Análisis y ejemplos de órbitas hiperbólicas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta y analiza las características de las órbitas hiperbólicas. También se muestran algunos casos de su utilidad y se incluyen ejemplos de su estudio.

Recordemos que según [**Curtis**] la ecuación orbital de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M por atracción gravitatoria es :

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

donde $h = \|\overrightarrow{h}\| = \|\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}\|$ es el momento angular que es constante, $\mu = G(M+m)$ es el parámetro gravitacional, $e = \|\overrightarrow{C}/\mu\|$ es la excentricidad de la órbita obtenida con el vector de Laplace que también es constante y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre $\overrightarrow{e}$ y $\overrightarrow{r}$).

Esta ecuación orbital origina trayectorias que representan curvas cónicas (circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas) según los valores de e. En este documento vamos a conocer las principales características y algunos ejemplos de las **órbitas hiperbólicas**.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a recordar algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la del Sol o con la de cualquier planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante

  $$\mu = G(M+m) = GM$$

  y para el caso de la Tierra resulta ser

  $$\mu_T = 398\,600\ km^3/s^2.$$

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que sí lo es, se utiliza como radio terrestre, el radio ecuatorial

  $$R_T = 6378\ km.$$

Además de esas constantes debes conocer algunas relaciones entre parámetros orbitales que se verifican en cualquier órbita kepleriana y que pueden consultarse en la bibliografía:

- El momento angular de cualquier órbita verifica $h = r\,v_\perp$.
- En el perigeo y apogeo la velocidad solo tiene componente transversal:

  $$v_p = v_{\perp_p} \quad \text{y} \quad v_a = v_{\perp_a}.$$

- La energía específica cumple dos expresiones $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu^2}\left(1-e^2\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$.
- El ángulo de vuelo γ viene determinado por la igualdad $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$.
- La velocidad radial en cualquier posición y órbita es $v_r = \frac{\mu}{h} e \operatorname{sen}\theta$.
- La velocidad de escape de un cuerpo que orbita a una distancia r es $v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Obtener la anomalía verdadera de la asíntota de una órbita hiperbólica.
- Hallar el ángulo de la asíntota con la línea de ápsides.
- Calcular el ángulo de giro de una trayectoria hiperbólica.
- Determinar los radios del perigeo y del apogeo reconociendo que este último es negativo.
- Deducir la longitud del semieje mayor de la hipérbola.
- Reconocer y calcular el parámetro de impacto de una órbita hiperbólica.
- Deducir la ley de conservación de la energía específica para órbitas hiperbólicas.
- Hallar la velocidad hiperbólica excedente y la energía característica para realizar una misión.

3 Características de las órbitas hiperbólicas ($e > 1$).

Si consideramos que en la ecuación orbital (1) la excentricidad es superior a la unidad, $e > 1$, la curva descrita es una hipérbola (figura 1).

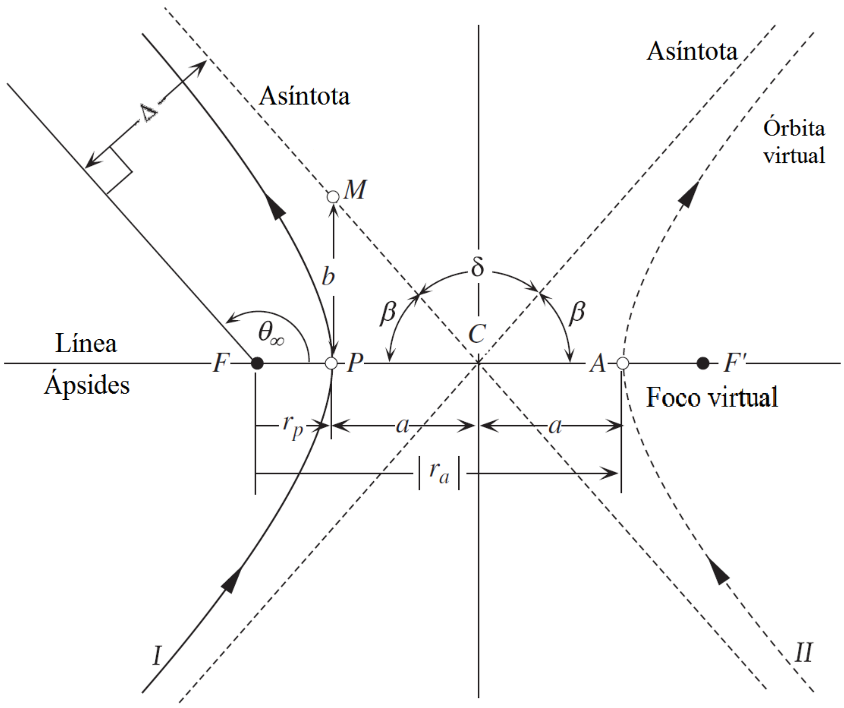

Figura 1: Trayectoria hiperbólica ($e > 1$).

El cuerpo recorre en su trayectoria una de las ramas de la hipérbola mientras que la otra queda como una curva vacía que no es recorrida.

La anomalía verdadera θ, recorre valores desde $-\theta_\infty$ hasta θ_∞ ocupando la rama I de la hipérbola (izquierda en la figura 1). La otra rama, II (derecha) correspondería a valores de θ con $\theta_\infty < \theta < 360° - \theta_\infty$) que no son posibles porque necesitarían de una fuerza gravitacional repulsiva.

El periapsis P, está en el cruce de la línea de ápsides con la rama I. El apoapsis A, está en la rama imposible y al punto medio entre el periapsis y el apoapsis se le llama centro de la hipérbola, C.

Las asíntotas de la hipérbola son las líneas rectas hacia las cuales tienden las curvas cuando se acercan al infinito.

3.1 Anomalía verdadera de la asíntota, θ_∞.

Si $e > 1$ el denominador tiende a 0 cuando $\cos\theta$ se acerca a $-\frac{1}{e}$. Al valor de θ en este caso extremo se le llama **anomalía verdadera de la asíntota** y se denota por θ_∞, por tanto

$$\theta_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right). \tag{2}$$

Despejando en la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y aplicando que $90° < \theta_\infty < 180°$ obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta_\infty = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = +\sqrt{1-\left(-\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}. \tag{3}$$

Las asíntotas se cortan en C y forman un ángulo agudo β con la línea de ápsides que cumple

$$\beta = 180° - \theta_\infty \quad \rightarrow \quad \cos\beta = -\cos\theta_\infty \quad \rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\tfrac{1}{e}\right) \tag{4}$$

3.2 Ángulo de giro en una órbita hiperbólica, δ.

Otro ángulo importante en las órbitas hiperbólicas es el formado por las asíntotas δ llamado **ángulo de giro** porque que rota el vector velocidad cuando el cuerpo orbita alrededor del cuerpo principal en F. Observando la figura 1 se ve que $\delta = 180° - 2\beta$ y por tanto

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{180° - 2\beta}{2} = \sin(90° - \beta) = \cos\beta = \frac{1}{e} \quad \rightarrow \quad \delta = 2\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{e}. \tag{5}$$

3.3 Periapsis y apoapsis en el movimiento hiperbólico r_p.

Partiendo de la ecuación orbital (1) la distancia mínima entre los dos cuerpos se alcanza en el **periapsis**, P cuando $\theta = 0°$ y el máximo que no llega a alcanzarse se produciría en el apoapsis cuando $\theta = 180°$. Sus expresiones son :

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos(0°)} = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e} \qquad r_a = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos(180°)} = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1-e} \tag{6}$$

que coinciden con las expresiones del apoapsis y periapsis de la órbita elíptica. Sin embargo, como para la hipérbola $e > 1$, el valor de r_a es negativo lo que nos indica que el apoapsis se encuentra virtualmente a la derecha del foco F.

3.4 Semieje mayor de la hipérbola, a.

De la figura 1 se deduce que la distancia entre el periapsis P y el centro C, conocida como **semieje mayor** de la hipérbola a es:

$$2a = |r_a| - r_p = r_a - r_p = -\frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e}\right) \quad \rightarrow \quad a = \frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1}{e^2-1}\right) \tag{7}$$

que es una expresión similar, aunque no la misma, que la del semieje para la órbita elíptica[1]. Si despejamos $\frac{h^2}{\mu}$ y sustituimos en la ecuación orbital (1) se obtiene una nueva expresión para órbitas hiperbólicas:

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta} \tag{8}$$

que también es similar pero no idéntica que la obtenida para órbitas elípticas y de la que se pueden obtener otras expresiones similares para el periapsis r_p y apoapsis r_a:

$$r_p = a(e-1) \qquad r_a = -a(e+1) \tag{9}$$

3.5 Parámetro de impacto, Δ.

Otra distancia importante en las órbitas hiperbólicas es el **'aiming radius'** o **parámetro de impacto** Δ, que es la distancia entre la asíntota y una línea paralela que pasa por el foco (figura 1). En la figura se observa que

$$\Delta = (r_p + a)\operatorname{sen}\beta \underset{(9)}{=} ae\operatorname{sen}\beta = ae\sqrt{1-\cos^2\beta} \underset{(4)}{=} ae\sqrt{1-\frac{1}{e^2}} = a\sqrt{e^2-1}. \tag{10}$$

Se puede comprobar que el parámetro de impacto Δ coincide con el semieje menor de la hipérbola b:

$$b = a\tan\beta = a\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = a\frac{\sin(180^\circ-\theta_\infty)}{\cos(180^\circ-\theta_\infty)} = a\frac{\sin\theta_\infty}{-\cos\theta_\infty} = a\frac{\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}}{-\left(-\frac{1}{e}\right)} = a\sqrt{e^2-1} = \Delta.$$

[1] Si asumimos que el semieje mayor de la hipérbola es negativo ($a < 0$) $\rightarrow a = \frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1}{1-e^2}\right)$ que es la misma expresión que para órbitas elípticas

3.6 La ley de conservación de energía en órbitas hiperbólicas.

Es conocido que la energía específica de una órbita es

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1-e^2)$$

pero de la ecuación (7) se deduce que para órbitas hiperbólicas $h^2 = \mu a(e^2-1)$ que al sustituir en la igualdad anterior resulta

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\mu a(e^2-1)}(1-e^2) = \frac{\mu}{2a}$$

por lo que la energía específica en órbitas hiperbólicas es positiva (la energía cinética supera a la energía potencial) e independiente de la excentricidad. Por tanto la **ley de conservación de la energía** para la **trayectoria hiperbólica** es[2]

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \tag{11}$$

3.7 Velocidad hiperbólica excedente, v_∞ y energía característica, C_3.

La velocidad con la que el cuerpo llegaría al infinito en una órbita hiperbólica es conocida como **velocidad hiperbólica excedente**, se denota habitualmente por v_∞ y de la ecuación (11) con $r \to \infty$ se deduce que:

$$\frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{\infty} = \frac{\mu}{2a} \quad \to \quad v_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \tag{12}$$

por lo que la ley de conservación de la energía (11) puede reescribirse como

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_\infty^2}{2}$$

Conociendo la velocidad de escape $v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \to \frac{\mu}{r} = \frac{v_{esc}^2}{2}$ que sustituyendo en la igualdad anterior queda

$$v^2 = v_{esc}^2 + v_\infty^2 \tag{13}$$

En esta ecuación se observa que la velocidad hiperbólica excedente v_∞ nos indica el exceso de energía cinética por encima de la necesaria para conseguir un simple escape de la atracción gravitatoria del cuerpo principal. Por esta razón se utiliza con frecuencia el término v_∞^2 que se denota C_3 y se conoce como la **energía característica** de la trayectoria, por tanto

$$C_3 = v_\infty^2 \tag{14}$$

[2]Si se considera que el semieje mayor de la hipérbola es negativo: $a < 0 \to \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$, que coincide con la ecuación Vis-Viva para órbitas elípticas

C_3 es una medida de la energía necesaria para una misión interplanetaria y también de la máxima energía que un vehículo lanzador puede aplicar a una nave de una determinada masa. Evidentemente para cualquier misión $C_3)_{lanzador} > C_3)_{mision}$.

Otra forma de obtener la velocidad hiperbólica excedente es aplicar la expresión de la velocidad radial en el infinito. Cuando $\theta \to \theta_\infty$ toda la velocidad es radial y por tanto

$$v_\infty = v_{r_\infty} = \frac{\mu}{h} e \operatorname{sen}\theta_\infty \underset{(3)}{=} \frac{\mu}{h}\sqrt{e^2-1}. \tag{15}$$

4 Ejemplos

Una aplicación de las órbitas hiperbólicas es el cálculo de maniobras de asistencia gravitatoria o flyby. Cuando una nave sobrevuela alrededor de un cuerpo con trayectoria hiperbólica el vector velocidad de la nave gira un ángulo $\delta = 180^\circ - 2\beta$. En este tipo de maniobras la nave consigue ganar mucha energía sin gasto de propelente. Hay muchos ejemplos de uso de esta maniobra (Voyager iba viajando de un planeta al siguiente aprovechando este asistencia gravitatoria, Ulysses usó la atracción de Júpiter para dirigirse a la región polar del Sol, Galileo, etc.)

4.1 Ejemplo 1

Una nave se encuentra en una trayectoria geocéntrica en un punto situado a $15600\,km$ de radio, con una velocidad de $7.6\,km/s$ y con un ángulo de vuelo en ese instante de 46°.

a) Confirma que la trayectoria es una hipérbola

Calcula las siguientes cantidades:
b) Momento angular
c) Excentricidad
d) Anomalía verdadera
e) Radio del perigeo
f) Semieje mayor
g) C_3
h) Ángulo de giro
i) Parámetro de impacto
j) Anomalía verdadera en el infinito

Solución

Como nos dan el radio y la velocidad podemos determinar el tipo de trayectoria comparando esa velocidad con la velocidad de escape:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600}{15600}} = 7.15\,km/s$$

como la velocidad de la nave supera a la velocidad de escape, $v = 7.6 > 7.15 = v_{esc}$, la órbita es hiperbólica.

Recordemos que todos los parámetros orbitales pueden calcularse con los parámetros principales, el momento angular h y la excentricidad e.

Como el ángulo de vuelo γ es conocido y $\tan\gamma = \dfrac{v_r}{v_\perp}$ entonces

$$v_r = v_\perp \tan\gamma$$

.

Por otro lado, $v^2 = v_r^2 + v_\perp^2$ que junto con la expresión anterior permite obtener $v_\perp$ y v_r:

$$v^2 = (v_\perp \tan\gamma)^2 + v_\perp^2 = v_\perp^2\left(1+\tan^2\gamma\right) \rightarrow$$
$$v_\perp = \frac{v}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}} = \frac{7.6}{\sqrt{1+\tan^2(46^\circ)}} = 5.28\,km/s$$
$$v_r = v_\perp \tan\gamma = 5.28\,\tan(46^\circ) = 5.47\,km/s$$

Sabemos que en cualquier tipo de órbita $h = v_\perp\, r$ de donde

$$\boxed{h} = v_\perp\, r = 5.28 \cdot 15600 = \boxed{82359\,km^2/s^2}.$$

Para hallar e se pueden usar expresiones en las que aparece como son la velocidad radial v_r y la ecuación orbital r:

$$\left.\begin{array}{l} v_r = \dfrac{\mu}{h} e\,\mathrm{sen}\,\theta \;\rightarrow\; e\,\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{h\,v_r}{\mu} \\ r = \dfrac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos\theta} \;\rightarrow\; e\cos\theta = \dfrac{h^2}{\mu\, r} - 1 \end{array}\right\} \rightarrow e^2 = \left(\frac{h\,v_r}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{h^2}{\mu\, r} - 1\right)^2 \rightarrow$$

$$\boxed{e} = \sqrt{\left(\frac{h\,v_r}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{h^2}{\mu\, r} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{82359 \cdot 5.47}{398600}\right)^2 + \left(\frac{82359^2}{398600 \cdot 15600} - 1\right)^2} = \boxed{1.13323}.$$

Con cualquiera de las expresiones anteriores se puede obtener la anomalía verdadera, por ejemplo con la ecuación orbital:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos\theta} \;\rightarrow\; \cos\theta = \frac{\frac{h^2}{\mu\, r} - 1}{e} = 0.08015$$
$$\theta = \arccos(0.08015) = \begin{cases} 85.4^\circ \\ 274.6^\circ \end{cases} \xrightarrow{\gamma > 0} \boxed{\theta = 85.4^\circ}.$$

El radio del perigeo se calcula con la ecuación orbital (1) cuando $\theta = 0^\circ$:

$$\boxed{r_p} = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos(0^\circ)} = \frac{\frac{82359^2}{398600}}{1+1.13323\cos(0^\circ)} = \boxed{7977\,km}.$$

Para calcular el semieje mayor se puede usar la expresión (7):

$$\boxed{a} = \frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1}{e^2-1}\right) = \frac{82359^2}{398600}\left(\frac{1}{1.13323^2-1}\right) = \boxed{59873\,km}.$$

Para calcular la energía característica $C_3 = v_\infty^2$ se puede utilizar la igualdad (13) o (15). Utilizando la primera de ellas:

$$\boxed{C_3} = v_\infty^2 = v^2 - v_{esc}^2 = 7.6^2 - 7.15^2 = \boxed{6.65\,km^2/s^2}.$$

El ángulo de giro δ se obtiene directamente con la ecuación (5)

$$\boxed{\delta} = 2\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{1}{e}\right) = 2\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{1}{1.13323}\right) = \boxed{123.9^{\circ}}$$

El parámetro de impacto Δ que coincide con el semieje menor de la hipérbola se puede hallar con (10):

$$\boxed{\Delta} = a\sqrt{e^2-1} = 59873\sqrt{1.13323^2-1} = \boxed{31919\,km}.$$

Hay varias expresiones que permiten calcular la anomalía en el infinito θ_∞, pero si se conoce la excentricidad la más directa es (2):

$$\boxed{\theta_\infty} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{1.13323}\right) \overset{\gamma\geq 0}{=} \boxed{151.9^{\circ}}.$$

y de aquí se deduce con facilidad el ángulo entre la asíntota y la línea de ápsides

$$\beta = 180^{\circ} - \theta_\infty = 180^{\circ} - 151.9^{\circ} = 28.1^{\circ}.$$

Podemos ver una representación del ejemplo en figura 2.

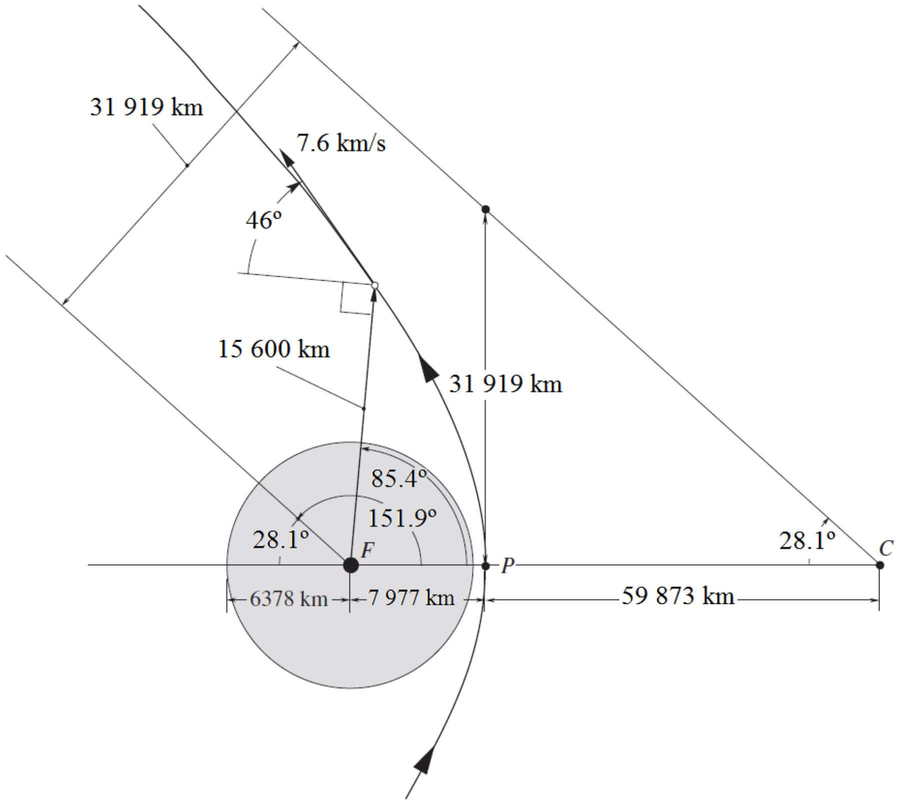

Figura 2: Órbita hiperbólica con la solución al ejemplo

4.2 Ejemplo 2

La hipérbola de salida de la nave Viking I a Marte tenía como elementos $a = 18849.7\,km$ y $e = 1.3482$. ¿Qué valor de $C3$ tuvo que aportarle el lanzador Titan IIIE para alcanzar esa órbita y con qué ángulo se alejará de la Tierra?

Solución

La órbita es hiperbólica porque $e > 1$ y por tanto la energía $C_3 = v_\infty^2$ se puede deducir de (12),

$$\boxed{C_3} = v_\infty^2 = \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{18849.7} = \boxed{21.1462\,km^2/s^2}.$$

Para el ángulo β se puede utilizar (4) resultando

$$\boxed{\beta} = \arccos\left(\frac{1}{e}\right) = \arccos\left(\frac{1}{1.3482}\right) = \boxed{42.121^\circ}.$$

5 Cierre

A lo largo de este artículo se han mostrado cuáles son las características de las órbitas hiperbólicas y como se obtienen los parámetros que las caracterizan:

- La anomalía verdadera de la asíntota.

- El ángulo de la asíntota con la línea de ápsides y el ángulo de giro.

- Las longitudes del semieje mayor, radio del perigeo y parámetro de impacto.

- La expresión de la ley de conservación de la energía.

- Los valores de la velocidad hiperbólica excedente y de la energía característica necesaria para una misión.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.