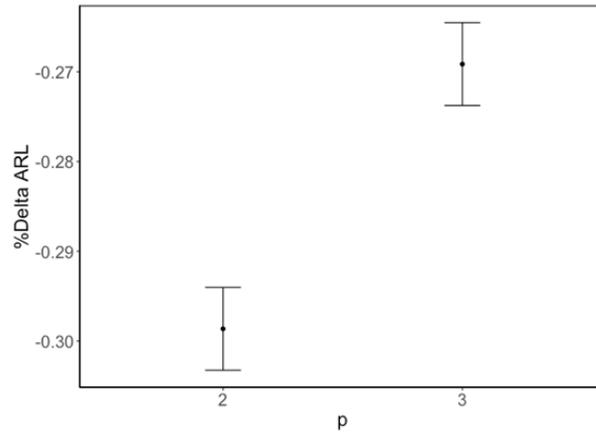
El gráfico de medias e intervalos HSD para el parámetro p que se muestra en la figura 5.7(a), nos deja en evidencia una vez más que a menor dimensión, se obtiene un mejor comportamiento, reduciendo con el gráfico Adaptive_EWMA significativamente la ARL en 29.86% con respecto al gráfico EWMA para una dimensión de dos. Además, se logra una reducción menor, del 26.91% de la ARL con dimensión de tres.

Por otra parte, para el parámetro de número de muestras n , véase figura 5.7(b), la mejoría del Adaptive_EWMA sobre EWMA, se acentúa con mayor efecto para un tamaño de muestra de 10, reduciendo la ARL media en 33.26%, siendo también, significativamente diferente a un tamaño $n = 5$ donde la mejoría es menor, 23.51%.

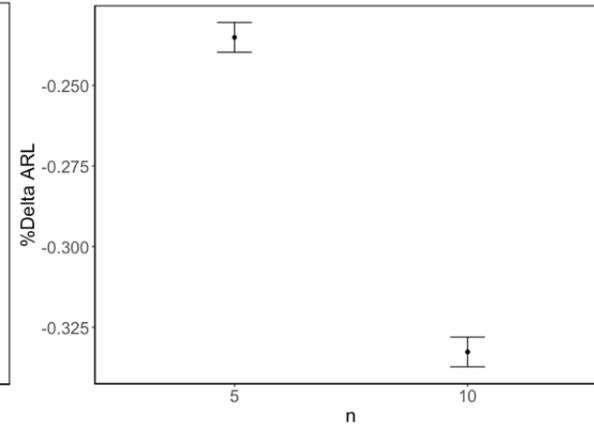
En el gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro γ_0 de la figura 5.7(c), no se encuentran diferencias significativas entre los niveles 0.1 y 0.2, aunque cualquiera de los dos representa una mejoría del Adaptive_EWMA sobre EWMA del 28%.

Para el parámetro τ , aunque en todos los niveles se obtiene un mejor rendimiento del Adaptive_EWMA sobre el EWMA, se presenta la mayor diferencia en el nivel $\tau = 1.5$ reduciendo la ARL media en 42.44%.

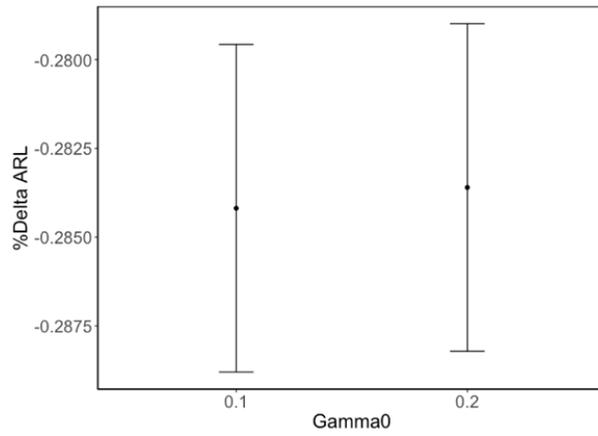
Para los gráficos de interacciones significativos (figuras (d), (e), (f)), el gráfico Adaptive_EWMA mejora al EWMA en todos los casos, exceptuando al caso en que $\tau = 1.1$ y $n = 5$, donde el gráfico propuesto por Giner-Bosch et al. (2019) mejora levemente al presentado por Haq y Khoo (2019).



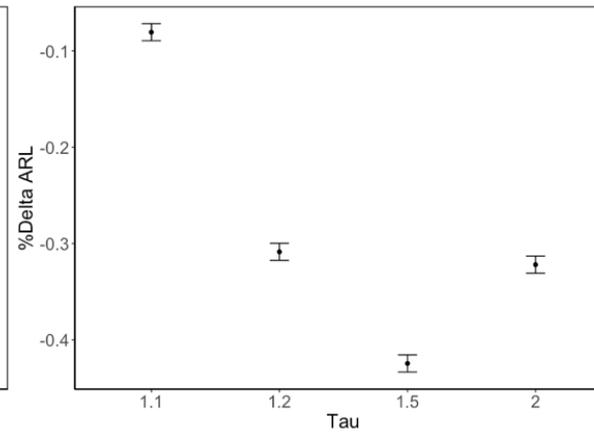
(a) Efecto del parámetro p



(b) Efecto del parámetro n

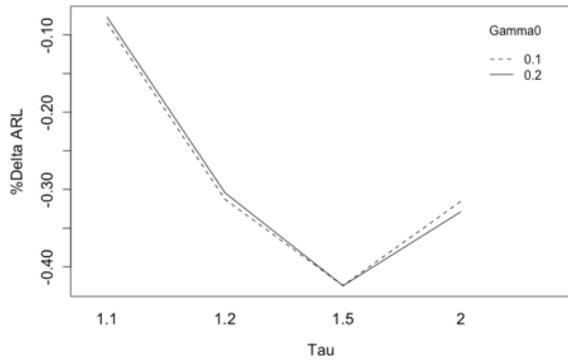


(c) Efecto del parámetro Gamma0

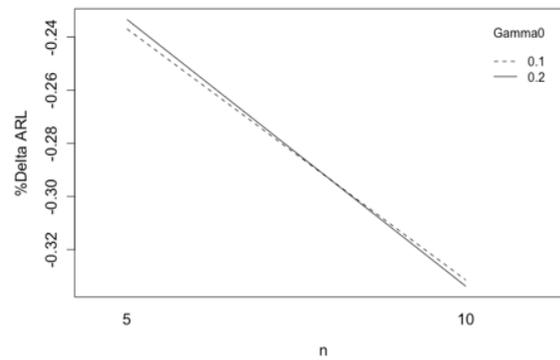


(d) Efecto del parámetro Tau

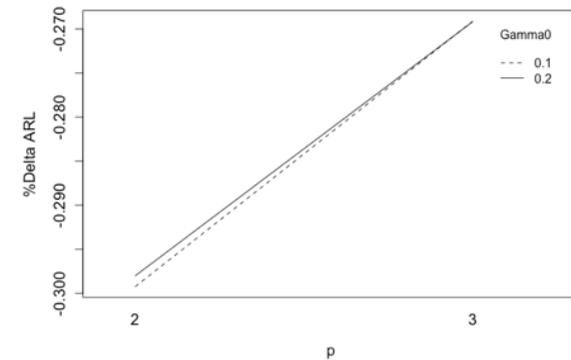
Figura 5.7: Gráfico de medias e intervalos HSD para los efectos principales del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: Adaptive_EWMA vs EWMA, con respecto a %Delta ARL.



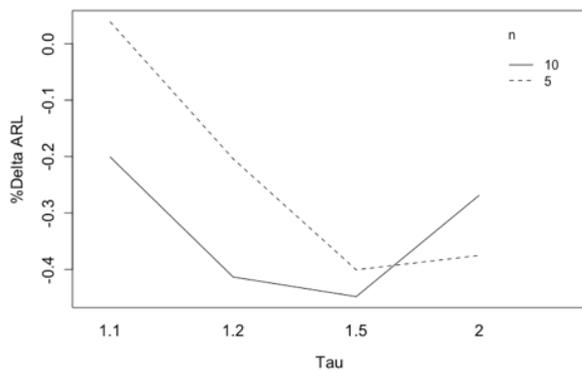
(a) Interacción $\Gamma_0 \cdot \tau$



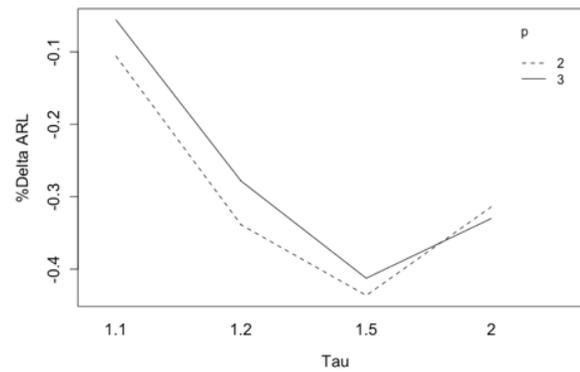
(b) Interacción $\Gamma_0 \cdot n$



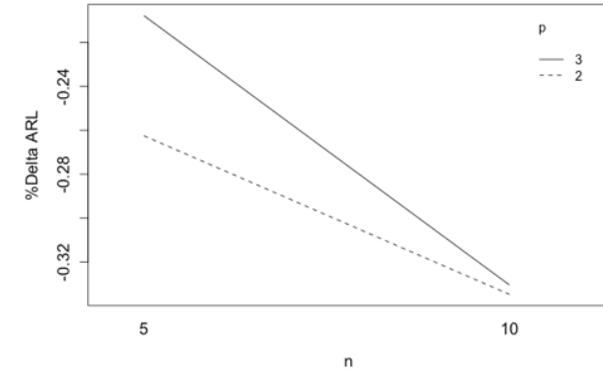
(c) Interacción $\Gamma_0 \cdot p$



(d) Interacción $\tau \cdot n$



(e) Interacción $\tau \cdot p$



(f) Interacción $n \cdot p$

Figura 5.8: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: Adaptive_EWMA vs EWMA.

5.4.3 VP vs EWMA

Los resultados del ANOVA se encuentran en la tabla A.5 del anexo A, la cual se realizó con un total de 54 registros que contienen las diferentes combinaciones de: $p \in \{2, 3, 4\}$, $n \in \{10, 15\}$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.3, 0.5\}$ y $\tau \in \{1.25, 1.5, 2\}$, los cuales son los parámetros publicados y que coinciden entre los artículos considerados en este análisis; formando con ellos un diseño de experimentos ortogonal, donde la variable respuesta es $\% \Delta ARL$.

Con el ANOVA se evidencia que, los parámetros estadísticamente significativos con un 95% de error Tipo I son: p, n, γ_0 y τ ; además, de las interacciones de orden dos: $\text{Gamma0} \cdot \text{Tau}$, $\text{Gamma0} \cdot n$, $\text{Tau} \cdot n$, $\text{Tau} \cdot p$ y $n \cdot p$.

El gráfico de medias e intervalos HSD para el parámetro p que se muestra en la figura 5.9(a), nos indica que, según los datos considerados en el estudio, a diferencia de los métodos anteriores, a menor dimensión no se obtiene un mejor comportamiento, en este caso con una dimensión de $p = 3$ se obtiene mejores resultados, reduciendo con el gráfico VP significativamente la ARL en 58.47% con respecto al gráfico EWMA, aunque con el resto de dimensiones analizadas, también se obtiene una menor mejoría.

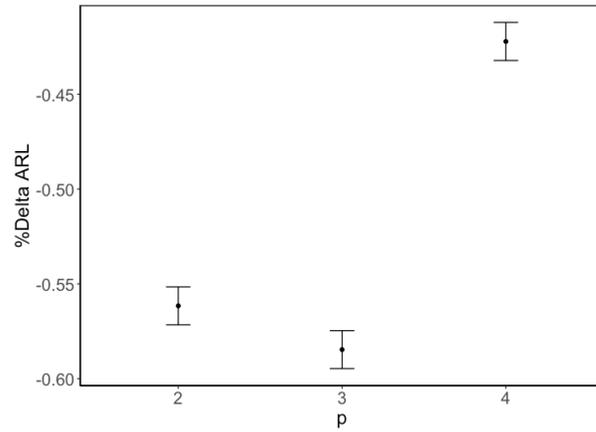
Por otra parte, para el parámetro de número de muestras n , véase figura 5.9(b), la mejoría de VP sobre EWMA, se acentúa con mayor efecto para un tamaño de muestra de 10, reduciendo la ARL media en 55.33%, siendo también, significativamente diferente a un tamaño $n = 15$ donde la mejoría es menor, algo contrario a lo hasta ahora visto con el resto de métodos, que obtenían un mejor rendimiento con mayor número de muestras.

En el gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro γ_0 de la figura 5.9(c) no se encuentran diferencias significativas entre los niveles 0.1 y 0.3, pero sí existe una diferencia significativa de estos contra el nivel 0.5, incrementando el porcentaje de mejora de ARL con el nivel más alto.

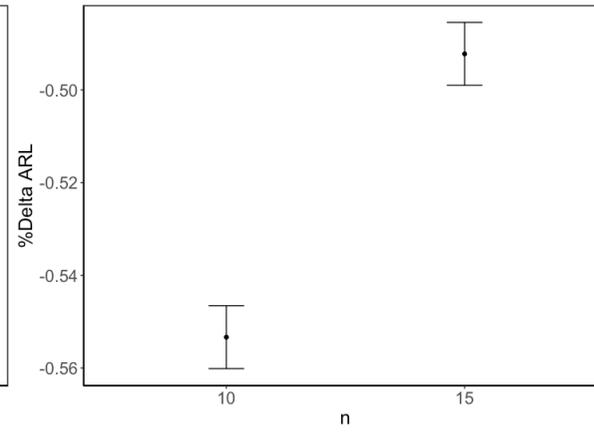
El gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro τ nos dice que, para los datos publicados, se obtiene un mejor rendimiento con el método VP con $\tau = 1.5$ reduciendo en 64.97% la ARL media con respecto al EWMA.

En los gráficos de interacciones significativos (figuras 5.10(a), (b), (d), (e), (f),) se puede apreciar que para todas las combinaciones siempre se obtiene una mejoría en la ARL media con el método VP con respecto al EWMA.

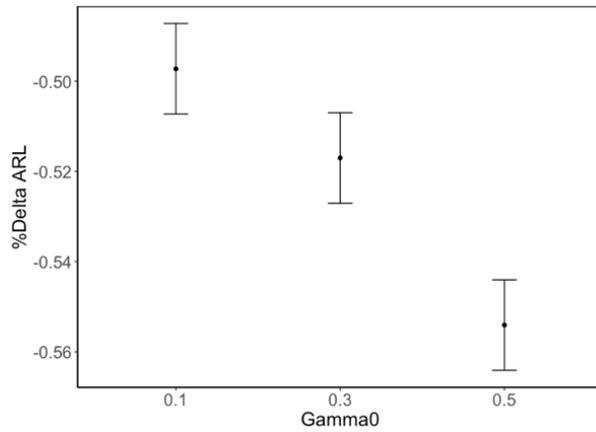
En conclusión, el método VP supera al EWMA, en todos los casos de los parámetros publicados en ambos artículos, mejorando significativamente el rendimiento del gráfico EWMA.



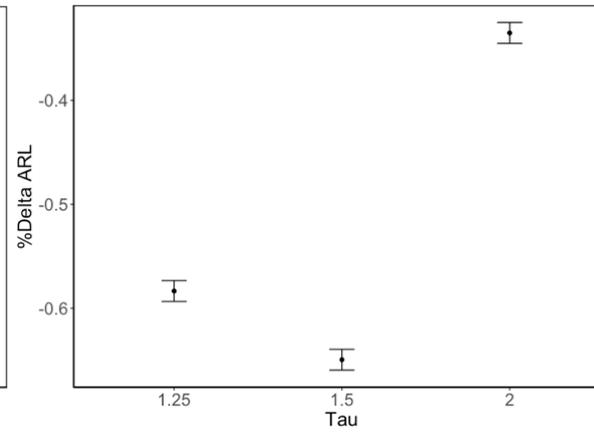
(a) Efecto del parámetro p



(b) Efecto del parámetro n

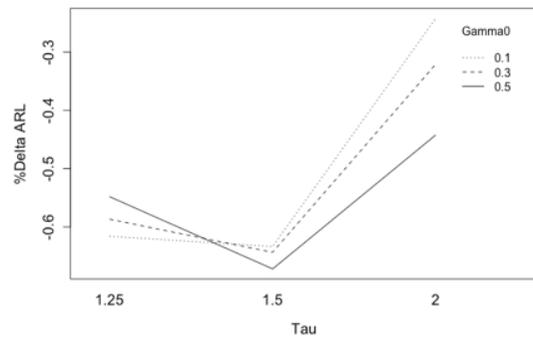


(c) Efecto del parámetro Gamma0

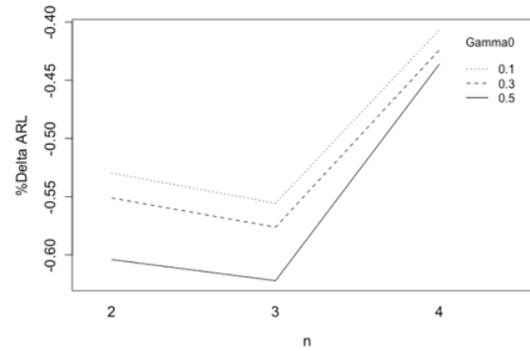


(d) Efecto del parámetro Tau

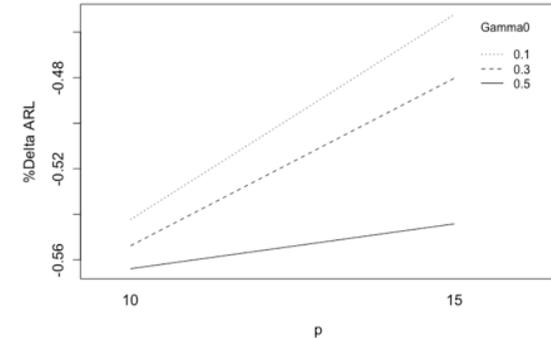
Figura 5.9: Gráfico de medias e intervalos HSD para los efectos principales del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VP vs EWMA, con respecto a %Delta ARL.



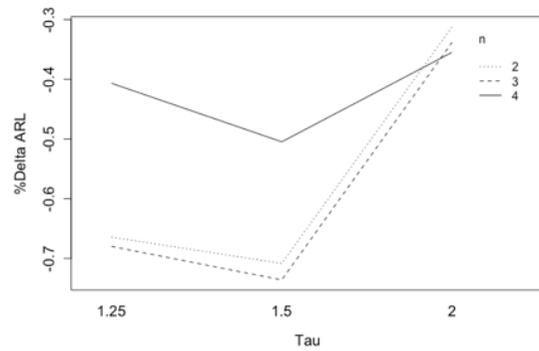
(a) Interacción $\Gamma_0 \cdot \tau$



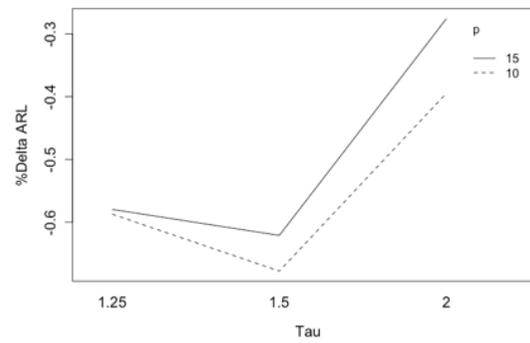
(b) Interacción $\Gamma_0 \cdot n$



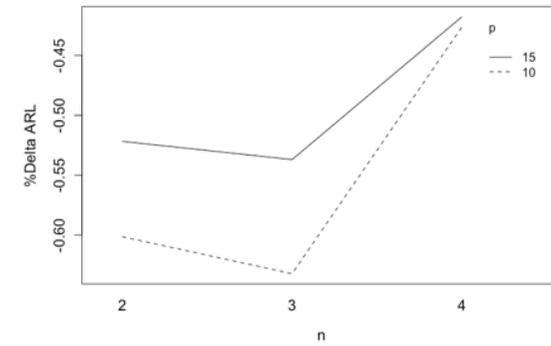
(c) Interacción $\Gamma_0 \cdot p$



(d) Interacción $\tau \cdot n$



(e) Interacción $\tau \cdot p$



(f) Interacción $n \cdot p$

Figura 5.10: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VP vs EWMA.

5.4.4 VSI-SH vs EWMA

Los resultados del ANOVA se encuentran en la tabla A.6 del anexo A, la cual se realizó con un total de 54 registros que contienen las diferentes combinaciones de: $p \in \{2, 3\}$, $n \in \{5, 10\}$, $\gamma_0 \in \{0.1, 0.3, 0.5\}$ y $\tau \in \{1.1, 1.25, 1.5\}$, los cuales son los parámetros publicados y que coinciden entre los artículos considerados en este análisis; formando con ellos un diseño de experimentos ortogonal, donde la variable respuesta es $\% \Delta ARL$.

Con el ANOVA se evidencia que, los parámetros estadísticamente significativos con un 95% de error Tipo I son: p, n, γ_0 y τ ; además, de las interacciones de orden dos: $Tau \cdot n, Tau \cdot p$.

El gráfico de medias e intervalos HSD para el parámetro p que se muestra en la figura 5.11(a) nos indica que, según los datos considerados en el estudio, a mayor dimensión se obtiene un mejor comportamiento, en este caso con una dimensión de $p = 3$ se obtiene mejores resultados, reduciendo con el gráfico EWMA significativamente la ARL en 41.83% con respecto al gráfico VSI-SH, además, se logra una reducción menor, del 34.72% de la ARL con dimensión de dos.

Por otra parte, para el parámetro de número de muestras n , véase figura 5.11(b), la mejoría de EWMA sobre VP, se acentúa con mayor efecto para un tamaño de muestra de 5, reduciendo la ARL media en 54.83%, siendo también, significativamente diferente a un tamaño $n = 10$ donde la mejoría es menor, 21.72%.

En el gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro γ_0 de la figura 5.11(c) se encuentran diferencias significativas entre todos los niveles, incrementando el porcentaje de mejora de ARL del EWMA con respecto a VSI-SH con el nivel más alto.

El gráfico de medias e intervalos HSD del parámetro τ nos dice que, para los datos publicados, se obtiene un mejor rendimiento con el método EWMA con $\tau = 1.1$ reduciendo en gran medida la ARL media en 116.08% con respecto al VSI-SH.

En los gráficos de interacciones significativos (figuras 5.12(d) y(e)) se puede apreciar que solo para las combinaciones que contienen $\tau = 1.5$ se obtiene una leve mejoría en la ARL media con el método VSI-SH con respecto al EWMA, en el resto de los casos el EWMA es el vencedor.

En conclusión, el gráfico EWMA tiene un mejor rendimiento en casi todos los casos con respecto al VSI-SH.

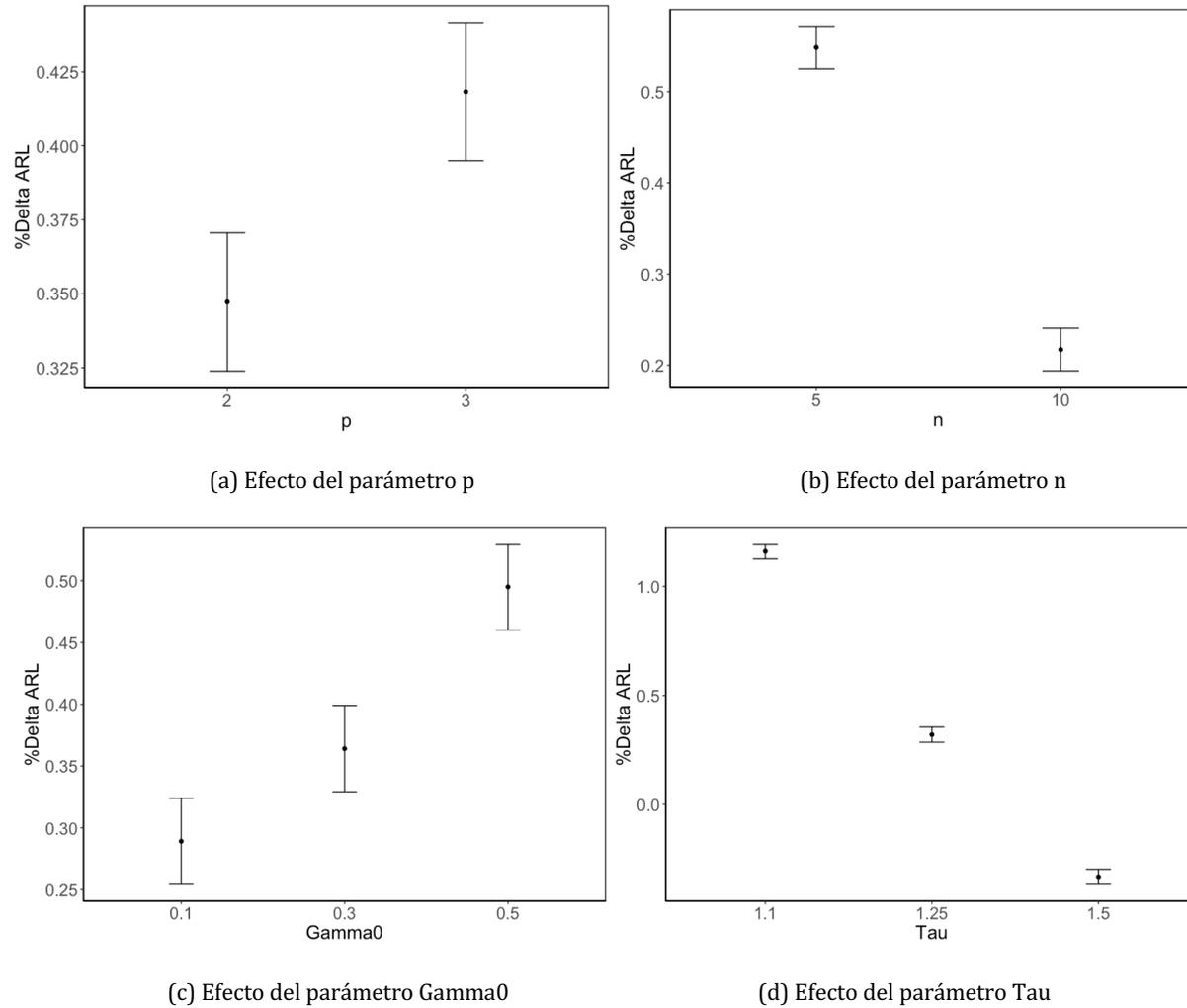
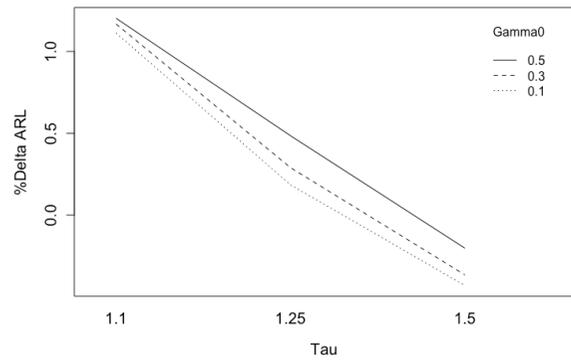
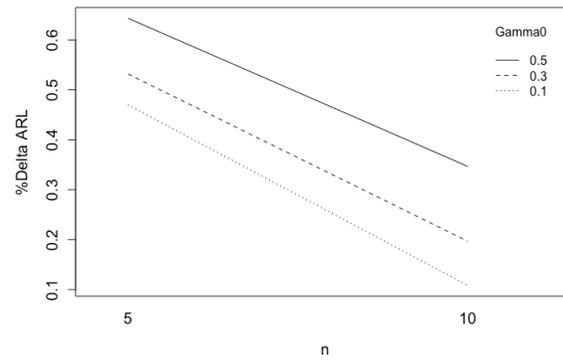


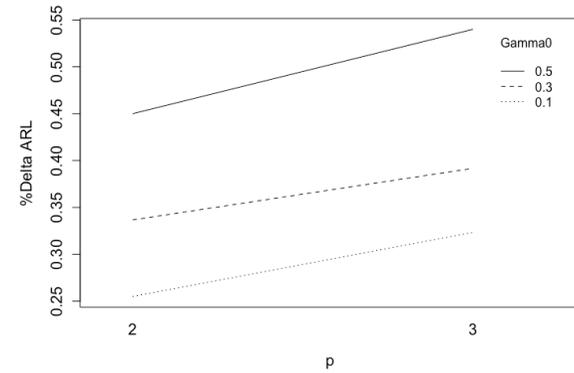
Figura 5.11: Gráfico de medias e intervalos HSD para los efectos principales del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VSI-SH vs EWMA, con respecto a %Delta ARL.



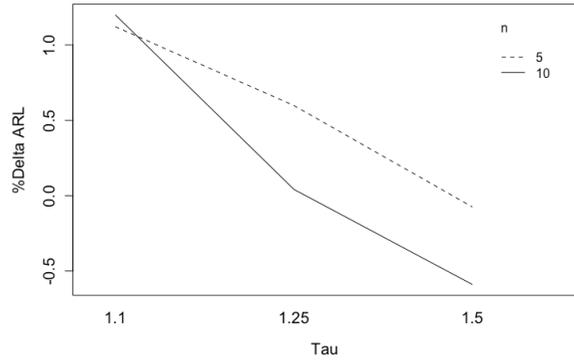
(a) Interacción $\text{Gamma0} \cdot \text{Tau}$



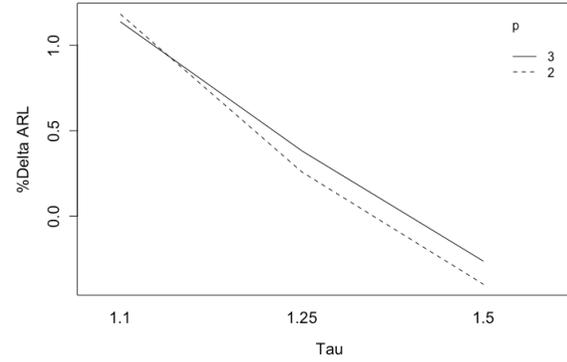
(b) Interacción $\text{Gamma0} \cdot n$



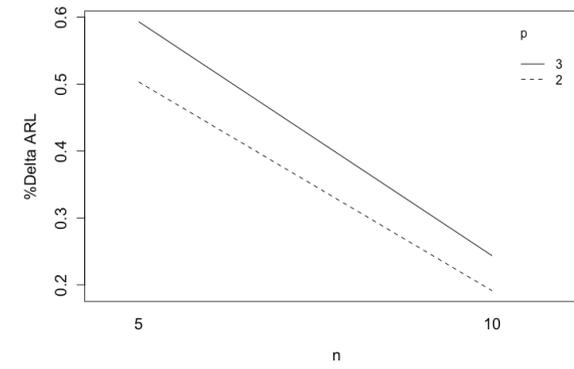
(c) Interacción $\text{Gamma0} \cdot p$



(d) Interacción $\text{Tau} \cdot n$



(e) Interacción $\text{Tau} \cdot p$



(f) Interacción $n \cdot p$

Figura 5.12: Gráfico de medias para las interacciones de segundo orden del ANOVA correspondiente a la comparativa de los métodos: VSI-SH vs EWMA.

6. Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado una revisión bibliográfica de los gráficos de control para el MCV que, hasta donde sabemos, son los existentes a fecha de agosto de 2019.

Se encontraron 11 artículos los cuales se estudió su funcionamiento y la configuración de cada uno de ellos, siendo descritos todos detalladamente en el capítulo 3, cumpliendo así uno de los objetivos específicos planteados para el presente trabajo de fin de máster.

De los 11 artículos que contenían, entre todos, 13 propuestas de gráficos de control se quedaron fuera del estudio dos, debido a que no eran propuestas comparables al ser: el primero, un estudio de fase I; y el segundo, un gráfico que obligaba a dar una alarma en corto tiempo debido a la suposición de producción finita.

De los 11 gráficos de control restantes se dividió en dos grupos: gráficos de control de parámetros fijos, cinco del total; y gráficos de control de parámetros adaptativos o variables, los seis restantes; se realizó una primera comparativa entre todos los del primer grupo entre los parámetros publicados por los autores, y se eligió un ganador del primer grupo, el gráfico EWMA de Giner-Bosch et al. (2019).

Para el segundo grupo al no haber muchos parámetros en común entre ellos, se realizaron comparativas en parejas analizando el porcentaje de mejora de la ARL del gráfico EWMA, por ser el 'ganador' o representante de los gráficos de control para el MCV con parámetros fijos.

Se saca de conclusión de todas las comparativas analizadas que: A menor cantidad de dimensiones o cantidad de variables, los gráficos de control analizados suelen tener un mejor desempeño, algo que deja claro que cuando se pretenda monitorizar muchas variables no sea la mejor opción para el monitoreo.

De manera previsible, los parámetros como el tamaño de muestra n , y la variación τ ; resultan ser altamente significativos en el rendimiento de todos los gráficos, siendo preferible un tamaño de muestra mayor para un mejor desempeño de los gráficos, y un τ elevado algo más sencillo de detectar por cualquier método.

En definitiva, por los resultados de los datos analizados, si se tuviera que utilizar un gráfico de control para el MCV de parámetros fijos, la mejor opción sería el gráfico EWMA de Giner-Bosch et al. (2019). En cambio, de tener la libertad de poder elegir y utilizar un gráfico de parámetros adaptativos, siempre será significativamente mejor opción el gráfico VP propuesto por Chew et al. (2019), o en menor medida, los gráficos VSSI de Khaw et al. (2018) o el EWMA adaptativo de Haq y Khoo (2019). Cabe mencionar que de los gráficos de parámetros adaptativos analizados el VSI-SH propuesto por Nguyen et al. (2019b), para los parámetros contemplados, siempre es peor que el EWMA. Con este análisis, se da por cumplido el segundo objetivo específico de comparar los gráficos de control para el MCV actuales.

Bibliografía

- Abbasi SA, Adegoke NA (2018). Multivariate coefficient of variation control charts in phase I of SPC. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 99(5–8):1903–1916.
- Aerts S, Haesbroeck G, Ruwet C (2015). Multivariate coefficients of variation: Comparison and influence functions. *Journal of Multivariate Analysis*, 142:183–198.
- Albert A, Zhang L (2010). A novel definition of the multivariate coefficient of variation. *Biometrical Journal*, 52(5):667–675.
- Alfaro-Cortés E, Alfaro Navarro J, Mondéjar-Jiménez J, Vargas-Vargas M (2004). *Control estadístico de la calidad: una breve reseña histórica*. Universidad de Castilla-La Mancha.
- Amdouni A, Castagliola P, Taleb H, Celano G (2015). Monitoring the coefficient of variation using a variable sample size control chart in short production runs. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 81(1-4):1–14.
- Amdouni A, Castagliola P, Taleb H, Celano G (2017). A variable sampling interval Shewhart control chart for monitoring the coefficient of variation in short production runs. *International Journal of Production Research*, 55(19):5521–5536.
- Aparisi F, de Luna MA (2009). Synthetic \bar{X} control charts optimized for in-control and out-of-control regions. *Computers and Operations Research*, 36(12):3204–3214.
- Castagliola P, Achouri A, Taleb H, Celano G, Psarakis S (2013a). Monitoring the coefficient of variation using a variable sampling interval control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 29(8):1135–1149.
- Castagliola P, Achouri A, Taleb H, Celano G, Psarakis S (2013b). Monitoring the coefficient of variation using a variable sampling interval control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 29:1135–1149.
- Castagliola P, Achouri A, Taleb H, Celano G, Psarakis S (2015). Monitoring the coefficient of variation using a variable sample size control chart. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 80, 1561–1576.
- Champ CW, Rigdon SE (1997). An analysis of the run sum control chart. *Journal of Quality Technology*, 29(4):407–417.
- Chew XY, Khoo MBC, Khaw KW, Yeong WC, Chong ZL (2019). A proposed variable parameter control chart for monitoring the multivariate coefficient of variation. *Quality and Reliability Engineering International*, Early view.
- Chung KJ (1991). A simplified procedure for the economic design of control charts: a unified approach. *Engineering Optimization*, 17(4):313–320.
- Costa AFB (1993). X charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31(4):408-416.

- Ferrer-Riquelme AJ (2009). Statistical Control of Measures and Processes. En: Brown SD, Tauler Ferré R, Walczak B (eds.), *Comprehensive Chemometrics. Chemical and Biochemical Data Analysis*, cap. 1.04, págs. 97–126. Elsevier, Amsterdam.
- Fisher RA (1928). The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 121(788):654–673.
- Forbes C, Evans M, Hastings N, Peacock B (2011). *Statistical Distributions*. 4.^a ed. Wiley and Sons, Hoboken, NJ.
- García-Díaz JC, Aparisi F (2005). Economic design of EWMA control charts using regions of maximum and minimum ARL. *IIE Transactions*, 37(11):1011–1021.
- Giner-Bosch V (2014). *Precontrol óptimo. Caracterización, análisis y técnicas de resolución*. Tesis doctoral. Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad, Universitat Politècnica de València, València.
- Giner-Bosch V, Tran KP, Castagliola P, Khoo MBC (2019). An EWMA control chart for the multivariate coefficient of variation. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(6):1515–1541.
- Giri NC (2003). *Multivariate Statistical Analysis*. 2.^a ed. CRC Press, New York.
- Guh RS, Tannock JDT, O'Brien C (1999). IntelliSPC: a hybrid intelligent tool for on-line economical statistical process control. *Expert Systems with Applications*, 17(3):195–212.
- Haq A, Khoo MBC (2019). New adaptive EWMA control charts for monitoring univariate and multivariate coefficient of variation. *Computers and Industrial Engineering*, 131:28–40.
- Hunter JS (1986). The exponentially weighted moving average. *Journal of Quality Technology*, 18(4):203–210.
- Jaehn AH (1987). Zone control charts—SPC made easy. *Quality*, 26:51–53.
- Jaehn AH (1991). The Zone Control Chart. *Quality Progress*, 24(7):65–68.
- Johnson NL, Kotz S, Balakrishnan N (1995). *Continuous Univariate Distributions*. 2.^a ed., vol. 2. Wiley and Sons, New York, NY.
- Juran JM, Gryna FM (eds.) (1993). *Manual de Control de Calidad*, volumen 2. 4.^a ed. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid.
- Kang C, Lee M, Seon Y, Hawkins DM (2007). A control chart for the coefficient of variation. *Journal of Quality Technology*. 39(2):151–158.
- Kethler RB, Peters MH (2004). Extending economic design of p charts to handle user specified constraints using a genetic algorithm. *IEEE Transactions*, 36(9):855–864.
- Khatun M, Khoo MBC, Lee MH, Castagliola P (2019). One-sided control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation in short production runs. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(6):1712–1728.

- Khaw KW, Chew X, Yeong WC, Lim SL (2019). Optimal design of the synthetic control chart for monitoring the multivariate coefficient of variation. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 186:33–40.
- Khaw KW, Khoo MBC, Castagliola P, Rahim MA (2018). New adaptive control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation. *Computers and Industrial Engineering*, 126:595–610.
- Lim AJX, Khoo MBC, Teoh WL, Haq A (2017). Run sum chart for monitoring multivariate coefficient of variation. *Computers and Industrial Engineering*, 109:84–95.
- Lucas JM, Saccucci MS (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*, 32(1):1–29.
- MacGregor J, Kourti T (1995). Statistical process control of multivariate processes. *Control Engineering Practice*. 3(3):403–414.
- Montgomery DC (2012). *Introduction to Statistical Quality Control*. 7.^a ed. Wiley and Sons, Hoboken, NJ.
- Nguyen QT, Tran KP, Castagliola P, Celano G, Lardjane S (2019a). One-sided synthetic control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 89(10):1841–1862.
- Nguyen QT, Tran KP, Heuchenne HL, Nguyen TH, Nguyen HD (2019b). Variable sampling interval Shewhart control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Early view.
- Paoletta MS (2007). *Intermediate Probability: A Computational Approach*. Wiley, Chichester.
- Patnaik PB (1949). The Non-Central χ^2 and F Distribution and their Applications. *Biometrika*, 36 (1/2):202–232.
- Reyment R (1960). Studies on Nigerian upper Cretaceous and lower tertiary ostracoda. Part I : Senonian and maestrichtian ostracoda. *Stockholm Contributions in Geology*, 7:1–238.
- Reynolds JH (1971). The run sum control chart procedure. *Journal of Quality Technology*, 3(1):23–27.
- Ridge E, Kudenko D (2010). Tuning an algorithm using design of experiments. En: Bartz-Beielstein T, Chiarandini M, Paquete L, Preuss M (eds.), *Experimental Methods for the Analysis of Optimization Algorithms*, cap. 11, págs. 265–286. Springer, New York.
- Roberts SW (1959). Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics*, 1(3):239–250.
- Roberts SW (1966). A Comparison of Some Control Chart Procedures. *Technometrics*, 8(3):411–430.
- Romero Villafranca R, Zúnica Ramajo LR (2008). *Apuntes de control estadístico de calidad*. Editorial UPV, Valencia.
- Sharpe W (1994). The Sharpe ratio. *Journal of portfolio management*, 21(1):49–58.

- Shewhart WA, Deming WE (1986). *Statistical method from the viewpoint of quality control*. Dover Publications, New York, NY.
- Tang PC (1938). The power function of the analysis of variance tests, with tables and illustrations of their use. *Statistical Research Memoirs*, 2:126–149.
- Teoh WL, Khoo MBC, Castagliola P, Yeong WC, Teh S (2017). Run-sum control charts for monitoring the coefficient of variation. *European Journal of Operational Research*. 257(1):144–158.
- Tukey JW (1949). Comparing Individual Means in the Analysis of Variance. *Biometrics*, 5(2):99–114.
- Van Valen L (1974). Multivariate structural statistics in natural history. *Journal of Theoretical Biology*, 45(1):235–247.
- Voinov V, Nikulin M (1996). *Unbiased Estimators and Their Applications. Volume 2: Multivariate Case*. 1.^a ed., Mathematics and Its Applications, vol. 362. Springer, Dordrecht.
- Walck C (2007). Handbook on statistical distributions for experimentalists. Tech. Rep. SUFPFY/96-01, Stockholm, Particle Physics Group, Fysikum, University of Stockholm. <http://inspirehep.net/record/1389910>.
- Wijsman, RA (1957). Random Orthogonal Transformations and their use in Some Classical Distribution Problems in Multivariate Analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(2):415–423.
- Yeong WC, Khoo MBC, Teoh WL, Castagliola P (2016). A Control Chart for the Multivariate Coefficient of Variation. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(3):1213–1225.
- Yeong WC, Khoo MBC, Lim SL, Lee MH (2017a). A direct procedure for monitoring the coefficient of variation using a variable sample size scheme. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 46:4210–4225.
- Yeong W, Khoo MBC, Tham L, Teoh W, Rahim M (2017b). Monitoring the coefficient of variation using a variable sampling interval EWMA chart. *Journal of Quality Technology*, 49(4):380–401.
- You H, Khoo M.B, Castagliola P, Ou Y (2015). Side sensitive group runs x chart with estimated process parameters. *Computational Statistics*, 30(4):1245–1278.
- Young CM (2010). *Modeling and optimization of container inspection systems*. Phd thesis, The State University of New Jersey. <http://hdl.rutgers.edu/1782.1/rucore10001600001.ETD.000056869>.
- Zorriassatine F, Tannock JDT (1998). A review of neural networks for statistical process control. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 9(3):209–224.
- Zhou M, Zhao C (2002). An optimization model and multiple matching heuristics for quality planning in manufacturing systems. *Computers and Industrial Engineering*, 42(1):91–101.

Anexos

Fuente de variabilidad	g.l.	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Cociente F	p-valor
Efectos principales					
Método	4	20416	5104	1010.511	0.0000
p	1	1305	1305	258.444	0.0000
n	1	17994	17994	3562.454	0.0000
Gamma0	2	3188	1594	315.575	0.0000
Tau	2	161474	80737	15984.28	0.0000
Interacciones					
Metodo·Gamma0	8	307	38	7.592	0.0000
Metodo·Tau	8	15618	1952	386.503	0.0000
Metodo·n	4	850	213	42.088	0.0000
Metodo·p	4	53	13	2.627	0.0374
Gamma0·Tau	4	1164	291	57.588	0.0000
Gamma0·n	2	94	47	9.281	0.0002
Gamma0·p	2	9	5	0.911	0.4047
Tau·n	2	7853	3926	777.322	0.0000
Tau·p	2	478	239	47.323	0.0000
n·p	1	480	480	95.018	0.0000
Residuos	132	667	5		
Total	179	231950			

Tabla A.1: ANOVA correspondiente a la comparación de métodos de parámetros fijos (no adaptativos), de la subsección 5.2.

Fuente de variabilidad	g.l.	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Cociente F	p-valor
Efectos principales					
Método	2	523	261	90.946	0.0000
p	1	267	267	92.84	0.0000
n	1	2671	2671	929.193	0.0000
Gamma0	2	622	311	108.19	0.0000
Tau	2	9398	4699	1634.628	0.0000
Interacciones					
Metodo.Gamma0	4	18	5	1.593	0.1850
Metodo.Tau	4	441	110	38.325	0.0000
Metodo.n	2	133	67	23.207	0.0000
Metodo.p	2	5	3	0.872	0.4220
Gamma0.Tau	4	430	107	37.355	0.0000
Gamma0.n	2	103	52	17.921	0.0000
Gamma0.p	2	11	6	1.975	0.1460
Tau.n	2	1955	977	339.993	0.0000
Tau.p	2	175	88	30.499	0.0000
n.p	1	149	149	51.946	0.0000
Residuos	74	213	3		
Total	107	17114			

Tabla A.2: ANOVA correspondiente a la comparación de métodos: VSSI, VSS y VSI propuestos por Khaw et al. (2018), de la subsección 5.3.

Fuente de variabilidad	g.l.	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Cociente F	p-valor
Efectos principales					
p	1	0.0283	0.0283	18.103	0.0006
n	1	1.974	1.974	1261.134	0.0000
Gamma0	2	0.0613	0.0307	19.594	0.0000
Tau	2	1.0602	0.5301	338.674	0.0000
Interacciones					
Gamma0·Tau	4	0.1638	0.041	26.163	0.0000
Gamma0·n	2	0.0448	0.0224	14.316	0.0003
Gamma0·p	2	0.0026	0.0013	0.832	0.4530
Tau·n	2	1.369	0.6845	437.319	0.0000
Tau·p	2	0.0173	0.0086	5.517	0.0151
n·p	1	0.065	0.065	41.542	0.0000
Residuos	74	213	3		
Total	93	217.7863			

Tabla A.3: ANOVA correspondiente a la comparación de métodos: VSSI vs EWMA, de la subsección 5.4.1.

Fuente de variabilidad	g.l.	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Cociente F	p-valor
Efectos principales					
p	1	0.007	0.00696	47.642	0.0000
n	1	0.0761	0.07607	520.729	0.0000
Gamma0	1	0	0	0.019	0.8933
Tau	3	0.5048	0.16826	1151.88	0.0000
Interacciones					
Gamma0·Tau	3	0.0006	0.00021	1.421	0.2814
Gamma0·n	1	0.0001	0.00007	0.484	0.4990
Gamma0·p	1	0	0	0.023	0.8829
Tau·n	3	0.1539	0.0513	351.21	0.0000
Tau·p	3	0.007	0.00232	15.898	0.0001
n·p	1	0.0051	0.0051	34.936	0.0001
Residuos	13	0.0019	0.00015		
Total	31	0.7565			

Tabla A.4: ANOVA correspondiente a la comparación de métodos: Adaptive_EWMA vs EWMA, de la subsección 5.4.2.

Fuente de variabilidad	g.l.	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Cociente F	p-valor
Efectos principales					
p	2	0.2785	0.1392	235.44	0.0000
n	1	0.0504	0.0504	85.301	0.0000
Gamma0	2	0.0299	0.015	25.304	0.0000
Tau	2	0.9896	0.4948	836.677	0.0000
Interacciones					
Gamma0.Tau	4	0.1105	0.0276	46.715	0.0000
Gamma0.n	2	0.0122	0.0061	10.316	0.0004
Gamma0.p	4	0.0042	0.0011	1.779	0.1610
Tau.n	2	0.028	0.014	23.676	0.0000
Tau.p	4	0.2007	0.0502	84.852	0.0000
n.p	2	0.0192	0.0096	16.224	0.0000
Residuos	28	0.0166	0.0006		
Total	53	1.7398			

Tabla A.5: ANOVA correspondiente a la comparación de métodos: VP vs EWMA, de la subsección 5.4.3.

Fuente de variabilidad	g.l.	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Cociente F	p-valor
Efectos principales					
p	1	0.046	0.046	10.401	0.0053
n	1	0.987	0.987	225.498	0.0000
Gamma0	2	0.26	0.130	29.76	0.0000
Tau	2	13.451	6.726	1537.037	0.0000
Interacciones					
Gamma0·Tau	4	0.051	0.013	2.9300	0.0540
Gamma0·n	2	0.006	0.003	0.7320	0.4964
Gamma0·p	2	0.002	0.001	0.2140	0.8097
Tau·n	2	0.757	0.379	86.501	0.0000
Tau·p	2	0.061	0.030	6.9560	0.0067
n·p	1	0.003	0.003	0.7340	0.4043
Residuos	16	0.07	0.004		
Total	35	15.694			

Tabla A.6: ANOVA correspondiente a la comparación de métodos: VSI-SH vs EWMA, de la subsección 5.4.4.