UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Trabajo Fin de Máster

Sobre la inversa generalizada core y algunos resultados relacionados

Presentado por:

Valentina Orquera

Directores:

Néstor Thome & David Ferreyra

Valencia, Septiembre de 2019

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis directores Néstor y David, por la paciencia que me han tenido este último tiempo, el esfuerzo que han realizado para poder presentar este trabajo y apoyarme en todo momento. Sólo tengo palabras de agradecimiento para ustedes. Gracias!!!

Quiero agradecer a mi familia incondicional que siempre me apoyó para poder concluir mis estudios, por el aguante y sobre todo por comprender las ausencias. A mi gran compañera, mi mamá María José. Mi segunda mamá, mi nona Renee. Mi pilar fundamental, mi pareja Diego. Les agradezco de corazón todo lo que hacen por mi. Gracias!!!

Finalmente quiero agradecer a la Universidad Nacional de Río Cuarto, que me permitió viajar para poder realizar la defensa de este trabajo de forma presencial. Como así también, a la Universitat Politècnica de València por permitirme realizar mis estudios a distancia, de otra forma este trabajo no hubiese sido posible.

Resumen

El Análisis Matricial constituye un área muy importante de la Matemática Aplicada y es una herramienta fundamental para el desarrollo de muchas aplicaciones de distintas ramas de la ciencia y la tecnología. Algunos de los problemas requieren de la solución de ecuaciones matriciales, en los cuales es necesario el cálculo de matrices inversas. Sin embargo, como no toda matriz es invertible (o incluso se trata de un problema sobre matrices rectangulares), la utilización de diferentes inversas generalizadas permite abordarlos de manera satisfactoria.

En esta última década han surgido nuevas nociones de inversas, una de ellas es la *inversa core*. En este trabajo se presentan las definiciones y algunas de las propiedades más relevantes de las inversas clásicas, como son la inversa de Moore-Penrose y la inversa de grupo, para luego poder introducir la definición de la *inversa core* y demostrar distintas propiedades, caracterizaciones y representaciones de la misma. Además, se estudia la descomposición de Hartwig-Spindelböck para las inversas anteriormente mencionadas puesto que dicha descomposición constituye una importante herramienta que permite realizar muchas de las demostraciones de los principales resultados de este trabajo. Finalmente, se proporcionan algunas aplicaciones que muestran el interés del estudio de la *inversa core*.

Abstract

Matrix Analysis is a very important area of Applied Mathematics and it is an essential tool for the development of many applications of different branches of science and technology. Some problems in this area require to solve matrix equations, for which the computation of inverse matrices is necessary. However, since not every matrix is invertible (or even the problem may involve rectangular matrices), the use of generalized inverses allows us to approach them satisfactorily.

In the last decade, new notions of inverses have appeared in the literature, one of them is called the *core inverse*. This work presents the definitions and some of the most relevant properties of the classical inverses, such as the Moore-Penrose inverse and the group inverse. Then, we introduce the definition of the *core inverse* and prove several properties, characterizations and representations of it. In addition, we study the Hartwig-Spindelböck decomposition for the aforementioned inverses. Such a decomposition constitutes an important tool that allows us to carry out the proofs of the main results of this work. Finally, some interesting applications of the *core inverse* are provided in order to show its usefulness.

Resum

L'Anàlisi Matricial constitueix una àrea molt important de la Matemàtica Aplicada i és una eina fonamental per al desenvolupament de moltes aplicacions de diferents branques de la ciència i la tecnologia. Alguns dels problemes requereixen de la solució d'equacions matricials, en els que és necessari el càlcul de matrius inverses. No obstant això, com no tota matriu és invertible (o fins i tot es tracta d'un problema sobre matrius rectangulars), l'ús de diferents inverses generalitzades permet abordar-los de manera satisfactòria.

En aquesta última dècada han sorgit noves nocions d'inverses, una d'elles és la *inversa core*. En aquest treball es presenten les definicions i algunes de les propietats més rellevants de les inverses clàssiques, com són la inversa de Moore-Penrose i la inversa de grup, per a després poder introduir la definició de la *inversa core* i demostrar diferents propietats, caracteritzacions i representacions d'aquesta. A més, s'estudia la descomposició de Hartwig-Spindelböck per a les inverses anteriorment esmentades ja que aquesta descomposició constitueix una important eina que permet realitzar moltes de les demostracions dels principals resultats d'aquest treball. Finalment, es proporcionen algunes aplicacions que mostren l'interès de l'estudi de la *inversa core*.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y preliminares

1.1. Introducción

El concepto de inversa generalizada fue mencionado por primera vez en 1903 por Fredholm [14] quien formuló una pseudoinversa para un operador integral lineal que no es invertible en el sentido ordinario. Un año después, Hilbert [18] discutió inversas generalizadas de operadores diferenciales.

Recién en el año 1920, Moore [25] estableció la existencia de una única inversa para cada matriz compleja y la denominó *recíproca general*, en la cual, analizada como aplicación lineal, permitía establecer de qué elementos provienen los vectores no nulos del espacio imagen (es decir, aquellos que no son imagen de los vectores del espacio vectorial de salida que van a parar al vector nulo). Sin embargo, esta definición no consiguió gran notoriedad en la comunidad científica, quizás debido a la engorrosa notación usada por Moore. Su definición se basaba en los proyectores ortogonales sobre los espacios columnas de A y su traspuesta conjugada A^*; por lo tanto su definición se hacía desde un punto de vista funcional o geométrico.

En 1955, Penrose [26] publicó un artículo donde presentaba una definición más bien algebraica a partir de cuatro ecuaciones matriciales llamadas *ecuaciones de Penrose*, y se pudo probar que esta definición era equivalente a la dada por Moore. A partir de allí, esta única inversa es comúnmente conocida como la *inversa de Moore-Penrose*. Esta nueva matriz inversa generalizada fue ampliamente estudiada.

Una de las principales razones de ello fue su utilidad en aplicaciones para tratar diversos problemas, en particular, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que constituye una de las aplicaciones básicas pero a la vez importante de este tipo de inversas generalizadas. Sin embargo, la aplicación de mayor repercusión de la inversa de Moore-Penrose fue establecida por el propio Penrose al resolver el problema de los mínimos cuadrados: encontró que la (única) solución en mínimos cuadrados de norma mínima del sistema lineal $Ax = b$ es $x = A^{\dagger}b$ siendo $A^{\dagger}$ la inversa de Moore-Penrose de A.

A lo largo de los años han surgido otras inversas generalizadas que lograron notoriedad rápidamente. En 1958, Drazin [10] introdujo una nueva inversa generalizada en el contexto de anillos abstractos y, en particular, para matrices cuadradas, llamando la atención de la comunidad matemática por sus interesantes propiedades espectrales. Cuando el índice de la matriz es (a lo sumo) 1, la *inversa de Drazin* es llamada la *inversa de grupo*. Por lo tanto, la inversa de grupo es un caso especial de la inversa de Drazin. Sin embargo, esta última es utilizada en muchas aplicaciones interesantes, motivo por el cual se la considera como una entidad separada. Por mencionar tan sólo alguna de ellas se cita el trabajo de C.D. Meyer titulado *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains* (véase la cita [1282] de [6]), donde se proporciona una importante contribución a la teoría de las inversas generalizadas mostrando la aplicación de la inversa de grupo para estudiar las cadenas de Markov.

Muchos de los resultados obtenidos han encontrado su aplicación en áreas de la matemática misma, como por ejemplo en métodos de optimización utilizando mínimos cuadrados, ecuaciones diferenciales (y en diferencias), cadenas de Markov, teoría de perturbación, métodos iterativos, etc. (veáse [6, 7, 8]), sin embargo las inversas generalizadas también son de gran utilidad en problemas de otras disciplinas: equilibrio de ecuaciones químicas [31], en Robótica [1, 9], en Teoría de Códigos [37], en Teoría de Optimización [15], Gráfica Computacional [22], Sistemas Lineales de Control [19], etc., sólo por nombrar algunas de las más recientes.

Después de muchos años dedicados al estudio de las inversas generalizadas clásicas, en la última década han aparecido nuevas nociones de inversa. La primera de ellas fue la *inversa core*, introducida en el año 2010 por los autores Baksalary y Trenkler [3]. La misma tuvo una amplia repercusión en la comunidad matemática debido a la sencillez de su definición, a su aplicación en la resolución de algunos sistemas lineales con restricciones que surgen en la teoría de redes eléctricas y también por su conexión con la bien conocida inversa de Bott-Duffin.

Muchos trabajos de investigación han surgido a partir de esta nueva inversa, incluyendo sus extensiones a conjuntos más generales como al álgebra de todos los operadores lineales acotados sobre espacios de Hilbert como así también a anillos [20, 21, 24, 28, 29, 34, 38, 39, 40].

Como se ha mencionado anteriormente, el estudio de la teoría de inversas generalizadas se ha incrementado considerablemente en la última década. Muchos de los problemas y preguntas en este campo de estudio han sido resueltos, algunos sólo se han resuelto parcialmente y otros permanecen abiertos hasta el día de hoy.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la *inversa core*, revisando sus definiciones, caracterizaciones, propiedades, representaciones y aplicaciones.

A continuación se describe, de forma sintetizada, la organización de los temas de este trabajo en sus tres capítulos.

En el Capítulo 1 se introducen las notaciones necesarias y se mencionan, de forma breve, algunos resultados preliminares necesarios para el desarrollo del resto de los capítulos.

Posteriormente, en el Capítulo 2 se presentan las definiciones de las inversas clásicas, a saber, la inversa de Moore-Penrose, la inversa de grupo y la inversa de Drazin. Se enuncian algunos teoremas que incluyen distintas propiedades de las mismas y que serán de gran utilidad para estudiar la inversa core. Además, con la intención de obtener una representación de la inversa core, se estudia la descomposición de Hartwig-Spindelböck, que al mismo tiempo constituye una herramienta fundamental para muchas de las demostraciones del capítulo principal.

A continuación, en el Capítulo 3 se introduce la definición de la inversa core, tema central de este trabajo, y se estudia en profundidad su existencia, caracterización y unicidad. Además, se presenta una forma canónica de la inversa core y se demuestran su principales propiedades utilizando la descomposición de Hartwig-Spindelböck.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan tres aplicaciones de la inversa core. La primera de ellas corresponde al cálculo de la inversa core del producto de dos proyectores ortogonales, la segunda está relacionada con la resolución de un sistema de ecuaciones matriciales y la tercera muestra la posibilidad de calcular la inversa de Boot-Duffin mediante la inversa core.

1.2. Notaciones y resultados preliminares

En esta sección se mencionan algunas notaciones básicas de la teoría de matrices y se presentan sin demostración algunos resultados que involucran los espacios imagen y nulo de una matriz. Además, se definen algunas clases matriciales clásicas como las matrices idempotentes, las isometrías parciales, los proyectores ortogonales, entre otras, que serán de interés en los capítulos posteriores.

Como es usual, se denota por $\mathbb{C}^{m\times n}$ al conjunto de matrices complejas de tamaño $m \times n$. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, los símbolos A^*, A^{-1}, $\mathrm{rg}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{R}(A)$ denotan la traspuesta conjugada, la inversa (cuando $m = n$), el rango, el espacio nulo y el espacio imagen de A, respectivamente. El símbolo I_n indica la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Con $S^\perp$ se denota al subespacio ortogonal del subconjunto $S \subseteq \mathbb{C}^n$ con respecto al producto escalar (canónico) de $\mathbb{C}^n$ definido por $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} = x^*y$, para $x, y \in \mathbb{C}^n$, donde x^* significa tomar traspuesta conjugada en el vector x. La ortogonalidad de los subespacios S_1 y S_2 se denota por $S_1 \perp S_2$. El símbolo $\oplus$ representa la suma directa de dos subespacios de un mismo espacio vectorial y cuando estos subespacios son ortogonales se indicará con $\oplus^\perp$ (suma directa ortogonal).

A continuación, con la intención de mencionar algunas propiedades relevantes de los subespacios imagen y nulo de una matriz, se recuerdan sus definiciones.

Definición 1.2.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama espacio imagen de A al conjunto

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax, \quad x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Definición 1.2.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama espacio nulo de A al conjunto

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}.$$

A partir de las definiciones anteriores no es difícil probar que

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp \qquad \text{y} \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp.$$

Más aún, algunas de las principales propiedades de estos subespacios son enumeradas en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$.

(b) $\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)$.

(c) $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$.

(d) $\mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A)$.

(e) $\mathrm{rg}(AA^*) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A^*A)$.

Otras propiedades útiles que poseen los subespacios imagen y nulo son las siguientes.

Teorema 1.2.4. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) Si $n = p$ entonces $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

(b) Si $m = p$ se cumple que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ si y sólo si existe una matriz $C \in \mathbb{C}^{q\times n}$ tal que $A = BC$.

(c) Si $n = p$ entonces $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$.

(d) $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{mín}\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$.

Se finaliza esta sección presentando algunas clases matriciales clásicas del Análisis Matricial, las cuales serán de utilidad en los próximos capítulos.

- $\mathbb{C}_n^I$: conjunto de matrices idempotentes, es decir,

$$\mathbb{C}_n^I = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^2 = A\}. \tag{1.1}$$

- $\mathbb{C}_{m,n}^{IP}$: conjunto de isometrías parciales, es decir,

$$\mathbb{C}_{m,n}^{IP} = \{A \in \mathbb{C}^{m\times n} : AA^*A = A\}. \tag{1.2}$$

- $\mathbb{C}_n^{IH}$: conjunto de matrices idempotentes y hermíticas, es decir,

$$\mathbb{C}_n^{IH} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^2 = A = A^*\}. \tag{1.3}$$

- $\mathbb{C}_n^T$: conjunto de matrices tripotentes, es decir,

$$\mathbb{C}_n^T = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^3 = A\}. \tag{1.4}$$

- $\mathbb{C}_n^{RH}$: conjunto de matrices rango-hermíticas, es decir,

$$\mathbb{C}_n^{RH} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)\}. \tag{1.5}$$

1.3. Primeras generalizaciones de la inversa ordinaria

En esta sección se recuerda el concepto de inversa ordinaria (o usual) de una matriz cuadrada compleja. Se presentan las inversas laterales de una matriz arbitraria, siempre que éstas existan, como una de las primeras generalizaciones de la inversa ordinaria. Además, se definen los conceptos de inversa interior e inversa exterior de una matriz compleja arbitraria.

Se sabe que una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es **invertible** o **no singular** si existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AX = XA = I_n$. Es conocido que es suficiente probar que la matriz X cumpla una de las condiciones $AX = I_n$ o bien $XA = I_n$, para concluir que X es la inversa de A y se denota por A^{-1} puesto que, en caso de existir, es única.

Los diferentes tipos de matrices inversas generalizadas aparecen cuando se quiere extender el concepto de inversa ordinaria al caso de matrices rectangulares o bien a matrices cuadradas singulares. En este sentido, las inversas laterales de una matriz rectangular constituyen un primer tipo de generalización de la inversa ordinaria. A continuación se presentan sus definiciones.

Definición 1.3.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama **inversa a derecha** de A a cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $AX = I_m$.

Definición 1.3.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama **inversa a izquierda** de A a cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $XA = I_n$.

Las inversas laterales no siempre existen, y en caso de existir, puede haber un número infinito de éstas. A continuación se muestran dos ejemplos concretos donde se ponen de manifiesto algunas de estas situaciones.

Ejemplo 1.3.3. Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{11}{35} & -\frac{8}{35} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{35} & \frac{13}{35} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$BA = I_2 \qquad \text{pero} \qquad AB \neq I_3.$$

Por lo tanto, B es una inversa lateral a izquierda pero no una inversa a derecha de A.

Ejemplo 1.3.4. Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{7}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se observa que

$$AB_1 = AB_2 = I_2.$$

No obstante, se puede ver que la matriz A no admite inversa a izquierda. En efecto, si existe una matriz B tal que $BA = I_3$, entonces

$$3 = \mathrm{rg}(I_3) = \mathrm{rg}(BA) \leq \mathrm{rg}(A) = 2,$$

lo cual es un absurdo.

Un resultado bien conocido en la literatura caracteriza la existencia de las inversas laterales de una matriz dada, utilizando el rango de la misma. Más precisamente, una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ admite inversa a derecha (resp., a izquierda) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = m$ (resp., $\mathrm{rg}(A) = n$).

El hecho de que estas inversas laterales no siempre existan, permite introducir nuevos conceptos de inversas generalizadas. Por ejemplo, si en la Definición 1.3.1 se multiplica a derecha por la matriz A se obtiene una condición más general, que lleva a la siguiente definición.

Definición 1.3.5. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface

$$(1)\ AXA = A, \tag{1.6}$$

se llama una inversa interior o $\{1\}$-inversa de A.

Con un razonamiento análogo, multiplicando a izquierda por la matriz X en ambos miembros de la ecuación dada en la Definición 1.3.1, se obtiene un nuevo concepto que se introduce en la siguiente definición.

Definición 1.3.6. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface

$$(2)\ XAX = X, \tag{1.7}$$

se llama una inversa exterior o $\{2\}$-inversa de A.

Las matrices que verifiquen simultáneamente las Definiciones 1.3.5 y 1.3.6 se llaman $\{1,2\}$-inversas de A. Es bien conocido que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ siempre admite una inversa interior y una inversa exterior. Más aún, toda matriz compleja admite infinitas inversas interiores y exteriores, salvo los casos en que A sea una matriz no singular o bien la matriz nula.

A continuación, se muestra un ejemplo donde se obtienen las matrices $\{1\}$-inversas de una cierta matriz.

Ejemplo 1.3.7. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}.$$

Se propone una matriz genérica

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2},$$

la cual debe satisfacer la siguiente condición

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo la ecuación matricial planteada anteriormente, se tiene que

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \\ 1-a & -b \end{bmatrix}.$$

Se concluye finalmente que A admite infinitas $\{1\}$-inversas (en función de los parámetros a y b).

Capítulo 2

Inversas generalizadas

2.1. Inversas generalizadas clásicas y sus propiedades

En esta sección se dan algunas definiciones de las inversas clásicas, a saber, la inversas de Moore-Penrose, de grupo y de Drazin, estableciendo algunas de sus principales propiedades.

Se observa que a partir de las Definiciones 1.3.1 y 1.3.2, es evidente que las matrices XA y AX son hermíticas, es decir, coinciden con su conjugada traspuesta. A partir de las definiciones de $\{1\}$-inversa y $\{2\}$-inversa se puede dar la siguiente definición.

Definición 2.1.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es la **inversa de Moore-Penrose** de A si satisface las cuatro ecuaciones matriciales siguientes

(1) $AXA = A$, es decir, X es una inversa interior de A.

(2) $XAX = X$, es decir, X es una inversa exterior de A.

(3) $(AX)^* = AX$, es decir, AX es hermítica.

(4) $(XA)^* = XA$, es decir, XA es hermítica.

El siguiente teorema, garantiza la existencia y unicidad de la inversa Moore-Penrose.

Teorema 2.1.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La inversa de Moore-Penrose de A siempre existe y es única. Se denotará con $A^\dagger$.

Demostración. Unicidad. Sean X_1 y X_2 dos matrices que satisfacen la Definición 2.1.1. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1AX_1 \\ &= (X_1A)^*X_1 \\ &= (X_1AX_2A)^*X_1 \\ &= (X_2A)^*(X_1A)^*X_1 \\ &= X_2AX_1AX_1 \\ &= X_2AX_1. \end{aligned}$$

Por otro lado, se obtiene que

$$\begin{aligned} X_2 &= X_2AX_2 \\ &= X_2(AX_2)^* \\ &= X_2(AX_1AX_2)^* \\ &= X_2(AX_2)^*(AX_1)^* \\ &= X_2AX_2AX_1 \\ &= X_2AX_1. \end{aligned}$$

De las igualdades anteriores se concluye que $X_1 = X_2$.
Existencia. Es claro que si $A = O$ entonces su inversa de Moore-Penrose es $A^\dagger = O$. Sea $A \neq O$. En este caso se sabe que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ admite una descomposición en valores singulares del tipo

$$A = U \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*,$$

donde U y V son matrices unitarias de tamaños $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente, y la matriz $T \in \mathbb{C}^{r\times r}$ (es diagonal) con $r = \mathrm{rg}(A)$.
Se define entonces la siguiente matriz

$$X := V \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

A continuación, se verifica que la matriz X dada anteriormente satisface las ecuaciones de la Definición 2.1.1.

$$\begin{aligned} AXA &= U\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= U\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* = A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XAX &= V\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* \\ &= V\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* = X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AX)^* &= \left(U\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^*\right)^* \\ &= U\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* = AX, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (XA)^* &= \left(V\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*\right)^* \\ &= V\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* = XA. \end{aligned}$$

Finalmente, como se probó en la primera parte de esta demostración que si existe la inversa de Moore-Penrose, es única, se deduce que $X = A^\dagger$. □

Ejemplo 2.1.3. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Calculando la descomposición en valores singulares de A se tiene que

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{209}{362} & \frac{209}{362} & -\frac{209}{362} \\ -\frac{56}{265} & -\frac{209}{265} & -\frac{209}{362} \\ -\frac{209}{265} & -\frac{56}{265} & \frac{209}{362} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -\frac{265}{422} & \frac{144}{443} & -\frac{408}{577} \\ -\frac{154}{335} & -\frac{484}{545} & 0 \\ -\frac{265}{422} & \frac{144}{443} & -\frac{408}{577} \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{335}{154} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{545}{484} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente $\mathrm{rg}(A) = 2$. Se tiene que el bloque T de la matriz que se busca resulta

$$T = \begin{bmatrix} \frac{335}{154} & 0 \\ 0 & \frac{545}{484} \end{bmatrix}.$$

Calculando su inversa se obtiene que

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{154}{335} & 0 \\ 0 & \frac{484}{545} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la inversa Moore-Penrose de la matriz A resulta

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \begin{bmatrix} -\frac{265}{422} & \frac{144}{443} & -\frac{408}{577} \\ -\frac{154}{335} & -\frac{484}{545} & 0 \\ -\frac{265}{422} & \frac{144}{443} & -\frac{408}{577} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{154}{335} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{484}{545} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{209}{362} & -\frac{56}{265} & -\frac{209}{265} \\ \frac{209}{362} & -\frac{209}{265} & -\frac{56}{265} \\ -\frac{209}{362} & -\frac{209}{362} & \frac{209}{362} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A continuación, se enuncian sin demostración algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose que serán utilizadas con frecuencia a lo largo de este trabajo.

Proposición 2.1.4. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $(A^\dagger)^\dagger = A$.

(b) $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$.

(c) $A^* = A^*AA^\dagger = A^\dagger AA^*$.

(d) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^*)^\dagger$.

(e) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.

(f) $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$, siendo $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices unitarias.

En el caso de una matriz invertible A, es claro que $AA^{-1} = A^{-1}A$. Conjuntamente con las definiciones de $\{1\}$-inversa y $\{2\}$-inversa, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es **inversa de grupo** de A si satisface las tres ecuaciones matriciales siguientes

(1) $AXA = A$, es decir, X es una inversa interior de A.

(2) $XAX = X$, es decir, X es una inversa exterior de A.

(5) $AX = XA$, es decir, X conmuta con A.

La inversa de grupo $A^\#$ de una matriz arbitraria $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no necesariamente existe. Sin embargo, en caso de existir, es única como se establece en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo las ecuaciones (1), (2) y (5) de la Definición 2.1.5 entonces, dicha matriz X es única. Se denotará por $A^\#$.

Demostración. Sean X_1 y X_2 dos matrices que satisfacen las ecuaciones (1), (2) y (5) de la Definición 2.1.5. Entonces,

$$\begin{aligned} X_1A &= AX_1 \\ &= AX_2AX_1 \\ &= X_2AX_1A \\ &= X_2A \\ &= AX_2. \end{aligned}$$

En consecuencia, la propiedad de conmutatividad implica que

$$AX_1 = X_1A = AX_2 = X_2A.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(AX_1) \\ &= X_1(AX_2) \\ &= (X_1A)X_2 \\ &= (X_2A)X_2 \\ &= X_2. \end{aligned}$$

□

Observación 2.1.7. A partir de la definición de la inversa de grupo y de su unicidad, es evidente que cuando la matriz A es invertible, $A^{\#} = A^{-1}$.

El índice es una característica relevante de las matrices y juega un rol importante en el estudio de la inversa de grupo. Se define de la siguiente manera.

Definición 2.1.8. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se define el índice de la matriz A como el menor entero no negativo k que satisface

$$\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1}),$$

y se denotará con $\mathrm{Ind}(A)$.

Observación 2.1.9. Por convención, toda matriz invertible tiene índice 0 y la matriz nula tiene índice 1.

El índice de una matriz permite dar una descomposición del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ como suma directa entre dos subespacios invariantes del mismo. Por completitud, en este trabajo se dará una demostración de dicho resultado.

Proposición 2.1.10. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de índice k. Entonces

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k). \tag{2.1}$$

Demostración. Es inmediato que

$$\mathcal{N}(A^0) \subseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{N}(A^\ell) \subseteq \mathcal{N}(A^{\ell+1}) \subseteq \mathbb{C}^n, \qquad \forall \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Como $\dim(\mathbb{C}^n) = n$ (finita), la cadena de inclusiones anterior debe estabilizarse para algún valor del exponente ℓ. Sea k el entero no negativo mas pequeño tal que $\mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^{k+1})$.

Como también se cumple que

$$\mathcal{R}(A^{\ell+1}) \subseteq \mathcal{R}(A^\ell), \qquad \forall \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

aplicando el teorema de la dimensión

$$\dim(\mathcal{R}(A^k)) = n - \dim(\mathcal{N}(A^k)) = n - \dim(\mathcal{N}(A^{k+1})) = \dim(\mathcal{R}(A^{k+1}))$$

se tiene que k el entero no negativo mas pequeño tal que $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$.

Además, una vez estabilizada la cadena, se mantiene, es decir, $\mathcal{R}(A^{j+k}) = \mathcal{R}(A^k)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ pues $\mathcal{R}(A^{j+k}) = \mathcal{R}(A^j A^k) = A^j \mathcal{R}(A^k) = A^j \mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^j A^k) = \mathcal{R}(A^{j+k})$.

Resta demostrar que para el valor de k mencionado se debe cumplir que $\mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}$. En efecto, sea $z \in \mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{R}(A^k)$. Entonces $z = A^k x$ para algún $x \in \mathbb{C}^n$ y además $A^k z = 0$. Luego

$$0 = A^k z = A^k(A^k x) = A^{2k} x.$$

Puesto que $\mathrm{Ind}(A) = k$, resulta que $x \in \mathcal{N}(A^{2k}) = \mathcal{N}(A^k)$, es decir,
$z = A^k x = 0$.

Para finalizar, aplicando la fórmula de Grassman y el teorema de la dimensión se tiene que

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{R}(A^k) + \mathcal{N}(A^k)) &= \dim(\mathcal{R}(A^k)) + \dim(\mathcal{N}(A^k)) - \dim(\mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(A^k)) \\
&= \dim(\mathcal{R}(A^k)) + \dim(\mathcal{N}(A^k)) \\
&= n,
\end{aligned}$$

de donde el subepsacio $\mathcal{R}(A^k) + \mathcal{N}(A^k)$ debe coincidir con $\mathbb{C}^n$, es decir, $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) + \mathcal{N}(A^k)$. □

Inspirados en la suma directa establecida en (2.1), S. Campbell y C. Meyer [8] demostraron que para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ singular no nula de índice k existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{2.2}$$

donde C es invertible y N es una matriz nilpotente de índice k. La expresión dada en (2.2), es conocida como la *descomposición core-nilpotente* de A. En el caso que la matriz A sea de índice 1, es claro que $N = 0$ y por lo tanto la matriz A dada en (2.2) tiene la forma

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{2.3}$$

El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa de grupo.

Teorema 2.1.11. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo las ecuaciones (1), (2) y (5) de la Definición 2.1.5.

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.

(c) $\mathrm{Ind}(A) \in \{0, 1\}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz satisfaciendo la Definición 2.1.5. De (1) y (5) se tiene que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AXA) = \mathrm{rg}(A^2X) \leq \mathrm{rg}(A^2) \leq \mathrm{rg}(A),$$

y por lo tanto $\mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(A)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Por el apartado (a) del Teorema 1.2.4, se tiene que $\mathcal{R}(A^2) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Además, por hipótesis se sabe que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$. En consecuencia, $\dim(\mathcal{R}(A^2)) = \dim(\mathcal{R}(A))$ con lo que se llega a $\mathcal{R}(A^2) = \mathcal{R}(A)$. Así, de la Definición 2.1.8 se deduce que $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Si $k = 0$, se sabe que A es invertible. Por lo tanto, de la Observación 2.1.7

se sigue que $X = A^{-1}$ cumple las tres condiciones de la Definición 2.1.5. Por otro lado, si $k = 1$, de (2.3) se sabe que A admite la siguiente descomposición

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde P y C son matrices invertibles. Finalmente, el resultado se sigue de la unicidad y del comprobar las tres propiedades (inmediatas) de la Definición 2.1.5 teniendo en cuenta la forma de A dada anteriormente y considerando la matriz

$$X := P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

□

A continuación, se enuncian las principales propiedades que satisface la inversa de grupo. Las mismas serán de utilidad para los capítulos posteriores.

Proposición 2.1.12. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $m \in \mathbb{N}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $(A^{\#})^{\#} = A$.

(b) $(A^{\#})^{*} = (A^{*})^{\#}$.

(c) $(A^{m})^{\#} = (A^{\#})^{m}$.

(d) $A^{\#} = A(A^{3})^{\dagger}A$.

Como se ha mencionado anteriormente, la inversa de grupo existe únicamente para matrices de índice a lo sumo uno.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo obtener la inversa de grupo de una matriz A de índice 1, aplicando el apartado (d) de la Proposición 2.1.12.

Ejemplo 2.1.13. Se considera la matriz A como en el Ejemplo 2.1.3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Como $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^2) = 2$ y A no es invertible, claramente $\operatorname{Ind}(A) = 1$. Luego se puede garantizar la existencia de la inversa de grupo $A^{\#}$. Ahora, el apartado (d) de la Proposición 2.1.12 implica que $A^{\#} = A(A^3)^{\dagger}A$.

En primer lugar se calcula la inversa de Moore-Penrose de A^3, que es

$$(A^3)^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{5}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A^{\#} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{24} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La siguiente definición es una generalización de la inversa de grupo para matrices de índice arbitrario.

Nuevamente, si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, multiplicando a izquierda $AX = I_n$ por A^k se obtiene que $A^{k+1}X = A^k$. Sin embargo, esta última propiedad puede verificarse aún para el caso en que A sea una matriz singular y da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.1.14. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de índice k. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la **inversa de Drazin** de A si satisface las tres ecuaciones matriciales siguientes

(2) $XAX = X$, es decir, X es una inversa exterior de A.

(5) $AX = XA$, es decir, X conmuta con A.

(6^k) $A^{k+1}X = A^k$.

Teorema 2.1.15. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. La inversa de Drazin A^D de A siempre existe y es única. Se denotará por A^D.

Demostración. Su demostración puede encontrase en [6, Teorema 7, p. 164]. □

2.2. Descomposición de Hartwig-Spindelböck

En esta sección se estudiara la descomposición de Hartwig-Spindelböck, la misma fue dada en el año 1984 por R. Hartwig y K. Spindelböck [17]. Los autores demostraron una forma de descomponer cualquier matriz cuadrada compleja a partir de la descomposición en valores singulares. Dicho resultado se prueba a continuación.

Teorema 2.2.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $r := \mathrm{rg}(A) > 0$. Entonces existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, una matriz diagonal $\Sigma = diag(\sigma_1 I_{r_1}, \sigma_2 I_{r_2}, \cdots, \sigma_\ell I_{r_\ell})$ donde los elementos de su diagonal principal son los valores singulares de A, y dos matrices $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ tales que

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.4}$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_\ell > 0$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_\ell = r$ y además

$$KK^* + LL^* = I_r. \tag{2.5}$$

Demostración. Usando la descomposición en valores singulares, es posible escribir

$$\begin{aligned} A &= U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*UU^*, \end{aligned}$$

donde U y V son matrices unitarias, y $\Sigma = diag(\sigma_1 I_{r_1}, \sigma_2 I_{r_2}, \cdots, \sigma_\ell I_{r_\ell})$ es una matriz diagonal para la cual los elementos de su diagonal principal son los valores singulares de A y satisfacen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_\ell > 0$ y $r_1 + r_2 + \cdots + r_\ell = r$.
Si se particiona la matriz V^*U con bloques de tamaños adecuados como

$$V^*U = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix},$$

se tiene

$$\begin{aligned} A &= U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \end{aligned}$$

Como U y V son matrices unitarias entonces V^*U también es una matriz unitaria, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K^* & M^* \\ L^* & N^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} KK^* + LL^* & KM^* + LN^* \\ MK^* + NL^* & MM^* + NN^* \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En consecuencia, se obtiene que $KK^* + LL^* = I_r$. Como la descomposición de A solo involucra las matrices K y L, resulta que M y N no aportan información de utilidad. $\square$

A continuación, se muestra un ejemplo que ilustra una manera de obtener la descomposición de Hartwig-Spindelböck siguiendo el esquema de la demostración anterior.

Ejemplo 2.2.2. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Calculando una descomposición en valores singulares se obtienen las matrices

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{198}{485} & \frac{408}{577} & -\frac{209}{362} \\ -\frac{396}{485} & 0 & \frac{209}{362} \\ \frac{198}{485} & \frac{408}{577} & \frac{209}{362} \end{bmatrix}, \; V = \begin{bmatrix} -\frac{408}{577} & \frac{408}{577} & 0 \\ -\frac{408}{577} & -\frac{408}{577} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1351}{780} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como U y V son matrices unitarias es claro que A puede escribirse como

$$A = USV^* = USV^*UU^* = U(SV^*U)U^*.$$

Calculando el producto SV^*U se tiene que

$$
\begin{aligned}
SV^*U &= \begin{bmatrix} \frac{1351}{780} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{408}{577} & \frac{408}{577} & 0 \\ -\frac{408}{577} & -\frac{408}{577} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\frac{198}{485} & \frac{408}{577} & -\frac{209}{362} \\ -\frac{396}{485} & 0 & \frac{209}{362} \\ \frac{198}{485} & \frac{408}{577} & \frac{209}{362} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{181}{209} & 0 \\ \frac{181}{627} & \frac{1}{2} & -\frac{396}{485} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
A = \begin{bmatrix} -\frac{198}{485} & \frac{408}{577} & -\frac{209}{362} \\ -\frac{396}{485} & 0 & \frac{209}{362} \\ \frac{198}{485} & \frac{408}{577} & \frac{209}{362} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -\frac{181}{209} & 0 \\ \frac{181}{627} & \frac{1}{2} & -\frac{396}{485} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} -\frac{198}{485} & -\frac{396}{485} & \frac{198}{485} \\ \frac{408}{577} & 0 & \frac{408}{577} \\ -\frac{209}{362} & \frac{209}{362} & \frac{209}{362} \end{bmatrix}.
$$

La descomposición de Hartwig-Spindelböck permite dar una forma canónica de la inversa de Moore-Penrose, la cual es muy utilizada en la teoría de inversas generalizadas.

Teorema 2.2.3. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz representada en la forma (2.4). Entonces, la inversa de Moore-Penrose de A admite la siguiente representación

$$
A^\dagger = U \begin{bmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{2.6}
$$

Demostración. Se supone $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ como en (2.4) y se define la matriz

$$
X := U \begin{bmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{bmatrix} U^*.
$$

A continuación, se verifica que la matriz X dada anteriormente satisface las ecuaciones de la Definición 2.1.1. En efecto, de la igualdad (2.5) se tiene que

$$
\begin{aligned}
(AX)^* &= \left(U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right)^* \\
&= U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = AX,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(XA)^* &= \left(U \begin{bmatrix} K^*K & K^*L \\ L^*K & L^*L \end{bmatrix} U^* \right)^* \\ &= U \begin{bmatrix} K^*K & L^*K \\ K^*L & L^*L \end{bmatrix} U^* = XA,\end{aligned}$$

$$AXA = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = A,$$

$$XAX = U \begin{bmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = X.$$

Finalmente, el Teorema 2.1.2 garantiza que $X = A^\dagger$. □

De (2.4) y (2.6) se puede obtener fácilmente la siguiente representación para la matriz

$$AA^\dagger = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{2.7}$$

A partir de (2.7) es inmediato ver que la matriz $AA^\dagger$ es idempotente y hermítica, y por lo tanto resulta un proyector ortogonal. Más aún, como $AA^\dagger A = A$ se sigue que

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^\dagger A) \subseteq \mathcal{R}(AA^\dagger) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

Resulta entonces que $AA^\dagger$ es un proyector ortogonal sobre el espacio imagen de A y se denotará por $P_A := AA^\dagger$.

A continuación se demuestra una propiedad útil que permite intercambiar información entre subespacios y matrices. Dicha propiedad involucra el proyector ortogonal P_A.

Proposición 2.2.4. Sean $A, X \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

(b) $P_A X = X$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Como $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$, del Teorema 1.2.4 (b) se tiene que $X = AC$ para alguna matriz C. En consecuencia, multiplicando a izquierda en ambos miembros de la igualdad anterior por P_A, se tiene que

$$\begin{aligned} P_A X &= P_A AC \\ &= AA^\dagger AC \\ &= AC \\ &= X. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Como $P_A X = X$, del Teorema 1.2.4 (a) se obtiene que

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(P_A X) = \mathcal{R}(AA^\dagger X) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

□

Usando la descomposición de Hartwig-Spindelböck también se puede obtener una forma canónica para la inversa de grupo. Antes, es necesario establecer una caracterización de las matrices de índice a lo sumo 1 a partir de dicha descomposición.

Lema 2.2.5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz representada en la forma (2.4). Entonces $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$ si y sólo si K es invertible.

Demostración. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita de la forma dada en (2.4) con $r := \mathrm{rg}(A)$.

Es fácil ver que

$$A^2 = \begin{bmatrix} (\Sigma K)^2 & \Sigma K \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el Teorema 1.2.3 (e) y (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A^2) &= \mathrm{rg}(A^2(A^2)^*) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} (\Sigma K)^2 & \Sigma K \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ((\Sigma K)^2)^* & 0 \\ (\Sigma K \Sigma L)^* & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\Sigma K)^* & 0 \\ (\Sigma L)^* & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\Sigma K)^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma\Sigma^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\Sigma K)^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Luego, como Σ es invertible se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A^2) &= \mathrm{rg}(\Sigma K \Sigma \Sigma^* K^* \Sigma^*) \\
&= \mathrm{rg}(K \Sigma \Sigma^* K^*) \\
&= \mathrm{rg}(K\Sigma (K\Sigma)^*) \\
&= \mathrm{rg}(K\Sigma) \\
&= \mathrm{rg}(K).
\end{aligned}$$

Como $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$, de lo obtenido anteriormente se deduce que

$$\mathrm{Ind}(A) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(K) = r \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ es invertible.}$$

□

Teorema 2.2.6. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz representada en la forma (2.4) tal que $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$. Entonces, la inversa de grupo de A admite la siguiente representación

$$A^{\#} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{2.8}$$

Demostración. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita de la forma dada en (2.4) con $r := \mathrm{rg}(A)$. Como A tiene índice a lo sumo 1, el Lema 2.2.5 garantiza que la siguiente matriz está bien definida

$$X := U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

A continuación, se verifica que la matriz X dada anteriormente satisface las ecuaciones de la Definición 2.1.5. En efecto,

$$AXA = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & K^{-1}L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = A,$$

$$XAX = U \begin{bmatrix} I_r & K^{-1}L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = X,$$

$$AX = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^{-1}\Sigma^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = XA.$$

Finalmente, por el Teorema 2.1.6 se tiene que $X = A^{\#}$. □

Se finaliza este capítulo probando un resultado que permite caracterizar algunas de las clases matriciales definidas en la página 6 del Capítulo 1 en función de las matrices Σ, K y L definidas en la descomposición de Hartwig-Spindelböck. Antes, es necesario expresar a dichas clases matriciales de manera equivalente a partir de la inversa de Moore-Penrose de la siguiente forma:

- El conjunto de isometrías parciales dado en (1.2) puede definirse de manera alternativa como:
$$\mathbb{C}^{IP}_{m,n} = \{A \in \mathbb{C}^{m\times n} : A^\dagger = A^*\}. \tag{2.9}$$

- El conjunto de matrices idempotentes y hermíticas dado en (1.3) puede definirse como el conjunto de proyectores ortogonales:
$$\mathbb{C}^{IH}_{n} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^2 = A = A^\dagger\}. \tag{2.10}$$

- El conjunto de matrices rango-hermíticas dada en (1.5) puede definirse de manera alternativa como:
$$\mathbb{C}^{RH}_{n} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AA^\dagger = A^\dagger A\}. \tag{2.11}$$

Las demostraciones de las equivalencias de estos conjuntos pueden encontrarse en [2, 6].

Lema 2.2.7. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz representada en la forma (2.4) tal que $r := \mathrm{rg}(A)$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) $A \in \mathbb{C}^{IP}_n$ si y sólo si $\Sigma = I_r$.

(b) $A \in \mathbb{C}^{I}_n$ si y sólo si $\Sigma K = I_r$.

(c) $A \in \mathbb{C}^{IH}_n$ si y sólo si $L = 0$, $\Sigma = I_r$ y $K = I_r$.

(d) $A \in \mathbb{C}^{RH}_n$ si y sólo si $L = 0$ (y, por tanto, K es unitaria).

(e) $A \in \mathbb{C}^{T}_n$ si y sólo si $(\Sigma K)^2 = I_r$.

Demostración. Para las siguientes demostraciones se considera $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita de la forma dada en (2.4) con $r := \mathrm{rg}(A)$.
(a) Como $A \in \mathbb{C}_n^{IP}$, de (2.9) resulta que $A^* = A^\dagger$. Luego, por (2.6) se tiene que $A^* = A^\dagger$ si y sólo si se satisfacen las igualdades

$$K^*\Sigma^* = K^*\Sigma^{-1}, \tag{2.12}$$

y

$$L^*\Sigma^* = L^*\Sigma^{-1}. \tag{2.13}$$

Multiplicando a izquierda por las matrices K y L en (2.12) y (2.13), respectivamente, y luego sumando ambas expresiones, se obtiene que

$$(KK^* + LL^*)\Sigma^* = (KK^* + LL^*)\Sigma^{-1}.$$

Usando la igualdad (2.5) se llega a que $\Sigma^* = \Sigma^{-1}$. Como Σ es una matriz diagonal con entradas positivas se obtiene $\Sigma^2 = I_r$, de donde a su vez se deduce que $\Sigma = I_r$. La otra implicación se sigue inmediatamente de las ecuaciones (2.12) y (2.13).
(b) Sea $A \in \mathbb{C}_n^{I}$. De (1.1) se tiene que $A^2 = A$, o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} (\Sigma K)^2 & \Sigma K \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que a su vez equivale a

$$(\Sigma K)^2 = \Sigma K \tag{2.14}$$

y

$$\Sigma K \Sigma L = \Sigma L. \tag{2.15}$$

Multiplicando a derecha por las matrices K^* y L^* en (2.14) y (2.15), respectivamente, y luego sumando ambas expresiones se obtiene que

$$\Sigma K \Sigma K K^* + \Sigma K \Sigma L L^* = \Sigma K K^* + \Sigma L L^*,$$

que a su vez implica que

$$\Sigma K \Sigma (KK^* + LL^*) = \Sigma(KK^* + LL^*).$$

En consecuencia, de (2.5) se sigue que $\Sigma K = I_r$.

Recíprocamente, si $\Sigma K = I_r$, claramente de las ecuaciones (2.14) y (2.15) se sigue que $A^2 = A$, es decir, $A \in \mathbb{C}_n^I$.

(c) Sea $A \in \mathbb{C}_n^{IH}$. De (1.3) y (2.10) se tiene que $A^2 = A^* = A = A^\dagger$. En consecuencia, de los apartados (a) y (b) se deduce que

$$\Sigma = I_r \qquad \text{y} \qquad K = I_r. \tag{2.16}$$

Por otro lado, de (2.5) y (2.16) se obtiene que $L = 0$.

La implicación recíproca es trivial.

(d) Sea $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$. De (2.11) se tiene que $AA^\dagger = A^\dagger A$, lo cual es equivalente a

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^*K & K^*L \\ L^*K & L^*L \end{bmatrix},$$

que a su vez equivale a

$$K^*K = I_r, \tag{2.17}$$

$$L^*K = 0 \tag{2.18}$$

y

$$L^*L = 0. \tag{2.19}$$

Multiplicando a derecha por K^* y L^* en (2.18) y (2.19), respectivamente, y sumando las nuevas expresiones se obtiene

$$L^*(KK^* + LL^*) = 0.$$

En consecuencia, a partir de la ecuación (2.5) se obtiene que $L = 0$.

Para probar la implicación recíproca, basta ver que las ecuaciones (2.17), (2.18) y (2.19) se satisfacen. Sea entonces $L = 0$. Es claro que (2.18) y (2.19) se satisfacen. Por otro lado, aplicando (2.5) se obtiene que (2.17).

(e) Sea $A \in \mathbb{C}_n^T$. De (1.4) se tiene que $A^3 = A$, es decir,

$$U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^3 & (\Sigma K)^2 \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

o equivalentemente

$$(\Sigma K)^3 = \Sigma K \tag{2.20}$$

y

$$(\Sigma K)^2 \Sigma L = \Sigma L. \tag{2.21}$$

A partir de (2.20) y (2.21) es fácil ver que

$$(\Sigma K)^2 \Sigma (KK^* + LL^*) = \Sigma (KK^* + LL^*),$$

de donde se deduce que

$$(\Sigma K)^2 = I_r.$$

Recíprocamente, si $(\Sigma K)^2 = I_r$, nuevamente de las ecuaciones (2.20) y (2.21) es inmediato ver que $A^3 = A$, y por lo tanto $A \in \mathbb{C}_n^T$. $\square$

Capítulo 3

La inversa core

A partir de las inversas de grupo y de Moore-Penrose es posible considerar una nueva inversa generalizada, llamada *inversa core*.

3.1. Definición, existencia y unicidad

En esta sección se presenta la definición de la inversa core la cual fue introducida en el año 2010 por los autores O. Baksalary y G. Trenkler [3]. Luego, se estudia su existencia y unicidad. Además se obtiene una representación canónica para la inversa core usando la descomposición de Hartwig-Spindelböck. Se finaliza esta sección mostrando un ejemplo que ilustra los pasos a seguir para calcular la inversa core a partir de su representación canónica.

Definición 3.1.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la **inversa core** de la matriz A si cumple las siguientes condiciones

(a) $AX = P_A$, donde $P_A = AA^\dagger$,

(b) $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Como en el caso de existir dicha matriz X, se probará que es única (véase Teorema 3.1.4), se denotará por $A^{\text{\textcircled{\#}}}$.

Observación 3.1.2. A partir de la definición de la inversa core, es evidente que cuando la matriz A es invertible $A^{\text{\textcircled{\#}}} = A^{-1}$.

El siguiente resultado provee una condición necesaria para la existencia de la inversa core.

Proposición 3.1.3. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si la matriz A admite una inversa core $A^{\#\!\!\!\bigcirc}$ entonces $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$.

Demostración. Sea $A^{\#\!\!\!\bigcirc}$ una inversa core de A. Por el Teorema 2.1.11, basta probar que

$$\mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(A).$$

Del apartado (a) de la Definición 3.1.1, se tiene que

$$AA^{\#\!\!\!\bigcirc} = AA^{\dagger}.$$

Multiplicando a derecha la ecuación anterior por la matriz A se obtiene que

$$AA^{\#\!\!\!\bigcirc}A = AA^{\dagger}A = A.$$

Luego, aplicando el Teorema 1.2.4 (d) se sigue que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AA^{\#\!\!\!\bigcirc}A) \leq \mathrm{rg}(AA^{\#\!\!\!\bigcirc}) \leq \mathrm{rg}(A),$$

es decir,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AA^{\#\!\!\!\bigcirc}). \tag{3.1}$$

Por otro lado, utilizando el apartado (b) de la Definición 3.1.1 y el Teorema 1.2.4 (b), se tiene que

$$A^{\#\!\!\!\bigcirc} = AY,$$

para alguna matriz $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Por lo tanto, si se multiplica a izquierda por la matriz A en la ecuación anterior se obtiene que

$$AA^{\#\!\!\!\bigcirc} = A^2Y,$$

lo cual a su vez implica que

$$\mathrm{rg}(AA^{\#\!\!\!\bigcirc}) = \mathrm{rg}(A^2Y) \leq \mathrm{rg}(A^2) \leq \mathrm{rg}(A),$$

es decir,

$$\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(AA^{\oplus}). \tag{3.2}$$

Finalmente, de (3.1) y (3.2) se deduce que

$$\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(A).$$

□

Como la existencia y unicidad de la inversa core está garantizada en el caso de que $\operatorname{Ind}(A) = 0$ (Véase la Observación 3.1.2), de la Proposición 3.1.3 basta analizar el caso para el cual $\operatorname{Ind}(A) = 1$.

Teorema 3.1.4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ind}(A) = 1$. Entonces la inversa core $A^{\oplus}$ de A existe y es única.

Demostración. Unicidad. Sean X_1, X_2 dos matrices que satisfacen la Definición 3.1.1. Del apartado (a) de la Definición 3.1.1, se tiene que

$$AX_1 = AA^{\dagger} \qquad \text{y} \qquad AX_2 = AA^{\dagger},$$

lo cual a su vez implica que

$$A(X_1 - X_2) = 0.$$

Luego, aplicando el Teorema 1.2.4 (e) se obtiene que

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A). \tag{3.3}$$

Por otro lado, del apartado (b) de la Definición 3.1.1 se sabe que $\mathcal{R}(X_1) \subseteq \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{R}(X_2) \subseteq \mathcal{R}(A)$, lo cual implica

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A). \tag{3.4}$$

Ahora, (3.3) y (3.4) conducen a

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A).$$

Como por hipótesis se tiene que $\operatorname{Ind}(A) = 1$, entonces la Proposición 2.1.10 implica que

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\},$$

de donde se deduce que $X_1 = X_2$.

Existencia. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representada como en (2.4). A partir del Lema 2.2.5, la siguiente matriz está bien definida

$$X := U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.5}$$

A continuación, se verifica que la matriz X dada en (3.5) satisface las ecuaciones de la Definición 3.1.1. En efecto, de (2.7) se tiene que

$$\begin{aligned} AX &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)(\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= AA^\dagger. \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando las representaciones dadas en (2.7) y (3.5), es fácil verificar que

$$X = AA^\dagger X.$$

Luego, aplicando el Teorema 1.2.4 (a), se deduce que

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(AA^\dagger X) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

Finalmente, como se probó en la primera parte de esta demostración que si existe la inversa core, es única, se deduce que $X = A^{\oplus}$.

□

En el siguiente resultado se demuestra la implicación recíproca de la Proposición 3.1.3 y además se establece una representación canónica de la inversa core.

Corolario 3.1.5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en la forma (2.4) tal que $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$. Entonces la matriz A admite inversa core y viene dada por

$$A^{\oplus} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.6}$$

Demostración. Si $\mathrm{Ind}(A) = 0$, es claro que A es invertible y por lo tanto $A^{\oplus} = A^{-1}$. Por otro lado, si $\mathrm{Ind}(A) = 1$ entonces por el Teorema 3.1.4 se sabe que la inversa core $A^{\oplus}$ de A existe y es única. Más aún, si A está representada como en (2.4), como la existencia en el Teorema 3.1.4 se probó de manera constructiva, la expresión (3.6) es válida. □

Observación 3.1.6. A partir de la Proposición 3.1.3 y el Corolario 3.1.5 se tiene que A admite una (única) inversa core si y sólo si $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$.

De ahora en adelante, por cuestiones de sencillez en la notación, las matrices que admiten inversa core, se denotarán por $\mathbb{C}_n^C$, es decir,

$$\mathbb{C}_n^C := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^{\oplus} \text{ existe}\} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(A)\}. \tag{3.7}$$

A continuación, se muestra un ejemplo que ilustra una manera de obtener la inversa core, a partir de la representación obtenida en (3.6).

Ejemplo 3.1.7. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Al calcular A^2 se obtiene que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente se puede observar que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2) = 2$. Luego por el Teorema 2.1.11 se tiene que $\mathrm{Ind}(A) = 1$ y por lo tanto se puede asegurar la existencia de la inversa core de A.

Por otro lado, calculando la descomposición de Hartwig-Spindelböck de A se tiene que

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\0&1&0&-1\\\hline 0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

donde el bloque correspondiente a la matriz ΣK queda determinado por

$$\Sigma K=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},$$

y así se obtiene que

$$(\Sigma K)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

Finalmente, aplicando (3.6) se sigue que

$$\begin{aligned}A^{\text{\textcircled{\#}}} &= \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A continuación se verifica que la matriz $A^{\text{\textcircled{\#}}}$ obtenida en el Ejemplo 3.1.7 efectivamente satisface las dos ecuaciones de la Definición 3.1.1.

(a) $AA^{\text{\textcircled{\#}}}=AA^{\dagger}$.

Por un lado, se tiene que

$$A^{\dagger}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{5}&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{5}&0&0\end{bmatrix}.$$

Luego, realizando el producto $AA^\dagger$, se obtiene que

$$AA^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = AA^{\oplus}. \tag{3.8}$$

(b) $\mathcal{R}(A^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Esta inclusión es evidente, puesto que

$$\mathcal{R}(A^{\oplus}) = \mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

3.2. Propiedades y caracterizaciones

En esta sección se estudian distintas propiedades de la inversa core y su relación con algunas clases matriciales conocidas. Además, se dan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales la inversa core coincide con la inversas de grupo y la inversa de Moore-Penrose.

Se comienza esta sección mostrando una relación entre los proyectores ortogonales $P_A = AA^\dagger$ y $P_{A^{\oplus}} = A^{\oplus}(A^{\oplus})^\dagger$ asociados, respectivamente, a una cierta matriz A y a su inversa core $A^{\oplus}$.

Proposición 3.2.1. Sean $A \in \mathbb{C}_n^C$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $P_A = P_{A^{\oplus}}$.

(b) $P_A = P_{A^m}$.

Demostración. Para probar ambos apartados se supone que A está representada en la forma dada en (2.4). Es decir,

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

donde $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es invertible y $KK^* + LL^* = I_r$.

(a) De (3.6) se sigue que

$$A^{\text{\textcircled{\#}}} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

En consecuencia, aplicando el apartado (f) de la Proposición 2.1.4 se obtiene que

$$(A^{\text{\textcircled{\#}}})^\dagger = U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

A partir de las dos representaciones anteriores y de (2.7) se deduce que

$$P_A^{\text{\textcircled{\#}}} = A^{\text{\textcircled{\#}}}(A^{\text{\textcircled{\#}}})^\dagger = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = P_A.$$

(b) Es sabido que P_A y P_{A^m} son proyectores ortogonales sobre el espacio imagen de A y A^m, respectivamente. Como dos proyectores ortogonales son iguales si y sólo si tienen igual espacio imagen, del hecho que A tiene índice a lo sumo 1, se puede deducir fácilmente que $P_A = P_{A^m}$, para $m \geq \mathrm{Ind}(A) = 1$. $\square$

El siguiente teorema establece algunas representaciones de la inversa core y su importante conexión con la inversa de Moore-Penrose y la inversa de grupo.

Teorema 3.2.2. Sean $A \in \mathbb{C}_n^C$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $A^{\text{\textcircled{\#}}} = A^\# P_A$.

(b) $(A^{\text{\textcircled{\#}}})^\dagger = AP_A$.

(c) $A^{\text{\textcircled{\#}}} \in \mathbb{C}_n^{RH}$.

(d) $(A^{\text{\textcircled{\#}}})^\# = (A^{\text{\textcircled{\#}}})^\dagger$.

(e) $(A^{\text{\textcircled{\#}}})^{\text{\textcircled{\#}}} = AP_A$.

(f) $A^{\text{\textcircled{\#}}} \in A\{1,2\}$.

(g) $(A^{\text{\textcircled{\#}}})^2 A = A^\#$.

(h) $(A^{\oplus})^m = (A^m)^{\oplus}$.

(i) $A^{\oplus}A = A^{\#}A$.

(j) $(A^{\oplus})^{\oplus} = (A^{\oplus})^{\dagger}$

Demostración. Para las siguientes demostraciones se considera la matriz A representada como en (2.4) y las representaciones de las inversas $A^{\dagger}$, $A^{\#}$ y $A^{\oplus}$ dadas en (2.6), (2.8) y (3.6), respectivamente.

(a) De (2.7) y (2.8) se tiene que

$$\begin{aligned} A^{\#}P_A &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= A^{\oplus}. \end{aligned}$$

(b) Utilizando el apartado (f) de la Proposición 2.1.4 se sigue que

$$\begin{aligned} (A^{\oplus})^{\dagger} &= \left(U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right)^{\dagger} \\ &= U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= AP_A. \end{aligned} \tag{3.9}$$

(c) Por (2.11) se sabe que $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_n^{RH}$ si y sólo si

$$A^{\oplus}(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^{\oplus})^{\dagger}A^{\oplus}. \tag{3.10}$$

Además, del apartado (b) de la Proposición 3.2.1 se sabe que

$$A^{\oplus}(A^{\oplus})^{\dagger} = P_{A^{\oplus}} = P_A. \tag{3.11}$$

Por otro lado, de (3.6) y (3.9) se obtiene que

$$\begin{aligned}(A^{\oplus})^{\dagger}A^{\oplus} &= U\begin{bmatrix}\Sigma K & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\Sigma K)^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^{*} \qquad (3.12)\\ &= U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^{*} = P_A. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Finalmente, de (3.11) y (3.13) se sigue (3.10), es decir, $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_n^{RH}$.

(d) Es conocido que una matriz B es rango hermítica si y sólo si $B^{\dagger} = B^{\#}$. Luego, de la afirmación probada en el apartado (c) se deduce que la inversa de grupo de $A^{\oplus}$ coincide con la inversa Moore-Penrose de $A^{\oplus}$.

(e) Aplicando las afirmaciones probadas en los apartados (a), (b), (d) y el apartado (a) de la Proposición 3.2.1 se deduce que

$$\begin{aligned}(A^{\oplus})^{\oplus} &= (A^{\oplus})^{\#}P_{A^{\oplus}}\\ &= (A^{\oplus})^{\dagger}P_A\\ &= AP_AP_A\\ &= AP_A.\end{aligned}$$

(f) A partir de la igualdad dada en (a) se tiene que $A^{\oplus} = A^{\#}P_A$. Luego, multiplicando a derecha y a izquierda de la igualdad anterior por la matriz A, se obtiene que

$$\begin{aligned}AA^{\oplus}A &= AA^{\#}P_AA\\ &= AA^{\#}A\\ &= A.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A^{\oplus}$ es una $\{1\}$-inversa de A.

Por otro lado, utilizando nuevamente la representación de la inversa core dada en el apartado (a), se tiene que

$$\begin{aligned}A^{\oplus}AA^{\oplus} &= A^{\#}P_AAA^{\#}P_A\\ &= A^{\#}AA^{\#}P_A\\ &= A^{\#}P_A\\ &= A^{\oplus},\end{aligned}$$

es decir, $A^{\oplus}$ es una $\{2\}$-inversa de A.

(g) Utilizando las representaciones de A y $A^{\oplus}$, se sigue que

$$\begin{aligned}(A^{\oplus})^2 A &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= A^{\#}.\end{aligned}$$

(h) El apartado (a) implica que

$$(A^m)^{\oplus} = (A^m)^{\#} P_{A^m}.$$

Además, de la Proposición 2.1.12 (c), se sabe que $(A^m)^{\#} = (A^{\#})^m$, de donde se obtiene

$$(A^m)^{\oplus} = (A^{\#})^m P_{A^m}.$$

Como por hipótesis se sabe que $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$, la Proposición 3.2.1 (b) implica que $P_{A^m} = P_A$. Finalmente, utilizando la expresión para la inversa de grupo de A dada en (2.8) y la representación del proyector P_A dada en (2.7) se deduce que

$$(A^{\#})^m P_A = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = (A^{\oplus})^m.$$

(i) Se sigue inmediatamente del apartado (a).

(j) Se sigue inmediatamente de los apartados (b) y (e). □

Es conocido que la inversa de grupo de A (siempre que exista) puede ser calculada mediante la fórmula $A^{\#} = A(A^3)^{\dagger}A$ (Véase la Proposición 2.1.12 (d)). De manera similar, a partir del apartado (b) del teorema anterior se puede obtener una expresión para la inversa core en términos de la inversa de Moore-Penrose y la matriz A. Esto es útil a la hora de calcular la inversa core, puesto que en los distintos paquetes informáticos la inversa Moore-Penrose se encuentra programada. Más precisamente, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3. Sea $A \in \mathbb{C}_n^C$. Entonces se satisface la siguiente igualdad

$$A^{\oplus} = (A^2 A^{\dagger})^{\dagger}.$$

Demostración. La prueba es consecuencia inmediata del apartado (b) del Teorema 3.2.2 y el apartado (a) de la Proposición 2.1.4. □

Es natural preguntarse si la inversa core coincide con algunas de las inversas clásicas, ya sea la inversa de grupo o la inversa de Moore-Penrose. A continuación se muestra un ejemplo en donde esto no sucede.

Ejemplo 3.2.4. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Se calcula en primer lugar la inversa de Moore-Penrose de A, la cual resulta

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, es claro que $\mathrm{Ind}(A) = 1$. Por lo tanto, la inversa de grupo y la inversa core de A existen. Las mismas pueden ser calculadas fácilmente usando la Proposición 2.1.12 (d) y el Corolario 3.2.3, respectivamente. Es decir,

$$A^{\#} = A(A^3)^{\dagger}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{\oplus} = (A^2A^{\dagger})^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se observa que las tres inversas son distintas.

En el siguiente resultado se establece bajo qué condiciones la inversa core coincide con distintas transformaciones de la matriz A. Estas condiciones están íntimamente ligadas a algunas clases matriciales bien conocidas en la literatura.

Teorema 3.2.5. Sea $A \in \mathbb{C}_n^C$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(a) $A^{\oplus} = 0$ si y sólo si $A = 0$.

(b) $A^{\oplus} = P_A$ si y sólo si $A \in \mathbb{C}_n^I$.

(c) $A^{\oplus} = A^\dagger$ si y sólo si $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$.

(d) $A^{\oplus} = A^\#$ si y sólo si $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$.

(e) $A^{\oplus} = A$ si y sólo si $A \in \mathbb{C}_n^T \cap \mathbb{C}_n^{RH}$.

(f) $A^{\oplus} = A^*$ si y sólo si $A \in \mathbb{C}_{n,n}^{PI} \cap \mathbb{C}_n^{RH}$.

Demostración. Sea la matriz A representada como en (2.4).
(a) Si se supone que $A^{\oplus} = 0$, por el apartado (a) del Teorema 3.2.2 se tiene que

$$A^\# P_A = 0.$$

Ahora, multiplicando la igualdad anterior a derecha e izquierda por la matriz A se obtiene que $AA^\# P_A A = 0$, de donde $AA^\# A = 0$ y, finalmente, $A = 0$.

Recíprocamente, si $A = 0$, es inmediato ver que la matriz nula satisface las dos condiciones de la Definición 3.1.1 con lo que $A^{\oplus} = 0$.
(b) De (2.7) y (3.6) se sigue que $A^{\oplus} = P_A$ es equivalente a

$$(\Sigma K)^{-1} = I_r,$$

lo cual a su vez equivale a

$$\Sigma K = I_r. \tag{3.14}$$

Ahora, del apartado (b) del Lema 2.2.7 y (3.14) se concluye la equivalencia.
(c) Suponiendo que $A^{\oplus} = A^\dagger$ es válido, del apartado (c) del Teorema 3.2.2 se sigue inmediatamente que $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$ pues $(A^\dagger)^\dagger = A$.

Recíprocamente, si $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$ del Lema 2.2.7 (d) se tiene que $L = 0$ y, por lo tanto, $K^* = K^{-1}$. Luego, de (2.6) y (3.6), se sigue que

$$\begin{aligned} A^\dagger &= U \begin{bmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} K^{-1}\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= \\ &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= A^{\oplus}. \end{aligned}$$

(d) La demostración es totalmente análoga a la realizada en el apartado (c), utilizando la representación de la inversa de grupo dada en (2.8).
(e) De (2.4) y (3.6) es claro que $A^{\oplus} = A$ es equivalente a

$$\begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que a su vez equivale a

$$L = 0 \qquad \text{y} \qquad (\Sigma K)^2 = I_r. \tag{3.15}$$

Ahora, de (3.15) y los apartados (d) y (e) del Lema 2.2.7 se deduce que $A^{\oplus} = A$ si y sólo si $A \in \mathbb{C}_n^T \cap \mathbb{C}_n^{RH}$.
(f) De (2.4) y (3.6) se tiene que $A^{\oplus} = A^*$ es equivalente a

$$L = 0 \text{ (y, por lo tanto, } K^{-1} = K^*) \quad \text{y} \quad (\Sigma K)^{-1} = (\Sigma K)^*,$$

lo cual a su vez por (2.5) es equivalente a

$$L = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma^{-1} = \Sigma^*. \tag{3.16}$$

Como Σ es una matriz diagonal con entradas positivas se sigue que (3.16) es equivalente a

$$L = 0 \qquad \text{y} \qquad \Sigma = I_r. \tag{3.17}$$

Finalmente, de (3.17) y los apartados (a) y (d) del Lema 2.2.7 se concluye la equivalencia buscada.

$\square$

Algunas de las caracterizaciones más usuales de una matriz rango hermítica son las siguientes:

$$A \in \mathbb{C}_n^{RH} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*) \quad \Longleftrightarrow \quad AA^\dagger = A^\dagger A \quad \Longleftrightarrow \quad A^\# = A^\dagger.$$

En los apartados (c) y (d) del Teorema 3.2.5 se obtuvieron dos nuevas caracterizaciones de matrices rango hermíticas para agregar a la lista anterior. A continuación se muestran otras nuevas condiciones que caracterizan a las matrices rango hermíticas.

Teorema 3.2.6. Sea $A \in \mathbb{C}_n^C$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$.

(b) $(A^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = A$.

(c) $A^{\textcircled{\#}} A = AA^{\textcircled{\#}}$.

(d) $(A^\dagger)^{\textcircled{\#}} = A$.

(e) $(A^{\textcircled{\#}})^\dagger = (A^\dagger)^{\textcircled{\#}}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Asumiendo que se cumple $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$ y aplicando el Teorema 3.2.5 (c) se obtiene que

$$(A^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = (A^\dagger)^{\textcircled{\#}}.$$

Como $A^\dagger \in \mathbb{C}_n^{RH}$, aplicando nuevamente el Teorema 3.2.5 (c) y utilizando la Proposición 2.1.4 (a), se sigue que

$$(A^\dagger)^{\textcircled{\#}} = (A^\dagger)^\dagger = A,$$

de donde se concluye (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Se supone que $(A^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = A$. Por el Teorema 3.2.2 (e) se sigue que $AP_A = A$.

Se considera ahora A escrita en la forma dada en (2.4). Luego, de (2.7) se sigue que la igualdad $AP_A = A$ es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que a su vez equivale a $L = 0$. En consecuencia, de (3.6), (2.7) y la Proposición 3.2.1 (a) se sigue que

$$\begin{aligned} A^{\oplus}A &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = P_A \\ &= P_{A^{\oplus}} \\ &= AA^{\oplus}. \end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (d) Se utilizan las representaciones dadas en (2.4), (2.6), (2.8) y (3.6) de las matrices A, $A^\dagger$, $A^\#$ y $A^{\oplus}$, respectivamente.
Utilizando el apartado (a) del Teorema 3.2.2, se tiene que

$$(A^\dagger)^{\oplus} = (A^\dagger)^\# P_{A^\dagger}.$$

Por otro lado, es fácil verificar que

$$(A^\dagger)^\# = U \begin{bmatrix} \Sigma (K^*)^{-1} & 0 \\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma\,(K^*)^{-1} & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

pues la matriz del miembro derecho de la expresión anterior satisface las tres ecuaciones de la Definición 2.1.5 de la inversa de grupo de $A^\dagger$. Además, el proyector ortogonal $P_{A^\dagger}$ puede ser calculado como sigue

$$P_{A^\dagger} = A^\dagger A = U \begin{bmatrix} K^*K & K^*L \\ L^*K & L^*L \end{bmatrix} U^*.$$

Realizando el producto entre $(A^\dagger)^\#$ y $P_{A^\dagger}$, se obtiene que

$$(A^\dagger)^{\oplus} = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma K & L^*(K^*)^{-1}\Sigma L \end{bmatrix} U^*. \tag{3.18}$$

Ahora, utilizando las formas canónicas para A y $A^{\oplus}$, de la hipótesis $A^{\oplus}A = AA^{\oplus}$ se deduce que $L = 0$. En consecuencia, de (3.18) se concluye que $(A^\dagger)^{\oplus} = A$.

(d) $\Rightarrow$ (e) A partir de la representación obtenida en (3.18), es fácil ver que la igualdad $(A^\dagger)^{\oplus} = A$ es equivalente a

$$L^*(K^*)^{-1}\Sigma K = 0 \qquad \text{y} \qquad L^*(K^*)^{-1}\Sigma L = 0,$$

lo cual a su vez implica que $L = 0$. En consecuencia, de (3.18) se sigue que

$$(A^\dagger)^{\oplus} = U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.19}$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 3.2.2 (b) y utilizando las representaciones (2.4) y (2.7) se obtiene que

$$(A^{\oplus})^\dagger = AP_A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.20}$$

Finalmente de (3.19) y (3.20) se obtiene la implicación buscada.

(e) $\Rightarrow$ (a) De (3.18) y (3.20), es evidente que al igualar los bloques correspondientes de la igualdad $(A^{\oplus})^\dagger = (A^\dagger)^{\oplus}$ se deduce que $L = 0$. Luego, utilizando el apartado (e) del Lema 2.2.7 se tiene que $A \in \mathbb{C}_n^{RH}$. $\square$

3.3. Otra caracterización y representación de la inversa core

En la siguiente sección se estudia una nueva caracterización y se proporciona una nueva representación para la inversa core.

Si se considera la matriz $A \in \mathbb{C}_n^{C}$ representada como en (2.4) y la representación del proyector ortogonal P_A dada en (2.7), es decir,

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \qquad \text{y} \qquad P_A = AA^\dagger = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

es inmediato deducir que

$$A + I_n - AA^\dagger = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} U^*. \tag{3.21}$$

A continuación se muestra que la matriz obtenida en (3.21) es invertible.

Se considera la matriz

$$M := U \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} U^*,$$

particionada de acuerdo a los bloques de la matriz dada en (3.21).

Luego, la matriz M es la inversa (ordinaria) de $A + I_n - AA^\dagger$ si y sólo si

$$(A + I_n - AA^\dagger)M = M(A + I_n - AA^\dagger) = I_n.$$

Es conocido que es suficiente probar que la matriz M cumpla una de las condiciones de las igualdades anteriores para concluir que M es la inversa de $A + I_n - AA^\dagger$.

Por lo tanto, basta operar, por ejemplo, con $(A + I_n - AA^\dagger)M = I_n$, lo cual es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Realizando el producto e igualando los bloques de la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \Sigma KX + \Sigma LZ &= I_r, && (3.22) \\ \Sigma KY + \Sigma LW &= 0, && (3.23) \\ Z &= 0, && (3.24) \\ W &= I_{n-r}. && (3.25) \end{aligned}$$

Como A tiene índice a lo sumo 1, por el Lemma 2.2.5 se deduce que ΣK es invertible. En consecuencia, manipulando las ecuaciones (3.22)-(3.25) es fácil obtener las siguientes expresiones para los bloques de M:

$$X = (\Sigma K)^{-1}, \quad Y = -(\Sigma K)^{-1}\Sigma L, \quad Z = 0, \quad W = I_{n-r}.$$

Finalmente, la inversa buscada queda representada de la siguiente forma

$$\left(A + I_n - AA^\dagger\right)^{-1} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & -(\Sigma K)^{-1}\Sigma L \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} U^*. \tag{3.26}$$

Antes de dar el resultado principal de esta sección es necesario la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. Sean $A, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $AXA = A$ y $(AX)^* = (AX)$.

(b) $AX = AA^\dagger$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz que satisface las dos condiciones del apartado (a). Entonces,

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= (AXA)A^\dagger \\ &= (AX)(AA^\dagger) \\ &= (AX)^*(AA^\dagger)^* \\ &= X^*A^*(A^\dagger)^*A^* \\ &= X^*A^*(A^*)^\dagger A^* \\ &= X^*A^* \\ &= (AX)^* \\ &= AX. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AX = AA^\dagger$. Multiplicando en ambos miembros de la igualdad anterior a derecha por A, se obtiene que

$$AXA = AA^\dagger A = A.$$

Por otro lado, como $AA^\dagger$ es hermítica se deduce que AX también lo es, es decir, $(AX)^* = AX$. Esto concluye la prueba. □

Teorema 3.3.2. Sea $A \in \mathbb{C}_n^C$. Entonces la inversa core de A es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las tres ecuaciones matriciales siguientes

$$(1)\, AXA = A, \qquad (2')\, AX^2 = X \qquad \text{y} \qquad (3)\, AX = (AX)^*. \tag{3.27}$$

Además,

$$A^{\oplus} = (A + I_n - AA^\dagger)^{-1}AA^\dagger.$$

Demostración. Sea X una solución de las ecuaciones (1) y (3) dadas en (3.27). Luego, por la Proposición 3.3.1 se sigue que

$$AX = AA^{\dagger}.$$

Por otro lado, de $(2')$ se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= X - AX^2 \\ &= X - AX^2 + AX - AX \\ &= (A + I_n - AX)X - AX \\ &= (A + I_n - AA^{\dagger})X - AA^{\dagger}. \end{aligned}$$

Ahora, despejando X de la ecuación anterior y utilizando el hecho que $A + I_n - AA^{\dagger}$ es una matriz invertible, se obtiene que

$$X = (A + I_n - AA^{\dagger})^{-1}AA^{\dagger},$$

es la única solución de $(2')$.

De (3.26) y la representación para $AA^{\dagger}$ dada al principio de esta sección, se deduce que

$$X = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & -(\Sigma K)^{-1}\Sigma L \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Finalmente, aplicando el Corolario 3.1.5 y el Teorema 3.1.4 se obtiene que X es la inversa core de A, esto es, $X = A^{\oplus}$. $\square$

A continuación se da una demostración alternativa del Teorema 3.3.2 probando directamente que las ecuaciones (1), $(2')$ y (3) involucradas en dicho teorema, son equivalentes a las ecuaciones que definen a la inversa core (Ver Definición 3.1.1).

Teorema 3.3.3. Sea $A \in \mathbb{C}_n^C$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $AXA = A$, $AX^2 = X$, $AX = (AX)^*$.

(b) $AX = P_A$, $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) De la ecuación $AXA = A$, se sigue que $(AX)^2 = AX$. Más aún,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AXA) \subseteq \mathcal{R}(AX) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

En consecuencia, como $AX = (AX)^*$ se deduce que AX es un proyector ortogonal sobre el subespacio $\mathcal{R}(A)$. Ahora, por la Proposición 3.3.1 se obtiene que

$$AX = P_A.$$

Por otro lado, de la ecuación $AX^2 = X$ se sigue que

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(AX^2) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Multiplicando a derecha por A en la ecuación $AX = P_A$, se obtiene que

$$AXA = P_A A = A.$$

Por otro lado, multiplicando a derecha por X en la ecuación $AX = P_A$, de la condición $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$ y la Proposición 2.2.4, se tiene que

$$AX^2 = P_A X = X.$$

Finalmente, como P_A es un proyector ortogonal y además $AX = P_A$, claramente se cumple que $AX = (AX)^*$. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones de la inversa core

A pesar de ser una inversa generalizada reciente, la inversa core puede ser utilizada en una serie de aplicaciones concretas. A continuación se presentan tres de ellas.

4.1. Inversa core del producto de proyectores ortogonales

En esta sección se presenta un resultado que establece una fórmula para calcular la inversa core del producto de dos proyectores ortogonales.

Teorema 4.1.1. Sean $A, B \in \mathbb{C}_n^{IH}$. Entonces $(AB)^{\oplus} = (ABA)^{\dagger}$.

Demostración. Sea A representada en la forma (2.4), es decir,

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

donde $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es invertible y $KK^* + LL^* = I_r$. Además, se considera la siguiente partición

$$B = U \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} U^*,$$

donde $X \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $W \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$. Como $A \in \mathbb{C}_n^{IH}$, del Lema 2.2.7 (c) se tiene que

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Por otro lado, como $B \in \mathbb{C}_n^{IH}$ es claro que $B = B^*$ lo cual conduce a

$$X = X^*, \quad Y = Z^* \quad \text{y} \quad W = W^*. \tag{4.1}$$

Como además $B = B^2$, de (4.1) se obtiene que

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^* & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^2 + YY^* & XY + YW \\ Y^*X + WY^* & Y^*Y + W^2 \end{bmatrix},$$

de donde se sigue que

$$X = X^2 + YY^*. \tag{4.2}$$

Luego, (4.2) implica que

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(X) &= \operatorname{rg}\left(X^2 + YY^*\right) \\ &= \operatorname{rg}(XX^* + YY^*) \\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X),$$

lo cual a su vez, por la Proposición 2.2.4, es equivalente a

$$P_X Y = Y. \tag{4.3}$$

Por otro lado, realizando el producto entre A y B se obtiene que

$$AB = U \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{4.4}$$

Ahora, multiplicando a derecha por la matriz A en la ecuación anterior, se tiene que

$$ABA = U \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Luego, aplicando el apartado (g) de la Proposición 2.1.4 se sigue que

$$(ABA)^{\dagger} = U \begin{bmatrix} X^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{4.5}$$

Por otro lado, por el apartado (a) del Teorema 3.2.2 se sabe que

$$(AB)^{\oplus} = (AB)^{\#} P_{AB}, \tag{4.6}$$

siempre que $(AB)^{\#}$ exista. Queda por demostrar que las matrices indicadas en (4.5) y (4.6) coinciden.

En primer lugar se muestra que la inversa de grupo de AB existe. En efecto, si se considera la matriz definida por

$$M := U \begin{bmatrix} X^{\dagger} & (X^{\dagger})^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

aplicando (4.1) y (4.3) se sigue que

$$\begin{aligned} (AB)M(AB) &= U \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{\dagger} & (X^{\dagger})^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} XX^{\dagger} & X(X^{\dagger})^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} XX^{\dagger}X & XX^{\dagger}Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= AB. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} M(AB)M &= U \begin{bmatrix} X^{\dagger} & (X^{\dagger})^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{\dagger} & (X^{\dagger})^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X^{\dagger}XX^{\dagger} & X^{\dagger}X(X^{\dagger})^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X^{\dagger} & (X^{\dagger})^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= M. \end{aligned}$$

Como toda matriz hermítica es rango hermítica se tiene que

$$\begin{aligned}
M(AB) &= U \begin{bmatrix} X^\dagger & (X^\dagger)^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X^\dagger X & X^\dagger Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X X^\dagger & X(X^\dagger)^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^\dagger & (X^\dagger)^2 Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= (AB)M.
\end{aligned}$$

De esta manera, se ha probado que M satisface la Definición 2.1.5. Por lo tanto, por el Teorema 2.1.6 se sigue que $M = (AB)^{\#}$.

Si ahora se propone la matriz definida por

$$N := U \begin{bmatrix} P_X & 0 \\ Y^* X^\dagger & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

aplicando (4.1), (4.2) y (4.3) se sigue que

$$\begin{aligned}
(AB)N(AB) &= U \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_X & 0 \\ Y^* X^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X + YY^* X^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X^2 + YY^* P_X & XY + YY^* X^\dagger Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X^2 + Y(P_X Y)^* & XY + (X - X^2) X^\dagger Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X^2 + YY^* & XY + Y - XY \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= AB.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
N(AB)N &= U\begin{bmatrix} P_X & 0 \\ Y^*X^\dagger & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_X & 0 \\ Y^*X^\dagger & 0 \end{bmatrix}U^* \\
&= U\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^*P_X & Y^*X^\dagger Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_X & 0 \\ Y^*X^\dagger & 0 \end{bmatrix}U^* \\
&= U\begin{bmatrix} XP_X + YY^*X^\dagger & 0 \\ Y^*(P_X)^2 + Y^*X^\dagger YY^*X^\dagger & 0 \end{bmatrix}U^* \\
&= N,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
XP_X + YY^*X^\dagger &= XP_X + (X - X^2)X^\dagger \\
&= XP_X + XX^\dagger - XP_X \\
&= P_X
\end{aligned} \tag{4.7}$$

y

$$\begin{aligned}
Y^*(P_X)^2 + Y^*X^\dagger YY^*X^\dagger &= Y^*P_X + Y^*X^\dagger(X - X^2)X^\dagger \\
&= Y^*P_X + Y^*X^\dagger(XX^\dagger - X) \\
&= Y^*P_X + Y^*X^\dagger XX^\dagger - Y^*X^\dagger X \\
&= Y^*P_X + Y^*X^\dagger - Y^*P_X \\
&= Y^*X^\dagger.
\end{aligned}$$

Además, utilizando que $YY^*X^\dagger = XX^\dagger - X$ es hermítica,

$$\begin{aligned}
[(AB)N]^* &= \left(U\begin{bmatrix} X + YY^*X^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^*\right)^* \\
&= U\begin{bmatrix} X^* + (YY^*X^\dagger)^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* \\
&= U\begin{bmatrix} X + YY^*X^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* \\
&= (AB)N.
\end{aligned}$$

Por último, al ser X una matriz hermítica se tiene que

$$\begin{aligned}
(N(AB))^* &= \left(U\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^*P_X & Y^*X^\dagger Y\end{bmatrix}U^*\right)^* \\
&= U\begin{bmatrix} X^* & (Y^*P_X)^* \\ Y^* & (Y^*X^\dagger Y)^*\end{bmatrix}U^* \\
&= U\begin{bmatrix} X & P_XY \\ (P_XY)^* & Y^*(X^\dagger)^*Y\end{bmatrix}U^* \\
&= U\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^*P_X & Y^*X^\dagger Y\end{bmatrix}U^* \\
&= N(AB).
\end{aligned}$$

De esta manera se ha probado que N satisface la Definición 2.1.1. Por lo tanto, por el Teorema 2.1.2 se sigue que $N = (AB)^\dagger$.

En consecuencia, por (4.7), el proyector ortogonal P_{AB} viene dado por

$$P_{AB} = (AB)N = U\begin{bmatrix} X + YY^*X^\dagger & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}U^* = U\begin{bmatrix} P_X & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*.$$

Finalmente, de (4.6) la inversa core del producto AB resulta de la forma

$$(AB)^{\oplus} = U\begin{bmatrix} X^\dagger & (X^\dagger)^2Y \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_X & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}U^* = U\begin{bmatrix} X^\dagger & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*,$$

la cual coincide con la matriz obtenida en (4.5). Esto concluye la prueba. □

4.2. Aplicación a la resolución de un sistema de ecuaciones matriciales

En esta sección se presenta una aplicación de la inversa core para resolver un sistema interesante de ecuaciones matriciales, obteniendo las matrices que son $\{2\}$-inversas de una matriz A dada y tales que AX sea hermítica.

En [30, Corolario 2] se probó que, dada una matriz $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, la solución general $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las ecuaciones matriciales

$$XBX = X \qquad \text{y} \qquad (BX)^* = BX, \tag{4.8}$$

es de la siguiente forma

$$X = C(DBC)^{\simeq}D, \tag{4.9}$$

donde $(DBC)^{\simeq} \in (DBC)\{1,2,3\}$, con $C \in \mathbb{C}^{n\times p}$ arbitraria y $D \in \mathbb{C}^{q\times m}$ tal que $D^*D = I_m$.

Como la inversa core de una matriz $A \in \mathbb{C}_n^C$ es una $\{1,2,3\}$-inversa de A, es natural preguntarse si la expresión para la solución general X dada (4.9) puede escribirse de manera más simplificada en términos de la inversa core.
El siguiente resultado responde a esta situación para el caso particular en que $D = I_m$ y $p = q = m$.

Teorema 4.2.1. Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces la solución general del sistema matricial (4.8) puede ser expresada como

$$X = C(BC)^{\oplus},$$

donde $C \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es cualquier matriz que satisface la condición $BC \in \mathbb{C}_m^C$.

Demostración. Como $BC \in \mathbb{C}_m^C$, de la Definición 3.1.1 y el apartado (f) del Teorema 3.2.2 se tiene que $(BC)^{\oplus} \in (BC)\{1,2,3\}$.
En consecuencia, es claro que $X = C(BC)^{\oplus}$ satisface las ecuaciones dadas en (4.8). Resta probar que si $Z \in \mathbb{C}^{n\times m}$ satisface (4.8), entonces existe una matriz C tal que $Z = C(BC)^{\oplus}$. En efecto, puesto que $(BZ)^* = BZ$, es decir BZ es una matriz hermítica, es claro que BZ es core invertible. Ahora, tomando $C := Z$ se prueba que $Z = Z(BZ)^{\oplus}$. En efecto, aplicando el Teorema 3.2.2 (a), la Proposición 2.1.4 y

la Proposición 2.1.12 se obtiene que

$$\begin{aligned}
Z(BZ)^{\oplus} &= Z(BZ)^{\#}P_{BZ} \\
&= (ZBZ)(BZ)^{\#}BZ(BZ)^{\dagger} \\
&= ZBZ(BZ)^{\dagger} \\
&= ZB(ZBZ)(BZ)^{\dagger} \\
&= Z(BZ)^{*}\left[BZ(BZ)^{\dagger}\right]^{*} \\
&= Z\left[BZ(BZ)^{\dagger}BZ\right]^{*} \\
&= Z(BZ)^{*} \\
&= ZBZ \\
&= Z,
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

4.3. Cálculo de la inversa de Bott-Duffin

En esta sección se presenta una conexión de la inversa core con la bien conocida inversa de Boot-Duffin introducida en 1953 por los autores Raoul Boot y Richard Duffin en su famoso trabajo titulado *On the algebra of networks* [5]. Una de sus aplicaciones está ligada a la resolución de algunos sistemas lineales con restricciones que surgen en la teoría de redes eléctricas.

A continuación se recuerda la definición la inversa de Bott-Duffin.

Definición 4.3.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y L un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Si $AP_L + P_{L^\perp}$ es invertible, se define la inversa de Boot-Duffin de A con respecto a L, denotada por $A_L^{(-1)}$, como

$$A_L^{(-1)} = P_L[AP_L + P_{L^\perp}]^{-1}.$$

Como el proyector ortogonal $P_{L^\perp}$ puede escribirse como $P_{L^\perp} = I_n - P_L$, notar que la inversa de Bott-Duffin admite la siguiente expresión

$$A_L^{(-1)} = P_L[(A - I_n)P_L + I_n]^{-1}. \tag{4.10}$$

Para una matriz $A \in \mathbb{C}_n^C$ se puede demostrar que $(A - I_n)P_A + I_n$ es invertible. En efecto, a partir de las representaciones dadas en (2.4) y (2.7), se tiene que

$$\begin{aligned}(A - I_n)P_A + I_n &= U \begin{bmatrix} \Sigma K - I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* + U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} U^*.\end{aligned}$$

Como $A \in \mathbb{C}_n^C$, esto es, $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$, aplicando el Lema 2.2.5 se deduce que $(A - I_n)P_A + I_n$ es invertible.

De esta manera, si en la Definición 4.3.1 se elije el subespacio $L = \mathcal{R}(A)$ de $\mathbb{C}^n$ entonces la inversa de Bott-Duffin de A con respecto a $\mathcal{R}(A)$ siempre existe y viene dada por

$$\begin{aligned}A^{(-1)}_{\mathcal{R}(A)} &= P_A[(A - I_n)P_A + I_n]^{-1} \\ &= U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.\end{aligned}$$

A partir de la representación anterior y el Corolario 3.1.5 se concluye que la inversa de Bott-Duffin de A respecto a $\mathcal{R}(A)$ coincide con la inversa core de A, es decir,

$$A^{\oplus} = A^{(-1)}_{\mathcal{R}(A)} = P_A[(A - I_n)P_A + I_n]^{-1}. \tag{4.11}$$

Se finaliza esta sección observando que una manera alternativa de probar (4.11) es usando directamente el Teorema 3.3.2 y un caso especial de la *Fórmula de inversión de Duncan-Guttman* que afirma que si $I_n + MN$ es invertible, con $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces $I_n + NM$ es invertible. Más aún,

$$(MN + I_n)^{-1}M = M(NM + I_n)^{-1}. \tag{4.12}$$

En efecto, por el Teorema 3.3.2 se sabe que $A^{\oplus} = (A + I_n - P_A)^{-1}P_A$, que a su vez es claramente equivalente a $A^{\oplus} = (P_A(A - I_n) + I_n)^{-1}P_A$. Ahora, basta tomar $M = P_A$ y $N = A - I_n$ en (4.12) para obtener (4.11).

Conclusiones y líneas futuras

El estudio de la teoría de inversas generalizadas se ha incrementado considerablemente en la última década. Esto se ve reflejado en el gran número de artículos de investigación sobre estos temas que han sido publicados en revistas de carácter internacional con alto índice de impacto. Este es el caso de la inversa core, conocida en la literatura como la primera inversa generalizada en aparecer después de un largo período de tiempo dedicado específicamente al estudio de las inversas generalizadas clásicas como son, las inversas de Moore-Penrose, de Drazin y de grupo.

En el presente trabajo se estudió en profundidad la inversa core, mostrando en primer lugar su existencia, unicidad y caracterización (matrices cuadradas de índice a lo sumo uno). En segundo lugar, se presentaron sus principales propiedades y representaciones, algunas de las cuales fueron demostradas de una manera alternativa a las conocidas en los trabajos originales y otras fueron probadas en detalle para su mayor comprensión.

Por tal motivo, se han cubierto los objetivos planteados en la *Introducción* de esta tesis que a su vez conducen a plantearse nuevos problemas y preguntas acerca de esta reciente inversa generalizada. En este sentido, a continuación se da una lista de algunos posibles problemas concretos o líneas de estudio para continuar este trabajo:

(a) Estudiar nuevas propiedades, representaciones y caracterizaciones de algunas de las tres extensiones conocidas para la inversa core para el caso de matrices cuadradas de índice arbitrario introducidas recientemente, como lo son:

La *inversa Core EP* [27], la cual queda caracterizada por las ecuaciones matriciales

$$A^{\textcircled{\dagger}} A A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}, \quad \mathcal{R}(A^{\textcircled{\dagger}}) = \mathcal{R}((A^{\textcircled{\dagger}})^*) = \mathcal{R}(A^k), \quad k = \mathrm{Ind}(A).$$

La *inversa DMP* [23], la cual queda caracterizada por las ecuaciones

$$A^{D,\dagger}AA^{D,\dagger} = A^{D,\dagger}, \quad A^{D,\dagger}A = A^D A, \quad A^k A^{D,\dagger} = A^k A^\dagger, \quad k = \mathrm{Ind}(A)$$

Finalmente, la *inversa BT* [4], la cual satisface $A^\diamond = (A^2A^\dagger)^\dagger$.

(b) Analizar si algunas de las extensiones de la inversa core mencionadas en el apartado (a) podrían tener conexiones con la inversa de Bott-Duffin análogas a la encontrada para la inversa core.

(c) En [35], los autores introdujeron y estudiaron el concepto de inversa de grupo débil para una matriz cuadrada. Recientemente, en [12] se ha extendido este concepto al caso rectangular. Se propone avanzar en el estudio de nuevas caracterizaciones, propiedades y respresentaciones de esta nueva inversa generalizada ponderada y al mismo tiempo de la estructura algebraica inducida a partir de la misma.

(d) Estudiar el problema de encontrar la matriz X que cumple la ecuación de rango

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & AG \\ GA & X \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A),$$

donde G simboliza una matriz inversa generalizada de A. Los casos en que G es la inversa de Moore-Penrose, la inversa de grupo o la inversa de Drazin de A fueron resueltos en [11, 13, 16, 32, 36]. Recientemente tambien fue probado un resultado para la inversa core en [33]. Se pretende obtener resultados análogos para los casos en que G es alguna de las extensiones de la inversa core mencionadas en el apartado (a). También se considerará el caso cuando G es la inversa de grupo débil ponderada.

(e) Extender algunos de los resultados obtenidos para matrices a escenarios más generales tales como operadores lineales acotados sobre espacios de dimensión infinita (Hilbert o Banach) y a anillos abstractos.

Tabla de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (sin incluir el cero).
$\mathbb{C}^n$	Espacio vectorial de n-uplas complejas (de dimensión n).
$\mathbb{C}^{m\times n}$	Anillo de matrices complejas de tamaño $m \times n$.
I_n	Matriz identidad de tamaño $n \times n$.
A^*	Traspuesta conjugada de la matriz A.
A^{-1}	Inversa (ordinaria) de la matriz cuadrada A.
$A^\dagger$	Inversa de Moore-Penrose de A.
$A^\#$	Inversa de grupo de A.
A^D	Inversa de Drazin de A.
$A_L^{(-1)}$	Inversa de Boot-Duffin de la matriz A respecto al subespacio L
$\mathcal{R}(A)$	Espacio imagen de la matriz A.
$\mathcal{N}(A)$	Núcleo de la matriz A.
$\mathrm{rg}(A)$	Rango de la matriz A.
$\dim(S)$	Dimensión de un subespacio S.
$\mathrm{Ind}(A)$	Índice de la matriz A.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto escalar canónico en $\mathbb{C}^n$.
$M^\perp$	Subespacio ortogonal del subespacio M.
$M \perp N$	M y N son subespacios ortogonales.
$\mathbb{C}^n = M \oplus N$	$\mathbb{C}^n$ es suma directa de los subespacios M y N.
$P_{L,M}$	Proyector sobre el subespacio L paralelamente al subespacio M.
P_L	Proyector ortogonal sobre el subespacio L (paralelamente a $L^\perp$).

Bibliografía

[1] A.H. Bajodah, *Servo-constraint generalized inverse dynamics for robot manipulator control design*, IEEE International Conferene on Control and Automation, Christchurch, Nueva Zelanda, 2009.

[2] O.M. Baksalary, G. Styan, G. Trenkler, *On a matrix descomposition of Hartwig and Spindelböck*, Linear Algebra and its Applications, 430 (2009) 2798-2812.

[3] O.M. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (2010) 681-697.

[4] O.M. Baksalary, G. Trenkler, *On a generalized core inverse*, Applied Mathematics and Compututation, 236 (2014) 450-457.

[5] R. Bott, R. J. Duffin, *On the Algebra of Networks*, Transactions of the American Mathematical Society, 74 (1953) 99-109.

[6] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, 2da ed., Springer-Verlag, Nueva York, 2003.

[7] S.L. Campbell, *Recent Applications of Generalized Inverses*, Pitman, Londres, 1982.

[8] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear transformations*, SIAM, Filadelfia, 2009.

[9] K.L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento, *A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics*, The International Journal of Robotics Research, 12 (1993) 1-19.

[10] M.P. Drazin, *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, The American Mathematical Monthly, 65 (1958) 506-514.

[11] S.C. Dragana, *On a problem of N. Thome and Y. Wei*, App. Math. Comp. 166 (2005) 233-236.

[12] D.E. Ferreyra, V. Orquera, N. Thome, A weak group inverse for rectangular matrices, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math., DOI:10.1007/s13398-019-00674-9.

[13] M. Fiedler, T.L. Markham, *A Characterization of the Moore-Penrose Inverse*, Linear Algebra and its Applications, 179 (1993) 129-133.

[14] I. Fredholm, *Sur une classe déquations fonctionnelles*, Acta Mathematica, 27 (1903) 365-390.

[15] S. Gigola, L. Lebtahi, N. Thome, *The inverse eigenvalue problem for a Hermitian reflexive matrix and the optimization problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 291 (2016) 449-457.

[16] J. Groß, *Solution to a rank equation*, Linear Algebra and its Applications, 289 (1999) 127-130.

[17] R.E. Hartwig, K. Spindelböck, *Matrices for which A^* and A^+ commute*, Linear and Multilinear Algebra, 14 (1984) 241-256.

[18] D. Hilbert, *Grundzüge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Götingen Nachrichten, (1904) 49-51.

[19] S.J. Kirland, M. Neumann, *Group Inverses of M-Matrices and Their Applications*, Chapman and Hall/CRC, Londres, 2012.

[20] H. Kurata, *Some theorems on the core inverse of matrices and the core partial ordering*, Applied Mathematics and Computation, 316 (2018) 43-51.

[21] T. Li, J. Chen, *Characterizations of core and dual core inverses in rings with involution*, Linear and Multilinear Algebra, 66 (4) (2018) 717-730.

[22] B. Malešević, R. Obradović, B. Banjac, I. Jovović, M. Makragić, *Application of polynomial texture mapping in process of digitalization of cultural heritage*, https://arxiv.org/pdf/1312.6935 (2013). Accedido el 14 de junio de 2018.

[23] S. Malik, N. Thome, *On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index*, Appl. Math. Comput. 226 (2014) 575-580.

[24] S. Malik, L. Rueda, N. Thome, *The class of m-EP and m-normal matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 64 (11) (2016) 2119-2132.

[25] E.H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bulletin of the American Mathematical Society 26 (1920) 394-395.

[26] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 51 (1955) 466-473.

[27] K.M. Prasad, K.S. Mohana, *Core EP inverse*, Linear Multilinear Algebra 62 (3) (2014) 792-802.

[28] D.S. Rakić, *A note on Rao and Mitra's constrained and Drazin's* (b, c) *inverse*, Linear Algebra and its Applications, 523 (2017) 102-108.

[29] D.S. Rakić, D.S. Djordjevic, *Core inverse and core partial order of Hilbert space operators*, Applied Mathematics and Compututation, 244 (2014) 283-302.

[30] C.R. Rao, S.K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John Wiley and Sons,INC, (1971).

[31] F. Soleimani, P.S. Stanimirović, F. Soleymani, *Some Matrix Iterations for Computing Generalized Inverses and Balancing Chemical Equations*, Algorithms, 8 (2015) 982-998.

[32] N. Thome, Y. Wei, *Generalized inverses and block-rank equation*, Applied Mathematics and Computation 141 (2003) 471-476.

[33] X. Wang, X. Liu, *Characterizations of the core inverse and the core partial ordering*, Linear Multilinear Algebra 63 (9) (2014) 1829-1836.

[34] X. Wang, C. Deng, *Properties of m-EP operators*, Linear and Multilinear Algebra, 65 (7) (2017) 1349-1361.

[35] H. Wang, J. Chen, *Weak group inverse*, to appear in Open Mathematics.

[36] Y. Wei, *A characterization and representation of the Drazin inverse*, SIAM Journal Matrix Analysis and Applications 17 (4) (1996) 744-747.

[37] G.Z. Xiao, B.Z. Shen, C.K. Wu, C.S. Wong, *Some spectral techniques in coding theory*, Discrete Mathematics, 87 (1991) 181-186.

[38] A. Yu, C. Deng, *Characterizations of DMP inverse in a Hilbert space*, Calcolo, 53 (2016) 331-341.

[39] H. Zhu, *On DMP inverses and m-EP elements in rings*, Linear and Multilinear Algebra, (2018) doi: 10.1080/03081087.2018.1432546

[40] H. Zou, J. Chen, P. Patricio, *Characterizations of m-EP elements in rings*, Linear and Multilinear Algebra, 66 (6)(2018) 1244-1256.