Ecuaciones del movimiento en un marco inercial y en uno relativo

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta una aproximación basada en vectores del problema clásico de determinación del movimiento de dos cuerpos sometidos unicámente a su mutua atracción gravitacional.

En la primera sección se deducen las ecuaciones que nos permiten conocer ese movimiento en un sistema de referencia inercial. También se muestra la expresión que permite estudiar el movimiento del centro de masas. En la segunda sección se presentan las ecuaciones del movimiento en un sistema de referencia relativo centrado en uno de los cuerpos y que se encuentra en movimiento.

Para favorecer la comprensión de estas expresiones se propone la resolución de ejemplos para los que será necesario conocer métodos numéricos de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.

2 Objetivos

Una vez se haya leído con detenimiento este documento, será capaz de:

- Hallar las ecuaciones del movimiento de dos masas en un sistema inercial sometidos a la fuerza de atracción mutua.
- Hallar la ecuación del movimiento relativo de una de las masas respecto a la otra.

3 Ecuaciones del movimiento de dos cuerpos

La figura 1 muestra dos masas puntuales sobre las que actúan únicamente la fuerza de atracción mutua. Las posiciones $\overrightarrow{R_1}$ y $\overrightarrow{R_2}$ de sus centros de masa son mostradas en un sistema de referencia inercial (X, Y, Z). El origen 0 del sistema inercial puede moverse con velocidad constante (respecto a las estrellas fijas) pero los ejes no rotan.

Sobre cada cuerpo actúa la atracción gravitatoria del otro, es decir, $\overrightarrow{F_{12}}$ es la fuerza ejercida por m_2 sobre la masa m_1 y $\overrightarrow{F_{21}}$ es la ejercida sobre m_2 por m_1.

Ahora si consideramos $\overrightarrow{r}$ como el vector posición de m_2 respecto de m_1 lo podemos escribir como

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1}. \tag{1}$$

Esto nos permite considerar el vector unitario que apunta de m_1 a m_2, $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$.

Así la fuerza ejercida sobre el cuerpo m_1 por la masa m_2 es la fuerza de atracción gravitatoria dada por la ley de gravitación universal, esto es,

$$\overrightarrow{F_{12}} = \frac{K m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u_r} \tag{2}$$

donde K es la constante de gravitación universal cuyo valor es $K = 6.6742 \times 10^{-11} m^3/(kg \cdot s^2)$ y el vector $\overrightarrow{u_r}$ está dirigido de m_1 a m_2.

Ahora por la segunda ley de Newton sabemos que $\overrightarrow{F_{12}} = m_1 \ddot{\overrightarrow{R_1}}$ donde $\ddot{\overrightarrow{R_1}}$ es la aceleración absoluta de m_1 y por tanto

$$m_1 \ddot{\overrightarrow{R_1}} = \frac{K m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u_r}. \tag{3}$$

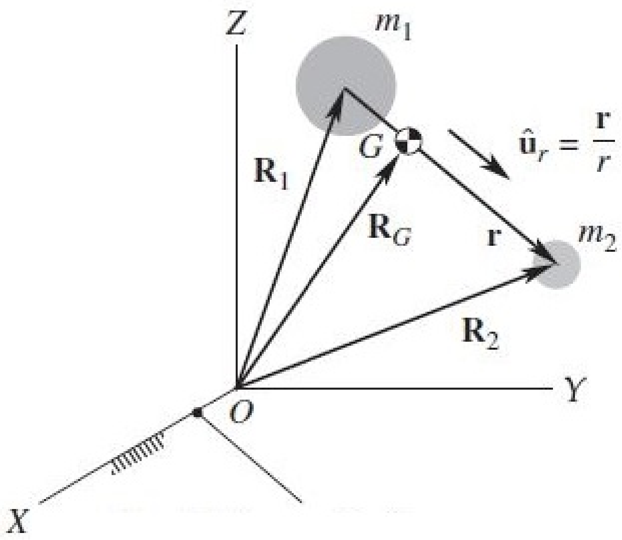

Figura 1: Sistema de referencia inercial (fijo respecto a las estrellas)

Por la tercera ley de Newton (principio de acción-reacción) la fuerza $\overrightarrow{F_{21}}$ ejercida por m_1 sobre m_2 es $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$, y como además $\overrightarrow{F_{21}} = m_1\ddot{\overrightarrow{R_2}}$,

$$m_2\ddot{\overrightarrow{R_2}} = -\frac{Km_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} \tag{4}$$

Ambas ecuaciones pueden ser divididas de m_1 y m_2 respectivamente para obtener el sistema de ecuaciones que modeliza el movimiento de dos cuerpos en un sistema de referencia inercial.

$$\ddot{\overrightarrow{R_1}} = Km_2\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \tag{5}$$

$$\ddot{\overrightarrow{R_2}} = -Km_1\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \tag{6}$$

Movimiento del centro de masas

La posición del centro de masas G es:

$$\overrightarrow{R_G} = \frac{m_1\overrightarrow{R_1} + m_2\overrightarrow{R_2}}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

y por lo tanto la velocidad y aceleración absolutas (medidas en un sistema de referencia inercial) de G serán:

$$\overrightarrow{v_G} = \dot{\overrightarrow{R_G}} = \frac{m_1\dot{\overrightarrow{R_1}} + m_2\dot{\overrightarrow{R_2}}}{m_1 + m_2} \tag{8}$$

$$\overrightarrow{a_G} = \ddot{\overrightarrow{R_G}} = \frac{m_1\ddot{\overrightarrow{R_1}} + m_2\ddot{\overrightarrow{R_2}}}{m_1 + m_2} \tag{9}$$

Si sumamos las ecuaciones (5) y (6) resulta $m_1\overrightarrow{\ddot{R_1}}+m_2\overrightarrow{\ddot{R_2}} = \overrightarrow{0}$ y por tanto por la igualdad (9) la aceleración del centro de masas $\overrightarrow{a_G}$ de un sistema de dos cuerpos será nula y G se moverá en línea recta con una velocidad constante $\overrightarrow{v_G}$ y el vector posición de G respecto al sistema inercial vendrá dado por la expresión;

$$\overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{R_{G_0}} + \overrightarrow{v_G}t \tag{10}$$

donde $\overrightarrow{R_{G_0}}$ es la posición de G en el instante $t = 0$.

Ejemplo:

Consideremos dos cuerpos de masas $m_1 = m_2 = 10^{26}\,kg$ en un instante que consideramos el inicial $t = 0$ con los vectores posición y velocidad de las dos partículas:

$$\overrightarrow{R_1} = (0,0,0)\,, \qquad \overrightarrow{V_1} = (10,20,30)$$
$$\overrightarrow{R_2} = (3000,0,0)\,, \qquad \overrightarrow{V_2} = (0,40,0)$$

Utiliza un método numérico para integrar el movimiento de ambas masas debido solamente a su atracción mutua desde el instante inicial al instante $t = 480\,s$.

a) Representa el movimiento de m_1 y m_2 respecto del sistema de referencia inercial.

b) Representa el movimiento de m_2 y del centro de gravedad G respecto de m_1.

c) Representa el movimiento de m_1 y m_2 respecto de G.

Solución:

Utilizando un software matemático podemos integrar numéricamente las ecuaciones (5) y (6) desde $t = 0$ hasta $t = 480$.

a) Graficando las soluciones de la integración numérica junto con la del centro de gravedad de cada instante siguiendo la ecuación (7) obtenemos las siguientes trayectorias (figura 2)

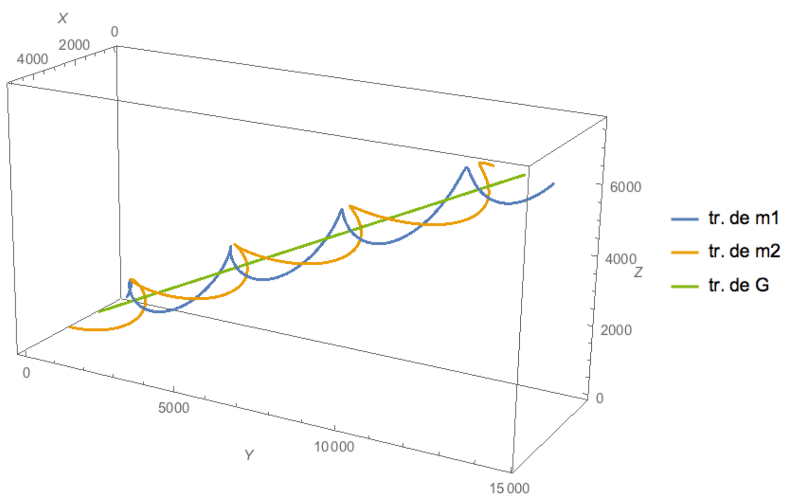

Figura 2: Trayectorias de m_1, m_2 y G en el sistema inercial

b) Para este apartado representamos las diferencias entre las soluciones de m_2 y G con m_1, $\overrightarrow{R_2}(t) - \overrightarrow{R_1}(t)$, y $\overrightarrow{R_G}(t) - \overrightarrow{R_1}(t)$. Como podemos ver en figura 3 las trayectorias en este caso son elipses alrededor de m_1.

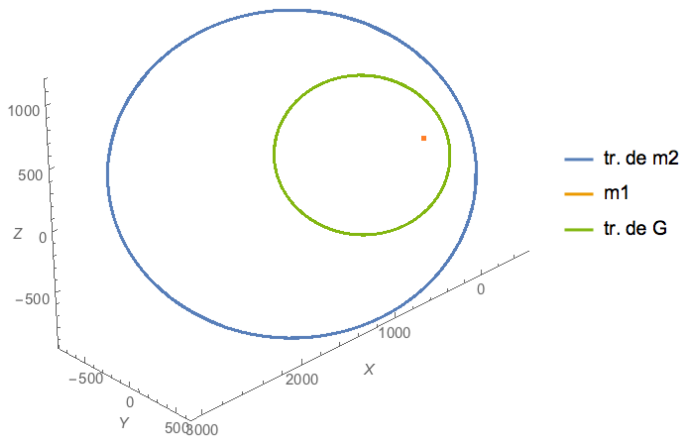

Figura 3: Trayectorias de m_2 y G respecto de m_1

c) Este último caso se hace de modo similar restando de cada solución la posición del centro de gravedad $\overrightarrow{R_G}(t)$. Las curvas obtenidas (ver figura 4) son también elipses alrededor de G.

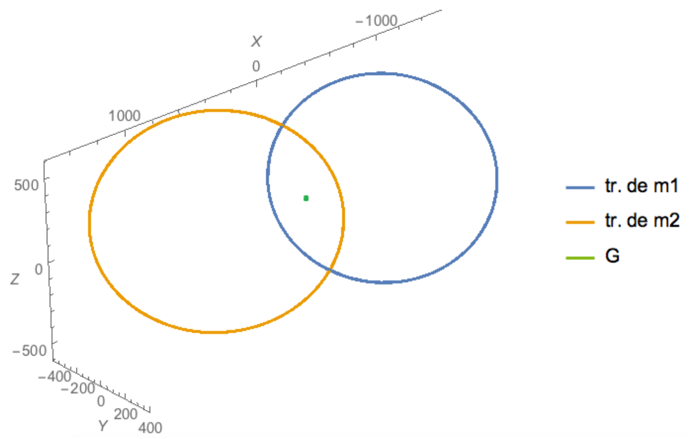

Figura 4: Trayectorias de m_1 y m_2 respecto de G

4 Ecuaciones del movimiento relativo

Las igualdades (5) y (6) obtenidas anteriormente son las ecuaciones del movimiento de 2 cuerpos en un sistema de referencia inercial. En esta sección vamos a encontrar la ecuación que modeliza el movimiento de un cuerpo respecto a otro. Para ello volvamos a la expresión de $\overrightarrow{r}$ obtenida en (1) que nos da el vector posición de m_2 respecto a m_1. Derivando dos veces respecto al tiempo y sustituyendo las igualdades (5) y (6) obtenemos una expresión de la aceleración relativa

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = -\frac{K(m_1+m_2)}{r^3}\overrightarrow{r} \tag{11}$$

Definimos el parámetro gravitacional μ como:

$$\mu = K(m_1+m_2) \tag{12}$$

cuyas unidades son km^3s^{-2} y permite reescribir la ecuación (11) como

$$\boxed{\ddot{\overrightarrow{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\overrightarrow{r}}. \tag{13}$$

Esta expresión, conocida como la **ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos**, es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que gobierna el movimiento de m_2 respecto a m_1.

Notar que el movimiento de m_2 visto desde m_1 es el mismo que el movimiento de m_1 visto desde m_2. El movimiento de la Luna vista desde la Tierra es el mismo que el de la Tierra visto desde la Luna.

El vector de posición relativa $\overrightarrow{r}$ de la ecuación (13) estaba definido originalmente en un sistema de referencia inercial (1) pero resulta más conveniente medir las componentes de $\overrightarrow{r}$ en un sistema de referencia unido y moviéndose con m_1.

La relación entre la aceleración absoluta de un cuerpo $\ddot{\overrightarrow{r}}$ y su aceleración relativa en un sistema en movimiento $\ddot{\overrightarrow{r_{rel}}}$ viene dada en (ref Curtis formula 1.70) por la expresión:

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = \ddot{\overrightarrow{r_{rel}}} + \dot{\overrightarrow{\Omega}} \times \overrightarrow{r_{rel}} + \overrightarrow{\Omega} \times \left(\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r_{rel}}\right) + 2\overrightarrow{\Omega} \times \dot{\overrightarrow{r_{rel}}} \tag{14}$$

donde $\overrightarrow{\Omega}$ y $\dot{\overrightarrow{\Omega}}$ son la velocidad angular y la aceleración angular absolutas respectivamente del sistema de referencia en movimiento. Notemos que $\ddot{\overrightarrow{r}} = \ddot{\overrightarrow{r_{rel}}}$ si $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\overrightarrow{\Omega}} = \overrightarrow{0}$ lo que significa que podemos utilizar la aceleración relativa como primer término de la ecuación (13) siempre que el sistema en el cual medimos no esté girando.

En los problemas de Mecánica orbital podemos resolver la ecuación (13) de forma numérica: Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano ligado a m_1 que no está rotando figura 5.

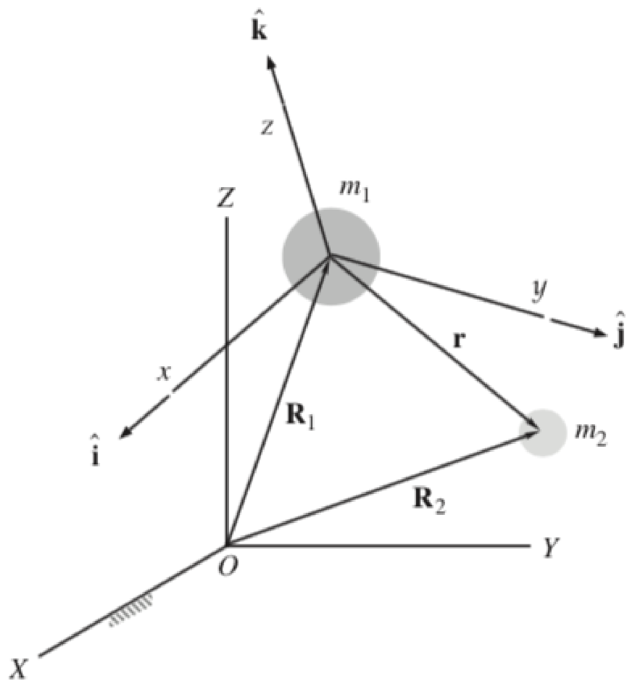

Figura 5: Sistema de referencia en movimiento xyz ligado a m_1

Separamos la ecuación (13) en las componentes del sistema de referencia en movimiento para obtener las componentes de la aceleración relativa que formarán el sistema de ecuaciones diferenciales que deberemos resolver numéricamente.

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3}x \qquad \ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3}y \qquad \ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}z. \tag{15}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Ejemplo:

Un satélite de $1000kg$ tiene como vector posición inicial $\overrightarrow{r} = (8000, 0, 6000)km$ y como vector velocidad inicial $\overrightarrow{v} = (0, 7, 0)km/s$ en un sistema de referencia con origen el centro de la Tierra y sin rotación.

a) Obtener por integración numérica el camino que recorre durante las siguientes 4 horas.

b) Hallar la distancia máxima y mínima desde la superficie de la Tierra durante ese periodo de tiempo.

(Considera $\mu = K\,(m_T + m_S) = 398600\,km^3/s^2$ y $R_T = 6378\,km$)

Solución:

Según el software que utilicemos para integrar podremos integrar el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (15) directamente (Mathematica) o deberemos reducirlo a uno de primer orden (Matlab).

Tras la integración se obtienen los siguientes resultados:

a) Al cabo de las 4 horas su posición y velocidad serán respectivamente:

$$\vec{r} = (7848.5, -2149.89, 5886.38) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (0.975, 6.868, 0.731)\,.$$

b) La mínima altitud ($3622\,km$) se alcanza en el instante inicial y la máxima ($9572.5\,km$) a los $7355\,s$.

Podemos representar la trayectoria seguida durante las 4 horas figura 6:

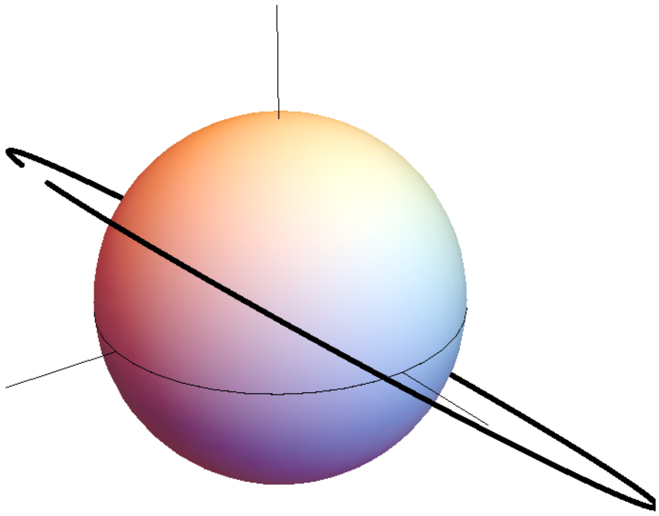

Figura 6: Órbita computada del satélite que en este caso gira hacia el Este como la Tierra

5 Cierre

A lo largo de este artículo hemos visto como son las ecuaciones del movimiento de dos cuerpos que se atraen mutuamente por la gravedad. Las ecuaciones se han expresado tanto en un sistema de referencia inercial como en uno relativo apoyado en uno de los dos cuerpos. Además se ha dado la expresión del centro de gravedad viendo como es su desplazamiento cuando solo interactúa la fuerza de la gravedad entre los dos cuerpos.

También se ha mostrado gráficamente cómo son los movimientos de las masas y del centro de gravedad mediante ejemplos gráficos basados en la integración numérica de las ecuaciones deducidas.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.