

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



Trabajo Fin de Máster en Ingeniería Mecánica

DISEÑO Y ANÁLISIS DE UN ROBOT DE CADENA CERRADA PARA
REHABILITACIÓN DE LESIONES DE RODILLA

Presentado por: D. Manuel Pérez Soto
Dirigido por: Dr. D. Vicente Mata Amela

Valencia, Septiembre de 2019

Resumen

En general la sociedad va evolucionando y cada vez es más frecuente encontrar situaciones cotidianas en las que se realizan las tareas comunes con la ayuda de una máquina o bien de un robot. El mundo de la fisioterapia no es menos, y en ese ámbito se plantea el presente documento. La rehabilitación de una operación o lesión de la rodilla, más concretamente del Ligamento Cruzado Anterior, es una situación más frecuente con el paso del tiempo, es por eso que resulta necesario una ayuda para llevar a cabo esta tarea. Este documento tiene como objetivo introducir un nuevo diseño de un robot creado exclusivamente con el fin de facilitar este tipo de recuperación tanto a pacientes como a fisioterapeutas. Para ello se diseña un mecanismo de 4 grados de libertad de cadena cerrada y se pretende analizar la viabilidad constructiva del mismo. Se plantearán las ecuaciones de cierre así como los jacobianos del sistema de velocidades, por otro lado se optimizarán las dimensiones de las barras con el fin de cumplir los requisitos en el número máximo de puntos del espacio de trabajo definido y por último se harán unas primeras aproximaciones al cálculo dinámico del modelo. Para concluir con el proyecto se expondrán todos los resultados obtenidos discutiendo así la viabilidad constructiva del diseño para su posterior construcción si se diese a lugar.

Summary

Society is evolving and now it's very common to find daily situations where the tasks are made with machines or robots. Physiotherapist world it's not apart, for this situation this document was created. Knee rehabilitation after a surgery or even an injury, more specifically of Cruciate Ligament Anterior (CLA), is more common over time, for that it's necessary to find some help to take over this task. The aim of the present document is to introduce a new robot design created with the only goal of make as easiest as possible this kind of rehabilitation to both involved person, physiotherapist and patient. A 4 degrees of freedom closed loop is designed and his constructive viability will be examined. On one hand, closing equations will be calculated as well as jacobians of velocity system. On the other hand, length links will be optimized in order to accomplish the requirements on the maximum quantity of points of the defined work space. The last calculation work will be a first estimation to the dynamic solution of the model. Finally there will be exposed all the result obtained during the project discussing the constructive viability of the model for his construction after all if it's possible.

Resum

En general la societat evoluciona y cada vegada és més freqüent trobar situacions quotidianes a les qual es realitzen tasques comuns amb ajuda d'una màquina o d'un robot. El món de la fisioteràpia no es menys, i en aquest àmbit es on s'ubica el present document. La rehabilitació d'una operació de genoll, més concretament del Lligament Creuat Anterior, es una situació més freqüent amb el pas del temps, es per això que resulta necessari una ajuda per a dur a terme aquesta feina. Aquest document te com a principal objectiu introduir un nou disseny de robo creat exclusivament amb l'objectiu de facilitar aquest tipus de recuperació tant als pacients com als fisioterapeutes. Per açò es dissenya un mecanisme de 4 graus de llibertat de cadena tancada y es pretén analitzar la viabilitat constructiva del mateix. Es plantejaran les equacions de tancament aixina com els jacobians del sistema de velocitats mentre que per altra banda s'optimitzarà les dimensions de les barres amb la finalitat de complir el requisits en el major nombre possible de punts de l'espai de treball definit. Per últim, es faran unes primeres aproximacions al càlcul dinàmic del model. Per a concloure amb el projecte s'exposaran tots els resultats obtinguts discutint la viabilitat constructiva del nostre disseny per a la seua construcció posterior si es donés a lloc.

Índice

Resumen	I
Summary	II
Resum	III
1. Introducción.....	1
2. Motivación y antecedentes	8
3. Desarrollo	10
3.1 <i>Matlab</i>	22
3.2 <i>ModeFrontier</i>	27
3.3 <i>Adams</i>	39
3.3.1 Modelo tridimensional	39
3.3.2 Validación Modelo Bidimensional	42
3.3.3 Cálculos en Modelo Bidimensional	47
4. Resultados	49
5. Conclusiones y futuros estudios	53
6. Referencias y Bibliografía.....	56
6.1 <i>Bibliografía</i>	56
6.2 Estudios Previos	56
6.3 Enlaces	57

1. Introducción

El principal objetivo del presente documento radica en el desarrollo de un robot clínico para el desarrollo de la rehabilitación de lesiones del ligamento cruzado anterior (LCA) de la rodilla. Para ello se propone la fabricación de un robot paralelo cuya geometría y simplicidad es la más adecuada para el desempeño de dicha función. Se entiende como robot paralelo aquel robot que tiene una plataforma móvil conectada a una base fija a través de una serie de cadenas cinemáticas idénticas entre sí, conocidas de ahora en adelante como patas. Trataremos con un robot completamente paralelo en el caso que el número de patas sea mayor o igual que el número grados de libertad de la plataforma móvil sobre la que descansa el actuador.

Este tipo de robots con respecto a los robots de serie de cadena abierta tradicionales tienen numerosas ventajas así como algunas desventajas. La desventaja principal que encontramos es el reducido espacio de trabajo con respecto a los robots de cadena abierta, ya que este espacio de trabajo vendrá definido por la intersección de los espacios de trabajo particulares de cada una de las cadenas. Entendemos por espacio de trabajo los puntos del espacio, ya sea tridimensional como bidimensional, a los cuales puede acceder de forma segura el actuador final de nuestra cadena cinemática. Teniendo así, tantos espacios de trabajo como actuadores de final de cadena tengamos.

Por lo que respecta a la capacidad de carga, los robots paralelos pueden soportar un orden de magnitud de en torno a 10 veces el que pueden soportar los robots tradicionales. Esto se debe principalmente a que en los robots de serie de cadena abierta cada actuador debe soportar el objeto con el que trabaja así como el resto de las barras.

En lo que a precisión y repetición de la tarea se refiere los robots paralelos son considerablemente superiores a los convencionales ya que los tradicionales a lo largo de la cadena cinemática se van acumulando imprecisiones por parte de los diferentes actuadores de forma que al llegar al último podemos encontrar una desviación considerable con respecto a lo requerido. Por último, en cuanto a comportamiento dinámico encontraremos un mejor comportamiento en robots como el nuestro ya que debido a su mayor capacidad de carga se reduce considerablemente la posibilidad del efecto acople en las barras del mecanismo.

Para poder proseguir con el desarrollo del diseño del robot que nos ocupa es necesario dejar definidos algunos conceptos que se van a usar a lo largo de todo el documento.

El primero de ellos es el concepto de grado de libertad (GDL). Un grado de libertad es la posibilidad de movimiento independiente de un sistema mecánico. Podremos hablar de los grados de libertad de un sólido rígido, de un par cinemático y de un mecanismo completo. Por ejemplo, un sólido rígido que se desplace libremente en el plano,

tiene 3 grados de libertad, el desplazamiento a lo largo del eje horizontal, el desplazamiento a lo largo del eje vertical y el giro dentro del plano.

Si trabajamos con los grados de libertad de un par cinemático nos estaremos refiriendo al número de coordenadas independientes necesario para describir la posición y orientación relativa de las barras que conecta.

Por último, los grados de libertad de un mecanismo son aquellas variables independientes necesarias para definir una configuración del robot o mecanismo a analizar. Este término resulta de especial importancia de cara al diseño de un mecanismo ya que determinará tanto la utilidad del mismo como el número de actuadores externos (motores) necesarios para un movimiento coordinado del mecanismo.

El siguiente término relevante es el término de actuador final. El actuador final es el elemento del robot encargado de interactuar con el ambiente, es decir, el encargado de realizar la tarea para la cual ha sido diseñado el mecanismo. En el caso de un robot de soldadura, es el utensilio en el que encontraremos el soldador encargado de realizar el cordón de soldadura.

Otro concepto relevante a tener en cuenta y que vamos a ver aparecer en numerosas ocasiones a lo largo del presente informe es el término: singularidades. Una singularidad son posiciones específicas de nuestro robot en las cuales el número de grados de libertad de

nuestro actuador de final de cadena se reduce haciéndose menor que el número de dimensiones de nuestro espacio de trabajo. Este tipo de problemática se puede dar por ejemplo porque los ejes de dos barras de un par prismático se hacen paralelos.

Es de vital importancia a lo largo de todo el desarrollo del estudio evitar estas situaciones críticas porque en numerosas ocasiones son capaces de llevar al colapso la estructura.

Una vez tenemos definidos algunos de los conceptos básicos de nuestro proyecto es importante definir la situación inicial del problema. El objetivo del diseño es realizar un robot de ensayos clínicos con el cual se puedan llevar a cabo sesiones de rehabilitación de personas con problemas en el ligamento cruzado anterior sin la necesidad de la presencia de un rehabilitador o fisioterapeuta.

Además de poder realizar diferentes ejercicios para el desarrollo de la rehabilitación sería conveniente que nuestro diseño ayudase en el diagnóstico de las lesiones a través de la realización de las pruebas tradicionales que realizan los médicos. De esta forma, el personal médico solo deberá interpretar los resultados sin necesidad de realizar las pruebas ellos mismos.

Las pruebas a realizar por parte de nuestro sistema mecánico son las conocidas como la prueba de Lachman y la prueba del pivote o Pivot Shift Test (PST). Ambas dos determinan lesiones en el ligamento cruzado anterior, pero con diferentes metodologías de trabajo.

La prueba de Lachman evalúa la situación de LCA a partir del desplazamiento existente de la tibia durante el ensayo. Para la realización del ensayo el paciente debe flexionar la pierna a analizar unos 30°. El terapeuta realiza un bloqueo del fémur para evitar el movimiento del mismo durante el desarrollo de la prueba. Con la otra mano se realiza una fuerza anteroposterior de la tibia de forma que analizando el desplazamiento anterior de la tibia se obtendrán resultados de la salud de los ligamentos. De forma que si tenemos un desplazamiento de 3 mm o menos, se supondrá que nos encontramos con una rodilla estable. Sin embargo, si tuviéramos un desplazamiento superior a los 5 mm nos encontraríamos una situación de inestabilidad relativa, lo que podría conllevar una rotura parcial o total de los ligamentos.



Figura 1-1: Prueba de Lachman

Por lo que respecta al Pivot Shift Test (PST) necesitaríamos realizar primero una torsión en el plano tibiofemoral (TFP), a continuación se realizaría una pequeña abducción del valgo para posteriormente aplicar una fuerza que produjese una flexión de la

rodilla hasta llegar a unos 40°. De esta manera se pueden determinar lesiones del LCA así como de problemas en el ligamento capsular externo e interno.



Figura 1-2: Pivot Shift Test

El plano tibiofemoral es el plano perpendicular al suelo que pasa por la unión tibiofemoral del cuerpo humano.

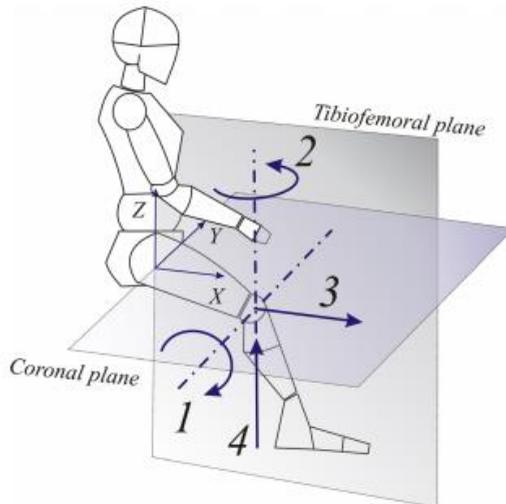


Figura 1-3: Planos corporales

De esta forma quedan totalmente definidos los movimientos necesarios para la realización de todas las tareas. Estos son:

1. Giro en TFP.
2. Giro en plano coronal
3. Desplazamiento horizontal en dirección TFP.
4. Desplazamiento vertical en dirección TFP.

Por tanto se concluye que necesitaríamos un robot con un mínimo de 4 GDL para poder cumplir estos requisitos.

2. Motivación y antecedentes

La primera opción que surge como solución al planteamiento es la utilización de un robot paralelo de 6 grados de libertad. Rápidamente se descarta la utilización de esta solución debido a su complejidad y sobre todo a su elevado coste, ya que dos de los grados de libertad y por ende, actuadores de los que se dispondrían, estarían totalmente desaprovechados.

Por esto se plantea la búsqueda de diseños que cumplan con los requisitos minimizando costes y compactando la solución lo máximo posible. Se encuentran en la actualidad bastante asentados diferentes robots clínicos de rehabilitación. Siendo estos de 2 o 3 grados de libertad diseñados principalmente para lesiones de tobillo.

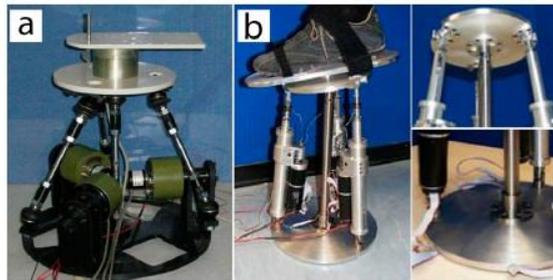


Figura 2-1: Robots paralelos para rehabilitación de tobillo

Por otro lado, se encuentran robots de 4 grados de libertad siendo 2T2R (2 traslaciones y 2 rotaciones) pero no cumplen con los requisitos exigidos en el apartado anterior ya que esos 4 grados de libertad con los que trabajan dichos mecanismos no son los necesarios y exigidos para nuestro diseño.

Resulta interesante comentar como se analizan diferentes geometrías en el estudio llevado a cabo por el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Valencia¹ pero se rechazan porque en condiciones de trabajo finalmente quedarían como voladizos sometidos a cargas de flexión excesivas.

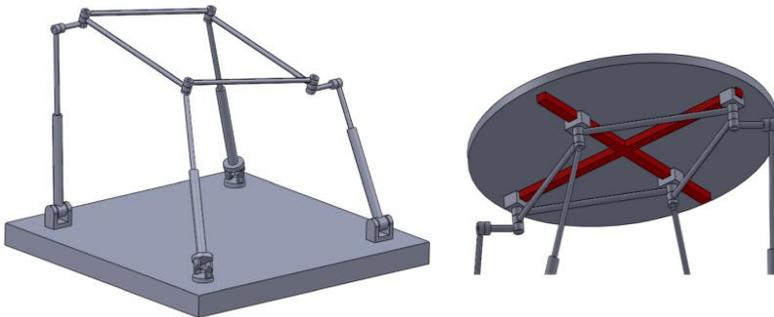


Figura 2-2: Diseño analizado por DIMM UPV

Así como geometrías de estudios previos se rechazan por falta de sensibilidad² (lo que se traduce en falta de confort del paciente), falta de compactación del diseño² o bien por suponer mecanismos de una complejidad extremadamente alta lo que implica un sobrecoste de diseño y de fabricación considerable^{3,4}

En este punto surge nuestro diseño basado en 3 patas, o cadenas cinemáticas sobre el que descansan dos plataformas y que será controlado a partir de un accionador prismático que encontraremos en la parte superior de la plataforma móvil. La primera de las plataformas descansará directamente sobre las cadenas móviles de nuestro mecanismo y la segunda sobre la anterior teniendo un grado de libertad que le permita girar en el plano coronal.

3. Desarrollo

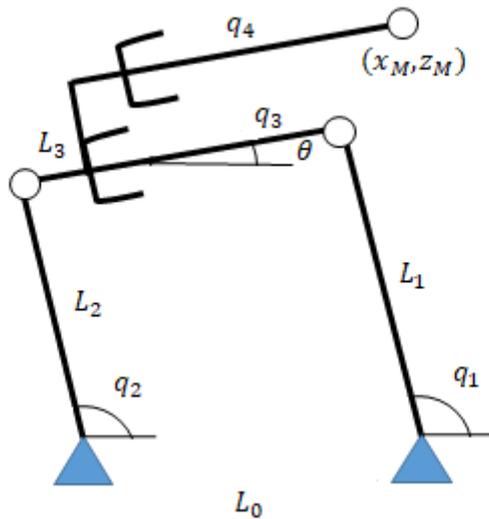


Figura 3-1: Diseño planteado

De principio a fin habrá que diferenciar entre nuestro diseño tridimensional y nuestro boceto bidimensional. El diseño tridimensional con el que se trabajará constará de 5 barras principales más la barra fija. Tres de estas barras principales harán de patas de nuestro robot paralelo. Sobre estas descansan dos plataformas, una con capacidad de rotación propia que hará posible un giro en el plano coronal. Es importante comentar que el ángulo que forman las plataformas con respecto al eje horizontal será conocido como θ .

La otra barra del diseño servirá como barra redundante con el objetivo de reducir pares y por tanto tamaño de los actuadores necesarios para la construcción del robot.

Este robot es un robot paralelo de cadena cerrada atendiendo a las definiciones que se han llevado a cabo en el punto 1. Introducción. Encontraremos que se trata de un robot paralelo, debido a la existencia de la plataforma unida a la base a través de las piernas del mecanismo (Barra 1 y Barra 2 de nuestra figura). Encima de la plataforma encontraremos el actuador prismático a raíz de cuyo extremo (punto M) se desarrolla el funcionamiento del proyecto.

Para el desarrollo se conocerá la posición del actuador final, es decir la posición del punto M (tanto X_M como Z_M) y se realizarán diferentes trayectorias del mismo analizando las diferentes geometrías y características que tendrá nuestro sistema durante las alteraciones de la posición de dicho punto.

Para el cálculo de nuestro mecanismo se utilizarán las ecuaciones de cierre debido a ser un método sencillo a la par que efectivo. Este sistema de resolución para problemas lineales consiste en la igualdad geométrica de la ubicación de uno de los puntos de nuestro sistema llegando al mismo a través de dos caminos diferentes.

Un buen ejemplo para comprender mejor dicho procedimiento es con nuestro mecanismo. Podemos llegar al punto E de nuestro mecanismo desde el origen pasando por el punto A y a través de la

coordenada q_3 o bien a través de los puntos C y D y teniendo en cuenta la longitud de la barra 3 (L_3).

Por esto resulta necesario conocer todos los vectores de unión entre las barras del mecanismo para poder generar estas ecuaciones de cierre.

$$\overrightarrow{AM} = \begin{Bmatrix} X_M \\ Z_M \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{Bmatrix} -l_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{Bmatrix} l_2 \cos(q_2) \\ l_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\overrightarrow{CE} = \begin{Bmatrix} l_3 \cos(\theta) \\ l_3 \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\overrightarrow{EB} = \begin{Bmatrix} q_3 \cos(\theta) \\ q_3 \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\overrightarrow{EM} = \begin{Bmatrix} q_4 \cos(\theta) \\ q_4 \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{Bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \text{sen}(q_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Conociendo todos los vectores ya podemos proceder a calcular las ecuaciones de cierre y por tanto las coordenadas generalizadas del mecanismo. En la primera ecuación de cierre que

utilizaremos relacionaremos el punto A con nuestro actuador final o punto M:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EM} \quad (3.8)$$

Si separamos en los diferentes componentes de la matriz y colocamos el sistema de referencia global del mecanismo en el punto A, tenemos que:

$$x_M = -l_0 + l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(\theta) + q_4 \cos(\theta) \quad (3.9)$$

$$z_M = l_2 \text{sen}(q_2) + l_3 \text{sen}(\theta) + q_4 \text{sen}(\theta) \quad (3.10)$$

Donde las únicas incógnitas son q_2 y q_4 . Si despejamos q_4 de la primera ecuación tenemos que:

$$q_4 = \frac{x_M + l_0 - l_2 \cos(q_2) - l_3 \cos(\theta)}{\cos(\theta)} \quad (3.11)$$

Encontrando ya valores de singularidades de nuestro sistema en los puntos en los cuales el $\cos(\theta)$ vale cero. Es decir para ángulos de 90 y 270 grados.

Si sustituimos el valor despejado en la segunda ecuación tendremos que:

$$\begin{aligned} -l_2 \text{sen}(\theta) \cos(q_2) + l_2 \cos(\theta) \text{sen}(q_2) &= -x_M \text{sen}(\theta) \dots \\ \dots - l_0 \text{sen}(\theta) + z_M \cos(\theta) & \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si se analiza la ecuación con detenimiento podemos deducir que se tiene una ecuación del tipo: $a \cdot \cos(q) + b \cdot \text{sen}(q) = c$ Por tanto acudiendo a la bibliografía se puede observar como este tipo de ecuaciones tienen como la solución con la forma de:

$$q = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}\right) \quad (3.13)$$

A raíz de esta ecuación se puede ver como los valores de q que cumplan la función van a ser dos valores diferentes lo cual dará lugar a diferentes configuraciones válidas (matemáticamente hablando) para cada uno de los puntos del espacio de trabajo. También cabe señalar la aparición de nuevas singularidades de nuestro sistema para aquellos puntos que hagan que la raíz de la ecuación anterior sea nula, ya que entraremos dentro del trabajo con números imaginarios, lo cual conociendo lo que representa q (medidas) resulta incongruente.

Así pues con esta ecuación y sabiendo que:

$$a = -l_2 \operatorname{sen}(\theta) \quad (3.14)$$

$$b = l_2 \operatorname{cos}(\theta) \quad (3.15)$$

$$c = -x_M \operatorname{sen}(\theta) - l_0 \operatorname{sen}(\theta) + z_M \operatorname{cos}(\theta) \quad (3.16)$$

Obtenemos los dos valores para q_2 que se conocerán en este documento como $q_{2(+)}$ y $q_{2(-)}$ indicando el signo del subíndice a cuál de los dos valores pertenece.

Si sustituimos en la ecuación (3.11) se obtienen los dos valores asociados para q_4 cerrando así el cálculo de la primera ecuación de cierre.

Para la obtención del resto de parámetros de nuestro sistema se utiliza una segunda ecuación de cierre que recorrerá nuestro mecanismo a través de los puntos B, E y M.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EM} \quad (3.16)$$

Por tanto y análogamente al desarrollo para el cálculo anterior se tiene que:

$$x_M = l_1 \cos(q_1) - q_3 \cos(\theta) + q_4 \cos(\theta) \quad (3.17)$$

$$z_M = l_1 \sen(q_1) - q_3 \sen(\theta) + q_4 \sen(\theta) \quad (3.18)$$

Donde las incógnitas son q_1 y q_3 ya que la longitud q_4 se ha calculado con anterioridad. Si se despeja en un lado de la ecuación todos los valores conocidos se tiene que:

$$l_1 \cos(q_1) - q_3 \cos(\theta) = x_M - q_4 \cos(\theta) \quad (3.19)$$

$$l_1 \sen(q_1) - q_3 \sen(\theta) = z_M - q_4 \sen(\theta) \quad (3.20)$$

Por tanto despejando de la primera ecuación:

$$q_3 = \frac{l_1 \cos(q_1) - x_M + q_4 \cos(\theta)}{\cos(\theta)} \quad (3.21)$$

Como se puede apreciar, no añadimos singularidades en este caso debido a que son las mismas que aparecieron en el caso anterior.

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} l_1 \cos(\theta) \sen(\theta) - l_1 \sen(\theta) \cos(q_1) &= \\ &= -x_M \sen(\theta) + z_M \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Situación idéntica al primer caso, por lo que la solución también tendrá la forma de la ecuación (3.13). En este caso sin embargo tendremos que:

$$a = -l_1 \sen(\theta) \quad (3.23)$$

$$b = l_1 \cos(\theta) \quad (3.24)$$

$$c = -x_M \sen(\theta) + z_M \cos(\theta) \quad (3.25)$$

Así pues obtendremos los dos valores asociados a q_1 , $q_{1(+)}$ y $q_{1(-)}$. Por lo que sólo queda obtener los valores de q_3 de la ecuación

(3.21) teniendo siempre en cuenta del valor del cual se está partiendo para la obtención de los resultados.

A continuación haremos el cálculo asociado a las velocidades de nuestro mecanismo. El objetivo de este cálculo radica en relacionar \dot{x}_M, \dot{z}_M y $\dot{\theta}$ con los valores de \dot{q}_1, \dot{q}_3 y \dot{q}_4 así pues a partir de unos valores fácilmente medibles como son las velocidades en nuestro actuador final podemos obtener las velocidades nuestro vector de coordenadas generalizadas.

Para el primer cálculo nos ayudaremos de las ecuaciones de cierre comentadas en apartados anteriores de nuestro documento. Primero de todo es necesario comentar, que la velocidad que encontraremos en cualquier punto de un sólido rígido vendrá directamente relacionado con el producto vectorial entre la velocidad angular del sólido y la distancia existente con otro punto cuya velocidad lineal sea conocida. Dicho de otra forma, supongamos un sólido I en el cual conocemos la velocidad del punto P y necesitamos conocer la velocidad de un punto Q. La velocidad del punto Q vendrá determinada por la ecuación (3.26)

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega}_I \times \vec{r}_{PQ} \quad (3.26)$$

Es importante señalar como se puede ver en estas ecuaciones, en un caso bidimensional como el caso que nos atañe las velocidades angulares serán perpendiculares al plano formado por las coordenadas de trabajo. En este caso al trabajar en el plano XZ encontraremos velocidades angulares en dirección del plano Y.

Si aplicamos esta misma ecuación utilizando el mismo criterio que el mostrado en las ecuaciones de cierre tenemos que la velocidad del punto B asociado a la barra 1 vendrá dado por la ecuación:

$$\vec{v}_{B_1} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{AB} \quad (3.27)$$

Y por tanto de la misma manera, la velocidad asociada al punto E de la barra 3 vendrá dado por la suma de dos productos vectoriales, uno asociado a la barra 2 y el otro a la barra 3.

$$\vec{v}_{E_3} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{DC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{CE} \quad (3.28)$$

Siendo como se ha explicado anteriormente:

$$\vec{\omega}_1 = \dot{q}_1 \vec{j} \quad (3.29)$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{q}_2 \vec{j} \quad (3.30)$$

$$\vec{\omega}_3 = \dot{\theta} \vec{j} \quad (3.31)$$

Suponiendo un sistema de referencia móvil en el punto E asociado a la barra 3 $\{E_3 - X_3 Y_3 Z_3\}$ y utilizando las ecuaciones del movimiento relativo tenemos que:

$$\vec{v}_{B_4} = \vec{v}_{E_3} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{EB} + \dot{q}_3 \times \vec{u}_{EB} \quad (3.32)$$

Donde:

$$\vec{u}_{EB} = \cos(\theta) \vec{i} + \text{sen}(\theta) \vec{k} \quad (3.33)$$

Al encontrar un par R en el punto B se sabe que las velocidades de dicho punto para ambas barras unidas en dicha unión serán la misma, por tanto se sabe que:

$$\vec{v}_{B_4} = \vec{v}_{B_1} \quad (3.34)$$

Por tanto aplicando las ecuaciones geométricas correspondientes obtenemos las dos ecuaciones escalares que relacionan ambas velocidades.

$$-\dot{q}_1 L_1 \text{sen}(q_1) = -\dot{q}_2 L_2 \text{sen}(q_2) - \dot{\theta} L_3 \text{sen}(\theta) \dots$$

$$\dots - \dot{\theta} q_3 \text{sen}(\theta) + \dot{q}_3 \cos(\theta) \quad (3.35)$$

$$\dot{q}_1 L_1 \cos(q_1) = \dot{q}_2 L_2 \cos(q_2) - \dot{\theta} L_3 \cos(\theta) \dots$$

$$\dots - \dot{\theta} q_3 \cos(\theta) + \dot{q}_3 \text{sen}(\theta) \quad (3.36)$$

Si se despeja la velocidad de la coordenada 2 en la ecuación (3.35) se tendrá que:

$$\dot{q}_2 = - \frac{-\dot{q}_1 L_1 \text{sen}(q_1) + \dot{\theta} L_3 \text{sen}(\theta) + \dot{\theta} q_3 \text{sen}(\theta) - \dot{q}_3 \cos(\theta)}{L_2 \text{sen}(q_2)} \quad (3.37)$$

Si sustituimos este valor en la segunda ecuación tendremos la primera ecuación de velocidades que nos relacione los términos conocidos con aquellos que son incógnitas. En este caso nos relacionará la velocidad de θ con la velocidad de las coordenadas q_1 y q_3 .

$$v_1(\dot{q}_1, \dot{q}_3, \dot{\theta}) =$$

$$= \frac{-\dot{q}_1 L_3 \text{sen}(\theta - q_2) + \dot{\theta} q_3 \text{sen}(\theta - q_2) - \dot{q}_1 L_1 \text{sen}(q_1 - q_2) - \dot{q}_3 \cos(\theta - q_2)}{\text{sen}(q_2)}$$

$$= 0 \quad (3.38)$$

A continuación trataremos de obtener el resto de relaciones para tener definidas por completo el sistema de ecuaciones asociadas a las velocidades de nuestro mecanismo. Para ello vamos a centrarnos en el punto M, que es el final de nuestro actuador hidráulico prismático.

De esta forma tenemos que:

$$\overrightarrow{v_{M5a}} = \dot{x}_M \vec{i} + \dot{z}_M \vec{K} \quad (3.39)$$

Pero si asumimos el sistema de referencia mencionado con anterioridad en el punto E_3 obtenemos la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{v_{M5b}} = \overrightarrow{v_{E3}} + \overrightarrow{\omega_3} \times \overrightarrow{r_{EM}} + \dot{q}_4 \times \overrightarrow{u_{EM}} \quad (3.40)$$

Donde $\overrightarrow{u_{EM}} = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{k}$

Como ambas velocidades representan la velocidad del mismo punto que es el punto de nuestro actuador pero atendiendo a diferentes criterios, uno a partir de medición directa ($\overrightarrow{v_{M5a}}$) y el otro a través de las ecuaciones geométricas del sistema ($\overrightarrow{v_{M5b}}$) podemos igualar y de esta forma despejar las velocidades relacionándolas así con los valores que queremos.

Así pues tenemos que la velocidad del punto M en X será:

$$\begin{aligned} \dot{x}_M = & -\dot{q}_1 L_1 \sin(q_1) + \dot{\theta} q_3 \sin(\theta) - \dot{q}_3 \cos(\theta) \dots \\ & \dots - \dot{\theta} q_4 \sin(\theta) + \dot{q}_4 \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_M = & \\ = & - \frac{[-\dot{q}_1 L_1 \sin(q_1) + \dot{\theta} L_3 \sin(\theta) - \dot{\theta} q_3 \sin(\theta) - \dot{q}_3 \cos(\theta)] \cos(q_2)}{\sin(q_2)} \dots \\ & \dots + \dot{\theta} L_3 \cos(\theta) + \dot{\theta} q_4 \cos(\theta) + \dot{q}_4 \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por tanto se tendrían las siguientes ecuaciones de velocidad:

$$\begin{aligned} v_2(\dot{q}_1, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{x}_M,) = & \\ = \dot{x}_M + \dot{q}_1 L_1 \sin(q_1) - \dot{\theta} q_3 \sin(\theta) + \dot{q}_3 \cos(\theta) + \dot{\theta} q_4 \sin(\theta) \dots & \\ \dots - \dot{q}_4 \cos(\theta) = 0 & \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$v_3(\dot{q}_1, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{x}_M,) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \dot{z}_M \dots \\
 &+ \frac{[-\dot{q}_1 L_1 \text{sen}(q_1) + \dot{\theta} L_3 \text{sen}(\theta) - \dot{\theta} q_3 \text{sen}(\theta) - \dot{q}_3 \cos(\theta)] \cos(q_2)}{\text{sen}(q_2)} \dots \\
 &\dots - \dot{\theta} L_3 \cos(\theta) - \dot{\theta} q_4 \cos(\theta) - \dot{q}_4 \cos(\theta) \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Al encontrarnos con ecuaciones lineales, estas se pueden poner de forma matricial, de manera que tendríamos:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(L_3 + q_3) \text{sen}(\theta - q_2)}{\text{sen}(q_2)} \\ 1 & 0 & (q_4 - q_3) \text{en}(\theta) \\ 0 & 1 & -(L_3 + q_4) \cos(\theta) + \frac{(L_3 + q_3) \cos(q_2) \text{sen}(\theta)}{\text{sen}(q_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{z}_M \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1 \text{sen}(q_1 - q_2)}{\text{sen}(q_2)} & \frac{\cos(\theta - q_2)}{\text{sen}(q_2)} & 0 \\ -L_1 \text{sen}(q_1) & -\cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \frac{L_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2)}{\text{sen}(q_2)} & \frac{\cos(\theta) \cos(q_2)}{\text{sen}(q_2)} & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Para simplificar dicha ecuación de ahora en adelante:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(L_3 + q_3) \text{sen}(\theta - q_2)}{\text{sen}(q_2)} \\ 1 & 0 & (q_4 - q_3) \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & -(L_3 + q_4) \cos(\theta) + \frac{(L_3 + q_3) \cos(q_2) \text{sen}(\theta)}{\text{sen}(q_2)} \end{bmatrix} = J_x \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1 \text{sen}(q_1 - q_2)}{\text{sen}(q_2)} & \frac{\cos(\theta - q_2)}{\text{sen}(q_2)} & 0 \\ -L_1 \text{sen}(q_1) & -\cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \frac{L_1 \text{sen}(q_1) \cos(q_2)}{\text{sen}(q_2)} & \frac{\cos(\theta) \cos(q_2)}{\text{sen}(q_2)} & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} = J_q \quad (3.47)$$

Por tanto y teniendo en cuenta las ecuaciones (3.46) y (3.47) se puede simplificar la expresión a:

$$J_x \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{z}_M \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = J_q \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Ante la resolución de este sistema se pueden encontrar singularidades que imposibiliten o compliquen la resolución de este problema lineal. De manera que podemos tener tres tipos de singularidades:

- **Singularidad de tipo I.** También conocida como singularidad inversa, se da cuando encontramos una pérdida de grados de libertad en nuestro mecanismo lo que se traduce en que aparece una discrepancia de rangos y por tanto el determinante J_q es igual a 0. Pero, ¿en qué punto encontraremos este problema?

El determinante de la matriz J_q será:

$$\begin{aligned} \det(J_q) &= \\ &= \frac{L_1 \operatorname{sen}(-q_1 + 2\theta - 2q_2) + L_1 \operatorname{sen}(q_1 - 2q_2) - L_1 \operatorname{sen}(2\theta - q_1) - L_1 \operatorname{sen}(q_1)}{2 \cos(2q_2) - 2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por tanto, esta singularidad tendrá lugar cuando haya un desfase de ángulo entre q_1 y θ de 90 grados. Es decir:

$$q_1 = \frac{\pi}{2} + \theta$$

- **Singularidad de tipo II.** También conocida singularidad directa, se da cuando el determinante de J_x es igual a 0.

$$\det(J_x) = \frac{L_3 \operatorname{sen}(\theta - q_2) + q_3 \operatorname{sen}(\theta - q_3)}{\operatorname{sen}(q_2)} \quad (3.50)$$

Por tanto esta singularidad aparecerá en los casos que θ es igual al ángulo formado por la barra 2 con el suelo o barra 0.

$$\theta = q_2$$

- **Singularidad de tipo III.** Esta aparece cuando ambos determinantes son iguales y son iguales a 0.

3.1 Matlab

Para el diseño de nuestro robot de ensayos clínicos se definió un espacio de trabajo específico y se verificó en función de los valores obtenidos para los parámetros q_1 , q_2 , q_3 y q_4 . El espacio de trabajo seleccionado tiene las siguientes características:

- $-0.30 \leq x_M \leq 0.30$ con $\Delta x_M = 0.1$
- $0.10 \leq z_M \leq 0.30$ con $\Delta z_M = 0.1$
- $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ con $\Delta \theta = 2^\circ$

Siendo las distancias en metros y los ángulos en grados respectivamente.

De esta forma se obtiene un espacio de trabajo de 651 puntos exactamente. Para poder discernir qué puntos son realmente viables para la formación y el cálculo del robot resulta necesario poder definir unas condiciones de contorno que controlen la viabilidad física del mismo. Es por esto que se especifican las siguientes condiciones:

$$q_3 \geq 0$$

$$q_4 \geq 0$$

Ya que las distancias no pueden ser negativas.

$$0 \leq q_1 \leq 180$$

$$0 \leq q_2 \leq 180$$

Ya que las cadenas cinemáticas de nuestro robot no pueden atravesar el suelo.

De esta manera, se suponen unas longitudes de barras aleatorias para verificar cuantos puntos de nuestro espacio de trabajo son viables bajo estas suposiciones. Las longitudes iniciales con las que se hacen los primeros cálculos son:

$$l_0 = 0.25 \text{ m}$$

$$l_1 = 0.40 \text{ m}$$

$$l_2 = 0.40 \text{ m}$$

$$l_3 = 0.25 \text{ m}$$

Para realizar los cálculos de manera rápida se prepara una programación con Matlab que te devuelve las 4 posibles secuencias de valores válidos (como ya vimos que ocurre en las ecuaciones de cierre) para la solución del problema. Esta programación nos devuelve a su vez, los puntos de singularidades tanto particulares como generales. Llamaremos singularidades generales a aquellos puntos en los que no es posible calcular de ninguna manera los valores del vector \mathbf{Q} y conoceremos como singularidades particulares o puntos inviables aquellos puntos en los cuales se pueden calcular todos valores del vector generalizado sin embargo estos rompen alguna de las condiciones expuestas con anterioridad.

Así pues nuestro archivo de Matlab nos devolverá las siguientes matrices con los siguientes significados:

- Vector1: Incluye todos los valores válidos de la primera secuencia de trabajo

- $\left[q_{1(+)} \quad q_{2(+)} \quad q_3^{q_{1(+)};q_4^{q_{2(+)}}} \quad q_4^{q_{2(+)}} \quad x_M \quad z_M \quad \theta \right]$

- Vector2: Incluye todos los valores válidos de la segunda secuencia de trabajo

- $\left[q_{1(-)} \quad q_{2(+)} \quad q_3^{q_{1(-)};q_4^{q_{2(+)}}} \quad q_4^{q_{2(+)}} \quad x_M \quad z_M \quad \theta \right]$

- Vector3: Incluye todos los valores válidos de la tercera secuencia de trabajo

- $\left[q_{1(+)} \quad q_{2(-)} \quad q_3^{q_{1(+)};q_4^{q_{2(-)}}} \quad q_4^{q_{2(-)}} \quad x_M \quad z_M \quad \theta \right]$

- Vector4: Incluye todos los valores válidos de la primera secuencia de trabajo

- $\left[q_{1(-)} \quad q_{2(-)} \quad q_3^{q_{1(-)};q_4^{q_{2(-)}}} \quad q_4^{q_{2(-)}} \quad x_M \quad z_M \quad \theta \right]$

- Trash: Incluye todos los puntos del espacio que suponen una singularidad general para las dimensiones de barras establecidas.

- $[x_M \quad z_M \quad \theta]$

- Trash1: Incluye todos los valores inviables del espacio de trabajo para la primera secuencia de trabajo.

- $[x_M \quad z_M \quad \theta]$

- Trash2: Incluye todos los valores de inviables del espacio de trabajo para la segunda secuencia de trabajo.

- $[x_M \quad z_M \quad \theta]$

- Trash3: Incluye todos los valores inviables del espacio de trabajo para la tercera secuencia de trabajo.
 - $[x_M \ z_M \ \theta]$
- Trash4: Incluye todos los valores de inviables del espacio de trabajo para la cuarta secuencia de trabajo.
 - $[x_M \ z_M \ \theta]$

Una vez estamos familiarizados con la programación que se ha realizado podemos analizar los resultados con las longitudes iniciales.

Al tratarse de un primer valor aleatorio de longitudes no resulta especialmente acertado esperar resultados próximos a una solución óptima. Al comprobar los diferentes valores se puede observar como para la primera secuencia de valores, no tenemos ningún punto del espacio de trabajo accesible, sin embargo para la segunda obtenemos 188 puntos viables dentro del espacio de trabajo. Resulta digno de mención observar que se obtienen 31 singularidades generales con estas dimensiones de barra, lo que llevará a nuestro sistema cerca del colapso en casi un 5% de los puntos del espacio de trabajo.

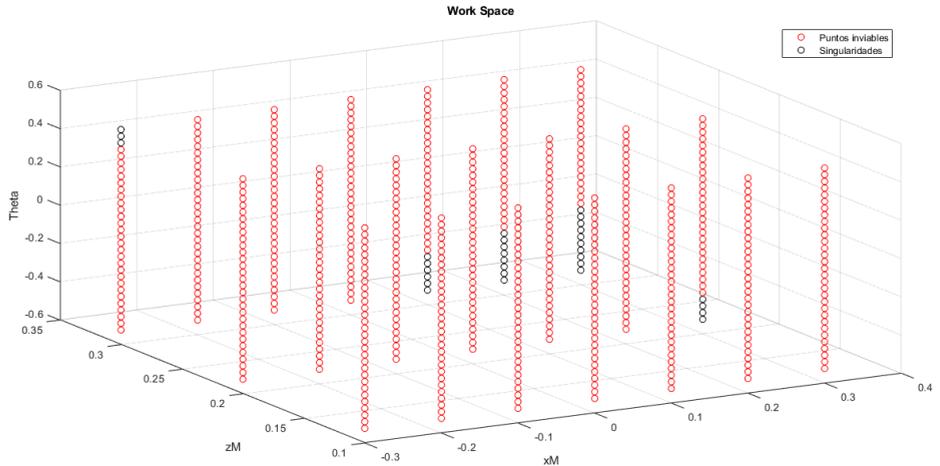


Figura 3-2: Espacio de trabajo inicial

	trash	31x3 double
	trash1	620x3 double
	trash2	432x3 double
	trash3	620x3 double
	trash4	606x3 double
	vector1	7x7 double
	vector2	188x7 double
	vector3	7x7 double
	vector4	14x7 double
	ws	651x3 double

Figura 3-3: Vectores resultado de la programación inicial

A pesar de la aparición de una matriz 7x7 con el nombre de vector1, esta matriz es una matriz de ceros ya que al comenzar la programación se crean las matrices de 7x7 con ceros para que en caso de que no hubiese ningún resultado que debiera ir a dicha matriz el programa tiene un elemento que devolver favoreciendo así la programación.

Una vez tenemos la programación y el primer cálculo realizado resulta fácil deducir cual debe ser el siguiente paso para poder obtener las dimensiones exactas de nuestro robot para que cumpla con el mayor número de puntos del espacio de trabajo posible. Para ello se precisa de realizar un proceso de optimización, concretamente de maximización del vector1.

3.2 ModeFrontier

Este proceso se podría realizar con Matlab y seguir trabajando con dicho programa pero al tratarse de un problema de optimización se opta por trabajar con un software específico para tal fin, de forma que el coste computacional sea inferior y se obtenga un resultado más preciso. Es para ello que se utiliza el software: modeFRONTIER. Y más concretamente el modeFRONTIER 2018R3.

ModeFRONTIER es un software diseñado por la empresa italiana fundada en los años 90: Esteco. Este software es un programa diseñado para la optimización de todo tipo de sistemas a través de una interfaz muy sencilla de flujos de trabajo. De esta forma resulta muy sencillo familiarizarte con este programa si estás comenzando con este tipo de softwares.

El mecanismo de trabajo de este programa consiste en, como hemos mencionado previamente, crear un flujo de trabajo en el cual se colocan las condiciones de contorno o limitaciones de tus variables

con el objetivo de, a partir del número de iteraciones necesarias obtener el resultado óptimo de tu diseño.

Es importante comentar previamente a la explicación que cada uno de los componentes de nuestro flujo de trabajo es conocido como nodo. Hay diferentes tipos de nodo como podemos ver en la Figura 3-4 pero en este documento solo comentaremos los nodos que nos atañen que son los lógicos, los de datos, los de aplicaciones y los nodo objetivo.

- > Logic Nodes
- > Data Nodes
- > Goal Nodes
- > Processing Nodes
- > File Nodes
- > Application Nodes
- > Script Nodes
- > CAD Nodes
- > CAE Nodes
- > Networking Nodes

Figura 3-4: Nodos en modeFRONTIER

Comenzaremos explicando los nodos de datos. Estos nodos (data nodes) sirven para la creación de la variable dentro de nuestro flujo de trabajo. Dicho de cada forma, deberemos tener tantos como inputs y outputs tengamos en nuestro modelo. En nuestro caso tenemos cuatro de entrada y tres de salida (Figura 3-5). Es especialmente destacable que podemos encontrar nodos formados un vector y nodos escalares lo que abre un amplio abanico de posibilidades.

Por otro lado encontraremos los nodos lógicos que son los encargados de dirigir el flujo de control, determinar cómo y cuándo empieza, donde y porqué acaba y conduce la programación por la dirección que determina el usuario. En este tipo de nodos encontraremos entre otros, el “IF”, el “SWITCH” o el “WHILE”.

Por otro lado tenemos los vectores objetivo que son aquellos que especifican las condiciones de contorno de nuestro diseño. Encontramos desde nodos de restricción hasta nodos de gradiente de valores pasando por valores objetivo.

Por último tenemos los nodos que llaman a otras aplicaciones que como su propio nombre indica relaciona este programa con otros softwares con el objetivo de optimizar al máximo el cálculo y el desarrollo de la tarea.

En este caso se aprovechará la existencia de un nodo dentro de modeFRONTIER que llama a una rutina de Matlab, es decir, un archivo *.m y lo ejecuta modificando los valores que se le asigne, en este caso las longitudes de las barras. De esta forma, al llamar a nuestra rutina de Matlab, modeFrontier entrará cada vez con un valor de longitudes y realizará los cálculos de forma reiterativa.

Cabe mencionar que se realizan unas pequeñas modificaciones en la programación del robot de rehabilitación para que el programa tenga la capacidad de modificación de las longitudes y de esta forma poder iterar hasta converger a la solución deseada.

A continuación se puede observar el flujo de trabajo diseñado, donde tenemos cuatro inputs dentro de la programación (la longitud de las barras) y tres outputs que son los resultados a partir de los cuales debemos hacer el análisis. Los outputs que se analizarán son la longitud del vector de soluciones (vector1) y la longitud del vector “trash”, que representa la cantidad de singularidades generales que encontraremos para la longitud de barras que se esté calculando en ese instante.

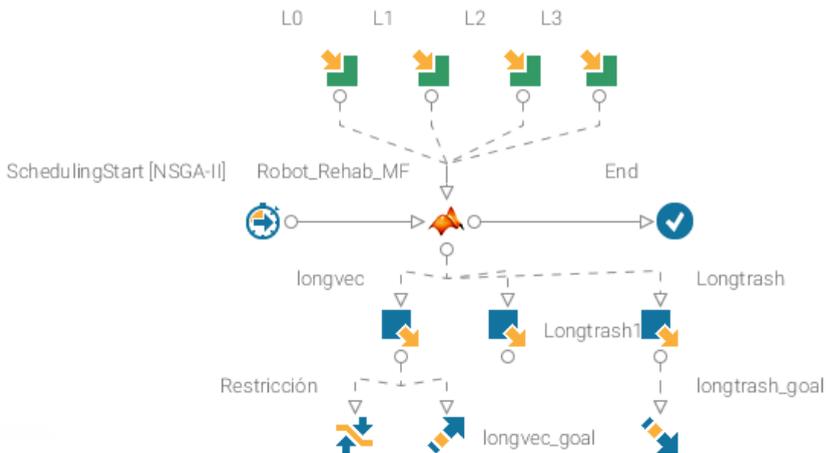


Figura 3-5: Flujo de trabajo ModeFRONTIER

Como se puede observar se colocan dos nodos objetivos para el vector “longvec” y otro para el vector “longtrash”. El primero de longvec es una restricción de forma que este no debe ser menor de 651, que es la cantidad de puntos en los cuales está dividido el espacio de trabajo. Este nodo objetivo simplemente se implementa en el workflow con el objetivo de analizar los resultados de forma más

rápida ya que no afecta de ninguna manera a la optimización en sí de la geometría y nos avisa en caso que consigamos obtener un Workspace viable por completo.

El otro nodo objetivo de longvec es el nodo real que implementará la optimización ya que en este definimos que se pretende maximizar la longitud del vector “longvec” el cual es simplemente un escalar donde encontramos la longitud de vector1, o lo que es lo mismo, define la cantidad de puntos viables dentro de nuestro espacio de trabajo.

Por último el tercer nodo objetivo aparece en el vector longtrash, y el objetivo que se tiene con dicho vector es minimizarlo y hacerlo 0. Ya que de esta forma no tendremos singularidades generales que afecten a nuestro sistema, es decir, no se modificarán los grados de libertad de nuestro mecanismo en ningún momento.

Para este estudio se decide realizar el proceso de optimización mediante un algoritmo genético. Los algoritmos genéticos son métodos de optimización basados en el proceso genético de los organismos vivos. Para ello se trabaja con poblaciones de individuos, cada uno de los cuales representa una solución viable del problema. A estos individuos se les asigna un valor denominado bondad. Este valor representa la efectividad de un organismo en la competencia de recursos. Cuanto mayor sea la bondad del organismo mayor es la probabilidad de que sea seleccionado para reproducirse mezclando su

material genético con el de otro organismo seleccionado mediante la misma metodología.

Esta unión crea nuevos individuos que serán conocidos como los descendientes de los dos anteriores. Así nace una nueva población de posibles soluciones. De esta forma se asegura que las características que favorecen la supervivencia del organismo, o en este caso, la solución correcta del problema se propagan de forma descendiente a lo largo de todas las poblaciones venideras.

De esta forma a medida que se van creando nuevos individuos estos estarán cada vez más próximos al resultado correcto ya que heredarán principalmente rasgos con una bondad elevada y de diferentes áreas de estudio. De esta forma con una programación adecuada se consigue obtener una solución óptima al problema.

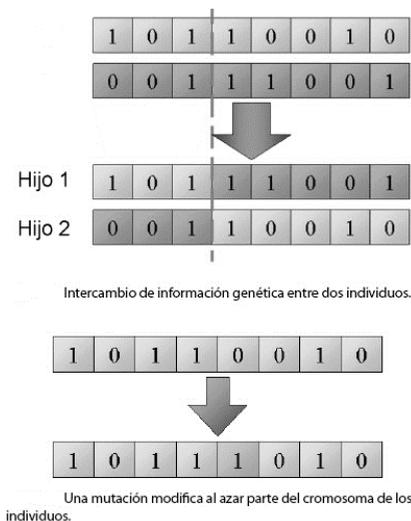


Figura 3-6: Algoritmo Genético

Para este proceso en particular se crearon 24 individuos a partir de los cuales se crearan el resto de descendientes. Estos individuos se crean mediante la secuencia **Sobol**. La secuencia Sobol es una secuencia psueodaleatoria de baja discrepancia. Esta secuencia en base dos genera números aleatorios tratando de cumplimentar todo el intervalo de trabajo de la forma más homogénea posible.

A continuación el programa exige que se determine el algoritmo genético encargado de llevar a cabo los cálculos. Tenemos como opciones los siguientes algoritmos:

- MOGA-II: Este algoritmo genético, cuyas siglas significa, Multi Objective Genetic Algorithm está diseñado para una rápida convergencia de Pareto y tiene 5 características principales: apoya el cruce generacional, utiliza el elitismo en la búsqueda de la solución, aplica penalizaciones a la función objetivo, habilita la evolución generacional y permite la evaluación reiterada de individuos independientes.
- NSGA-II: Las siglas de este algoritmo significan Non-dominated Sorting Genetic Algorithm y tiene como características principales: trabaja con variables continuas y discretas simultáneamente, utiliza el dominio de la restricción con el objetivo de controlar las restricciones del diseño, mantiene la distancia de hacinamiento con el objetivo de mantener la diversidad y difusión de las soluciones, permite la evaluación concurrente de los individuos independientes.

- ARMOGA: Este algoritmo se basa en el MOGA-II con la principal diferencia que requiere una evaluación del tiempo consumido, así como permite adaptación de rangos con el objetivo de obtener una búsqueda más eficiente.
- Evolution Strategy: Algoritmo basado en $\mu+\lambda$. Este algoritmo destaca por su capacidad de adaptar el tamaño de cada refinamiento en cada iteración que hace.

En nuestro caso se selecciona para trabajar el NSGA-II ya que es el algoritmo de los presentados más sencillo y con menor coste computacional. Teniendo en cuenta la función que se tratará de optimizar no resulta necesario la aparición del elitismo que conlleva un coste computacional extra como en el MOGA-II y el ARMOGA. Finalmente, se descarta el Evolution Strategy, debido a su capacidad de refinamiento específica para cada iteración lo que añade un coste computacional extra. De este modo, nos quedamos con el algoritmo genético más básico y común de los que nos ofrece el software.

Así pues ejecutamos nuestro flujo de trabajo implementando el algoritmo genético seleccionado de forma que obtengamos un resultado óptimo para nuestro mecanismo. Obtenemos como espacio de trabajo viable máximo un espacio de trabajo de 314 puntos de los 651 definidos. Es decir, algo menos del 50% de los puntos definidos. Sin embargo resulta interesante revisar las longitudes de las barras, ya que para obtener estos 314 puntos viables tenemos unas longitudes de las barras excesivas para cumplir uno de los requisitos del diseño

por lo que las dimensiones del robot no serán tan reducidas como se esperaba.

Las longitudes de las barras obtenidas son:

$$l_0 = 71 \text{ cm}; l_1 = 93 \text{ cm}; l_2 = 81 \text{ cm}; l_3 = 10 \text{ cm}$$

Por esto se decide reducir ligeramente los puntos viables del espacio de trabajo con el objetivo de tener un robot lo más compacto posible. De esta forma tenemos 312 puntos del espacio de trabajo perdiendo únicamente dos puntos y disminuyendo considerablemente las dimensiones de nuestro mecanismo. De esta forma tenemos que las longitudes de las barras finales serán:

$$l_0 = \mathbf{63 \text{ cm}}; l_1 = \mathbf{91 \text{ cm}}; l_2 = \mathbf{81 \text{ cm}}; l_3 = \mathbf{10 \text{ cm}}$$

Una vez tenemos las longitudes de las barras se procede a analizar las longitudes obtenidas. Volviendo a utilizar la programación usada durante la etapa de cálculo en Matlab se pueden volver a comprobar todos los valores necesarios para evaluar el diseño del robot.

Comenzaremos analizando brevemente nuestro nuevo espacio de trabajo.

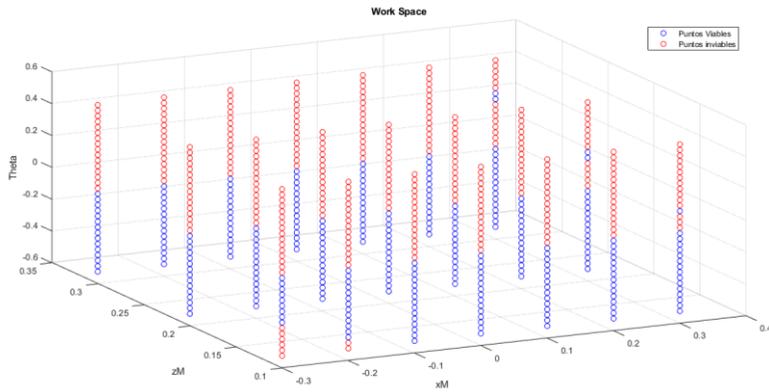


Figura 3-7: Espacio de trabajo final

Como se puede apreciar en la Figura 3-7 al contrario que en el caso inicial no encontramos ningún tipo de singularidad general de nuestro diseño. A pesar de eso podemos apreciar numerosos puntos de inviable acceso de nuestro modelo, sin embargo un número considerablemente elevado de puntos viables. Es importante señalar que la mayoría de puntos viables que encontramos vienen dados por ángulos theta (ángulo entre la plataforma móvil y la horizontal y la base) negativos. Resulta comprensible dado que encontramos que la barra a partir de la cual se calcula dicho ángulo tiene una longitud 10 centímetros inferior respecto la otra, a la cual está sujeta la plataforma.

Es necesario conocer y tener controlado el rango de valores entre los que encontraremos nuestro vector generalizado para poder posteriormente realizar un diseño mecánico acorde.

Por lo que respecta a los valores de q_1 y q_2 no resultan de especial importancia debido a que durante la programación se especifica que no pueden ser ángulo ni negativos ni superiores a 180 grados ya que de hacerlo estaríamos tratando con un mecanismo cuyas barras estarían atravesando el suelo.

Sin embargo, resultan de vital importancia los valores tanto de q_3 y q_4 ya que son los puntos de final del actuador de cada uno de los pares prismáticos.

De esta manera tenemos que el valor q_3 tiene un valor mínimo de 0.0071 metros y un valor máximo de 0.6833 metros. De esta forma tenemos un recorrido de aproximadamente 68 centímetros de nuestro actuador acoplado entre las barras 3 y 1.

Por lo que respecta al valor de q_4 tendremos un valor mínimo de 0.0147 metros y un valor máximo de 1.6151 metros. Dicho de otra forma, tenemos un recorrido del actuador de 160 centímetros, lo que dificulta considerablemente el diseño del hidráulico de dicho actuador. Ya que encontraremos o bien que tendremos un hidráulico considerablemente caro, o en caso de no utilizar un actuador prismático tendremos diseño que no cumple uno de los requisitos principales del proyecto: la realización de un diseño compacto.

Por este motivo y a pesar de haber seleccionado previamente estas longitudes de barras como las longitudes definitivas de nuestro diseño, de tanto los valores mínimos, como los valores máximos y de esta forma, por tanto el recorrido que realizaría nuestro actuador. Si

graficamos una todos los recorridos en función de la longitud total de la suma de sus barras obtendremos una gráfica como la que tenemos en la *Figura 3-8*.

Como se puede apreciar encontramos varios puntos especial interés, como son aquellos que tienen una longitud de accionadores menores y por tanto tienen una longitud superior de barras así como aquellos que tienen una longitud de barras inferior pero mayor rango de movimiento en los accionadores.

Como se puede apreciar, la selección del punto del trabajo es uno de los puntos óptimos de nuestro diseño. Es el punto que se encuentra en rojo en nuestra *Figura 3-8*. Por tanto se continúa trabajando con las longitudes seleccionadas con anterioridad-

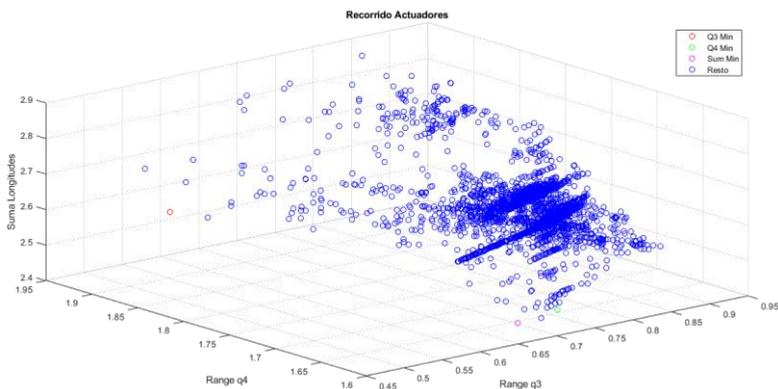


Figura 3-8: Rango coordenadas generalizadas

3.3 Adams

3.3.1 Modelo tridimensional

Para el cálculo dinámico se utilizará el software Adams, concretamente la versión estudiantil del mismo, Adams View, de la compañía MSC Software.

Se decide utilizar este software debido a su facilidad de uso y a la vez su potencia de cálculo. De esta forma se crean las barras móviles de nuestro sistema decidiendo utilizar una distancia entre la barra dos y su barra homóloga de 80 centímetros, tamaño más que suficiente para la construcción del mecanismo. Como se puede ver en la Figura 3-9 la distancia entre la barra 2 (verde) y la barra 2 prima (mostaza) es equidistante al eje X de nuestro diseño, en el cual encontraremos la barra 1 (roja)

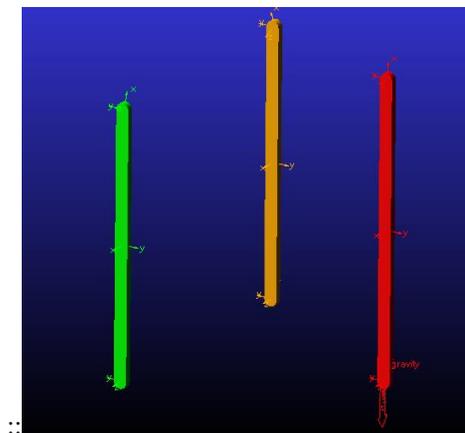


Figura 3-9: Patas del diseño

Por lo que respecta al diseño de las uniones con la plataforma de estas barras cabe señalar que al encontrar una unión de tipo prismático y otra de revolución en el mismo punto de la barra supone un punto de incongruencia durante la simulación del programa. Esto se debe a que el par de revolución impide los tanto los desplazamientos en los tres ejes del sistema así como los giros en dos de los ejes. Por su parte el par prismático imposibilita los tres giros del mecanismo así como el desplazamiento en dos de los ejes del sistema.

El software al analizar estas restricciones da con un problema de redundancia ya que ambos tipo de par restringen movimientos que le otro permite. Por esto se decide crear una barra de apoyo de dimensiones considerablemente inferior a las barras principales y con una masa prácticamente nula de forma que no afecte a la dinámica del sistema de forma significativa. Con esta barra se realizará el par de revolución con la barra 1 y el par prismático con respecto a la plataforma como se puede ver en la Figura 3-10.

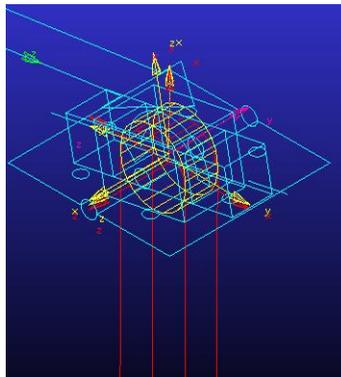


Figura 3-10: Detalle Barra Apoyo

De esta forma Adams puede ejecutar la simulación sin ningún tipo de problema.

A continuación se coloca la plataforma en la ubicación correspondiente para posteriormente colocar la plataforma móvil descansando sobre esta. La plataforma irá relacionada con un par de revolución a la plataforma inicial de forma que permita el giro en el plano coronal, añadiendo de esta forma el cuarto grado de libertad de nuestro sistema.

Por último colocaremos una barra en la parte superior que hará las veces de actuador lineal, por lo que se unirá con un par prismático a la plataforma móvil de forma que podamos aplicar el movimiento adecuado que nos servirá para el control y ubicación del punto M. Que no es más que el actuador final del prismático superior. Es importante señalar que todas y cada una de las barras que aparecen en el modelo serán supuestas de aluminio con las propiedades mecánicas que este le aporta. De esta forma se tiene un sistema resistente a la vez que ligero.

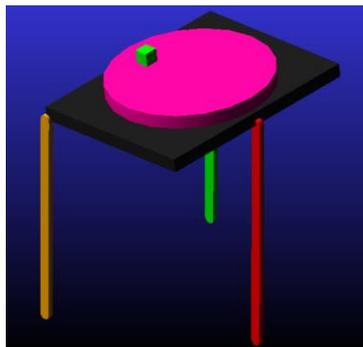


Figura 3-11: Diseño de Adams

Es importante señalar que se asumirá un peso de la pierna del paciente de 350 N. Esta fuerza se aplicará en el centro de la plataforma móvil que es donde está previsto que el paciente sitúe el pie con el objetivo de realizar los ejercicios. Se supone una fuerza de estas dimensiones ya que a pesar que una pierna humana suele pesar en torno a 10-12 Kg, se ha supuesto que la pierna a realizar los ejercicios de rehabilitación puede estar en la etapa conocida como etapa de carga progresiva en la cual se va dejando cargar poco a poco la pierna hasta poder cargarla de forma natural con el peso del cuerpo.

Debido a la complejidad del modelo tridimensional y teniendo en cuenta que encontraremos una situación de trabajo prácticamente bidimensional se propone verificar la posibilidad de trabajar este diseño a raíz de modelos bidimensionales más sencillos, facilitando así la modelización del diseño.

3.3.2 Validación Modelo Bidimensional

Lo primero que se ha de realizar para poder trabajar con los modelos bidimensionales es validar los resultados obtenidos comparándolos con los resultados obtenidos en el modelo tridimensional.

Para la validación del diseño se compararán los valores obtenidos en un análisis bidimensional con uno tridimensional. En este caso se analizarán los valores obtenidos cuando tenemos el final de carrera del actuador superior (x_M y z_M) en el punto (-0.3,0.1). Es decir,

el punto del eje negativo más cercano al suelo y más alejado del origen y por tanto aquel que tendrá un mayor valor en las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 .

Como se trata de un modelo dinámico la masa juega un papel vital a lo largo de todos los cálculos, es por ello que resulta muy importante hacer coincidir las masas de ambos modelos. En este caso, se concentrarán la masa de la barra 2 y la barra 2' en la misma, así como la masa de la plataforma en una barra tipo "link" que son los dos elementos susceptibles a verse afectados al pasar de modelo bidimensional a tridimensional. Por su parte, la plataforma móvil se dejará en su forma inicial ya que de esta forma si se necesitase a lo largo del documento se podría obtener el par necesario para su rotación (ya que este par tiene lugar en el eje XY).

Para la concentración de las masas se procederá a crear los materiales con la densidad necesaria de forma que al modificarse las barras en el análisis bidimensional contengan la misma masa que en el caso de dicho elemento tridimensionalmente hablando (teniendo en cuenta que la barra 2' y la barra 2 pasan a ser una sola). Se hace de esta forma y no modificando exclusivamente la entrada de la masa en el programa porque si modificamos solo la masa del sólido en el programa no se actualizarán las inercias del mismo, lo cual en casos dinámicos tiene una relevancia significativa.

Supongamos por ejemplo la plataforma de nuestro modelo. Al crearla automáticamente se le asocia que será de acero, por lo que

tendrá una masa de 6.43 kg. En el modelo tridimensional y con el material seleccionado para su construcción (aluminio) esta plataforma tiene una masa real de 54.8 kg.

Por tanto la densidad necesaria para que dicha barra tenga la masa adecuada será:

$$\rho_{PLAT_{2D}} = \frac{\rho_{STEEL} M_{PLAT_{ALUM}}}{M_{STEEL}^0} = \frac{7801 \cdot 54.8}{6.43} = 66453 \frac{Kg}{m^3}$$

Con esta densidad la masa de la barra que hará las veces de plataforma será la misma que en los casos tridimensionales y además modificará sus momentos de inercia con respecto a la misma. Este procedimiento debe realizarse con las barras 2 y 2' teniendo en cuenta que la masa de las dos barras estará distribuido todo en una única barra, como se ha comentado anteriormente.

Una vez tenemos comentada la problemática con las densidades y masas del sistema resulta necesario conocer la geometría del modelo tridimensional así como la masa de cada elemento.

Las barras serán barras link con las dimensiones especificadas anteriormente, mientras que por su parte la plataforma tendrá unas dimensiones de 100x80x2 cm y la plataforma móvil tendrá una radio de 35 centímetros y una altura de 1.5 centímetros . Por su parte, la barra de apoyo comentada en la Figura 3-10 y el actuador final tienen una masa cada uno de aproximadamente 60 gramos, por lo que se pueden considerar despreciable con respecto al resto de masas.

SÓLIDO	MASA (kg)
Barra 1	2.04
Barra 2	1.85
Barra 2'	1.85
Plataforma	54.8
Plataforma Móvil	15.81

Tabla 1: Masa Modelo Tridimensional

Por tanto tenemos una masa total de robot de 76.35 kg.

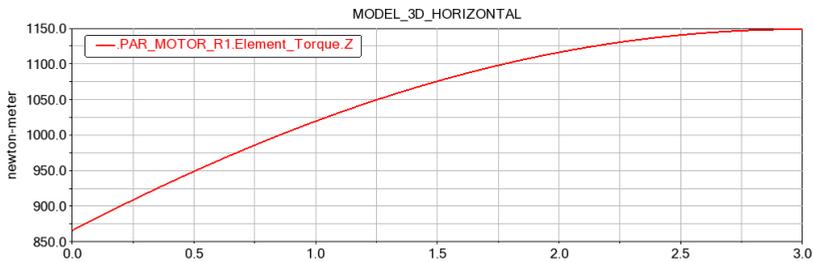
Una vez realizado el modelo tridimensional, se plantea el modelo bidimensional teniendo como densidades de entrada las que se pueden ver en la última columna de la los datos que podemos ver en la Tabla 2.

SÓLIDO	$\rho_0 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$	M_0 (kg)	M_F (kg)	$\rho_F \left(\frac{kg}{m^3}\right)$
Barra 2	7801	5.24	3.70	5508
Plataforma	7801	6.43	54.8	66453

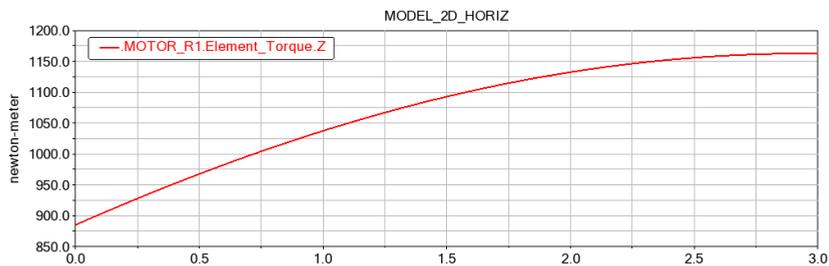
Tabla 2: Densidades Modelo bidimensional

Es importante señalar que los materiales que de las barras que no aparecen en la Tabla 2 se utilizan simplemente aluminio igual que se podría realizar en el modelo tridimensional.

Con estos datos y especificando como velocidades máximas del centro de masa de la plataforma móvil una velocidad de 0.15 metros por segundo (velocidad más que de sobra para realizar los ejercicios de rehabilitación) se obtienen los siguientes resultados.



Gráfica 1: Par Motor R1 modelo tridimensional



Gráfica 2: Par Motor R1 modelo bidimensional

Como se puede apreciar en la Gráfica 1 y en la Gráfica 2 el par motor para el par de revolución 1, que es el punto crítico del sistema de actuadores coincide prácticamente a la perfección. La distorsión que se produce entre ambos casos por el momento puede asociarse al redondeo que se ha utilizado a lo largo de la extracción de datos ya que Adams permite hasta 16 decimales sin embargo nosotros estamos trabajando con 2.

A continuación se mostrará la fuerza que encontraremos en el prismático inferior con el fin de poder validar definitivamente el modelo diseñado bidimensionalmente.



Gráfica 3: Fuerza Prismático inferior tridimensional



Gráfica 4: Fuerza prismático inferior bidimensional

Como se puede apreciar, ambas gráficas son prácticamente idénticas tal y como se esperaba por lo que se validarán los resultados de los modelos bidimensionales para el resto del diseño.

3.3.3 Cálculos en Modelo Bidimensional

Para el cálculo bidimensional se realizarán dos diseños más que se consideran aquellos en los cuales podemos obtener las mayores fuerzas dentro de los actuadores del mecanismo. Estos son los puntos del espacio de trabajo en los cuales encontraremos la mayor distancia de apertura en los pares prismáticos. El modelo número dos es en el cual encontraremos a lo largo del análisis el mayor valor de q_3 mientras que el modelo número 3 ocurre lo mismo con el valor de q_4 .

El modelo 2 se dará cuando M se encuentre en el punto (0.3,0.3) (Figura 3-13) mientras que el modelo 3 se dará en el punto opuesto al primero de los 3 (0.3,0.1) como se puede ver en la Figura 3-14

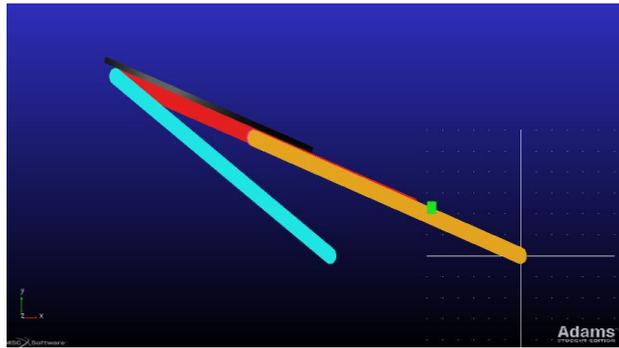


Figura 3-12: Diseño bidimensional 1

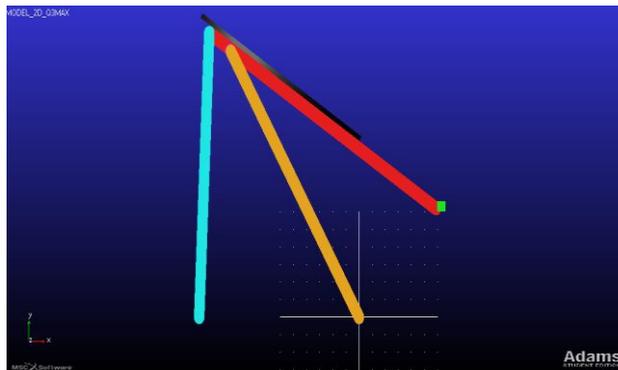


Figura 3-13: Diseño bidimensional 2

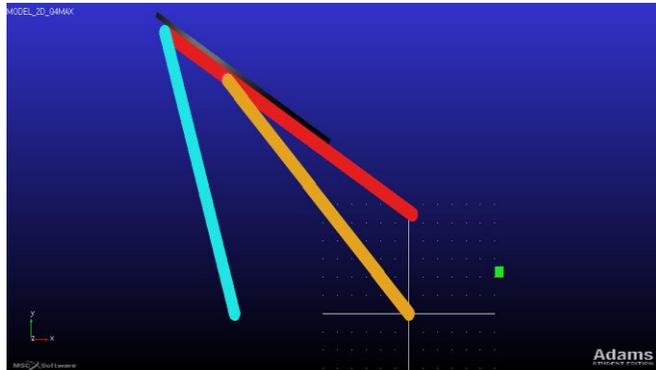


Figura 3-14: Diseño bidimensional 3

4. Resultados

En el presente apartado se presentarán los resultados obtenidos a lo largo del proyecto así como analizar su viabilidad y su sentido más allá del resultado obtenido numéricamente. Nos centraremos especialmente en los accionadores críticos de nuestro modelo, el par motor R1 y el par prismático inferior, ya que el par prismático superior vendrá condicionado por la longitud del vástago principalmente, lo que no implica un problema de cálculo relevante. Por su parte el par de revolución entre ambas plataformas no depende más que de la geometría de propia plataforma móvil por lo que su dimensionalización deberá abordarse cuando se haga el diseño de detalle que se escapa a las competencias del presente documento.

Lo primero que hay que comentar son los resultados obtenidos en el dimensionado del modelo ya que estos nos dan longitudes que son considerablemente superiores al espacio de trabajo especificado.

Concretamente nos encontramos que la salvo la longitud L_3 que es la única que disminuye, todas aumentan sus dimensiones del orden de magnitud de un 50% aproximadamente. Este hecho hace que obtengamos unos actuadores con una potencia considerable como se va a ver a continuación, especialmente para el par motor de la barra 1.

En el análisis del modelo 1, se obtiene que es necesario un par motor de 1150 Nm valor más que razonable teniendo en cuenta el diseño del modelo, donde tenemos un modelo con la gran parte de la masa a una altura de 1 metro del suelo prácticamente. Lo que provoca que se necesite una gran cantidad de energía y un par elevado para poder levantar dicha masa. Ésta deberá ser mayor conforme más horizontal encontremos la situación de las barras 1 y 2 ya que el momento respecto al centro de masas de la masa suspendida será máximo.

Por lo que respecta a la fuerza del accionador prismático inferior obtenemos unas gráficas acorde a lo esperado ya que la fuerza del actuador va aumentando a medida que vamos aumentando el valor de q_3 .

Para el segundo análisis resulta lógico pensar que encontraremos un par motor inferior al anterior ya que nos encontramos dentro de un sistema cuyo centro de gravedad a pesar de encontrarse a una altura mayor se encuentra en un punto menos

alejado del punto de rotación por lo que es lógico pensar que el valor del par obtenido deba ser menor.



Gráfica 5: Par Motor R1 Modelo Bidimensional 2

Como se puede ver el orden de magnitud es del orden de la mitad del obtenido anteriormente, sin embargo en torno al valor de 1.2 segundos del análisis encontraremos un par nulo. Lo cual puede significar que dicho sistema se encuentre en equilibrio para en ese instante para esas condiciones de trabajo. Es importante observar como el sentido del par varia a lo largo del análisis, esto se puede deber a que al comienzo el mismo estamos ofreciendo un par resistente para que el mecanismo no venza y a partir del punto de equilibrio comenzamos a aplicar par para que favorezca el movimiento bajo las condiciones especificadas.

Por lo que respecta a la fuerza del prismático inferior se puede observar la misma tendencia en el instante de tiempo de 1.2 segundos. Esto confirma la teoría que en ese instante nuestro mecanismo pasará por el punto de equilibrio estático de forma que no hará falta de ningún par ni fuerza para mantener el sistema



Gráfica 6: Fuerza prismático inferior modelo bidimensional 2

Por último, en el tercer análisis obtenemos un par ligeramente superior al obtenido en el segundo estudio como era de esperar por la disposición del mecanismo. A medida que pasa el tiempo, y por tanto aumenta el valor de q_1 y q_2 , aumenta el par necesario, al igual que lo ocurrido en el caso 1 bidimensional.



Gráfica 7: Par Motor R1 modelo bidimensional 3

Por último comentar brevemente el valor del actuador lineal para este último apartado. Vemos como al pasar el tiempo y por tanto aumentar el valor del prismático sobre el que actúa dicho motor resulta lógico ver como aumenta la fuerza necesaria para llevar a cabo dicha apertura.



Gráfica 8: Fuerza prismático inferior modelo bidimensional 3

5. Conclusiones y futuros estudios

En definitiva se obtiene un robot matemática y constructivamente viable. A pesar de esto resulta inevitable fijarse en los matices que hacen que el diseño no se pueda considerar óptimo. Por un lado obtenemos valores en los actuadores considerablemente grandes para el diseño que tenemos, principalmente si nos referimos al valor del par motor R1 ya que nos movemos en un orden de magnitud superior a los 1000 Nm para mover un mecanismo con aproximadamente 80 kg. Esto se debe principalmente a que tenemos una barra extremadamente esbelta, ya que es un diámetro de 4 cm y tiene 91 cm de altura que se encarga de sujetar aproximadamente 70 kg a una distancia del suelo considerable. Este hecho se traduce en que encontraremos el par motor máximo cuando más cerca estén las barras de 180 grados ya que el par motor resistente para que no venza el mecanismo tendrá que soportar toda la esbeltez del sistema a la distancia máxima posible del origen.

Por otro lado, es mencionable comentar que las dimensiones finales del robot están descompensadas con respecto a la dimensión del espacio de trabajo (como se puede apreciar las imágenes del apartado 3.3.3 donde el Working Grid representa el espacio de trabajo especificado) ya que tenemos como dimensiones del diseño valores cercanos al metro en algunas barras y en el espacio de trabajo tenemos un rango horizontal de 60 centímetros y un rango vertical de 20. Es por esto que se puede comentar que en gran medida, con este diseño y estas dimensiones, si se utilizara el diseño para su cometido original se estaría desaprovechando gran parte del rango de trabajo del mismo.

Ante estas conclusiones resulta sencillo poder extraer nuevas líneas de investigación a partir de este diseño.

La primera de ellas consiste en analizar el mismo diseño reduciendo la masa del mismo de forma que consigamos obtener unos actuadores con menores exigencias. Para ello existen diferentes ramas, la primera de ellas es reducir las dimensiones en el eje Y de nuestro diseño inicial ya que en este documento se ha utilizado como profundidad de la plataforma un valor de 80 centímetros. Vista la relevancia que tienen las fuerzas y el movimiento del sistema en dicho eje es una forma sencilla de reducir fácilmente tanto dimensiones como masa del modelo.

La siguiente rama que se va a mencionar, es reducir la masa del sistema modificando los espesores de las plataformas que descansan

sobre las patas del mecanismo, ya que en este análisis se suponen de 2 centímetros la primera plataforma y de 1.5 la móvil. Estos valores se plantearon para un modelo inicial, pero visto el comportamiento del sistema resulta viable un análisis de optimización de dichos espesores.

Por último, otro posible proyecto que se propone a raíz de este documento es el análisis para el aprovechamiento óptimo de las nuevas longitudes del diseño con el objetivo de tener un espacio de trabajo acorde a las dimensiones de las barras que forman el sistema.

Si se llevan a cabo algunos de los diferentes proyectos se podría abordar por tanto el estudio final del diseño presentado, que es el diseño al detalle presentando planos, actuadores comerciales que cumplan los requisitos, presupuesto... todo con el objetivo de la construcción final del modelo.

6. Referencias y Bibliografía

6.1 Bibliografía

- W. Khalil & E. Dombre: “Modeling, Identification & Control of Robots”
- Cuadrado Javier, Aranda: Apuntes de la asignatura “Simulación Dinámica de Sistemas Multicuerpo”
- Roda Buch, A. Mata Amela, V., Albelda Vitoria, J.: “Máquinas y mecanismos”
- Patrick Grosch & Federico Thomas: “Parallel Robots with Unconventional Joints”
- Murillo G. Coutinho: “Dynamic Simulations of Multibody Systems”
- Carlo L. Botasso: “Multibody Dynamics”
- David E. Goldberg: “Genetic algorithm in search optimization and machine learning”

6.2 Estudios Previos

- [1] Álvaro Page, Nidal Fahrat, Vicente Mata, 2017. Kinematic Design of a New Four Degree-of-Freedom Parallel Robot for Knee Rehabilitation
- [2] Ding, H., ao Cao, W., Chen, Z., and Kecskemethy, A., 2015, “Structural Synthesis of Two-Layer and Two-Loop Spatial Mechanisms With Coupling Chains,” Mech. Mach. Theory, 92, pp. 289–313.

- [3] Wang, C., Fang, Y., and Fang, H., 2017, “Novel 2R3T and 2R2T Parallel Mechanisms With High Rotational Capability,” *Robotica*, 35(2), pp. 401–418.
- [4] Araujo-Gomez, P., Diaz-Rodriguez, M., Mata, V., Valera, A., and Page, A., 2016, “Design of a 3-UPS-RPU Parallel Robot for Knee Diagnosis and Rehabilitation,” *ROMANSY 21—Robot Design, Dynamics and Control*, Vol. 569, CISM International Centre for Mechanical Sciences, Udine, Italy, pp. 303–310.
- [5] Araujo-Gomez, P., Mata, V., Diaz-Rodriguez, M., Valera, A., and Page, A., 2017, “Design and Kinematic Analysis of a Novel 3 UPS/RPU Parallel Kinematic Mechanism With 2T2R Motion for Knee Diagnosis and Rehabilitation Tasks,” *ASME J. Mech. Rob.*, 9(6), p. 061004.
- [6] Cesar Humberto Guzmán Valdivia, José Luis Carrera Escobedo, Andrés Blanco Ortega, 2014, “Diseño y control de un sistema interactivo para la rehabilitación de tobillo: TobiBot”

6.3 Enlaces

- Prueba de Lachman:
<https://www.youtube.com/watch?v=CuglVICcBJY>
- Pivot Shift Test (PST):
<https://www.youtube.com/watch?v=NWFJVEjMnQ4>
- Información Algoritmos Genéticos
http://www.sc.ehu.es/ccwbayes/docencia/mmcc/docs/te_mageneticos.pdf