Análisis y ejemplos de órbitas parabólicas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta y analiza las características de las órbitas parabólicas. También se muestran algunos casos de su utilidad y se incluyen ejemplos de su estudio.

Recordemos que según [**Curtis**] la ecuación orbital de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M por atracción gravitatoria es :

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

donde $h = \|\overrightarrow{h}\| = \|\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}\|$ es el momento angular que es constante, $\mu = G(M+m)$ es el parámetro gravitacional, $e = \|\overrightarrow{C}/\mu\|$ es la excentricidad de la órbita obtenida con el vector de Laplace que también es constante y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre $\overrightarrow{e}$ y $\overrightarrow{r}$).

Esta ecuación orbital origina trayectorias que representan curvas cónicas (circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas) según los valores de e. En este documento vamos a conocer las principales características y algunos ejemplos de las **órbitas parabólicas**.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a recordar algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la del Sol o con la de cualquier planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante

  $$\mu = G(M+m) = GM$$

  y para el caso de la Tierra resulta ser

  $$\mu_T = 398\,600\ km^3/s^2.$$

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que sí lo es, se utiliza como radio terrestre, el radio ecuatorial

  $$R_T = 6378\ km.$$

Además de esas constantes debes conocer algunas relaciones entre parámetros orbitales que se verifican en cualquier órbita kepleriana y que pueden consultarse en la bibliografía:

- El momento angular de cualquier órbita verifica $h = r\,v_\perp$.
- En el perigeo y apogeo la velocidad solo tiene componente transversal:

  $$v_p = v_{\perp_p} \quad \text{y} \quad v_a = v_{\perp_a}.$$

- La energía específica cumple dos expresiones $\varepsilon = -\dfrac{1}{2}\dfrac{h^2}{\mu^2}\left(1-e^2\right) = \dfrac{v^2}{2} - \dfrac{\mu}{r}$.
- El ángulo de vuelo γ viene determinado por la igualdad $\tan\gamma = \dfrac{e\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+e\cos\theta}$.
- El teorema del coseno de trigonometría plana.
- La velocidad circular de un cuerpo a una distancia r es $v_c = \sqrt{\dfrac{\mu}{r}}$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Conocer y aplicar que la energía específica en una órbita parabólica es nula.
- Calcular la velocidad de escape de un cuerpo en órbita.
- Saber y aplicar la propiedad particular del ángulo de vuelo en este tipo de órbitas.
- Analizar, estudiar y representar una órbita parabólica a partir de dos posiciones.

3 Características de las órbitas parabólicas ($e = 1$).

Si $e = 1$ entonces la ecuación orbital (1) queda

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \cos\theta}. \tag{2}$$

En este caso, cuando la anomalía verdadera θ se acerca a $180°$ el denominador se aproxima a 0 por lo que la distancia r tiende a infinito.

3.1 Energía específica de una órbita parabólica

Si aplicamos que $e = 1$ a la expresión de la energía se obtiene

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu^2}\left(1 - e^2\right) = 0 \tag{3}$$

En consecuencia, la **energía específica** en una órbita parabólica **es nula**.

3.2 Velocidad de escape

Si un cuerpo de masa m es lanzado en órbita parabólica, éste se irá hacia el infinito llegando allí con velocidad nula para no volver. Por esa razón las órbitas parabólicas se llaman **trayectorias de escape**.

Como la energía específica es nula para un cuerpo situado a una distancia r del cuerpo principal, la **velocidad de escape** v_{esc}, viene dada por la expresión

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}\, v_{circ}. \tag{4}$$

Por tanto para escapar desde una órbita circular debemos incrementar su velocidad un $41.4\,\%$. En realidad, esto sería cierto si suponemos que las masas M y m están solas en el universo pero no es así. Una nave lanzada desde la Tierra con velocidad v_{esc} no llegará al infinito (dejando el sistema solar) sino que quedará atrapada por la influencia gravitacional del Sol, con la misma órbita que la Tierra.

3.3 Ángulo de vuelo en órbitas parabólicas

El ángulo de vuelo de una órbita parabólica presenta una particularidad que en otro tipo de órbitas no se da:

$$\tan\gamma = \frac{e\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+e\cos\theta} \overset{e=1}{=} \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{\theta}{2}} \tag{5}$$

en consecuencia, el **ángulo de vuelo** siempre **es la mitad de la anomalía verdadera**, situación que se muestra en figura 1.

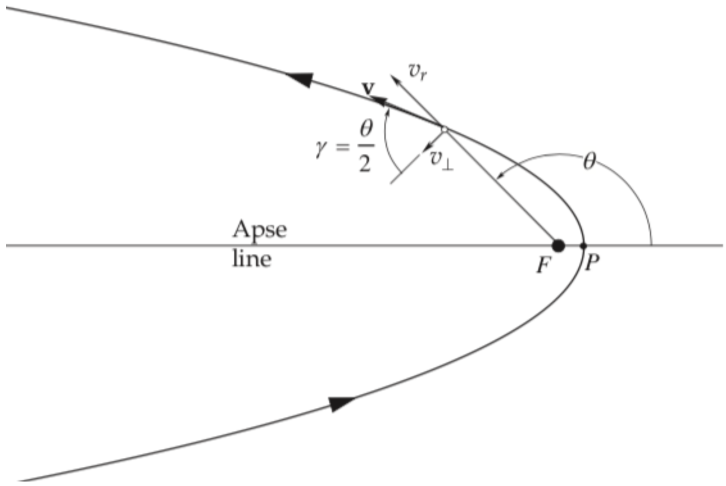

Figura 1: Órbita parabólica y su ángulo de vuelo

4 Ejemplos

4.1 Ejemplo 1

El perigeo de un satélite en una órbita parabólica geocéntrica (figura 2) es de $6200\,km$. ¿Qué distancia separa los puntos P_1 y P_2 de la órbita si están a $7500\,km$ y $14000\,km$ del centro de la Tierra respectivamente?

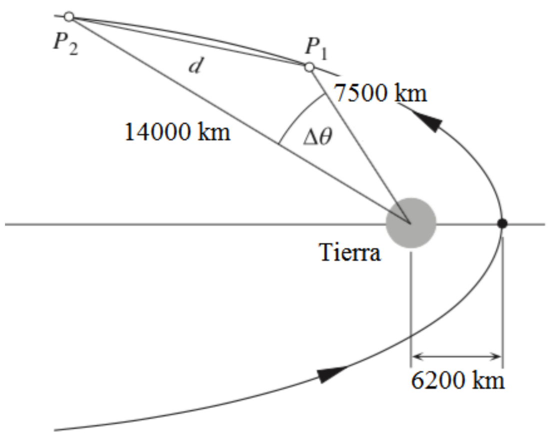

Figura 2: Órbita parabólica geocéntrica

Solución:

Con la distancia del perigeo r_p y la ecuación (2) para $\theta = 0°$ se puede determinar el momento angular h

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\cos 0} = \frac{h^2}{2\mu} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{2\mu r_p}$$

$$h = \sqrt{2 \cdot 398600 \cdot 6200} = 70303.9\, km^2/s$$

Para hallar las anomalías de P_1 y P_2 se utiliza también la ecuación orbital para parabólicas (2)

$$r_i = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\cos\theta_i} \quad \rightarrow \quad \cos\theta_i = \frac{h^2}{r_i\,\mu} - 1 \quad \rightarrow \quad \theta_i = \arccos\left(\frac{h^2}{r_i\,\mu} - 1\right)$$

por tanto como $r_1 < r_2$ el satélite se está alejando por lo que $0° < \theta_1, \theta_2 < 180°$ y

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{70303.9^2}{7500 \cdot 398600} - 1\right) = 49.21°$$
$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{70303.9^2}{14000 \cdot 398600} - 1\right) = 96.56°$$

en consecuencia

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 96.56 - 49.21 = 47.35°$$

La distancia de P_1 a P_2 se obtiene ahora por el Teorema del coseno

$$d^2 = 7500^2 + 14000^2 - 2 \cdot 7500 \cdot 14000 \cos\Delta\theta \quad \rightarrow \quad d = 10487.5\, km.$$

4.2 Ejemplo 2

Un satélite se encuentra en una órbita de parking a $200\, km$ de altura. ¿Qué incremento mínimo de velocidad debemos aplicarle para que entre en órbita parabólica y escape de la atracción gravitatoria terrestre? Halla el momento angular de la órbita y representa graficamente la situación.

Solución:

La órbita de parking de altura $alt = 200\, km$ tiene de radio

$$r_c = R_T + alt = 6378 + 200 = 6578\, km$$

La velocidad de escape se calcula con (4)

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600}{6578}} = 11.01\, km/s$$

Como la velocidad circular es $v_c = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_c}} = \sqrt{\dfrac{398600}{6578}} = 7.78\,km/s$

$$\Delta V = v_{esc} - v_c = 11.01 - 7.78 = 3.23\,km$$

Para hacer la representación hay que calcular el momento angular h aplicando la expresión (2) y que $r_c = r_p$, radio del perigeo de la nueva órbita parabólica:

$$r_p = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\cos(0^\circ)} \;\rightarrow\; h = \sqrt{2\mu \cdot r_p} = \sqrt{2 \cdot 398600 \cdot 6578} = 72415.3\,km^2/s$$

Ahora se puede representar la curva en polares $r(\theta) = \dfrac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\cos\theta}$, (figura 3).

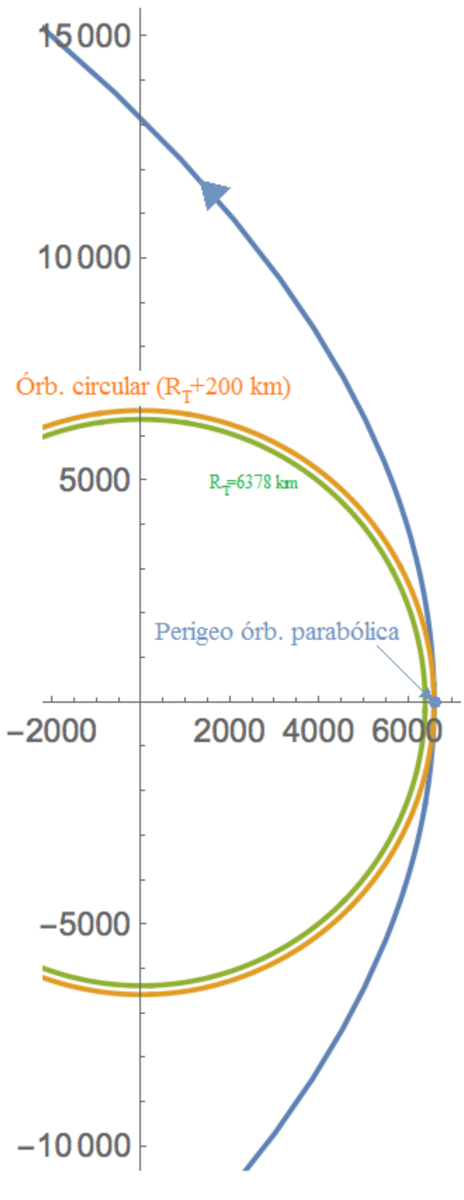

Figura 3: Órbita parabólica de escape

5 Cierre

A lo largo de este artículo se han mostrado las características de las órbitas parabólicas.

Se ha deducido la expresión de la ecuación orbital para estos casos.

Se ha definido la velocidad de escape de una órbita y se ha deducido la expresión que permite su cálculo.

Se ha demostrado que en órbitas parabólicas la energía específica es nula y el ángulo de vuelo coincide con la mitad de la anomalía verdadera en cada instante.

Estos contenidos han sido apoyados con varios ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] CURTIS, HOWARD D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] BATE, ROGER R. ET AL.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] BROWN, CHARLES D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.