

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALENCIA
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN
OPERATIVA APLICADAS Y CALIDAD.

PROGRAMA DE DOCTORADO EN ESTADÍSTICA Y OPTIMIZACIÓN



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

**Control estadístico de variables
cuantitativas mediante inspección por
atributos apoyada en el diseño de galgas
con dimensiones óptimas.**

Tesis Doctoral

Presentada por: Jaime Mosquera Restrepo

Dirigida por: Dr. Francisco José Aparisi García

Noviembre 2019

Control estadístico de variables cuantitativas mediante inspección por atributos apoyada en el diseño de galgas con dimensiones óptimas.

Tesis doctoral / Tesi doctoral / PhD. Thesis.

Autor: Jaime Mosquera Restrepo.

Director: Francisco José Aparisi García.

Universidad: Universidad Politécnica de Valencia.

Departamento: Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad.

Programa de Doctorado: Estadística y Optimización.

ID de Tesis UPV: 12045

Aprobación Proyecto 11 de Octubre de 2017

Depósito: 16 de Octubre de 2019

Defensa: 08 de Noviembre de 2019

Número de páginas: xix -184

Cítese como / Citeu como / Cite as:

Mosquera Jaime (2019). Control estadístico de variables cuantitativas mediante inspección por atributos apoyada en el diseño de galgas con dimensiones óptimas. Tesis doctoral. Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad. Universidad Politécnica de Valencia.

Dedicatoria

A la abuela Mery, desde esta tierra, y ahora desde el cielo, la guía de mi vida.

A Jaime Andrés, mi mayor motivación.

A Katte, gracias por todo tu amor, tu ayuda, tu comprensión y por ser ese soporte en los momentos difíciles.

A mis padres, Ruth y Jaime, son un ejemplo de fortaleza y honestidad.

Resumen

En el Control Estadístico de Procesos, los gráficos de control por variables suelen ser la herramienta empleada para vigilar el comportamiento de una característica cuantitativa de calidad. Para implementar estos gráficos se requiere de la medición periódica de una muestra de unidades del proceso. En algunos procesos, obtener una medición exacta de la variable de calidad es una tarea compleja, que demanda gran cantidad de recursos (costos, tiempo, mano de obra), o que deteriora/destruye la pieza inspeccionada. En estos casos, una alternativa más ágil y económica consiste en realizar el control basado en la verificación de piezas con una galga. Dado que la verificación con una galga suele ser tan sencilla como la verificación de un atributo, el control basado en galgas es mucho más ágil y económico que el control basado en mediciones exactas.

En la literatura del Control Estadístico de Procesos se encuentran múltiples propuestas de esquemas de control basado en inspección por galgas. En esta Tesis doctoral realizamos una detallada revisión de estas propuestas y proponemos un nuevo esquema de control basado en galgas, cuyo desempeño estadístico es siempre igual o mejor que el de cualquiera de las propuestas previas. Este esquema es diseñado para el control de la media/varianza de una variable de calidad con distribución normal y posteriormente es extendido para el control de estos parámetros en distribuciones asimétricas (log-normal, skew-normal y Weibull).

Adicionalmente, sobre el nuevo esquema de control basado en galgas, se realiza una adaptación de las estrategias de tamaño de muestra adaptativo, Doble muestreo y Tamaño de Muestra Variable, e incorporamos memoria al estadístico de control a través de un esquema de pesos exponencialmente ponderados EWMA. Como resultado se obtienen nuevos esquemas de control, cuya operación e implementación es tan sencilla como la de los gráficos de control por atributos, pero con mejor desempeño estadístico que los gráficos de control por variables.

Palabras claves: Control Estadístico de Procesos, Gráficos de control, Galgas, Optimización, Tamaño de Muestra Variable, Doble Muestreo, EWMA.

Resum

En el Control Estadístic de Processos, els gràfics de control per variables solen ser la ferramenta empleada per a vigilar el comportament d'una característica quantitativa de qualitat. Per a implementar estos gràfics es requereix del mesurament periòdic d'una mostra d'unitats del procés. En alguns processos, obtindre un mesurament exacte de la variable de qualitat és una tasca complexa, que demanda gran quantitat de recursos (costos, temps, mà d'obra), o que deteriora/ destrüix la peça inspeccionada. En estos casos, una alternativa més àgil i econòmica consistix a realitzar el control basat en la verificació de peces amb una llebrera. Atés que la verificació amb una llebrera sol ser tan senzilla com la verificació d'un atribut, el control basat en llebreres és molt més àgil i econòmic que el control basat en mesuraments exactes.

En la literatura del Control Estadístic de Processos es troben múltiples propostes d'esquemes de control basat en inspecció per llebreres. En esta Tesi doctoral realitzem una detallada revisió d'estes propostes i proposem un nou esquema de control basat en llebreres, l'exercici estadístic del qual és sempre igual o millor que el de qualsevol de les propostes prèvies. Este esquema és dissenyat per al control de la media/varianza d'una variable de qualitat amb distribució normal i posteriorment és estés per al control d'estos paràmetres en distribucions asimètriques (log-normal, skew-normal i Weibull).

Adicionalment, sobre el nou esquema de control basat en llebreres, es realitza una adaptació de les estratègies de grandària de mostra adaptatiu, Doble mostratge i Grandària de Mostra Variable, i incorporem memòria a l'estadístic de control a través d'un esquema de pesos exponencialment ponderats EWMA. Com resultat s'obtenen nous esquemes de control, l'operació i implementació és tan senzilla com la dels gràfics de control per atributs, però amb millor exercici estadístic que els gràfics de control per variables.

Paraules claus: Control Estadístic de Processos, Gràfics de control, Llebreres, Optimització, Grandària de Mostra Variable, Doble Mostratge, EWMA.

Abstract

In Statistical Process Control, control charts by variables are usually the tool used to monitor a quantitative quality characteristic. To implement these charts, periodic measurement of a sample of process units is required. In some processes, obtaining an accurate measurement of the quality variable is a complex task, which demands a large amount of resources (costs, time, labor), or that deteriorates / destroys the inspected unit. In these cases, a more agile and economical alternative is to perform the control based on the verification of units with a gauge. Since the verification with a gauge is usually as simple as checking an attribute, the control based on gauges is much more agile and economical than the control based on exact measurements.

Several proposals of control schemes based on inspection by gauges are found in the Statistical Process Control literature. In this PhD thesis we review these proposals and propose a new control scheme based on gauges, whose statistical performance is always the same or better than that of any of the previous proposals. This scheme is designed for the control of the means / variance of a quality variable with normal distribution and is subsequently extended for the control of these parameters in asymmetric distributions (log-normal, skew-normal and Weibull).

In addition, on the new gauge-based control scheme, an adaptation of the adaptive sample size: double sampling and variable sample size strategies, is carried out, and incorporates memory to the control statistic through an exponentially weighted EWMA weights scheme. As a result, new control schemes were obtained, whose operation and implementation is as simple as that of the control charts by attributes, but with a best statistical performance than the control charts by variables.

Keywords: Statistical Process Control, Control Charts, Gauges, Optimization, Variable Sample Size, Double Sampling, EWMA.

Agradecimientos

Ademas del esfuerzo propio que ha demandado el desarrollo de esta tesis doctoral, su culminación no hubiera sido posible sin el apoyo académico, económico y moral de un conjunto de personas e instituciones que respaldaron mi labor durante estos cuatro años, uno de maestria y tres del doctorado, en los que esta experiencia tuvo lugar.

Inicialmente quiero agradecer a la Universidad del Valle, Cali – Colombia, por el soporte económico que me brindaron para garantizar mi estancia en la ciudad de Valencia y para el desarrollo de esta tesis doctoral. Especialmente, quiero dar gracias a los profesores de la Escuela de Estadística de la Universidad del Valle, por la labor realizada para cubrir las actividades que se generaron durante mi comisión de estudios. Ahora será el momento de regresar y retribuir por todo su apoyo.

Sin duda alguna, la culminación de este proyecto no hubiera sido posible sin la adecuada orientación académica y personal recibida de parte de mi director de tesis, el Doctor Francisco José Aparisi García. A Paco, como suelen llamarle, agradezco todo el conocimiento y la experiencia transmitida, además de la gran amistad brindada. Has sido un gran tutor en todo el sentido.

Finalmente deseo agradecer a la Universidad Politécnica de Valencia y en especial a los profesores del Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad. Aquí transcurrieron cuatro grandiosos años, llenos de alegría y de nuevo conocimiento.

Índice general

Índice general.....	xi
Índice de tablas.....	xv
Índice de figuras.....	xviii
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Motivación.....	8
1.3. Objetivos.....	11
1.4. Alcance.....	11
1.5. Estructura de la memoria.....	12
2. Control de variables. Preliminares	15
2.1. Introducción.....	15
2.2. Gráficos de control tipo Shewhart para variables.....	17
2.3. Medidas del desempeño de un gráfico de control.....	20
2.3.1. Probabilidad de alarma (PA).....	20
2.3.2. Curva característica operativa (OCC).....	23
2.3.3. Longitud promedio de racha (ARL).....	23
2.3.4. Cálculo del ARL a través de cadenas de Márkov.....	25
2.4. Estrategias de mejora para gráficos de control tipo Shewhart.....	29
2.4.1. Doble muestreo (DS).....	30
2.4.2. Tamaño de muestra variable (VSS).....	34
2.4.3. Promedios móviles exponencialmente ponderados (EWMA).....	36
2.5. Optimización de gráficos de control.....	40
2.5.1. Optimización basada en algoritmos genéticos.....	41

3. Esquemas de control basados en la inspección por galgas. Revisión bibliográfica	45
3.1. Introducción.....	45
3.2. Gráficos $Y_S + Y_L$ e $Y_S - Y_L$ (Stevens, 1948)	47
3.3. Gráfico tipo Shewhart para datos agrupados (Steiner et al., 1996).....	48
3.4. Gráfico EWMA para datos agrupados (Steiner, 1998).....	50
3.5. Gráfico np_x (Wu et al., 2009)	51
3.6. Gráficos Y_T e $Y_S Y_L$ (Aparisi et al., 2018)	52
3.7. Gráfico G_{s2} (Bezerra et al., 2018)	54
3.8. Conclusiones	56
4. Un esquema global para el control de variables basado en inspección por galgas ($wY_S Y_L$)	57
4.1. El esquema $wY_S Y_L$	58
4.1.1.Cálculo de PA y ARL para el esquema $wY_S Y_L$	60
4.2. Diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$	62
4.2.1.Ejemplo de aplicación 1	66
4.3. Comparación del desempeño del esquema $wY_S Y_L$	68
4.3.1.Análisis de sensibilidad de los parámetros óptimos	73
4.4. Conclusiones.	76
5. Adaptación del esquema $wY_S Y_L$ para el control de una variable con distribución asimétrica.	77
5.1. Planteamiento general.....	79
5.1.1.Adaptación para la distribución skew-normal.....	80
5.1.2.Adaptación para la distribución log-normal	83
5.1.3.Adaptación para la distribución Weibull.....	86
5.2. Diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$ en distribuciones asimétricas.....	89
5.3. Evaluación del desempeño del esquema $wY_S Y_L$ en distribuciones asimétricas.....	95
5.4. Conclusiones	104
6. Esquema $wY_S Y_L$ con estrategias de tamaño de muestra adaptativo ($wY_S Y_L$-DS/$wY_S Y_L$-VSS)	105
6.1. El esquema $wY_S Y_L$ con estrategia de doble muestreo ($wY_S Y_L$ -DS)	106
6.1.1.Medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -DS.....	109
6.2. El esquema $wY_S Y_L$ con estrategia de tamaño de muestra variable ($wY_S Y_L$ -VSS)	112
6.2.1.Medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -VSS.....	116

6.3. Diseño óptimo de los esquemas $wY_S Y_L - DS / wY_S Y_L - VSS$	118
6.3.1. Ejemplo de aplicación 2	121
6.4. Evaluación del desempeño de los esquemas $wY_S Y_L - DS / wY_S Y_L - VSS$	125
6.5. Conclusiones	133
7. Esquema $wY_S Y_L$-EWMA	135
7.1. El esquema $wY_S Y_L$ -EWMA	136
7.2. Medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA	139
7.3. Diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA	141
7.4. Evaluación comparativa del desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA	144
7.5. Conclusiones	149
8. Conclusiones, líneas futuras de investigación y contribuciones	151
8.1. Conclusiones	151
8.2. Líneas futuras de investigación	157
8.3. Contribuciones	158
 Referencias bibliográficas	 161
 ANEXOS	 170
Anexo A. Equivalencia entre el esquema $wY_S Y_L$ y el gráfico para datos agrupados (Steiner et al., 1996)	170
Anexo B. Equivalencia entre el esquema $wY_S Y_L$ y el gráfico de control G_{S^2}	173
Anexo C. Funciones del software R para el cálculo del ARL y la optimización del esquema $wY_S Y_L$	174
Anexo D. Funciones del software R para el cálculo del ARL y la optimización del esquema $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS	178
Anexo E. Funciones del software R para el cálculo del ARL y la optimización del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA	183

Índice de tablas

Tabla 2.1. Fórmulas para el cálculo de la probabilidad de falsa alarma y de la potencia estadística de los gráficos \bar{X} , S , y $\bar{X}-S$.-----	22
Tabla 3.1. Pesos z_i^+ y z_i^- para una galga 2-step. (Steiner et al., 1996).-----	49
Tabla 4.1. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ para el ejemplo de aplicación 1. $n = 6, 7, 8$.-----	68
Tabla 4.2. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Incrementos en la media (δ^*), $ARL_0 = 370$.-----	69
Tabla 4.3. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Incrementos en la desviación estándar (r^*), $ARL_0 = 370$.-----	71
Tabla 4.4. Peso w y ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Cambios simultáneos en la media y desviación estándar (δ^*, r^*), $ARL_0 = 370$.-----	72
Tabla 4.5. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Cambio solo en media (δ^*) y solo en la desviación estándar (r^*). $ARL_0 = 370$.-----	73
Tabla 4.6. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Cambios simultáneos en la media y desviación estándar (δ^*, r^*). $ARL_0 = 370$.-----	74
Tabla 4.7. ARL_1 's del esquema $wY_S Y_L$ optimizado para magnitudes de cambio (δ^*, r^*) y evaluado en puntos de cambio ($\delta \neq \delta^*, r \neq r^*$). $ARL_0 = 370$.-----	75
Tabla 5.1. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Incrementos de la desviación estándar (r^*), $ARL_0 = 370$.-----	96
Tabla 5.2. Listado de configuraciones cuasi óptimas del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Incrementos de la desviación estándar (r^*), $ARL_0 = 370$.-----	96
Tabla 5.3. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Cambios en la media (δ^*), $ARL_0 = 370$.-----	98
Tabla 5.4. Listado de configuraciones cuasi óptimas del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Cambios en la media (δ^*), $ARL_0 = 370$.-----	99

Tabla 5.5. ARL ₁ 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Cambios en la media y en la desviación estándar (δ^* , r^*), $ARL_0 = 370$. -----	101
Tabla 5.5. <i>Continuación</i> -----	102
Tabla 5.6. Listado de configuraciones cuasi óptimas del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Cambios simultáneos en media y desviación (δ^* , r^*), $ARL_0 = 370$. -----	103
Tabla 6.1. Rango de variación de los parámetros de diseño de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. -----	120
Tabla 6.2. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -FSS para el ejemplo de aplicación 2. -----	122
Tabla 6.3. Parámetros óptimos de los esquemas $wY_S Y_L$ -VSS y $wY_S Y_L$ -DS para el ejemplo de aplicación 2. -----	123
Tabla 6.4. ARL ₁ 's y ANOS ₁ 's para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios en la media (δ^*) y $ARL_0^* = 370$.-----	127
Tabla 6.5. ARL ₁ 's y ANOS ₁ 's para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Incrementos en la desviación (r^*) y $ARL_0^* = 370$.-----	128
Tabla 6.6. ARL ₁ 's y ANOS ₁ 's de los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios simultáneos en la media y en la desviación (δ^* , r^*), $ARL_0^* = 370$. ---	129
Tabla 6.7. Parámetros óptimos para los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios solo en media (δ^*) y solo en la desviación (r^*) y $ARL_0^* = 370$.-----	130
Tabla 6.8. Parámetros óptimos para los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios simultáneos en la media (δ^*) y en la desviación (r^*), $ARL_0^* = 370$. -----	132
Tabla 7.1. Función de probabilidad del estadístico $wY_S Y_L$. ($n = 10$, $w = -1$, $q_0 = 0.3472$). -----	137
Tabla 7.2. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA para el ejemplo de aplicación 2. -----	143
Tabla 7.3. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA y ARL ₁ para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios en la media (δ^*) y $ARL_0^* = 370$.-----	145
Tabla 7.4. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA y ARL ₁ para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios en la varianza (r^*) y $ARL_0^* = 370$. -----	146

Tabla 7.5. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA y ARL_1 para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios simultáneos en la media y la varianza (δ^* , r^*) y $ARL_0^* = 370$.-----	148
Tabla 7.5. <i>Continuación</i> -----	149
Tabla A.1 Pesos z_i^+ y z_i^- para una galga 2-step. (Steiner et al., 1996).-----	170

Índice de figuras

Figura 1.1. Ejemplo de galgas 2-step.	3
Figura 2.1. Ejemplo de un gráfico de control tipo Shewhart.	17
Figura 2.2. Ejemplo de los gráficos de control \bar{X} y S	18
Figura 2.3. Curvas características operativas de los gráficos \bar{X} , S y \bar{X} - S . a) Cambios en la media (δ), b) Cambios en la desviación estándar (r). $n = 5, 10$. $\alpha = 0.0027$. 23	
Figura 2.4. Curva ARL de los gráficos \bar{X} , S y \bar{X} - S . a) cambios en la media (δ), b) cambios en la desviación estándar (r). $n = 5, 10$. $\alpha = 0.0027$	29
Figura 2.5. Ejemplo del gráfico de control DS- \bar{X}	31
Figura 2.6. Ejemplo del gráfico de control VSS- \bar{X}	34
Figura 2.7. Ejemplo de gráfico de control EWMA- \bar{X}	38
Figura 2.8. Ejemplo de codificación binaria.	42
Figura 2.9. Diagrama de proceso de un algoritmo genético básico.	43
Figura 3.1. Efecto sobre las probabilidades q_s , q_L cuando suceden a) cambios en la desviación estándar y b) cambios en la media.	46
Figura 3.2. Ejemplo de los gráficos de control Y_T e $Y_S Y_L$	53
Figura 4.1. Ejemplos del gráfico de control $w Y_S Y_L$. a) Caso general, $w \notin \{1, 0, -1\}$, b) $w = 1$, c) $w = 0$ y d) $w = -1$	60
Figura 4.2. Representación de los conjuntos Ω_0 y Ω_1 en el gráfico $w Y_S Y_L$	61
Figura 4.3. ARL_0 del esquema $w Y_S Y_L$ como función de (w, UCL, q_0) . $n = 7$	64
Figura 4.4. Boceto de galga 2-step para la verificación de la altura de llenado.	67
Figura 4.5. Interfaz de usuario del programa de optimización del esquema $w Y_S Y_L$. --	67

Figura 5.1. Efecto de la variación del parámetro de forma sobre la asimetría de la densidad skew-normal ($\xi = 0, \omega = 1, d$).-----	81
Figura 5.2. Efecto de la variación del parámetro de forma sobre la asimetría de la densidad log-normal ($\eta = 0, \mu' = 1, \sigma'$). -----	84
Figura 5.3. Efecto de la variación del parámetro de forma sobre la asimetría de la densidad Weibull ($\eta = 0, a = 1, b$)-----	87
Figura 5.4. Curvas ARL de los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ para el ejemplo de aplicación: $X \sim \text{Weibull}(\mu_0 = 10, \sigma_0 = 2, \gamma = 1.75)$, $ARL_0^* = 370, n = 5, \delta^* = 0.6, r^* = 1$.----	94
Figura 6.1. Aspecto gráfico del esquema $wY_S Y_L$ -DS. -----	108
Figura 6.2. Aspecto gráfico del esquema $wY_S Y_L$ -VSS.-----	114
Figura 6.3. Boceto galga 2-step para verificación de diámetro interno.-----	121
Figura 6.4. Interfaz de usuario del programa de optimización de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS.-----	123
Figura 6.5. Simulación de la operación de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS óptimos para el ejemplo de aplicación 2. -----	124
Figura 7.1. Aspecto gráfico del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA.-----	138
Figura 7.2. Simulación de la operación del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA óptimo para el ejemplo de aplicación 2.-----	143

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La tarea principal en el Control Estadístico de Procesos (CEP) consiste en diseñar e implementar herramientas estadísticas que contribuyan a detectar rápidamente cambios en el comportamiento habitual de las características de calidad de un proceso, evitando que se presente algún deterioro en la calidad del producto final.

Shewhart (1927) propuso una de las herramientas estadísticas de mayor difusión y aplicación en el CEP, la cual denominó *Gráfico de Control*. Estos gráficos son diseñados para verificar la estabilidad de una o más variables de calidad. Habitualmente, cuando la variable es cuantitativa continua, el gráfico se diseña con el objetivo de verificar que la media (μ) y la varianza (σ^2) permanecen estables en el tiempo, para lo cual suelen ser empleados los conocidos como gráficos de control por variables.

De forma general, un gráfico de control por variables funciona midiendo periódicamente una muestra de n unidades del proceso, resumiendo la información recolectada en un estadístico de control, tal como la media (\bar{X}) o la desviación estándar (S) muestral, y dibujando el valor de este estadístico en un gráfico temporal junto a un(os) límite(s) de control. En esta representación, un punto por fuera de los límites se interpreta como una señal de cambio en la variable objeto de control y, en consecuencia, se motiva una acción correctiva para retornar el proceso a su estado habitual.

Desde su creación, los gráficos de control por variables han demostrado ser herramientas simples y eficaces en el diagnóstico del proceso. Sin embargo, a pesar de su sencillez metodológica, en algunos procesos su implementación puede ser compleja debido a la existencia de restricciones para obtener las mediciones. Por ejemplo, en

ocasiones la medición de la variable involucra un alto consumo de recursos (tiempo, dinero, tecnología, materiales, recurso humano). En otros casos, durante el procedimiento de medición la pieza es expuesta a condiciones que pueden generar su deterioro o destrucción, o simplemente, debido a las condiciones medio-ambientales en las que se desarrolla el proceso o de su velocidad, resulta complejo obtener con precisión la medición de la variable.

En situaciones como las mencionadas anteriormente, implementar un gráfico de control por variables suele tener asociado un alto costo o representa una insostenible carga operativa en la inspección del proceso. Debido a ello, en muchas ocasiones el gráfico se implementa con un bajo tamaño de muestra, asumiendo la inevitable consecuencia de una pobre potencia estadística para detectar cambios en la variable de calidad.

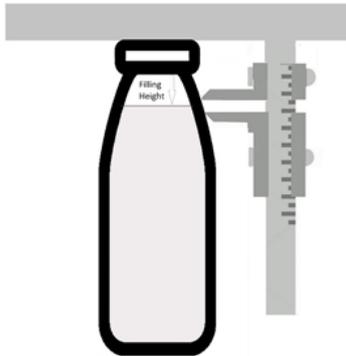
En esta clase de situaciones, una alternativa para realizar el control consiste en reemplazar la habitual inspección basada en mediciones por una inspección basada en la verificación de atributos. Esta inspección por atributos se apoya en el uso de un dispositivo denominado *galga* (también llamados *calibres*), el cual es diseñado para obtener una clasificación de la medida de la pieza en lugar de la medición exacta. Stevens (1948) p. 55 define formalmente una galga como “*Un instrumento o método capaz de, y solo usado para, responder a la pregunta: ¿es un valor desconocido x más grande o menor que algún estándar x_0 ?*”. Generalmente, con el uso de galgas se logra una mayor economía y velocidad en el procedimiento de inspección. Incluso en algunos casos, donde medir es altamente complejo, esta puede ser la única alternativa para controlar el proceso.

Un tipo de galga de uso muy frecuente en la industria, consiste en un dispositivo diseñado o adaptado para clasificar la medida de una pieza respecto a 2 dimensiones de referencia (S: Small, L: Large). Esta galga, que recibe el nombre de galga 2-step, permite verificar si una medición (x) se encuentra por debajo de la dimensión inferior ($x < S$), por encima de la dimensión superior ($x > L$) o comprendida entre el par de dimensiones ($S < x < L$). En la Figura 1.1 se muestran múltiples ejemplos de galgas 2-step que pueden ser empleadas para la verificación de diferentes tipos de medidas.

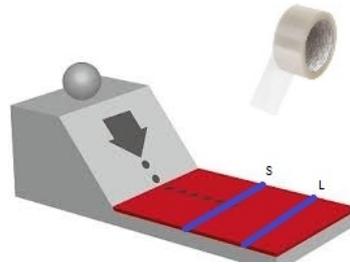
Cuando se verifica una muestra de n piezas con una galga 2-step, el resultado es el conteo de piezas con mediciones clasificadas en cada uno de los tres intervalos: Por debajo de S (Y_S), por encima de L (Y_L) y comprendidas entre S y L (Y_C). Estos conteos, que son variables aleatorias discretas, contienen información acerca de la variable cuantitativa de calidad y dado que, bajo el supuesto de independencia entre piezas,

siguen una distribución de probabilidad conjunta multinomial, es posible diseñar un gráfico que utilice estos conteos como insumo para realizar el control de la variable cuantitativa.

a) Altura de llenado



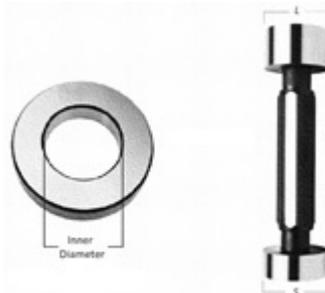
b) Adhesividad



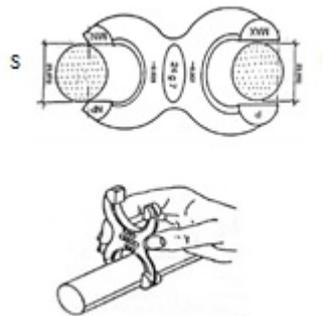
c) Amplitud de brecha



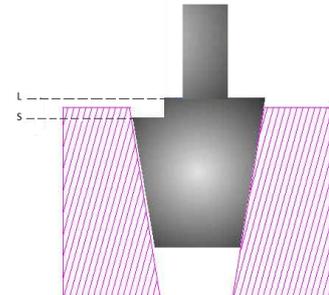
d) Diametro interno



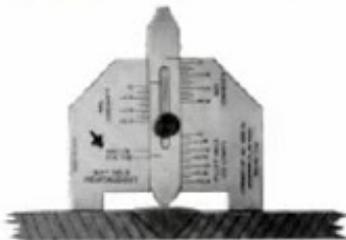
e) Diametro externo



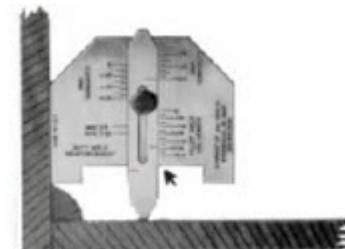
f) Ajuste cónico



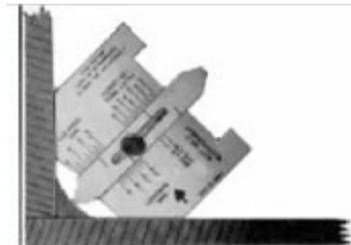
g) Soldadura plana -Altura



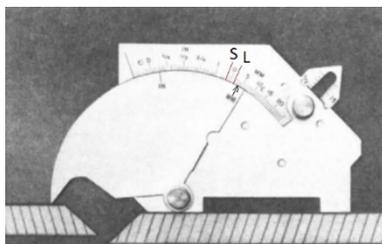
h) Soldadura recta - Altura



i) Soldadura recta - relleno



j) Alineación



k) Profundidad



l) Angulo



Figura 1.1. Ejemplo de galgas 2-step.

Para realizar el control de una variable basado en inspección por galgas es necesario realizar el diseño conjunto de los dos elementos: La galga y el gráfico de control. Ambos

elementos conforman un *esquema* de control para el diagnóstico del proceso y para su diseño el usuario debe definir cuatro parámetros:

1. El tamaño de la muestra
2. Las dimensiones de referencia (S, L) para el diseño de la galga
3. Un estadístico de control que resuma la información contenida en los conteos (Y_S, Y_C, Y_L).
4. La ubicación de los límites en el gráfico de control.

En la revisión de la literatura del CEP, se evidencia que el problema de diseño de esquemas de control basados en la inspección por galgas ha sido estudiado desde la década de 1940. Tippett (1944), Stevens (1948), Mace (1952) y Ott y Mundel (1954) fueron los pioneros en reportar el uso de tales esquemas y formalizar sus bases teóricas.

Stevens (1948) recomendó emplear la diferencia $Y_S - Y_L$ como el estadístico para el control de la media de una variable con distribución normal y la suma $Y_S + Y_L$ para el control de la varianza. Respecto a las dimensiones de diseño de la galga, sugirió que S y L se ubiquen en aquella posición que maximiza la información contenida en la clasificación de una pieza para obtener una estimación de los parámetros de la variable en el estado bajo control (μ_0, σ_0). Al realizar estos cálculos para una variable X de distribución normal, sugieren emplear una galga 2-step de dimensiones equidistantes a la media ($S = \mu_0 - k\sigma_0, L = \mu_0 + k\sigma_0$), con valor de $k = 0.6120$ cuando el objetivo es controlar la media, $k = 1.4825$ para controlar la varianza y $k = 1.1264$ para controlar simultáneamente ambos parámetros.

Posteriormente, Beja y Ladany (1974), Ladany (1975) y Ladany (1976) desarrollaron nuevas propuestas orientadas a identificar cambios unidireccionales en la media del proceso (incrementos o decrementos), razón por la cual, en el diseño de la galga solo consideraron una dimensión de referencia. Esta galga es conocida habitualmente como una galga go/nogo o galga 1-step. En este caso el estadístico de control corresponde al conteo de piezas clasificadas en una de las dos categorías (go/nogo), la cual representa la categoría de referencia.

Steiner, Geyer y Wesolowsky (1996) propusieron un esquema de control basado en el diseño de una galga que clasifica las piezas en múltiples ($g+1$) categorías. Esta galga recibe el nombre de galga g -step, de la cual la galga 2-step y 1-step son casos particulares. En sus evaluaciones muestran que el desempeño del esquema de control

tiende a mejorar cuando la galga se diseña con un mayor número de dimensiones de referencia (g). Sin embargo, esta mejora es marginal a partir de 2 dimensiones ($g > 2$), mientras que la complejidad en la manipulación de la galga si se incrementa notablemente.

En este mismo trabajo (Steiner et al., 1996), utilizan el criterio de cociente de máxima verosimilitud compuesta asociado al test de hipótesis ($H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_a: \theta = \theta_{1+}$ o $\theta = \theta_{1-}$)¹ para deducir el estadístico de control $\max\left(\frac{\sum_{i=1}^n z_i^+}{n}; \frac{\sum_{i=1}^n z_i^-}{n}\right)$. Aquí (z_i^+, z_i^-) son una pareja de pesos que se asignan a la i -ésima pieza inspeccionada, cuyo valor depende del intervalo en el cual la pieza ha sido clasificada. Atendiendo la sugerencia de Stevens (1948), diseñan la galga con dimensiones equidistantes a μ_0 . En el caso particular de la galga 2-step, utilizan los mismos valores $k = 0.6120, 1.4825$ sugeridos por Stevens (1948) para el control de la media y la varianza respectivamente. Sin embargo, para el control simultáneo de ambos parámetros sugieren emplear $k = 0.8487$.

Como se puede observar, en la propuesta de Steiner et al. (1996) el estadístico de control es optimizado para maximizar la potencia estadística del test de hipótesis, mientras que las dimensiones de la galga son optimizadas para obtener la mejor estimación de los parámetros del proceso bajo control. Lo anterior corresponde a realizar dos optimizaciones independientes, bajo diferentes objetivos, lo cual no necesariamente conduce a la solución óptima conjunta.

Respecto a los límites de control, Stevens (1948) y Steiner et al. (1996), sugieren utilizar criterios probabilísticos para definir su ubicación. De manera que, una vez se fijan el tamaño de la muestra (n) y el parámetro a controlar (μ o σ^2), las dimensiones de las galgas quedan predefinidas y el límite de control se ubica en aquella posición (UCL^*) que garantiza una probabilidad de falsa alarma (α^*) preestablecida por el usuario. Una dificultad de este diseño radica en que, dado que el estadístico de control es una variable aleatoria discreta, generalmente no existe el valor UCL^* que garantice exactamente la probabilidad de falsa alarma deseada. En estos casos, suele suceder que cuando se emplea el valor UCL más cercano, la diferencia entre la verdadera

¹ Aquí θ representa el vector de parámetros de la variable de calidad ($\theta = (\mu, \sigma^2)$), θ_0 contiene los valores de estos parámetros cuando el proceso está bajo control y θ_{1+} , θ_{1-} representan dos puntos de cambio críticos para estos parámetros.

probabilidad de falsa alarma del gráfico (α) y el valor de diseño (α^*) es bastante notable. Esta es una limitación común en el diseño de gráficos de control por atributos.

En un trabajo posterior, Steiner (1998) propuso incorporar memoria al estadístico $\max\left(\frac{\sum_{i=1}^n z_i^+}{n}; \frac{\sum_{i=1}^n z_i^-}{n}\right)$, a través de la adaptación de un esquema de medias móviles exponencialmente ponderadas (*Exponential Weighed Movil Average*, EWMA). Con esta adaptación logró mejorar el desempeño del esquema de control basado en galgas para detectar cambios pequeños en la variable, y dado que el estadístico EWMA actúa como un suavizador, el problema de la ubicación del límite de control es ahora menos discreto y se disminuye, aunque no se elimina, la dificultad para satisfacer la probabilidad de falsa alarma deseada (α^*). En este trabajo se utilizan las mismas dimensiones de la galga sugeridas por Steiner et al. (1996).

Posteriormente, el problema de diseño de esquemas de control basados en inspección por galgas adquirió una nueva vigencia y su estudio se intensificó (Wu y Jiao, 2008; Wu, Khoo, Shu y Jiang, 2009; Ho y Quinino, 2013; Aparisi, Epprecht y Mosquera, 2018; Bezerra, Ho y da Costa Quinino, 2018). Como novedad, en estos trabajos se plantean diferentes estadísticos de control y se aborda de forma conjunta el problema de optimización del esquema de control, considerando simultáneamente el diseño del gráfico y la ubicación de las dimensiones de la galga.

Bajo esta nueva perspectiva, dado que las dimensiones de la galga pertenecen a un espacio continuo, al ser incluidas como variables de decisión del problema de diseño óptimo, se consiguen siempre configuraciones que cumplen exactamente con la probabilidad de falsa alarma deseada, superando con ello la dificultad habitual de los gráficos de control por atributos.

Los resultados de estas nuevas investigaciones coinciden en concluir que los esquemas basados en la inspección por galgas, bajo un mismo tamaño de muestra, suelen ser menos potentes que los gráficos de control por variables para detectar cambios en la variable de calidad. Sin embargo, esta diferencia en desempeño no es tan grande. Incluso, dado que generalmente la inspección por atributos es mucho más económica y ágil que la inspección por variables, es económicamente factible considerar un ligero incremento en el tamaño de muestra de la inspección por galgas, bajo el cual se logre igualar, o incluso superar, el desempeño de un gráfico de control por variables equivalente en los *esfuerzos de muestreo* (costos de inspección, carga operativa).

En la literatura del CEP, también se encuentran otro conjunto de gráficos de control que funcionan bajo la lógica de clasificar las piezas inspeccionadas de acuerdo a la ubicación de su medida respecto a algunas dimensiones de referencia. Este es el caso de los *graficos de precontrol*, propuestos por Shainin y Shainin (1989) y posteriormente modificados/optimizados en los trabajos de Steiner (1997), San Matías et al. (2004), Giner-Bosch (2014) y Giner Bosch et al (2016).

En los graficos de precontrol las piezas son clasificadas de acuerdo con su ubicación relativa respecto a 4 dimensiones de referencia; los límites superior e inferior de tolerancia y dos dimensiones adicionales ubicadas al interior de estos límites de tolerancia. Con estas dimensiones, el rango de la variable de calidad se subdivide en 6 partes y cada pieza es clasificada en uno de 3 grupos: *rojo*, piezas con medición que supera alguna de las tolerancias; *verde*, piezas cuya medición está contenida dentro de las dimensiones internas de referencia; *amarillo*, piezas con medición contenida entre las tolerancias pero por fuera de las dimensiones internas de referencia.

A pesar de que estos gráficos de precontrol, permanecen en la lógica de clasificación de piezas empleada por los gráficos de control basados en galgas, existen varios aspectos en los que se identifican notables diferencias. La principal diferencia se relaciona con el objetivo del control para el cual fueron diseñados los dos tipos de graficos. Según Giner-Bosch (2016, p. 623), *“los gráficos de precontrol fueron contruidos para verificar rápidamente la capacidad del proceso para producir unidades dentro de las especificaciones”*. En contraste, los gráficos basados en galgas se diseñan para verificar que el proceso permanece en sus condiciones habituales de variación, sin consideración alguna de la capacidad del proceso. Debido a esta diferencia de constructo, los gráficos de precontrol no son incluidos como referencia en las evaluaciones realizadas en esta tesis doctoral.

Con lo anterior como preámbulo, en la presente tesis se realiza una revisión minuciosa de las propuestas existentes en la literatura sobre esquemas de control basados en galgas 2-step. Adicionalmente, con el objetivo de aumentar su competitividad frente a los esquemas basados en mediciones, se explora la adaptación de un conjunto de estrategias diseñadas y optimizadas para mejorar su desempeño estadístico, manteniendo siempre sus ventajas económicas y operativas.

En esta tesis también se aborda el problema del monitoreo basado en galgas 2-step para variables con distribución asimétrica. Un tema que hasta el momento ha sido poco estudiado en la literatura.

1.2. Motivación

En una aplicación práctica del CEP, cuando se selecciona un esquema de control suelen ser considerados diferentes criterios, entre los cuales se encuentran: i) Criterios estadísticos, como la potencia para detectar cambios en las variables; ii) Criterios económicos, aquí se incluyen los costos de implementación y de mantenimiento del esquema; iii) Criterios operativos, entre los cuales se considera la agilidad del procedimiento de inspección y su baja intervención en el proceso.

Es evidente que los esquemas de control basados en inspección por galgas cumplen satisfactoriamente con los criterios de economía y agilidad operativa (criterios ii y iii). Sin embargo, no se puede negar que la calidad de la información que proporciona una verificación de atributos es menor que la que se obtiene a través de mediciones exactas. Debido a ello, muchos usuarios de la estadística en la industria, tienen la sensación de que la potencia de un esquema de control basado en galgas será mucho menor que la de un esquema basado en mediciones. El argumento anterior fue identificado por Farnum y Stanton (1991) p. 300, como una de las causas que ha restringido la implementación de los esquemas de control basados en galgas por parte de la industria. A pesar de que ya han pasado casi 30 años desde que este autor planteó esta discusión, la errada sensación de falta de potencia de estos métodos aún permanece vigente.

Este panorama constituye la motivación principal del desarrollo de esta tesis, la cual se orienta al desarrollo de propuestas de mejora para el desempeño estadístico de los esquemas basados en la inspección por galgas, manteniendo siempre su agilidad y economía. Para obtener tales mejoras, tenemos en consideración que los esquemas de control basados en galgas permanecen dentro de la lógica de funcionamiento de los gráficos de control tipo Shewhart; es decir, que el control se realiza sobre muestras independientes y con estadísticos independientes en el tiempo. Debido a esta propiedad, cobra sentido pensar que las estrategias metodológicas que han contribuido a mejorar el desempeño de los gráficos tipo Shewhart, tendrán un éxito similar al ser adaptadas para los esquemas de control basados en la inspección por galgas.

En la revisión de la literatura del CEP se encuentran múltiples estrategias que han contribuido a mejorar el desempeño de los gráficos tipo Shewhart. Una de estas estrategias consiste en incorporar memoria al estadístico de control, a través de la ponderación de información actual y pasada del proceso. Bajo esta filosofía funcionan

los gráficos de sumas acumulativas (*Cumulative Sum*, CUSUM; Page, 1954) y EWMA (Roberts, 1959).

Cuando se emplea un estadístico con memoria, la información actual del proceso se mezcla con información previa, lo cual permite ampliar la información disponible sobre el proceso. Esto es equivalente a incrementar artificialmente el tamaño de la muestra y, en consecuencia, se obtiene una reducción de la variabilidad del estadístico de control y un incremento de la potencia del test diagnóstico. Dado que el incremento del tamaño de muestra es artificial, los esfuerzos del muestreo no se alteran. Esta última propiedad es justamente la que nos interesa explorar en el desarrollo de esta tesis.

Aunque el estadístico EWMA fue propuesto inicialmente para el control de la media del proceso (Roberts, 1959), sus notables propiedades estadísticas han motivado su adaptación para el control de otros parámetros. Por ejemplo, para el control de la varianza (Cortan y Ringer, 1971; Sweet, 1986; MacGregor y Harris, 1993) y para el control simultáneo de múltiples variables de calidad (Lowry, Woodall, Champ y Rigdon, 1992). En el contexto del control por atributos, el estadístico EWMA fue adaptado para los gráficos p y np (Gan, 1990a), y para los gráficos c y u (Gan, 1990b; Borrór, Champ y Rigdon, 1998). En todos estos trabajos, la adaptación del estadístico EWMA condujo siempre a mejorar la sensibilidad del gráfico de control para detectar cambios pequeños.

Otra estrategia que ha contribuido a mejorar el desempeño de los gráficos tipo Shewhart consiste en el diseño de gráficos de control adaptativos. Según Tagaras (1998) p. 212, "*Un gráfico de control es considerado adaptativo o dinámico si al menos uno de los parámetros: h (frecuencia de muestreo), n (tamaño de muestra) o L_c (amplitud de los límites de control), puede cambiar en tiempo real dependiendo de los valores actuales del estadístico muestral*". En este conjunto se encuentran los gráficos de control de *doble muestreo* (Double Sampling, DS), de *tamaño de muestra variable* (Variable Sample Size, VSS), de *intervalo de muestreo variable* (Variable Sampling Interval, VSI), o de *intervalo y tamaño de muestra variable* (Variable Sampling Size and Interval, VSSI).

La filosofía de operación de los gráficos adaptativos mencionados consiste en flexibilizar la inspección del proceso, permitiendo el incremento del muestreo (frecuencia o tamaño de muestra) cuando la información recabada sugiere la necesidad de un mayor poder estadístico para el diagnóstico del proceso. En este caso, el incremento del tamaño de la muestra (o de la frecuencia de muestreo) es real, aunque no permanente. Por lo tanto, para mantener controlado el esfuerzo del

muestreo se incluye en el diseño del gráfico una restricción sobre el tamaño de muestra promedio (o la frecuencia de muestreo media). Revisiones bibliográficas detalladas acerca de gráficos de control adaptativos se encuentran en los trabajos de Tagaras (1998) y Psarakis (2015).

Dentro de los gráficos de control adaptativos, nos hemos interesado por aquel subconjunto que se soporta en la posibilidad de variar el tamaño de la muestra. Específicamente son consideradas las estrategias DS (Croasdale, 1974; Daudin, 1992) y VSS (Prabhu, Runger y Keats, 1993; Costa, 1994). Ambas estrategias fueron diseñadas inicialmente para mejorar el desempeño del gráfico de control \bar{X} , pero posteriormente han sido adaptadas con éxito sobre otros gráficos de control.

Por ejemplo, la estrategia DS, bajo la modificación de Daudin (1992), fue exitosamente adaptada para los gráficos de control S (He y Grigoryan, 2002, 2003), S^2 (Khuo, 2004), $\bar{X}-S$ (He y Grigoryan, 2006) y para los gráficos multivariados $|S|$ (Grigoryan y He, 2005) y T^2 de Hotelling (Champ y Aparisi, 2008). En el contexto de los gráficos de control por atributos, la estrategia DS fue adaptada con éxito para los gráficos U (Pérez, Carrión, Jabaloyes y Aparisi, 2010), np (De Araújo Rodrigues, Epprecht y De Magalhães, 2011) y C (Inghilleri, Lupo y Passannanti, 2015; Campuzano, Carrión y Mosquera, 2019).

Respecto a la estrategia VSS, esta fue adaptada con éxito para los gráficos de control R (Lee, 2011), S (Kuo y Lee, 2013) y para el gráfico multivariado T^2 de Hotelling (Aparisi, 1996). La adaptación de esta estrategia también tuvo éxito en su extensión a los gráficos de control por atributos np y c (Epprecht y Costa, 2001) y en los gráficos p y u (Epprecht, Costa y Mendes, 2003).

Por último, en la revisión bibliográfica hemos encontrado que el diseño de esquemas de control basados en inspección por galgas se ha orientado casi que exclusivamente al problema de control de una variable con distribución normal. Sin embargo, en la práctica del SPC es bastante frecuente encontrar variables cuya distribución no se ajusta al modelo normal. Alwan y Roberts (1995) examinaron 235 aplicaciones de SPC y encontraron que la mayoría de estos conjuntos de datos no satisfacen los supuestos de normalidad o de independencia. Das (2009) p. 800, presenta una relación de trabajos en los cuales se reportan aplicaciones del SPC sobre variables con distribución no normal. Entre las variables relacionadas se encuentran: el calibre de impresión, el calibre de cuchillas de afeitarse, el calibre de capas de aleación y el peso de latas de tomate. Adicionalmente, Derya y Canan (2012) p. 95 menciona que la asimetría en la distribución es una característica frecuente en variables relacionadas

con la medición de: el rendimiento de procesos químicos, el desgaste de herramienta de corte y el tiempo de vida útil.

En esta clase de procesos también existe la posibilidad de que se presenten dificultades para obtener mediciones exactas, situación que representa el escenario de mayor utilidad de los esquemas de control basados en la inspección por galgas. Motivados por lo anterior, en esta tesis también se explora la adaptación de los esquemas basados en galgas para el control de variables con distribución asimétrica.

1.3. Objetivos

De acuerdo con lo expresado en la motivación, el **objetivo general** de la presente tesis doctoral es:

Plantear, desarrollar y optimizar nuevas estrategias para mejorar el desempeño estadístico de los esquemas de control de variables basados en inspección por galgas.

Para cumplir con este objetivo general, se proponen los siguientes **objetivos específicos**:

1. Estudiar las propiedades estadísticas de las actuales propuestas de esquemas de control basado en galgas, identificando alternativas para mejorar su desempeño.
2. Adaptar el esquema de control basado en inspección por galgas para el control de una variable con distribución asimétrica.
3. Adaptar y optimizar las estrategias de control adaptativo de doble muestro y tamaño de muestra variable para un esquema de control basado en la inspección por galgas.
4. Adaptar un estadístico EWMA para el esquema de control basado en inspección por galgas y optimizar sus parámetros.

1.4. Alcance

En la presente tesis limitaremos el estudio de los esquemas de control basados en inspección por galgas sobre el conjunto de características y/o condiciones que se enumeran a continuación:

1. Se supone que la medición de las piezas es claramente más compleja o más costosa que la verificación con una galga.
2. En la verificación de las piezas se utiliza una galga 2-step con dimensiones de referencia (S y L) adaptables según el diseño óptimo.
3. El diseño de la galga es preciso y no se contemplan situaciones de desgaste o de pérdida de precisión.
4. La distribución de la variable de calidad es conocida por el usuario. En este trabajo se consideran las distribuciones normal, log-normal, skew-normal y Weibull.
5. La información colectada en la inspección por galgas solo es empleada para realizar el diagnóstico del proceso.
6. El control se realiza con la intención de detectar cambios de la media en ambas direcciones (incremento o decremento) e incrementos en la varianza.
7. Se conocen los parámetros de la distribución de probabilidad en el estado bajo control, por lo cual el desempeño de los esquemas de control es evaluado en el escenario de diagnóstico de futuras observaciones del proceso.

1.5. Estructura de la memoria

La presente tesis se encuentra estructurada en ocho capítulos:

Los antecedentes del problema de investigación, la motivación, la declaración de objetivos y la definición del alcance de la tesis, conforman el contenido del presente **capítulo 1**.

En el **capítulo 2** se describen las bases estadísticas de los gráficos de control por variables tipo Shewhart \bar{X} , S y $\bar{X}-S$, de los gráficos con memoria EWMA y de tamaño de muestra adaptativo DS/VSS. También se presenta una revisión de las métricas que comúnmente son empleadas para evaluar el desempeño de un gráfico de control y se detallan las metodologías de cálculo para estadísticos con independencia temporal y para estadísticos con estructura de dependencia de un paso; este último caso soportado en una cadena de Márkov.

Adicionalmente, dado que la tesis se orienta al diseño óptimo de gráficos de control, en este capítulo se incluye una descripción general del problema de optimización de un gráfico de control y de las herramientas que suelen ser empleadas para su solución. Con especial detalle se describen el funcionamiento de un *algoritmo genético* (Genetic Algorithm, GA).

En el **capítulo 3** se detallan los aspectos generales del control de una variable basado en la inspección por galgas y se describen individualmente las propuestas halladas en la revisión bibliográfica, detallando los criterios y procedimientos de optimización que fueron considerados para su diseño, además de algunos de los detalles más importantes de su implementación.

A partir del Capítulo 4 el lector puede encontrar las contribuciones de la presente tesis:

En el **capítulo 4** se desarrolla una nueva propuesta de esquema de control basado en la inspección por galgas, denominado esquema $wY_S Y_L$. Como novedad, este esquema presenta un estadístico de control flexible, adaptable para las tareas de control de la media y/o de la varianza de una variable. En este estadístico se incorpora un nuevo parámetro, el peso w . De forma particular, se demuestra que con valores específicos de w , el esquema $wY_S Y_L$ es equivalente a los esquemas que actualmente se encuentran en la literatura (Stevens, 1948; Steiner et al., 1996; Wu et al., 2009; Aparisi et al., 2018; Bezerra et al., 2018).

También se deducen las fórmulas matemáticas requeridas para realizar la evaluación del desempeño del esquema y se presenta un algoritmo para encontrar el diseño óptimo. Este algoritmo, que fue desarrollado específicamente para el diseño del nuevo esquema $wY_S Y_L$, encuentra siempre la solución óptima. Dado que el esquema $wY_S Y_L$ es una familia de gráficos de control, cuando es optimizado se obtiene el gráfico con mejor desempeño. En algunos casos, el esquema óptimo coincide con alguna de las propuestas anteriores; en otras ocasiones, es un esquema nuevo o que no ha sido optimizado previamente. El desempeño del esquema $wY_S Y_L$ es comparado frente a la mejor de las propuestas predecesoras y frente a los gráficos por variables \bar{X} , S y $\bar{X}-S$. En este capítulo solo se considera el control de una variable con distribución normal. Con el contenido de este capítulo se da respuesta al objetivo específico 1.

En el **capítulo 5**, que corresponde al desarrollo del objetivo específico 2, se extiende el uso del esquema $wY_S Y_L$ para el control de variables con distribución asimétrica. Esta extensión es realizada para las distribuciones skew-normal, log-normal y Weibull. Debido a la asimetría de las distribuciones, se genera el problema de sesgo en la curva ARL del gráfico de control (en adelante denominado *ARL-sesgo*). Para garantizar que el esquema $wY_S Y_L$ óptimo es ARL-insesgado (sin sesgo en la curva ARL), se incluye una restricción adicional al problema de diseño óptimo. Se presenta también un análisis de la sensibilidad de los parámetros óptimos cuando se varía la asimetría en la distribución.

El desarrollo del objetivo específico 3 se encuentra en el **capítulo 6**. Aquí se implementan las estrategias de tamaño de muestra adaptativo DS y VSS sobre el esquema $wY_S Y_L$. Particularmente, se presenta la deducción de las expresiones matemáticas para el cálculo de los indicadores de desempeño de los nuevos esquemas $wY_S Y_L$ -DS, $wY_S Y_L$ -VSS y se adapta un algoritmo genético para solucionar el problema de diseño óptimo. El desempeño de los esquemas adaptativos es comparado con el del esquema $wY_S Y_L$ -FSS (de parámetros fijos, presentado en el Capítulo 4) y con el de los gráficos por variables \bar{X} , S y \bar{X} - S . Esta comparación se realiza en el escenario de control de una variable con distribución normal.

En el **capítulo 7** se incorpora memoria al esquema $wY_S Y_L$ a través de la adaptación de un estadístico EWMA. Se desarrolla también el cálculo del ARL a través del método basado en cadenas de Márkov y se adapta el algoritmo genético para la optimización de los parámetros. El desempeño de este nuevo esquema es comparado con gráficos de control por variables \bar{X} , S y \bar{X} - S , con los esquemas de parámetros adaptativos $wY_S Y_L$ -DS, $wY_S Y_L$ -VSS y con el esquema de parámetros fijos $wY_S Y_L$ -FSS. Nuevamente esta comparación es realizada bajo el supuesto de normalidad de la variable de calidad. El contenido del Capítulo 7 da respuesta al objetivo específico 4.

Finalmente en el **capítulo 8** se resumen las conclusiones y hallazgos de la presente tesis, se presentan algunas ideas para el desarrollo de futuros proyectos de investigación y se relaciona los productos académicos generados en el desarrollo de esta tesis doctoral.

Capítulo 2

Control de variables. Preliminares

En este capítulo se presenta el soporte estadístico del diseño de un gráfico de control y de la evaluación de su desempeño. En las secciones 2.1 a 2.3 se detallan de forma amplia los gráficos de control por variables, sus principales indicadores de desempeño y las formulas estadísticas requeridas para realizar su cálculo.

En concordancia con los objetivos planteados en esta tesis, en la sección 2.4 se describen algunas de las estrategias que han permitido mejorar el desempeño de los gráficos de control tipo Shewhart. Las estrategias que se presentan en esa sección son aquellas que se implementarán para mejorar el desempeño de los esquemas de control basados en galgas. Adicionalmente, en la sección 2.5 se formula el diseño de un gráfico de control como un problema de optimización y se presenta la teoría de algoritmos genéticos como una metodología para hallar el diseño óptimo.

Los conceptos básicos que se presentan en las secciones 2.1 a 2.3.3 son una adaptación del material contenido en los libros de texto Montgomery (2009), Gutiérrez (2013) y Duncan (2000). Los conceptos más avanzados, que se presentan en las secciones 2.3.4 a 2.5.1, han sido adaptados desde una revisión detallada del estado del arte sobre el diseño de gráficos de control y estrategias para la mejora de su desempeño. Estos elementos conforman el marco teórico sobre el cual se soportan las propuestas de mejora que desarrollamos en los capítulos 4 a 7.

2.1. Introducción

En cualquier fase de un proceso productivo es habitual que el resultado presente variación en sus características de calidad. Esta variación surge como consecuencia, entre otras posibles causas, de la velocidad con la cual se desarrolla el proceso y de la continua interacción que se presenta entre los múltiples factores que en él participan

(maquinaria, materiales, métodos, mano de obra, medio ambiente, mediciones). La variación que se presenta en el proceso puede ser de dos clases: *variación usual* y *variación inusual*.

La *variación usual* corresponde a la suma de pequeñas cantidades de variación que aportan de forma habitual los factores del proceso. Esta variación es debida a causas fortuitas, aleatorias o comunes, y suele estar presente en el proceso, siendo inherente al mismo y predecible en el tiempo. Por lo cual se dice que el proceso está *bajo control estadístico*, si solo está presente variación de esta clase.

Por el contrario, la *variación inusual* es aquella debida a causas especiales y suele ser la respuesta del proceso a una condición no habitual en su funcionamiento. Por ejemplo: desgaste de las maquinarias, error en los procedimientos, deterioro de los materiales, alteración de la materia prima, entre otras causas asignables. En estos casos, cuando existe variación inusual en el proceso, se dice que este se encuentra *fuera de control estadístico*.

La presencia de variabilidad inusual en el proceso puede afectar notablemente la calidad del producto final, por lo cual es conveniente identificarla a tiempo. Con este objetivo, Shewhart (1927) propuso los gráficos de control, diseñados para detectar rápidamente la presencia de variación inusual en el proceso y evitar la producción de unidades no conformes. La utilidad de estos gráficos ha sido tan notable, que hoy en día permanecen como una de las herramientas de mayor uso en las labores del CEP.

Un gráfico de control funciona de manera análoga a un test de hipótesis estadístico. Como hipótesis nula ($H_0: \theta = \theta_0$) se plantea que un parámetro de interés (θ), asociado a la distribución de probabilidad de la característica de calidad, permanece estable en su valor habitual (θ_0), mientras que la hipótesis alternativa ($H_1: \theta \neq \theta_0$) plantea que este parámetro presenta algún cambio.

Para contrastar esta hipótesis se extrae una muestra de n unidades del proceso, se calcula un estadístico resumen ($\hat{\theta}$) con los datos recolectados y su valor se dibuja junto a unos límites de control. Estos límites actúan como criterio de admisibilidad para la hipótesis nula, de manera que si el punto cae en la zona contenida entre los límites, se acepta la hipótesis nula y se concluye que el proceso está bajo control. Por el contrario, si un punto supera los límites, se rechaza la hipótesis nula señalando una alarma de estado fuera de control en el proceso. Ante esta alarma, debe iniciarse la búsqueda de la fuente de variación inusual e implementar las acciones correctivas para retornar el

proceso a su habitual funcionamiento. En la Figura 2.1, se presenta un ejemplo del aspecto general de un gráfico de control tipo Shewhart.

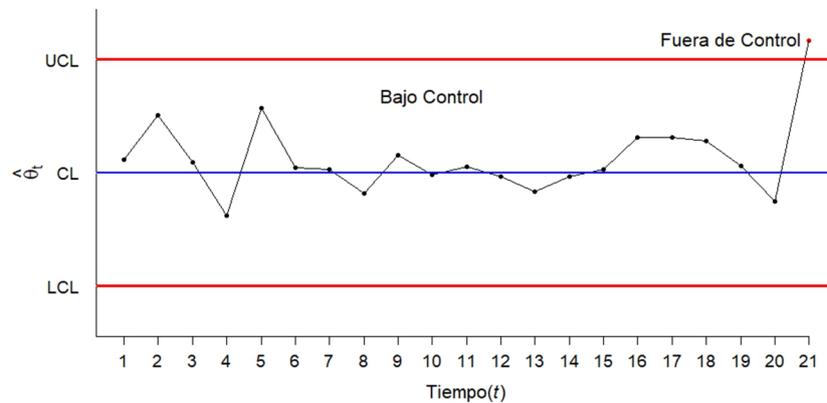


Figura 2.1. Ejemplo de un gráfico de control tipo Shewhart.

Dependiendo de la escala de medida de la característica de calidad, los gráficos de control se subdividen en dos grandes grupos: 1. *Gráficos de control por atributos*, que son empleados en el control de una característica cualitativa de la calidad; 2. *Gráficos de control por variables*, diseñados para vigilar una característica cuantitativa de calidad, en adelante denominada variable de calidad. Según Montgomery (2009) p. 289 “Generalmente los gráficos de atributos no son tan informativos como los gráficos por variables, porque típicamente hay más información en una medición numérica que en simplemente clasificar una unidad como conforme o no conforme”.

Dado que el eje central de esta tesis se relaciona con el control de variables, específicamente de su media y desviación estándar, en las secciones 2.2 y 2.3 se presenta una descripción de los gráficos de control por variables más utilizados en esta tarea y del cálculo de sus indicadores de desempeño. Posteriormente, en el capítulo 3, se introducen las ideas de control de variables a través de inspección por galgas y se detallan las propuestas que se encuentran en la literatura del CEP.

2.2. Gráficos de control tipo Shewhart para variables

Cuando se controla una variable X de calidad, generalmente el gráfico se diseña con el objetivo de verificar que su valor medio permanece estable y que no se presentan incrementos en la variabilidad. Lo anterior es equivalente a plantear un test de hipótesis sobre la media poblacional μ y otro sobre la desviación estándar σ de la variable de calidad. Esto es:

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1: \mu \neq \mu_0, \quad (2.1)$$

$$H_0: \sigma = \sigma_0 \text{ vs } H_1: \sigma > \sigma_0. \quad (2.2)$$

Aquí μ_0 y σ_0 representan los valores de la media y de la desviación estándar de X cuando el proceso está bajo control. Estos valores deben ser conocidos por el usuario, o en su defecto, estimados a través de muestras del proceso colectadas en un verificado estado bajo control del proceso, en lo que se denomina la Fase I del gráfico de control. En adelante asumiremos que estos parámetros son perfectamente conocidos por el usuario y nos centraremos en la descripción del funcionamiento de los gráficos para la Fase II, en la cual se controlan futuras observaciones del proceso.

Shewhart (1931) propuso emplear el promedio muestral, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i/n$, para controlar la media del proceso ($H_0: \mu = \mu_0$) y uno de los dos, el rango muestral, $R = \max(x_i) - \min(x_i)$, ó la desviación estándar muestral, $S = [\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 / (n - 1)]^{1/2}$, para el control de la variabilidad ($H_0: \sigma = \sigma_0$). En cada caso, el gráfico de control hereda el nombre del estadístico empleado: gráfico \bar{X} , gráfico R o gráfico S .

Cuando el tamaño de la muestra es pequeño, los gráficos R y S tienen similar desempeño. Sin embargo, con un tamaño de muestra $n > 10$, el estadístico R pierde eficiencia estadística para estimar el parámetro σ (Montgomery, 2009; p. 251). Debido a ello, el gráfico S suele ser el referente para el control de la variabilidad, especialmente para tamaños de muestras grandes.

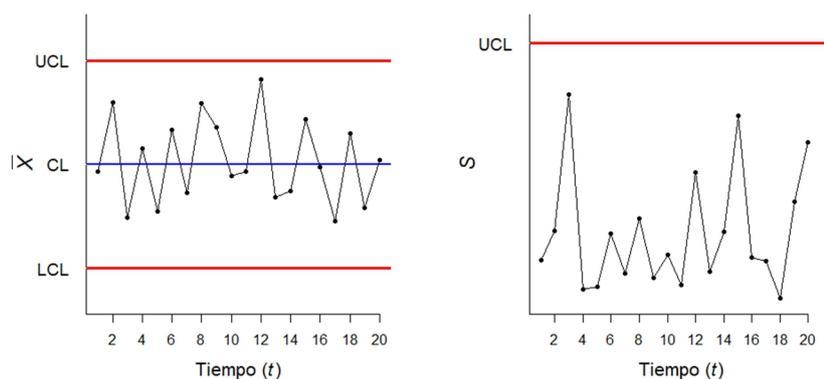


Figura 2.2. Ejemplo de los gráficos de control \bar{X} y S .

Dado que el test de hipótesis sobre la media es bilateral, el gráfico \bar{X} se diseña con dos límites de control, inferior ($LCL_{\bar{X}}$) y superior ($UCL_{\bar{X}}$). En el control de la variabilidad el test es unilateral, por lo cual el gráfico S se diseña con solo un límite de

control superior (UCL_S). En la Figura 2.2 se muestra un ejemplo del aspecto visual de los gráficos \bar{X} y S .

En el diseño de un gráfico de control, la ubicación de los límites determina su desempeño estadístico. Con límites muy estrechos se tiene un alto riesgo de incurrir en el *error tipo I* del test de hipótesis; rechazar la hipótesis nula cierta, cuya probabilidad, en el contexto del CEP, recibe el nombre de *probabilidad de falsa alarma* (α). En contraste, límites muy amplios disminuyen la *potencia estadística* ($1 - \beta$) del test para detectar cambios en la variable.

En un diseño habitual, los límites de control se ubican en la posición que garantiza una probabilidad de falsa alarma (α^*) preestablecida por el usuario. Esto es $\alpha = \alpha^*$. Siguiendo este criterio, si suponemos que en el estado bajo control la variable sigue una distribución normal $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$, los límites para los gráficos \bar{X} y S deben ser ubicados en las posiciones:

$$LCL_{\bar{X}} = \mu_0 - L_{\bar{X}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad UCL_{\bar{X}} = \mu_0 + L_{\bar{X}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad y \quad (2.3)$$

$$UCL_S = \sqrt{L_S \frac{\sigma_0^2}{(n-1)}}. \quad (2.4)$$

Al fijar $L_{\bar{X}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha^*/2)$ y $L_S = F_{\chi_{n-1}^2}^{-1}(1 - \alpha^*/2)$ se garantiza que cada gráfico tiene la probabilidad de falsa alarma α^* . Aquí, $\Phi(\cdot)$ representa la función de distribución acumulada (cdf) de una variable normal estándar, $F_{\chi_v^2}$ es la cdf de una variable ji-cuadrado con v grados de libertad.

En el diseño de gráficos de control suele ser empleado el criterio 3σ para ubicar los límites de control (Shewhart, 1931). Este criterio fue propuesto considerando que en la distribución normal el 99.73% de la población se encuentra en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$. Aplicar este criterio es equivalente a diseñar el gráfico con probabilidad de falsa alarma $\alpha = 0.0027$.

En la práctica, es muy frecuente que los dos parámetros, media y desviación, se controlen de forma simultánea, para lo cual es habitual que se usen los gráficos \bar{X} y S en forma conjunta, en un esquema denominado \bar{X} - S . En este caso, dado que para una variable con distribución normal los estadísticos \bar{X} y S son independientes, la probabilidad de falsa alarma del esquema conjunto ($\alpha_{\bar{X}-S}$) corresponde a:

$$\alpha_{\bar{x}-S} = 1 - [(1 - \alpha_{\bar{x}})(1 - \alpha_S)]. \quad (2.5)$$

Nótese que la probabilidad de falsa alarma conjunta es siempre mayor a las probabilidades de falsa alarma de cada gráfico particular. Por lo cual, para garantizar una probabilidad de falsa alarma $\alpha_{\bar{x}-S} = \alpha^c$ en el esquema conjunto, se deben ajustar las probabilidades de falsa alarma particulares de cada gráfico. Por ejemplo, es habitual que cada gráfico sea diseñado con probabilidad de falsa alarma común $\alpha_{\bar{x}} = \alpha_S = \alpha^*$, ubicada en:

$$\alpha^* = 1 - \sqrt{1 - \alpha^c}. \quad (2.6)$$

2.3. Medidas del desempeño de un gráfico de control

Como se mencionó anteriormente, un gráfico de control se diseña con el objetivo de identificar rápidamente situaciones de cambio en la variable de calidad. De acuerdo con ello, su desempeño estadístico suele evaluarse a través de indicadores que miden la probabilidad de obtener un acertado diagnóstico del proceso y/o con el tiempo que tarda el gráfico en detectar un cambio. Una revisión detallada de estos indicadores y de su forma de cálculo se presenta en las secciones 2.3.1 a 2.3.3.

2.3.1. Probabilidad de alarma (PA)

De forma general, la probabilidad de alarma (PA) se define como:

$$PA = \Pr(\hat{\theta} \in \Omega_1 | \theta), \quad (2.7)$$

donde Ω_1 es el conjunto de valores del estadístico $\hat{\theta}$ que generan el diagnóstico fuera de control. Particularmente, cuando PA es evaluado para el valor $\theta = \theta_0$ establecido en la hipótesis nula, se obtiene la probabilidad de falsa alarma (α) del gráfico de control. Por el contrario, si PA se evalúa en algún valor $\theta = \theta_1$, diferente al de la hipótesis nula, el resultado es la potencia del gráfico ($1 - \beta$) para detectar el cambio.

Para obtener expresiones matemáticas simples y generalizables para PA, es conveniente definir la magnitud del cambio en el parámetro de interés, a través de factores adimensionales. Para denotar los cambios en la media y la variabilidad suelen ser empleados los factores δ y r respectivamente, los cuales se definen como:

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}, \quad (2.8)$$

$$r = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}. \quad (2.9)$$

Aquí $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y $\sigma_1 = r\sigma_0$ representan los valores de la media y la desviación estándar de la variable cuando hay una fuente de variación inusual en el proceso. En este caso, δ representa la magnitud del cambio en la media, medida en unidades de desviación estándar, mientras que r representa el incremento porcentual de la desviación estándar.

Particularmente, el gráfico \bar{X} tiene capacidad para detectar cambios en la media y en la varianza. De manera que, si en el proceso hay una fuente de variación inusual que genera un cambio de la media al nivel $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y de la desviación estándar al nivel $\sigma_1 = r\sigma_0$, la probabilidad de que se emita una alarma, para cualquiera de las muestras que se toman posteriores al cambio, es igual a:

$$PA_{\bar{X}} = 1 - \Pr(LCL_{\bar{X}} < \bar{X} < UCL_{\bar{X}} | \delta, r) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{-L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) \right]. \quad (2.10)$$

En el caso del gráfico S , este solo puede detectar cambios en la varianza. Con lo cual, si se presenta un cambio en la desviación estándar al nivel ($\sigma_1 = r\sigma_0$), la probabilidad de alarma es:

$$PA_S = \Pr(S \geq UCL_S | r) = 1 - F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{L_S}{r^2}\right). \quad (2.11)$$

Cuando se utiliza el esquema conjunto \bar{X} - S , dada la condición de independencia de los estadísticos \bar{X} y S , PA se obtiene como:

$$\begin{aligned} PA_{\bar{X}-S} &= 1 - \Pr([LCL_{\bar{X}} < \bar{X} < UCL_{\bar{X}}] \cap [S < UCL_S] | \delta, r) = \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{-L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) \right] \left[F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{L_S}{r^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En este punto es necesario aclarar que las ecuaciones 2.11 y 2.12 solo pueden ser empleadas para una variable con distribución normal. Por otro lado, debido a las propiedades distribucionales asintóticas de los promedios muestrales, el Teorema

Central del Límite, la ecuación 2.10 puede ser empleada para variables no normales, siempre que el tamaño de muestra sea suficientemente grande.

Cuando las ecuaciones 2.10 a 2.12 son evaluadas en la condición bajo control del proceso, esto es $\delta = 0$ y $r = 1$, proporcionan el cálculo de la probabilidad de falsa alarma (α). Por el contrario, evaluadas para una condición de cambio de la media o de la desviación, esto es $\delta \neq 0$ o $r > 1$, proporcionan el cálculo de la potencia ($1 - \beta$) para detectar el cambio. La Tabla 2.1 proporciona un resumen de estas expresiones para ambos estados del proceso.

Tabla 2.1. Fórmulas para el cálculo de la probabilidad de falsa alarma y de la potencia estadística de los gráficos \bar{X} , S , y $\bar{X} - S$.

Gráfico	Estado del Proceso	
	Bajo Control ($\delta = 0, r = 1$)	Fuera de Control ($\delta \neq 0$ o $r > 1$)
\bar{X}	$\alpha = 2\Phi(-L_{\bar{X}})$	$1 - \beta = 1 - \left[\Phi\left(\frac{L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{-L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) \right]$
S	$\alpha = 1 - F_{\chi_{n-1}^2}(L_S)$	$1 - \beta = 1 - F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{L_S}{r^2}\right)$
$\bar{X} - S$	$\alpha = 1 - [1 - 2\Phi(-L_{\bar{X}})] [F_{\chi_{n-1}^2}(L_S)]$	$1 - \beta = 1 - \left[\Phi\left(\frac{L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{-L_{\bar{X}} - \delta\sqrt{n}}{r}\right) \right] [F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{L_S}{r^2}\right)]$

De forma general, un gráfico de control con buen desempeño estadístico es aquel que presenta una baja probabilidad de falsa alarma y una satisfactoria potencia para detectar cambios en el proceso. En un gráfico tipo Shewhart el desempeño queda determinado cuando se selecciona el tamaño de la muestra y se define el factor de amplitud de los límites de control.

Para determinar el diseño del gráfico es habitual que el usuario fije la probabilidad de falsa alarma deseada (típicamente $\alpha = 0.0027$) y determine una magnitud de cambio ($\delta = \delta^*, r = r^*$) que genera un efecto crítico para el proceso. Posteriormente, para un tamaño de muestra inicial ($n = n_0$), se calculan los factores de amplitud de los límites de control ($L_{\bar{X}}$ y/o L_S) asociados a la probabilidad de falsa alarma deseada y se evalúa la potencia del gráfico para detectar el cambio crítico. Si la potencia obtenida no es satisfactoria, se repite el procedimiento con un incremento gradual del tamaño de muestra. El procedimiento se detiene cuando se logra una potencia mínima deseada o cuando el tamaño de la muestra supera algún umbral preestablecido. El valor de este umbral generalmente se fija considerando un máximo esfuerzo de muestreo (costos y/o la carga operativa) asumible en el procedimiento de inspección.

2.3.2. Curva característica operativa (OCC)

A pesar de que en el diseño del gráfico de control se suele tomar como referencia una magnitud de cambio crítico (δ^* , r^*) en los parámetros de la variable, en la práctica estos parámetros pueden presentar cualquier magnitud de cambio. Por esta razón, en la evaluación del desempeño de un gráfico de control, es conveniente evaluar su capacidad para detectar cambios de cualquier magnitud.

La *curva característica operativa* (Operativa Characteristic Curve, OCC) es una representación grafica de la probabilidad de error tipo II (β), de que una muestra simple caiga dentro de los límites del grafico de control, para diferentes magnitudes de cambio en el parámetro de interes. Cuando se dibuja el complemento, la curva recibe el nombre de *curva de potencia*. La Figura 2.3 presenta una ejemplo de la OCC para los gráficos \bar{X} , $\bar{X}-S$ y S para cambios en la media y para cambios en la desviación estándar, bajo tamaños de muestra $n = 5, 10$ y $\alpha = 0.0027$.

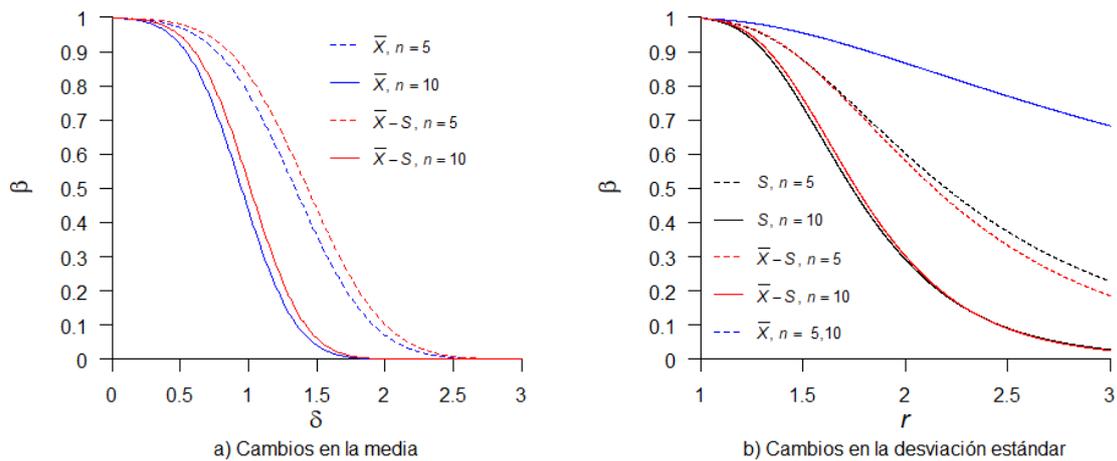


Figura 2.3. Curvas características operativas de los gráficos \bar{X} , S y $\bar{X}-S$. a) Cambios en la media (δ), b) Cambios en la desviación estándar (r). $n = 5, 10$. $\alpha = 0.0027$.

2.3.3. Longitud promedio de racha (ARL)

Dado que el estadístico que se dibuja en un gráfico de control es una variable aleatoria, existe la posibilidad de que el cambio en el parámetro no sea detectado en la muestra posterior y que se requieran de varias muestras para que la alarma sea emitida. En realidad, el número de muestras que transcurren entre la ocurrencia del cambio y la señal de alarma, la *longitud de racha* (Run Length, RL), es una variable aleatoria y su promedio, la longitud promedio de racha (Average Run Length, ARL), es un indicador de la velocidad de detección del cambio por el gráfico de control.

Una expresión de cálculo para el ARL, se obtiene cuando se asemejan los puntos que se dibujan en el gráfico a una secuencia de variables aleatorias dicotómicas (Bajo Control, Fuera de Control) independientes e idénticamente distribuidas (iid). De manera que cada punto tiene una distribución de probabilidad de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = PA$ constante. En consecuencia, el número de ensayos requeridos para obtener la primera alarma (RL) sigue una distribución geométrica, cuyo valor esperado es el ARL:

$$P(rl) = \Pr(RL = rl) = PA(1 - PA)^{rl-1},$$
$$ARL = E(RL) = \frac{1}{PA}, \quad VAR(RL) = \frac{1-PA}{(PA)^2}. \quad (2.13)$$

La expresión anterior solo es válida cuando existe independencia entre las observaciones del proceso y la distribución de probabilidad del estadístico de control permanece constante. Cuando el ARL se evalúa en la condición bajo control ($\delta = 0, r = 1$), entonces $ARL = 1/\alpha$ se denota como ARL_0 y representa el número medio de muestras que transcurren hasta que se genera una falsa alarma. Por el contrario, cuando es evaluado para un cambio en los parámetros ($\delta \neq 0$ o $r > 1$), entonces $ARL = 1/(1 - \beta)$ se denota como ARL_1 y representa el número medio de muestras que el gráfico requiere para detectar el cambio.

De acuerdo con la ecuación 2.13, bajo el supuesto de independencia entre observaciones, la relación entre PA y ARL es biunívoca. Por lo tanto, la evaluación a través de este par de indicadores es siempre equivalente, aunque la dirección de su interpretación es inversa. En términos de ARL, un buen gráfico de control debe tener ARL_0 alto y ARL_1 bajo. Esto quiere decir, alta distancia entre falsas alarmas y rápida detección del cambio. Un valor de diseño común para el ARL_0 , heredado desde el criterio 3σ , es $ARL_0 = 370.42$ ($\alpha = 0.0027$).

El ARL es quizás el indicador de desempeño que con mayor frecuencia se emplea en la evaluación de un gráfico de control. Además de que su interpretación es bastante intuitiva, el ARL puede ser empleado para medir la consecuencia práctica de la falta de potencia del gráfico. Por ejemplo, conociendo el ARL y la frecuencia de muestreo (h), el usuario dispone de una estimación del tiempo medio que tarda el gráfico en detectar el cambio, el *tiempo medio hasta la señal* (Average Time to Signal, ATS), calculado como:

$$ATS = hARL. \quad (2.14)$$

Si adicionalmente conoce la tasa de producción y el porcentaje de piezas no conformes que se producen bajo el cambio, el usuario puede estimar la cantidad total de unidades no conformes que se producen mientras el cambio es detectado. Con lo cual, el desempeño estadístico del test puede ser medido en términos de la pérdida económica para el proceso.

Similar a la curva OCC, el ARL también puede ser evaluado para diferentes magnitudes de cambio y su representación gráfica recibe el nombre de curva ARL.

2.3.4. Cálculo del ARL a través de cadenas de Márkov

El cálculo del ARL a través del valor esperado de una distribución geométrica solo es adecuado cuando se cumple el supuesto de independencia entre las observaciones de un gráfico de control. Este supuesto, que se verifica para los gráficos tipo Shewhart, no se cumple cuando el estadístico de control tiene alguna estructura de dependencia temporal. Este es el caso de los gráficos con tamaño de muestra variable y de los gráficos EWMA que se describen en las secciones 2.4.2 y 2.4.3, respectivamente.

Para gráficos con estructura de dependencia, Brook y Evans (1972) propusieron calcular el ARL a través de una cadena de Márkov y usaron este método para obtener el ARL del gráfico de sumas acumulativas (CUSUM). Este enfoque también fue empleado para calcular los ARL de un gráfico tipo Shewhart con reglas adicionales de fuera de control (Champ y Woodall, 1987), del gráfico EWMA (Lucas y Saccucci, 1990), del gráfico \bar{X} con tamaño de muestra variable (Prabhu et al., 1993; Costa, 1994) y del gráfico EWMA multivariado (Prabhu y Runger, 1997). Posteriormente, un gran número de autores han hecho uso de este método para evaluar el ARL de nuevos y alternativos gráficos de control, tanto univariados como multivariados, todos ellos con alguna estructura de dependencia en el estadístico de control o con parámetros adaptativos. Una detallada revisión del uso del enfoque de cadenas de Márkov en CEP se encuentra en el trabajo de Oviedo, Peñabaena, Mantilla y Lacouture (2014).

Para definir adecuadamente una cadena Markov, conviene definir previamente el concepto de *proceso estocástico*. Según Hillier y Lieberman (2002, p. 802) “*Un proceso estocástico se define como una colección de variables aleatorias S_t , donde el índice t toma valores de un conjunto T dado*”. Con frecuencia T se toma como el conjunto de enteros no negativos y representa el tiempo asociado de observación, por lo tanto S_t representa

una medición obtenida en un instante del tiempo. Si las observaciones de S_t se realizan en tiempos discretos $t \in \{1, 2, 3, \dots, T\}$, el proceso estocástico se denomina de tiempos discretos. Este es el caso que nos interesa estudiar, en el cual S_t es el que toma el estadístico de un gráfico de control en el tiempo t .

Específicamente, se dice que el proceso estocástico S_t cumple la propiedad markoviana, cuando la distribución de probabilidad de S_{t+1} solo depende del valor observado en el instante actual ($S_t = i$). Matemáticamente este planteamiento puede expresarse como:

$$\Pr(S_{t+1} = j | S_t = i, S_{t-1} = i_{t-1}, \dots, S_0 = i_0) = \Pr(S_{t+1} = j | S_t = i) = p_{ij}(t). \quad (2.15)$$

Al conjunto de valores que puede tomar S_t se le conocen como estados y estos pueden ser de tipo continuo o discretos. Los valores i, j son llamados los estados actual y futuro de la cadena, por lo cual $p_{ij}(t)$ recibe el nombre de probabilidad de transición entre estados. Si esta probabilidad no depende del tiempo, es decir $p_{ij}(t) = p_{ij} \forall t$, se dice que la cadena es homogénea.

En el caso de cadenas homogéneas, muchas de sus propiedades estadísticas se pueden deducir cuando se conoce la matriz \mathbf{P} , que contiene las probabilidades de transición (p_{ij}) entre estados. Particularmente, si los estados son discretos, esto es $S_t = 0, 1, \dots, N$, entonces \mathbf{P} tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Dado que cada una de las filas de \mathbf{P} es una distribución de probabilidad condicional, se cumple que $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1, \forall i$.

Según las ecuaciones de Chapman y Kolmogorov, la matriz de probabilidades de transición a $h+g$ pasos (\mathbf{P}^{h+g}) se obtiene como la multiplicación de la matriz \mathbf{P} en sus potencias h y g respectivamente:

$$\mathbf{P}^{h+g} = \mathbf{P}^h \mathbf{P}^g. \quad (2.17)$$

Al aplicar de forma recursiva la ecuación 2.17, se tiene que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^h = \mathbf{P}\mathbf{P}^{h-1}$. Con lo cual, \mathbf{P}^h es la h -ésima potencia de la matriz de transición de un paso \mathbf{P} .

El vector $\boldsymbol{\pi}^0 = [\pi_1^0, \pi_2^0, \pi_3^0 \dots, \pi_N^0]$ contiene la distribución de probabilidad inicial de S_t . La distribución de probabilidad de S_t en el h -ésimo paso ($\boldsymbol{\pi}^h$) se determina al conocer $\boldsymbol{\pi}^0$ y \mathbf{P} , a través de la siguiente relación.

$$\boldsymbol{\pi}^h = \boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^h. \quad (2.18)$$

Cuando el proceso estocástico transcurre bajo condiciones regulares durante un periodo extendido de tiempo, el vector $\boldsymbol{\pi}^h$ se estabiliza en $\boldsymbol{\pi} = \lim_{h \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}^h$. En este caso $\boldsymbol{\pi}$ recibe el nombre de vector de probabilidad estacionario.

Un tipo especial de cadena de Márkov es aquella que presenta uno o más estados desde los cuales el proceso estocástico no puede salir, denominados *estados absorbentes*, pero que son accesibles desde cualquiera de los otros estados denominados *transitorios*. Estas cadenas reciben el nombre de cadenas de Márkov absorbentes.

De acuerdo con Brook y Evans (1972), la secuencia de puntos que se dibuja en un gráfico de control puede ser vista como una cadena de Márkov absorbente, ya que se asume que cuando se señala una alarma, el proceso es intervenido para lograr su ajuste y la secuencia de observaciones se reinicia. En este caso, la zona externa a los límites de control representa el estado absorbente, y la zona interior puede ser dividida en $m \geq 1$ intervalos, que representan los estados transitorios. Con esta división, la matriz \mathbf{P} puede ser expresada de forma canónica por bloques como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{m \times m} & \mathbf{Q}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times m} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

con: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} p_{1,N} \\ p_{2,N} \\ \vdots \\ p_{m,N} \end{bmatrix}$.

Aquí $\mathbf{R}_{m \times m}$ es la matriz de probabilidades de transición entre estados transitorios, $\mathbf{Q}_{m \times 1}$ es el vector que contiene las probabilidades de pasar desde un estado transitorio al estado absorbente y $\mathbf{0}_{1 \times m}$ es un vector de ceros que representa la imposibilidad de retornar desde el estado absorbente a un estado transitorio.

Dado que $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, entonces $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1}$. Donde $\mathbf{I}_{m \times m}$ es la matriz identidad de orden m y $\mathbf{1}_{m \times 1}$ es un vector de valores unitarios. La matriz $\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$ recibe el nombre de matriz fundamental y contiene el número esperado (f_{ij}) de ocasiones en

que el proceso estocástico, que inicialmente ha partido del estado i , pasa por el estado j antes de visitar el estado absorbente. De acuerdo con esto, la suma de las filas de \mathbf{F} corresponde al número esperado de ocasiones que el proceso estocástico fluctúa entre los estados transitorios antes de ser absorbido, cuando ha partido del estado inicial i . Esta propiedad, interpretada en el contexto de un gráfico de control, coincide con la definición de un ARL condicionado a un inicio de la secuencia de observaciones en el estado inicial i . Esto es:

$$E[RL|S_0 = i] = \sum_{j=1}^m f_{ij}. \quad (2.20)$$

Al dividir la zona de control del gráfico en intervalos, uno de estos intervalos contiene el valor objetivo del monitoreo (θ). Este intervalo se conoce como el estado *zero state*. Con lo cual, si el proceso estocástico inicio en el estado zero state, el ARL condicionado al estado inicial zero state corresponde a:

$$ARL^{ZS} = \boldsymbol{\pi}^0 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}, \quad (2.21)$$

donde $\boldsymbol{\pi}^0 = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0]$, con $\pi_i^0 = 1$ para el estado zero state.

En la práctica, generalmente el cambio ocurre luego de que el proceso estocástico ha transcurrido en la condición bajo control durante algún periodo de tiempo. Por lo tanto, es poco probable que en el instante del cambio el proceso estocástico se encuentre en el estado zero state. Bajo esta condición, el ARL^{ZS} no es el indicador de desempeño adecuado.

En un caso como el anterior, es más acertado realizar el cálculo del ARL *steady state* (estado estable), el cual se calcula como el promedio de los ARL condicionados, ponderados por la probabilidad de que en el instante de cambio el proceso estocástico se encuentre en los estados transitorios. Esto es:

$$ARL^{SS} = \boldsymbol{\pi} (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}. \quad (2.22)$$

Una buena aproximación para $\boldsymbol{\pi}$ se puede obtener como:

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\boldsymbol{\pi}^0 (\mathbf{I} - \mathbf{R}_0)^{-1}}{ARL_0^{ZS}}. \quad (2.23)$$

Aquí \mathbf{R}_0 y ARL_0^{ZS} representan la matriz de transición \mathbf{R} y el ARL zero state calculados para el proceso en el estado bajo control.

En este punto conviene destacar que el enfoque de cadenas de Markov conduce al cálculo exacto del ARL de un gráfico de control, cuando el número de estados transitorios en la cadena es finito. Por el contrario, si el número de estados es infinito y estos son tratados como discretos (a través de agrupación, por ejemplo) el resultado es una aproximación al verdadero valor ARL.

2.4. Estrategias de mejora para gráficos de control tipo Shewhart

Una de las limitaciones que presentan los gráficos tipo Shewhart tiene que ver con su baja sensibilidad para detectar pequeños cambios en el proceso. Para ilustrar esta limitación se presentan en la Figura 2.4 las curvas ARL de los gráficos \bar{X} , $\bar{X}-S$, para cambios en la media y de los gráficos S , $\bar{X}-S$ para cambios en la desviación estándar. Estas curvas fueron construidas con tamaños de muestra $n = 5, 10$ y $\alpha = 0.0027$.

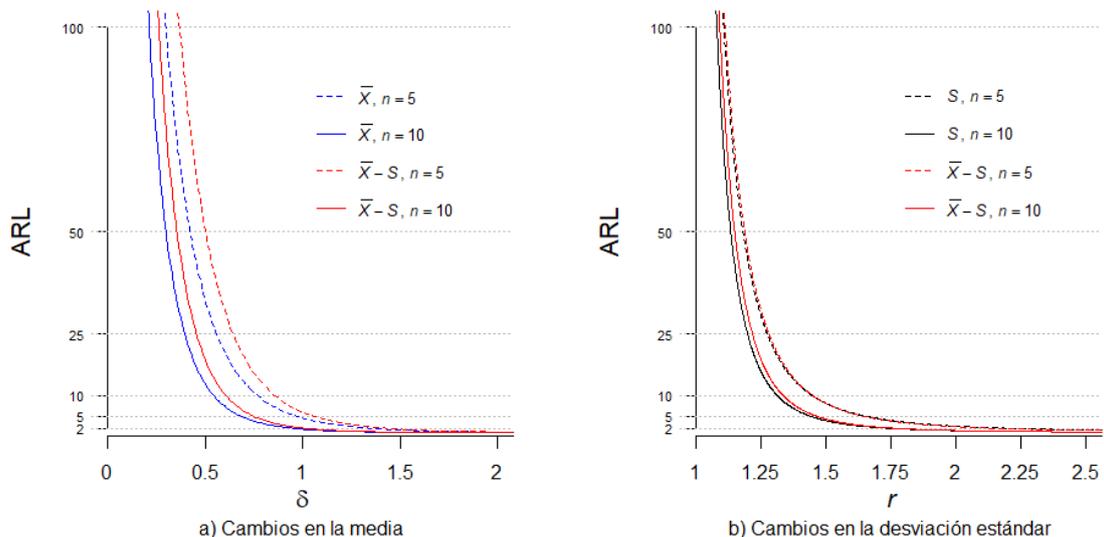


Figura 2.4. Curva ARL de los gráficos \bar{X} , S y $\bar{X}-S$. a) cambios en la media (δ), b) cambios en la desviación estándar (r). $n = 5, 10$. $\alpha = 0.0027$.

Como se puede observar en la Figura 2.4, cuando se emplea un tamaño de muestra $n = 5$, los gráficos tipo Shewhart detectan rápidamente ($ARL_1 < 2$) cambios grandes en el proceso ($\delta > 1.5$ o $r > 2.25$). Sin embargo, su sensibilidad para detectar pequeños cambios ($\delta \leq 1$, $r \leq 1.5$) es muy baja. Por ejemplo, con $n = 5$, el gráfico \bar{X} requiere aproximadamente de 5 muestras en promedio para señalar un cambio en la media al nivel $\delta = 1$. Similar número de muestras medio es requerido por el gráfico S para

señalar un incremento del 75% en la varianza ($r = 1.75$). En ambos casos, para lograr $ARL_1 \approx 2$ es necesario duplicar el tamaño de la muestra ($n = 10$), lo cual genera un incremento en el esfuerzo de muestreo, que en muchos procesos no puede ser asumido.

Desde la década de 1940, muchos autores han trabajado en el desarrollo de nuevos gráficos de control con mejor desempeño en la detección de cambios pequeños y moderados en la variable. Estrategias como el diseño de gráficos adaptativos y la incorporación de memoria al estadístico de control han sido efectivas para cumplir este objetivo. En las secciones 2.4.1 a 2.4.3 se describen en detalle las estrategias de doble muestreo (DS), de tamaño de muestra variable (VSS) y el gráfico de control EWMA. Estas son las tres estrategias que serán adaptadas en la presente tesis para mejorar el desempeño de los esquemas de control basados en la inspección por galgas.

2.4.1. Doble muestreo (DS)

La estrategia de doble muestreo (DS) fue diseñada inicialmente por Croasdale (1974), como una alternativa para mejorar el desempeño del gráfico \bar{X} en la detección de pequeños cambios en la media del proceso, sin incrementar el esfuerzo de muestreo global. En este esquema, una muestra inicial de tamaño n_1 es extraída del proceso y sus unidades son analizadas y medidas, dibujando el promedio muestral (\bar{X}_1) sobre un primer gráfico de control. Si el punto cae dentro de los límites, se concluye que el proceso permanece bajo control. Por el contrario, un punto por fuera de los límites se interpreta como una advertencia de un posible cambio en la variable, y para verificarlo se toma una segunda muestra de tamaño n_2 , dibujando su promedio \bar{X}_2 sobre un segundo gráfico. El diagnóstico fuera de control se ratifica cuando el punto supera los límites de control del segundo gráfico. Como se puede notar, en este esquema la señal de cambio solo puede ser emitida luego de analizar el total de $n_1 + n_2$ unidades, mientras que el diagnóstico bajo control si puede ser generado en cualquiera de las dos etapas de muestreo.

Posteriormente, Daudin (1992) sugirió una modificación al procedimiento DS. En esta modificación incluye un par de límites adicionales (límites de advertencia), que se dibujan en el primer gráfico, y una regla de decisión que habilita el diagnóstico fuera de control con la primera muestra. En el esquema de Daudin, el diagnóstico en la segunda etapa se genera utilizando la información de la muestra global conjunta. Irianto y Shinozaki (1998) evaluaron ambas propuestas y encuentran que el método

de Daudin tiene mejor desempeño que la propuesta de Croasdale para la detección de cambios en la media del proceso.

En el gráfico DS- \bar{X} (Daudin, 1992) se utilizan dos estadísticos de control, uno para cada etapa de muestreo, definidos como:

$$Z_1 = \frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n_1}}, \tag{2.24}$$

$$Z_2 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n_1 + n_2}}. \tag{2.25}$$

Aquí \bar{X}_j es el promedio de la submuestra $j \in \{1,2\}$ y $\bar{X} = (n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2)/(n_1 + n_2)$ es el promedio de la muestra global. Cada estadístico se representa sobre un gráfico de control diferente.

Para el diseño del gráfico de primera etapa se debe definir la amplitud de los límites de advertencia ($\pm L_w$) y de control ($\pm L_1$), los cuales deben satisfacer que $0 < L_w < L_1$. En el diseño del gráfico de segunda etapa solo se debe definir la amplitud de los límites de control ($\pm L_2$). En la Figura 2.5 se muestra un esquema del funcionamiento del gráfico DS- \bar{X} . Como se observa, el gráfico se subdivide en 5 zonas denotadas por: $I_1 = [-L_w, L_w]$, $I_2 = [-L_1, -L_w] \cup [L_w, L_1]$, $I_3 = [-\infty, -L_1,] \cup [L_1, \infty]$, $I_4 = [-L_2, L_2]$ y $I_5 = [-\infty, -L_2,] \cup [L_2, \infty]$.

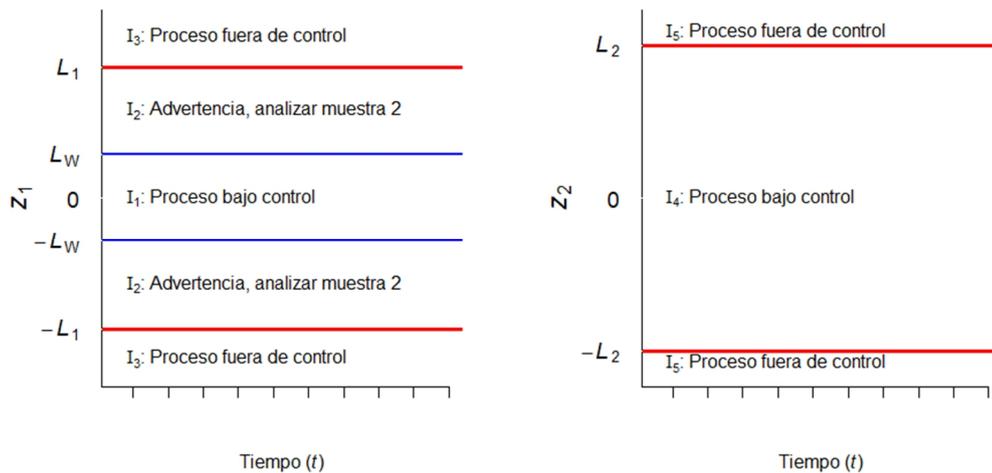


Figura 2.5. Ejemplo del gráfico de control DS- \bar{X} .

El procedimiento inicia con el análisis de la primera muestra y el cálculo del estadístico Z_1 . En esta *primera etapa* hay tres posibles resultados:

- $Z_1 \in I_1$, se concluye que el proceso está bajo control.

- $Z_1 \in I_3$, se concluye que el proceso está fuera de control.
- $Z_1 \in I_2$, se pasa a la segunda etapa.

En la *segunda etapa* se analiza la segunda muestra y se calculan el promedio de la muestra global (\bar{X}) y el estadístico Z_2 . En esta etapa solo hay dos posibles resultados:

- $Z_2 \in I_4$, se concluye que el proceso está bajo control.
- $Z_2 \in I_5$, se concluye el proceso está fuera de control.

Al aplicar estas reglas de decisión, cuando ocurre un cambio de magnitudes relativas (δ, r) en la media y la desviación estándar, la probabilidad de que el gráfico DS- \bar{X} señale una alarma es igual a:

$$PA_{DS-\bar{X}} = Pa_1 + Pa_2. \quad (2.26)$$

Aquí Pa_j denota la probabilidad de que la alarma se emita en la etapa j . Estas probabilidades pueden ser calculadas como:

$$Pa_1 = \Pr(Z_1 \in I_3) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{L_1 - \delta\sqrt{n_1}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{-L_1 - \delta\sqrt{n_1}}{r}\right) \right], \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} Pa_2 &= \Pr(Z_1 \in I_2 \cap Z_2 \in I_5) = \\ &= \int_{-L_1 - \delta\sqrt{n_1}}^{-L_w - \delta\sqrt{n_1}} \left[1 - \left(\Phi\left(\frac{L_1\sqrt{n} - zn_1 - \delta n_2}{r\sqrt{n_2}}\right) - \Phi\left(\frac{-L_1 - zn_1 - \delta n_2}{r\sqrt{n_2}}\right) \right) \right] \phi(z) dz + \\ &+ \int_{L_w - \delta\sqrt{n_1}}^{L_1 - \delta\sqrt{n_1}} \left[1 - \left(\Phi\left(\frac{L_1\sqrt{n} - zn_1 - \delta n_2}{r\sqrt{n_2}}\right) - \Phi\left(\frac{-L_1 - zn_1 - \delta n_2}{r\sqrt{n_2}}\right) \right) \right] \phi(z) dz. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Si la distribución de probabilidad de la variable de calidad permanece constante, se cumplen las condiciones requeridas para calcular el ARL como el inverso de la probabilidad de alarma, esto es $ARL = 1/PA$.

Nótese que en la estrategia DS el número de piezas que se inspeccionan en una muestra $n \in \{n_1, n_1 + n_2\}$ es una variable aleatoria y su valor medio, el *tamaño de muestra medio* (Average Sample Size, ASS), se calcula como:

$$ASS = E(n) = n_1 + n_2 \Pr(Z_1 \in I_2), \quad (2.29)$$

donde $\Pr(Z_1 \in I_2)$ es la probabilidad de analizar la segunda muestra, que se calcula como:

$$\begin{aligned} \Pr(Z_1 \in I_2 | \delta, r) &= \\ &= \Phi\left(\frac{L_1 - \delta\sqrt{n_1}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{L_w - \delta\sqrt{n_1}}{r}\right) + \Phi\left(\frac{-L_w - \delta\sqrt{n_1}}{r}\right) - \\ &- \Phi\left(\frac{-L_1 - \delta\sqrt{n_1}}{r}\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bajo la misma lógica, también es aleatorio el número acumulado de piezas que se inspeccionan hasta que se emite la alarma. El valor medio de esta variable recibe el nombre de *número medio de observaciones hasta la señal* (Average Number of Observations to Signal, ANOS) y se obtiene como:

$$\text{ANOS} = \text{ASS} \cdot \text{ARL}. \quad (2.31)$$

En el caso de gráficos de control con tamaño de muestra adaptativo, el ASS y el ANOS son indicadores que se relacionan con el esfuerzo de muestreo (costos o carga operativa) que requiere la implementación del gráfico. Debido a esta relación, estos indicadores suelen ser considerados como un criterio adicional para definir el diseño del gráfico adaptativo.

Para diseñar un gráfico DS- \bar{X} el usuario debe definir 5 parámetros (n_1, n_2, L_w, L_1, L_2). Esta abundancia de parámetros hace que se disponga de un alto número de configuraciones de diseño. Una estrategia para definir un diseño óptimo consiste en buscar aquella combinación que satisface una probabilidad de falsa alarma deseada (equivalentemente un ARL_0 deseado) y que tiene la máxima potencia para detectar un cambio de magnitud crítica en los parámetros de la variable (equivalente a un mínimo ARL_1). Adicionalmente, para controlar el esfuerzo de muestreo, la búsqueda de la configuración óptima se restringe sobre el conjunto de soluciones que satisfacen un tamaño de muestra medio deseado (n_0) cuando el proceso está bajo control ($\text{ASS}_0 = n_0$). Esta restricción se plantea para ASS_0 debido a que se supone que el proceso permanece la mayor parte del tiempo en el estado bajo control. En este caso, la selección de n_0 puede estar basada en la consideración de los costos y/o la carga operativa media asumible.

La estrategia de diseño planteada anteriormente puede abordarse como un problema de optimización. En la sección 2.5 se describen algunos métodos que pueden ser implementados para hallar este diseño óptimo.

2.4.2. Tamaño de muestra variable (VSS)

Prabhu et al. (1993) y Costa (1994), de forma independiente, propusieron una estrategia de parámetros adaptativos para el gráfico de control \bar{X} . La filosofía de su propuesta consiste en el manejo de dos tamaños de muestra para el control del proceso ($n_1 < n_2$). En este gráfico se emplea un estadístico de control común que corresponde al promedio muestral tipificado:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \quad (2.32)$$

Sobre un gráfico se dibujan dos límites de control en las posiciones $\pm L_C$ y dos límites de advertencia en las posiciones $\pm L_W$. Estos límites dividen el gráfico en tres zonas: $I_1 = [-L_W, L_W]$, $I_2 = [-L_C, -L_W] \cup [L_W, L_C]$, $I_3 = [-\infty, -L_C,] \cup [L_C, \infty]$; tal como se muestra en la Figura 2.6.

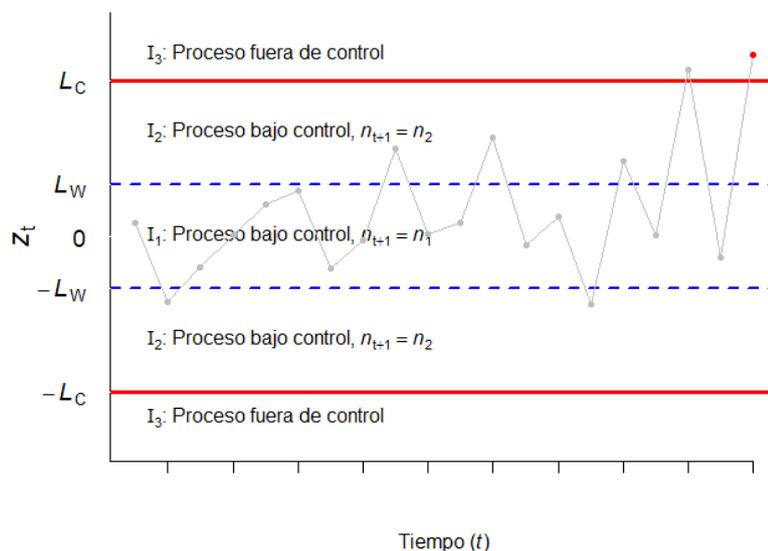


Figura 2.6. Ejemplo del gráfico de control VSS- \bar{X} .

La ubicación de Z en el gráfico es utilizada para diagnosticar el proceso y para definir el tamaño de la próxima muestra $n \in \{n_1, n_2\}$. Si $Z \in I_1$, se dice que el proceso está bajo control y la próxima muestra tendrá el menor tamaño ($n = n_1$). Cuando $Z \in I_2$ indica

que el proceso está bajo control, pero la próxima muestra tendrá el mayor tamaño ($n = n_2$). Por el contrario, si $Z \in I_3$ se señala una alarma de cambio en el proceso.

Nótese que, cuando el proceso está bajo control, sin importar el tamaño de muestra empleado, Z sigue una distribución normal estándar. Por lo tanto, al fijar $L_C = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ se garantiza una probabilidad de falsa alarma (α) constante para el gráfico, equivalente a un $ARL_0 = 1/\alpha$. Por el contrario, la potencia estadística del gráfico para detectar un cambio no es constante. Esta potencia depende del tamaño de muestra (n), que a su vez depende de la ubicación de Z en el instante anterior.

De lo anterior se deduce que el gráfico VSS- \bar{X} tiene una estructura de dependencia de orden 1. En este caso, el ARL_1 puede ser calculado utilizando una cadena de Márkov de tres estados, en la cual la zona I_3 es el estado absorbente y las zonas I_1 y I_2 definen los dos estados transitorios, cuyas probabilidades de transición p_{ij} se calculan como:

$$\begin{aligned} p_{i1} &= \Phi\left(\frac{L_w - \delta\sqrt{n_i}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{-L_w - \delta\sqrt{n_i}}{r}\right), \\ p_{i2} &= \Phi\left(\frac{L_C - \delta\sqrt{n_i}}{r}\right) - \Phi\left(\frac{-L_C - \delta\sqrt{n_i}}{r}\right) - p_{i1}, \quad i \in \{1,2\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Siendo $\mathbf{R}_{2 \times 2}$ la matriz de probabilidades de transición entre estados transitorios, el ARL_1 steady state se obtiene como:

$$ARL_1^{SS} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{1},$$

$$\text{con } \boldsymbol{\pi} = (ARL_0^{ZS})^{-1}\boldsymbol{\pi}^0(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \text{ y } ARL_0^{ZS} = \boldsymbol{\pi}^0(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{1}. \quad (2.34)$$

Suponiendo que en el inicio del seguimiento se tiene la certeza de que el proceso está bajo control, entonces la primera muestra tendrá el menor tamaño ($n = n_1$), por lo cual $\boldsymbol{\pi}^0 = [1,0]$.

Para controlar el esfuerzo de muestreo, los límites de advertencia deben ser ubicados en la posición que garantice un tamaño de muestra medio n_0 . Matemáticamente, esto puede ser escrito como:

$$ASS_0 = E(n|\delta = 0, r = 1) = n_0. \quad (2.35)$$

El valor medio ASS_0 se obtiene al asignar probabilidades a los tamaños muestra n_1 , n_2 y calcular el promedio ponderado. Esto es:

$$\begin{aligned} ASS_0 &= \frac{n_1 P(-L_w < Z < L_w) + n_2 P(-L_c < Z < -L_w \cup L_w < Z < L_c)}{P(-L_c < Z < L_c)} = \\ &= \frac{n_1(1 - 2\Phi(-L_w)) + 2n_2(\Phi(-L_w) - \Phi(-L_c))}{1 - 2\Phi(-L_c)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si los límites de control han sido ubicados según $L_c = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, la ecuación 2.36 se reduce a:

$$ASS_0 = \frac{2\Phi(-L_w)(n_2 - n_1) + n_1 - \alpha n_2}{1 - \alpha}. \quad (2.37)$$

Al igualar la ecuación 2.37 a n_0 y despejar L_w , se obtiene la ubicación del límite de advertencia que garantiza que $ASS_0 = n_0$.

$$L_w = \Phi^{-1}\left(\frac{(n_2 - n_0)(1 - \alpha) + (n_2 - n_1)}{2(n_2 - n_1)}\right). \quad (2.38)$$

Los valores (n_1, n_2) deben ser seleccionados desde los conjuntos $n_1 = 1, 2, 3, \dots, n_0 - 1$; $n_2 - n_0 = 1, 2, \dots, n_{max} - n_0$, donde n_{max} representa el máximo tamaño de muestra que es operativamente factible para el procedimiento de muestreo.

Un diseño óptimo para el gráfico VSS- \bar{X} puede obtenerse si el usuario define a priori los valores deseados α^* , n_0 y las magnitudes de cambio crítico δ^* y r^* . Al fijar α , la ubicación de los límites de control (L_c) queda determinada. Para completar el diseño, se exploran todas las combinaciones de tamaños de muestra, equivalente a realizar una *búsqueda exhaustiva* sobre (n_1, n_2) , calculando para cada par el factor de amplitud de los límites de advertencia (2.38) y el ARL_1 (2.34) asociado a la magnitud de cambio crítico (δ^* , r^*). Al finalizar la búsqueda, la configuración óptima (n_1, n_2, L_w, L_c) será aquella que presenta el menor ARL_1 .

2.4.3. Promedios móviles exponencialmente ponderados (EWMA)

El gráfico de control de medias móviles exponencialmente ponderadas (Exponentially Weigthed Moving Average, EWMA) fue propuesto inicialmente por Roberts (1959) y sus propiedades estadísticas fueron posteriormente estudiadas por Robinson y Ho (1978), Hunter (1986), Waldmann (1986), Montgomery, Gardiner y

Pizarro (1987), Crowder (1987a, 1987b, 1989), Lucas y Saccucci (1990) y Aparisi y García-Díaz (2004), entre otros autores.

El estadístico EWMA mezcla la información actual del proceso con información acumulada desde muestras previas. Para esto, utiliza un estadístico recursivo definido como:

$$Z_t = \lambda\varphi_t + (1 - \lambda)Z_{t-1}, \quad \lambda \in (0,1]. \quad (2.39)$$

Aquí, φ_t es el estadístico que resume la información de la muestra actual, por ejemplo \bar{X} o S^2 , y el parámetro λ determina el nivel de memoria de Z_t . Cuando λ es pequeño ($\lambda \rightarrow 0$), Z_t guarda mayor memoria de la información pasada del proceso y el gráfico es más sensible para detectar pequeños cambios en la variable. Particularmente, con $\lambda = 1$ el gráfico EWMA es equivalente a un gráfico Shewhart para φ_t .

Al emplear de forma recursiva la ecuación 2.39, se tiene que:

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda\varphi_t + (1 - \lambda)\lambda\varphi_{t-1} + (1 - \lambda)^2\lambda\varphi_{t-2} + \dots + (1 - \lambda)^{t-1}\lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)^t Z_0 = \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \lambda(1 - \lambda)^i \varphi_{t-i} + (1 - \lambda)^t Z_0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En la ecuación 2.40 se puede notar que el estadístico Z_t contiene información de todas las muestras del proceso, con la particularidad de que el peso de la información pasada del proceso decrece en el tiempo. Adicionalmente, dado que la serie $T = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda(1 - \lambda)^i$ es una serie geométrica que converge al valor $1 - (1 - \lambda)^t$, se tiene que la suma de todos los coeficientes, incluido el último, es igual a 1. De lo anterior se deduce que Z_t es un promedio móvil exponencialmente ponderado de la secuencia de observaciones $\varphi_t, \varphi_{t-1}, \dots, \varphi_1, Z_0$.

Comúnmente, el estadístico EWMA es inicializado en el valor medio de φ con el proceso bajo control ($Z_0 = \mu_\varphi$). Con lo cual, mientras el proceso permanece bajo control, la media y la varianza de Z_t serán:

$$\mu_{Z_t} = \mu_\varphi, \quad \sigma_{Z_t}^2 = (1 - (1 - \lambda)^{2t}) \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \sigma_\varphi^2, \quad (2.41)$$

donde σ_φ^2 denota la varianza del estadístico φ en el estado bajo control del proceso. Conocidos μ_{Z_t} y $\sigma_{Z_t}^2$, los límites de control pueden ser ubicados en las posiciones:

$$\text{LCL} = \mu_{Z_t} - L\sigma_{Z_t}^2, \quad \text{UCL} = \mu_{Z_t} + L\sigma_{Z_t}^2. \quad (2.42)$$

Aquí, $L > 0$ es el factor de amplitud de los límites de control, que en conjunto con λ definen el diseño del gráfico de control EWMA y determinan su desempeño. En la

Figura 2.7 se presenta un ejemplo de un gráfico de control EWMA- \bar{X} .

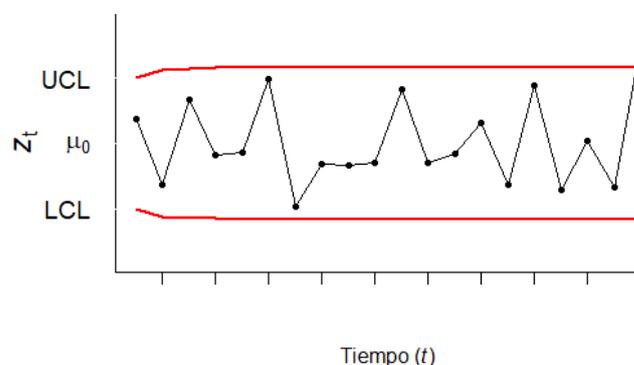


Figura 2.7. Ejemplo de gráfico de control EWMA- \bar{X} .

En el gráfico EWMA la probabilidad de alarma no es constante en el tiempo, ya que depende de Z_{t-1} , que representa la ubicación del estadístico de control en el instante anterior. Debido a ello, la evaluación de su desempeño estadístico suele realizarse utilizando el ARL como indicador, cuyo cálculo puede ser aproximado a través del *enfoque de cadenas de Márkov*.

En el enfoque de cadena de Márkov, la zona interna de los límites de control (LCL, UCL) se divide en m intervalos, cada uno de amplitud 2Δ , los cuales equivalen a los estados transitorios de la cadena. De acuerdo con esta división, el estadístico φ_t se encuentra en el estado transitorio $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, cuando $M_i - \Delta < \varphi_t < M_i + \Delta$, donde M_i representa el punto medio del i -ésimo intervalo. En este caso la probabilidad (p_{ij}) de ir del estado transitorio i al estado transitorio j puede ser aproximada por:

$$p_{ij} \approx \Pr \left[\frac{M_j - \Delta - (1 - \lambda)M_i}{\lambda} < \varphi_t < \frac{M_j + \Delta - (1 - \lambda)M_i}{\lambda} \right], \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (2.43)$$

En el caso especial en el que φ_t es una variable iid normal de media μ_φ y desviación σ_φ , p_{ij} se aproxima por:

$$p_{ij} \approx \Phi\left(\frac{M_j + \Delta - (1 - \lambda)M_i - \lambda\mu_\varphi}{\lambda\sigma_\varphi}\right) - \Phi\left(\frac{M_j - \Delta - (1 - \lambda)M_i - \lambda\mu_\varphi}{\lambda\sigma_\varphi}\right). \quad (2.44)$$

Siendo \mathbf{R} la matriz de probabilidades de transición entre estados transitorios, el ARL zero state y el ARL steady state se obtienen a través de las ecuaciones 2.45 a 2.47.

$$\text{ARL}^{\text{ZS}} = \boldsymbol{\pi}^0 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}, \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\boldsymbol{\pi}^0 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}}{\text{ARL}_0^{\text{ZS}}}, \quad (2.46)$$

$$\text{ARL}^{\text{SS}} = \boldsymbol{\pi} (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}. \quad (2.47)$$

Aquí $\boldsymbol{\pi}^0 = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0]$, con $\pi_{i^*}^0 = 1$ para el estado i^* que contiene el valor de inicio $Z_0 = \mu_\varphi$.

Según Lucas y Saccucci (1990) p. 10, cuando m es grande, el ARL del proceso estocástico discretizado converge al ARL del proceso continuo. Capizzi y Masarotto (2003) evaluaron la precisión de esta aproximación y sugieren emplear como mínimo 50 estados transitorios ($m \geq 50$). Atendiendo esta recomendación, muchos autores optan por definir $m = 100$ estados transitorios (Borrór et al., 1998; Epprecht, Simões y Mendes, 2010)

Finalmente, los valores de los parámetros de diseño (L, λ) se pueden determinar utilizando criterios de optimalidad. Por ejemplo, buscando la pareja (L, λ) que minimiza el ARL_1 asociado a un cambio de magnitud crítica en el proceso, sujeto a la restricción de cumplimiento de un ARL_0 deseado. Esta búsqueda puede realizarse, por ejemplo, sobre un conjunto bidimensional de valores $(0 < L < 4; 0 < \lambda < 1)$ suficientemente contiguos, seleccionando el subconjunto de configuraciones que satisfacen el ARL_0 deseado. Dentro de este subconjunto, la solución óptima corresponde a aquella que presenta el menor ARL_1 para el cambio crítico seleccionado. Debido a la dificultad del cálculo del ARL para el gráfico de control EWMA, la aplicación de esta alternativa requiere de la disponibilidad de grandes recursos computacionales.

Para facilitar la labor de diseño de gráficos EWMA, Crowder (1987a, 1989) y Lucas y Saccucci (1990) proporcionan tablas con valores de ARL para diferentes magnitudes de cambio en la media del proceso y combinaciones (L, λ) . Posteriormente Aparisi y García-Díaz (2004) adaptan un algoritmo genético para realizar la optimización de un

gráfico de control EWMA y presentan un software en el que se implementa la optimización.

Recientemente, Giner-Bosch et al. (2019) propusieron un algoritmo que encuentra los valores óptimos (L, λ) para un gráfico de control EWMA diseñado para controlar el coeficiente de variación multivariante. Este algoritmo se apoya en los métodos numéricos libres de derivadas para hallar la raíz L^* que, para un valor dado λ^* satisface el ARL_0 deseado. Posteriormente, el procedimiento anterior se repite bajo la variación del valor λ^* . Los valores λ^* evaluados son los indicados en un procedimiento de optimización no lineal – no restringida. Finalmente los valores L y λ corresponden al par que minimiza la función objetivo ARL_1 . Este procedimiento es general y puede emplearse para cualquier gráfico de control EWMA.

2.5. Optimización de gráficos de control

Muchos gráficos de control son susceptibles de ser optimizados, en el sentido de que, dada la abundancia de parámetros, es posible ubicar una configuración bajo la cual se consigue el mejor desempeño del gráfico. Este desempeño habitualmente es medido a través de su capacidad para detectar cambios en el proceso ($1 - \beta$ o ARL_1), o a través de la cantidad de recursos que se consumen con su implementación (tiempo, dinero, esfuerzo).

En el problema de optimización generalmente se incluyen algunas restricciones que pretenden garantizar que el gráfico cumplirá con ciertas condiciones de operación deseadas. Por ejemplo, suele incluirse una restricción sobre la tasa/frecuencia de falsas alarmas ($ARL_0 = ARL_0^*$), o sobre el tamaño muestra medio del esquema ($ASS_0 = n_0$). De manera genérica este problema de optimización puede ser planteado como:

VARIABLES DE DECISIÓN: *Parámetros de diseño del Gráfico.*

FUNCIÓN OBJETIVO: *max / min (F).*

SUJETO A: *Rango de variación de los parámetros de diseño,
Restricciones Adicionales.*

El método de solución para el anterior problema puede variar dependiendo de las propiedades y del nivel de complejidad computacional de la función objetivo F . Por ejemplo, dado que generalmente F está construida sobre un soporte de distribuciones de probabilidad, esta suele presentar una estructura no lineal. En algunos casos, los

más sencillos, F tiene una forma conocida, que cumple con condiciones de monotonía, regularidad y continuidad, la cual permite realizar la optimización apoyada en los métodos numéricos tradicionales *con* o *sin* uso de derivadas. Los métodos sin uso de derivadas (*derivative-free methods*) suelen ser empleados en aquellos casos en los que no se conoce la derivada de la función objetivo F , o en casos en los que su cálculo demanda un alto esfuerzo computacional.

Algunos casos presentan un nivel mayor de complejidad, debido a que la forma de la función F es altamente compleja, incluso desconocida, y esta resulta muy difícil de optimizar a través de los métodos tradicionales. En estos casos, la optimización del gráfico de control suele ser realizada bajo procedimientos heurísticos que, si bien no garantizan el hallazgo de la solución óptima, generalmente convergen a soluciones muy cercanas, o incluso a la óptima.

Durante las últimas décadas, los *algoritmos genéticos* (Genetic Algorithms, GA) se han convertido en la heurística de mayor uso para la optimización de gráficos de control (ver por ejemplo: Celano y Fichera, 1999; He, Grigoryan y Sigh, 2002; Aparisi y García-Díaz 2004, 2007; Chou, Wu y Chen, 2006; Chou, Cheng y Lai, 2008; Champ y Aparisi, 2008; Kaya, 2009; Torng, Lee, Liao y Liao, 2009; Aparisi y De Luna, 2009; Aparisi, Epprecht y Ruiz, 2012; Aparisi, García-Bustos y Epprecht, 2014; Faraz, Heuchenne y Saniga, 2012; Aparisi et al., 2018; Epprecht, Aparisi y García-Bustos, 2013; Campuzano et al., 2019). La popularidad de su aplicación se debe principalmente a su capacidad para resolver problemas de optimización de alta complejidad en un tiempo computacionalmente aceptable y con soluciones cercanamente óptimas.

2.5.1. Optimización basada en algoritmos genéticos

Los GA fueron inicialmente propuestos por Jhon Holland en la década de 1960. Según Valencia (1997):

“Estos algoritmos se inspiran en la mecánica de la selección natural y la genética para evolucionar una población inicial de puntos sucesivamente hacia mejores regiones del espacio de búsqueda. La evolución de la población se realiza mediante la aplicación de operadores genéticos probabilísticos de selección, recombinación y mutación. Los algoritmos genéticos requieren conocer solamente el valor de la función objetivo en la población de puntos y no sus derivadas. Esto último permite abordar una gran variedad de problemas de optimización no tratables mediante métodos basados en gradientes”.

Los GA parten de una población inicial soluciones factibles para el problema P_0 : $(\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0, \dots, \mathbf{x}_N^0)$, donde cada $\mathbf{x}_i^0 \ i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ es un vector con valores asociados a las variables de decisión. La población inicial P_0 puede ser generada aleatoriamente o inducida por el usuario.

Cada solución \mathbf{x}_i^0 se representa a través de codificación binaria, utilizando para cada variable de decisión una cadena de bits con valores 0's y 1's. La concatenación de estas cadenas conforma el cromosoma $(c\mathbf{x}_i)$ que representa la solución (\mathbf{x}_i) . En la Figura 2.8 se presenta un ejemplo codificación binaria de un cromosoma para un vector \mathbf{x}_i con 3 variables de decisión.

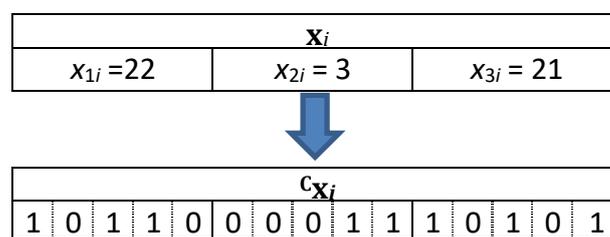


Figura 2.8. Ejemplo de codificación binaria.

La adecuación de cada solución \mathbf{x}_i es evaluada mediante la función $F(\mathbf{x}_i)$, que mide la adaptación (*Fitness*) de la solución al problema y permite ordenar las soluciones de menor a peor adaptación.

Cada cromosoma $c\mathbf{x}_i$ de la población inicial puede ser seleccionado para reproducirse y conformar la población de cromosomas descendiente. Los cromosomas que actúan como padres se seleccionan a través de mecanismos aleatorios que otorgan mayor oportunidad de selección a las soluciones con mejor *Fitness*. Los mecanismos de selección más utilizados son:

Selección por ruleta: Se conforma una ruleta con las soluciones. La fracción de ruleta que le corresponde a cada solución es proporcional al *Fitness*. Se hace girar la ruleta y se selecciona la solución en la cual se detiene.

Selección por torneo: Aleatoriamente se escoge un subconjunto de p soluciones y se selecciona la de mayor adecuación.

Los procedimientos de selección anteriores suelen mezclarse con estrategias de *selección elitista*, con el objetivo de garantizar que el mejor, o los mejores individuos de la población sobreviven en la evolución

Una vez se seleccionan las parejas de cromosomas padres, se aplica el operador cruce sobre una fracción de estas parejas aleatoriamente seleccionadas

(habitualmente 95% - 99%). Aquellos cromosomas seleccionados como padres y que no son elegidos para el cruce pasan directamente a la población descendiente. Por el contrario, entre las parejas que son elegidas para el cruce se intercambian fracciones de sus cromosomas. Algunos de los operadores de cruce más utilizados son:

Cruzamiento de 1 punto: Ambos cromosomas padres se cortan en un punto elegido aleatoriamente. Uno de los progenitores aporta la primera parte de su cromosoma para su primer descendiente y el otro progenitor aporta la segunda parte de su cromosoma. El segundo descendiente se genera con la unión de las partes restantes.

Cruzamiento de 2 puntos: Se generan aleatoriamente dos puntos de cruce. Un progenitor aporta dos secciones (inicial y final) de su cromosoma al primer descendiente, mientras el segundo progenitor aporta solo la sección media. El segundo descendiente se genera con la unión de las partes restantes.

Cruzamiento uniforme: cada gen se hereda de uno de los padres aleatoriamente seleccionado.

Luego de la operación cruce se dispone de una población descendiente P_1 . Sobre cada solución $x_{i,1}$ de la población descendiente se aplica un operador de mutación que consiste en alterar, con una muy pequeña probabilidad (habitualmente 1%-5%), la información contenida en cada gen de su cromosoma. Por ejemplo, en la codificación binaria la alteración consiste en invertir el valor que contiene el gen. Esta mutación le permite al GA explorar espacios diferentes de soluciones favoreciendo la diversidad.

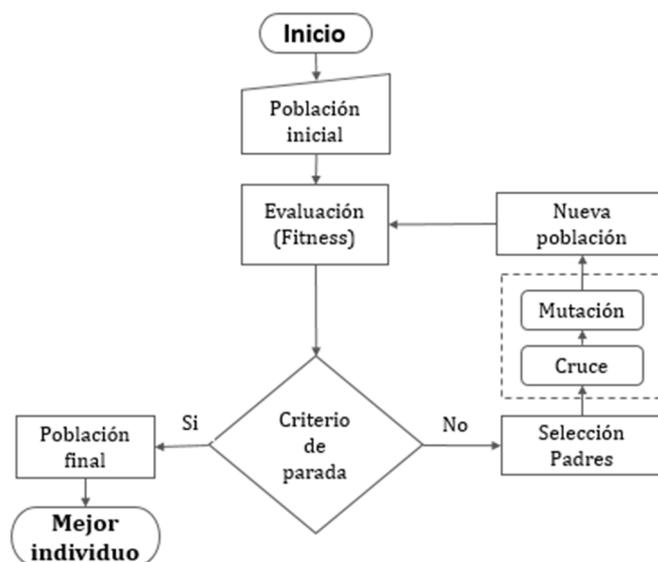


Figura 2.9. Diagrama de proceso de un algoritmo genético básico.

La población de descendientes P_1 es evaluada en su función de Fitness y el algoritmo se repite hasta completar el número suficiente de generaciones para alcanzar la convergencia. La Figura 2.9 representa gráficamente el esquema básico del algoritmo genético.

Uno de los elementos más importantes en el funcionamiento del GA consiste en la selección adecuada de la función Fitness. En el caso de optimización no restringida, la función Fitness coincidirá con la función objetivo del problema de optimización o con una transformación monótona de la misma. En el caso de optimización restringida, una forma de abordar el problema consiste en modificar la función Fitness involucrando pesos relativos a la función objetivo y a las desviaciones respecto a los niveles de restricción, lo cual es equivalente a penalizar la solución por el incumplimiento de restricciones.

Capítulo 3

Esquemas de control basados en la inspección por galgas. Revisión bibliográfica

Hasta este momento, en esta tesis se ha hecho énfasis en el uso de los gráficos de control por variables como la herramienta habitual para controlar una variable de calidad (X). Sin embargo, en ocasiones la medición exacta de la variable es altamente costosa o compleja, con lo cual la posibilidad de implementar cualquiera de estos gráficos es limitada. En este tipo de situaciones, el control puede realizarse apoyado en un procedimiento de inspección basado en clasificación por galgas.

Autores como Stevens (1948), Steiner et al. (1996), Steiner (1998), Wu et al. (2009), Aparisi, Epprecht et al. (2018) y Bezerra et al. (2018), han estudiado el problema de diseño de esquemas de control basados en la inspección por galgas 2-step para el control de la media y de la varianza de una variable cuantitativa. Dado que estas propuestas conforman el punto de partida de la presente tesis doctoral, en el presente capítulo se describen las características más importantes de cada una de estas propuestas.

3.1. Introducción

En la inspección con una galga 2-step, de dimensiones $S < L$, una muestra de n piezas es extraída del proceso y cada pieza se clasifica de acuerdo a la pertenencia de su medida a alguno de los 3 intervalos ($x < S$, $S < x < L$, $x > L$). Al terminar la inspección, se dispone de los conteos de piezas cuya medición se encuentra: por debajo de S (Y_S), por encima de L (Y_L) y comprendida entre S y L (Y_C), con $Y_S + Y_C + Y_L = n$.

Si el muestreo es aleatorio, los conteos Y_S, Y_C, Y_L tienen una distribución de probabilidad conjunta multinomial de parámetros (n, q_S, q_C, q_L) , definida como:

$$P(y_S, y_C, y_L) = \Pr(Y_C = y_S, Y_C = y_C, Y_L = y_L) = \frac{n!}{y_S! y_C! y_L!} q_S^{y_S} q_C^{y_C} q_L^{y_L}, \quad (3.1)$$

para $y_S, y_C, y_L \in \{0, 1, \dots, n\}, y_S + y_C + y_L \leq n$.

Aquí $q_S = P(X < S | \mu, \sigma)$ y $q_L = P(X > L | \mu, \sigma)$ representan la probabilidad de que una pieza sea clasificada en los intervalos extremos y $q_C = 1 - q_S - q_L$ es la probabilidad de clasificar la pieza en el intervalo central. Dado que para el conteo central se cumple exactamente que $Y_C = n - Y_S - Y_L$, este generalmente es omitido y la ecuación 3.1 puede reescribirse en términos de Y_S e Y_L :

$$P(y_S, y_L) = \Pr(Y_C = y_S, Y_L = y_L) = \frac{n! q_S^{y_S} q_L^{y_L} (1 - q_S - q_L)^{n - y_S - y_L}}{y_S! y_L! (n - y_S - y_L)!}, \quad (3.2)$$

para $y_S, y_C, y_L \in \{0, 1, \dots, n\}, y_S + y_L \leq n$.

Las probabilidades q_S y q_L ($q_S + q_L < 1$) dependen de las dimensiones de la galga (S, L) y de la distribución de probabilidad de X . La Figura 3.1 ilustra el cambio que se genera en q_S y q_L cuando la media y la varianza se incrementan de (μ_0, σ_0) a (μ_1, σ_1) para una variable con distribución simétrica.

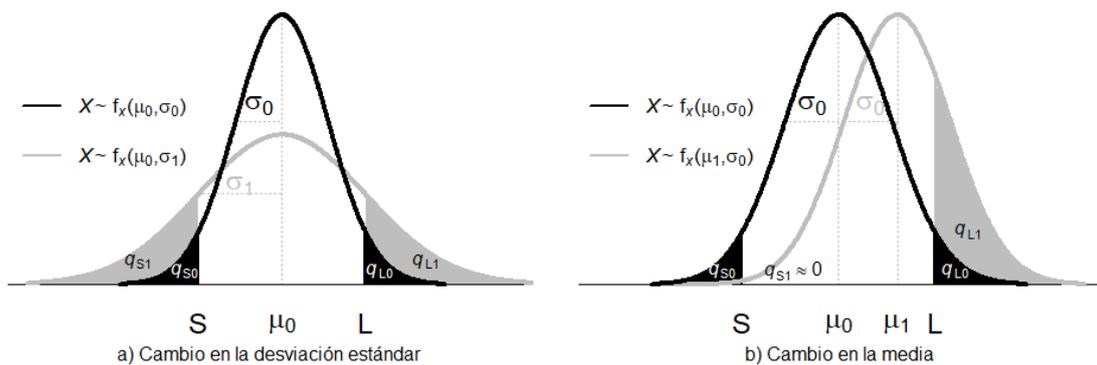


Figura 3.1. Efecto sobre las probabilidades q_S, q_L cuando suceden a) cambios en la desviación estándar y b) cambios en la media.

Nótese que cuando se incrementa la desviación estándar de X , ambas probabilidades (q_S, q_L) se incrementan. Mientras que con el desplazamiento de la media el incremento se genera solo en una de las probabilidades (q_L según el

ejemplo), al tiempo que la otra disminuye. Naturalmente, como consecuencia del cambio en q_S y q_L la frecuencia de los conteos Y_S , Y_L también se modificará. Justamente esta propiedad es la que permite que los conteos Y_S , Y_L puedan ser empleados para probar las hipótesis sobre los parámetros de la distribución de X .
 $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$ y $H_0: \sigma = \sigma_0$ vs $H_1: \sigma > \sigma_0$.

Para verificar estas hipótesis se requiere definir un estadístico de control que resuma la información de los conteos Y_S e Y_L , establecer los valores límites para la aceptación/rechazo de la hipótesis nula (los límites de control) y definir las dimensiones S y L para el diseño de la galga. A la labor de establecer este conjunto de parámetros la denominaremos el diseño del esquema de control basado en verificación por galgas.

3.2. Gráficos $Y_S + Y_L$ e $Y_S - Y_L$ (Stevens, 1948)

Stevens (1948) fue pionero al formalizar una propuesta de esquema basada en inspección por galgas para realizar el control de una variable cuantitativa de calidad. En esta propuesta, orientada al control de la media y la desviación de una variable X con distribución normal, sugiere el diseño de una galga 2-step con dimensiones equidistantes a la media del proceso bajo control, $S = \mu_0 - k\sigma_0$ y $L = \mu_0 + k\sigma_0$. Donde $k > 0$ es un factor estandarizado que define la amplitud de las dimensiones de la galga.

Para definir el valor de k sugiere maximizar la información esperada de Fisher contenida en una observación simple. Este criterio es equivalente a maximizar la cantidad de información disponible en los conteos Y_S , Y_L para realizar un estimación del parámetro de la variable en el estado bajo control (μ_0 o σ_0). Esta sugerencia la realiza considerando la fuerte relación que existe entre los procedimientos de estimación de parámetros y de test de hipótesis. Al realizar estos cálculos, para una variable X de distribución normal, obtiene los valores $k = 0.6120$ cuando el objetivo es controlar la media, $k = 1.4825$ para controlar la varianza y $k = 1.1264$ para controlar simultáneamente ambos parámetros.

Con una galga 2-step de dimensiones simétricas, bajo la condición de simetría de la distribución de X , se cumple que cuando el proceso permanece bajo control la probabilidad de clasificar una pieza en el primer o en el tercer intervalo es la misma ($q_{S0} = q_{L0}$). En este caso, si definimos $q_0 = q_{S0} + q_{L0}$ como la probabilidad de clasificar una pieza por fuera del intervalo central, cuando el proceso está bajo control, entonces se tiene que $q_{S0} = q_{L0} = q_0/2$.

Adicionalmente, si definimos q_{S1} y q_{L1} como las probabilidades de clasificar una pieza en el primer y tercer intervalo, cuando el proceso está fuera de control, sucede que si el estado fuera de control es generado por un cambio en la varianza ($\sigma_1 = r\sigma_0$), las probabilidades q_{S1} y q_{L1} se modifican en la misma magnitud, permaneciendo iguales ($q_{S1} = q_{L1} = q_1/2$). Por el contrario, si el estado fuera de control es generado por un desplazamiento de la media ($\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$), las probabilidades q_{S1} y q_{L1} presentarán un desequilibrio ($|q_{S1} - q_{L1}| > 0$).

Basado en el anterior concepto, Stevens propuso emplear la suma $Y_S + Y_L$ para el control de la varianza y la diferencia $Y_S - Y_L$ para controlar la media. Estos gráficos pueden ser diseñados con uno o dos límites de control, dependiendo de la hipótesis alterna planteada en el test.

Para fijar la ubicación de los límites de control, se tiene en cuenta que la suma ($Y_S + Y_L$) tiene una distribución binomial de parámetros $(n, q_S + q_L)$ y que la distribución de la diferencia ($Y_S - Y_L$) puede ser hallada por enumeración del espacio muestral de los conteos Y_S, Y_L , o aproximarse a través de una distribución normal de media $n(q_S - q_L)$ y varianza $n(q_S + q_L - (q_S - q_L)^2)$ cuando el tamaño de la muestra es grande. Conocida la distribución del estadístico de control, los límites de control (LCL y UCL) pueden ser ubicados en las posiciones que garantizan una probabilidad de falsa alarma deseada (α^*).

El diseño de estos esquemas presenta una limitación, relacionada con la frecuente imposibilidad de hallar un diseño que satisfaga exactamente la probabilidad de falsa alarma deseada (α^*). Esto debido a que al fijar n y k , dado que $Y_S + Y_L$ y $Y_S - Y_L$ son variables aleatorias discretas, existen valores limitados para α y es poco probable que alguno coincida con $\alpha = \alpha^*$. Por lo general, el usuario debe ubicar los límites de control en las posiciones más próximas que cumplen que $\alpha < \alpha^*$. Esto implica que generalmente la probabilidad de falsa alarma será inferior a la deseada, lo cual no es un problema en sí mismo, pero es un inconveniente de diseño si se tiene en cuenta que este beneficio en la frecuencia de falsas alarmas se obtiene como sacrificio de la potencia del gráfico para detectar un cambio.

3.3. Gráfico tipo Shewhart para datos agrupados (Steiner et al., 1996)

Steiner et al. (1996) considero el uso de una galga g -step para la clasificación de las piezas en $g+1$ grupos y planteo el problema de control de la media y la varianza como un test de hipótesis compuesto:

$$H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{1+} \text{ o } \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{1-}. \quad (3.3)$$

Aquí $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)$ es el vector de parámetros a controlar, $\boldsymbol{\theta}_0 = (\mu_0, \sigma_0)$ un vector que contiene el valor de los parámetros cuando el proceso está bajo control y $\boldsymbol{\theta}_{1+} = (\mu_{1+}, \sigma_{1+})$, $\boldsymbol{\theta}_{1-} = (\mu_{1-}, \sigma_{1-})$ el vector con valores que representan cambios significativos de (μ, σ) en las direcciones de incremento y decremento respectivamente.

Utilizando el criterio de máxima verosimilitud compuesta deducen la siguiente regla decisión para aceptar H_0 :

$$\max \left(\sum_{i=1}^n \frac{z_i^+}{n}, \sum_{i=1}^n \frac{z_i^-}{n} \right) < \text{UCL}. \quad (3.4)$$

Aquí z_i^+ y z_i^- son una pareja de pesos que se asignan a cada observación que es clasificada en el grupo $j \in \{1, 2, 3, \dots, g+1\}$ y UCL es un límite de control superior. Para una galga 2-step los pesos z_i^+ y z_i^- se calculan como se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Pesos z_i^+ y z_i^- para una galga 2-step. (Steiner et al., 1996).

Peso	Intervalo		
	$j=1$ $x_i < S$	$j=2$ $S < x_i < L$	$j=3$ $x_i > L$
z_i^+	$\ln \left(\frac{q_{S1+}}{q_{S0}} \right)$	$\ln \left(\frac{1 - q_{S1+} - q_{L1+}}{1 - q_{S0} - q_{L0}} \right)$	$\ln \left(\frac{q_{L1+}}{q_{L0}} \right)$
z_i^-	$\ln \left(\frac{q_{S1-}}{q_{S0}} \right)$	$\ln \left(\frac{1 - q_{S1-} - q_{L1-}}{1 - q_{S0} - q_{L0}} \right)$	$\ln \left(\frac{q_{L1-}}{q_{L0}} \right)$

Las parejas (q_{S0}, q_{L0}) , (q_{S1+}, q_{L1+}) y (q_{S1-}, q_{L1-}) son las probabilidades de clasificar una observación en el primer y tercer intervalo cuando el vector de parámetros es $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}_{1+}$ y $\boldsymbol{\theta}_{1-}$ respectivamente. Esto es:

$$\begin{aligned} q_{S0} &= \Pr(X < S | \mu_0, \sigma_0), & q_{L0} &= \Pr(X > L | \mu_0, \sigma_0), \\ q_{S1+} &= \Pr(X < S | \mu_{1+}, \sigma_{1+}), & q_{L1+} &= \Pr(X > L | \mu_{1+}, \sigma_{1+}), \\ q_{S1-} &= \Pr(X < S | \mu_{1-}, \sigma_{1-}) \quad \text{y} \quad q_{L1-} &= \Pr(X > L | \mu_{1-}, \sigma_{1-}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Atendiendo la sugerencia de Stevens (1948), la galga 2-step es diseñada con dimensiones equidistantes a μ_0 ($S = \mu_0 - k\sigma_0$, $L = \mu_0 + k\sigma_0$), con valores de $k = 0.6120$

para el control de la media y $k = 1.4825$ para el control de las varianzas. Estos valores son los mismos hallados por Stevens. Sin embargo, para el control simultáneo de ambos parámetros, sugieren emplear $k = 0.8487$, valor que difiere del $k = 1.1264$ propuesto por Stevens.

Para seleccionar el límite de control se emplea el criterio de probabilidad de falsa alarma deseada. Nuevamente en este caso, dado que los pesos z_i^+ y z_i^- también son variables aleatorias discretas, permanece la dificultad para hallar una ubicación para UCL que satisfaga exactamente el objetivo $\alpha = \alpha^*$.

3.4. Gráfico EWMA para datos agrupados (Steiner, 1998)

Steiner (1998) propone controlar la media de una variable X con distribución normal, a través de un estadístico EWMA, definido como:

$$Y_t = \lambda\varphi + (1 - \lambda)Y_{t-1}, \quad \lambda \in (0,1], \quad (3.6)$$

donde $\varphi = \max\left(\sum_{i=1}^n \frac{z_i^+}{n}; \sum_{i=1}^n \frac{z_i^-}{n}\right)$ y (z_i^+, z_i^-) son los pesos que se asignan a cada observación de la muestra de acuerdo al intervalo en el cual es clasificado por la galga. Los valores de z_i^+, z_i^- fueron presentados en la Tabla 3.1.

El gráfico EWMA de datos agrupados es diseñado con dos límites de control ubicados en las posiciones $\mu_\varphi \pm L\sigma_\varphi\sqrt{\lambda/(2-\lambda)}$. El desempeño de este gráfico es evaluado a través del ARL, utilizando para su cálculo el enfoque de cadenas de Márkov descrito en la sección 2.3.4.

Para definir el diseño del gráfico, Steiner sugiere fijar a priori el tamaño de muestra (n), un valor ARL_0 deseado (ARL_0^*) y una magnitud de cambio crítico (δ^*) para la media del proceso. Con los valores (n, ARL_0^*, δ^*) como entrada, se ubican los parámetros óptimos (L, λ) en las tablas proporcionadas por Lucas y Saccucci (1990). Dado que estos valores (L, λ) fueron obtenidos para optimizar el diseño de un gráfico EWMA- \bar{X} , es altamente probable que no se cumpla exactamente la condición $ARL_0 = ARL_0^*$ cuando se usan estos valores para el diseño del gráfico EWMA de datos agrupados. En este caso, Steiner sugiere mantener fijo λ y ajustar L hasta que lograr que $ARL_0 > ARL_0^*$.

Como se puede deducir, en este diseño no existe garantía de que los parámetros (L, λ) , sugeridos por Lucas y Saccucci (1990), sean igualmente óptimos para el gráfico EWMA de datos agrupados. Adicionalmente, debido a que la distribución de φ es discreta, la diferencia entre el ARL_0 obtenido y el deseado puede ser muy notoria, especialmente cuando el tamaño de muestra es muy pequeño.

3.5. Gráfico np_x (Wu et al., 2009)

Wu et al. (2009) adaptaron un gráfico np para el control de la media de una variable X con distribución normal. En este gráfico, al que denominaron np_x , el control se realiza vigilando el conteo total de piezas que son clasificadas en los intervalos extremos de una galga 2-step de dimensiones simétricas ($S = \mu_0 - k\sigma_0$, $L = \mu_0 + k\sigma_0$). Este estadístico de control coincide con la suma $Y_S + Y_L$, que fue propuesta previamente por Stevens (1948) para el control de la varianza.

El gráfico np_x tiene 4 parámetros: El tamaño de la muestra (n), el intervalo de muestreo (h), el límite de control superior (UCL) y el factor de amplitud (k) de dimensiones de la galga. Este gráfico solo requiere de un límite de control superior (UCL) para detectar cambios bidireccionales en la media (incrementos o decrementos).

Para definir el diseño del gráfico np_x , Wu et al. (2009) asumen que el tamaño y frecuencia de muestreo (n, h) son especificados a priori y proponen optimizar los parámetros (UCL, k) para el objetivo de minimizar el EQL (Extra Quadratic Loss) sujeto a la restricción $ATS_0 = \tau$.

La medida EQL (Reynolds y Stoumbos, 2004) supone que cuando hay un cambio en la media de magnitud relativa δ , la pérdida de calidad es proporcional a $\delta^2 ATS$. Bajo este supuesto, EQL es un indicador del valor esperado de la pérdida para una magnitud de cambio δ , a la cual se le asigna una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $(\delta_{\min}, \delta_{\max})$. Matemáticamente, EQL se define como:

$$EQL = \frac{1}{\delta_{\max} - \delta_{\min}} \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} (\delta^2 ATS) d\delta. \quad (3.7)$$

En consecuencia, minimizar EQL es equivalente a reducir la pérdida de calidad que se genera en los estados fuera de control del proceso. Nótese que con la

frecuencia de muestreo (h) constante, la restricción $ATS_0 = \tau$ es equivalente a $ARL_0 = \tau/h$ o simplemente $\alpha = h/\tau$.

Dado que $Y_S + Y_L$ tiene distribución de probabilidad binomial (n, q), con $q = 1 - [\Phi(k - \delta) - \Phi(-k - \delta)]$, la probabilidad de alarma corresponde a:

$$PA_{np_x} = \Pr(Y_S + Y_L \geq UCL|\delta) = 1 - \sum_{j=0}^{UCL-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j}. \quad (3.8)$$

Con la ecuación 3.8 evaluada en $\delta = 0$ se obtiene la probabilidad de falsa alarma:

$$\alpha_{np_x} = 1 - \sum_{j=0}^{UCL-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} q_0^j (1-q_0)^{n-j}, \quad q_0 = 2\Phi^{-1}(k). \quad (3.9)$$

Como se puede notar, α_{np_x} solo depende de (UCL, q_0) y q_0 es una función decreciente de k . En consecuencia, α_{np_x} es una función creciente de k , por lo tanto a cada valor de $UCL \in \{1, 2, \dots, n\}$ le corresponde un único valor de k que satisface la restricción $\alpha = h/\tau$. Este valor se halla a través de un método numérico.

Apoyados en el concepto anterior, si se fijan a priori valores para (n, h, τ), el diseño óptimo se encuentra al evaluar EQL para todas las parejas (UCL, k) que satisfacen $\alpha = h/\tau$ y seleccionar aquella solución con menor EQL. En este caso, dado que k pertenece a un espacio continuo, se consigue siempre un diseño de gráfico que cumple exactamente con la probabilidad de falsa alarma deseada.

3.6. Gráficos Y_T e $Y_S Y_L$ (Aparisi et al., 2018)

Aparisi et al. (2018) proponen dos esquemas basados en inspección por galgas para controlar la media y la varianza de una variable X con distribución normal. Estos esquemas reciben el nombre de Y_T e $Y_S Y_L$. A pesar de que ambos esquemas tienen sensibilidad para detectar cambios en la media y la variabilidad de X , el esquema Y_T es sugerido para el control de la varianza y el esquema $Y_S Y_L$ es sugerido para el control de la media y para el control simultáneo de media y la varianza.

Ambos esquemas se apoyan en el diseño de una galga 2-step de dimensiones simétricas. En el esquema Y_T se hace seguimiento al conteo total de observaciones que se clasifican por fuera del intervalo central y la alarma se genera cuando un

punto supera o iguala el límite de control superior (UCL). En el esquema $Y_S Y_L$ se emplean dos gráficos de control, uno para el conteo de piezas clasificadas en el primer intervalo (Y_S) y otro para el conteo de piezas clasificadas en el tercer intervalo (Y_L). En este último esquema la alarma se genera cuando en alguno de los dos gráficos un punto supera o iguala el límite de control superior común (UCL). La Figura 3.2 presenta un ejemplo de la operación de los esquemas Y_T e $Y_S Y_L$.

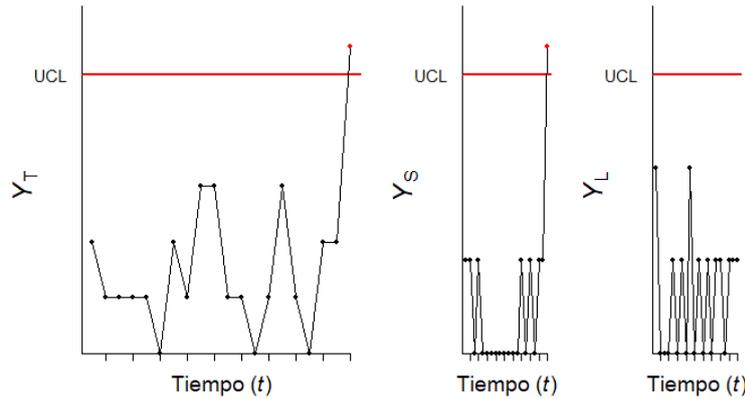


Figura 3.2. Ejemplo de los gráficos de control Y_T e $Y_S Y_L$.

En estos esquemas la probabilidad de alarma se obtiene como:

$$PA_{Y_T} = \Pr(Y_T \geq UCL | \delta, r) = 1 - \sum_{j=0}^{UCL-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} PA_{Y_S Y_L} &= 1 - \Pr(Y_S < UCL \cap Y_L < UCL | \delta, r) = \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{UCL-1} \sum_{i=0}^{\min(UCL, n-j)-1} \frac{n!}{j! i! (n-i-j)!} q_S^j q_L^i (1-q)^{n-i-j}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Donde $q_S = \Phi\left(\frac{-k-\delta}{r}\right)$, $q_L = 1 - \Phi\left(\frac{k-\delta}{r}\right)$ y $q = q_S + q_L$.

En ambos casos, los puntos que se dibujan sobre los gráficos son variables aleatorias iid, por lo cual $ARL = 1/PA$.

En el diseño de los esquemas Y_T e $Y_S Y_L$ se asume que el tamaño de muestra ha sido definido a priori y para definir los parámetros UCL y k se plantea un diseño óptimo. Este diseño está orientado encontrar la combinación (UCL, k) que minimiza el ARL_1 asociado un cambio de magnitud crítica (δ^* , r^*) sujeto a la restricción $ARL_0 = ARL_0^*$. En este procedimiento los valores (n , ARL_0^* , δ^* , r^*) son entradas que deben ser definidas por el usuario.

Para hallar los valores óptimos de UCL y k , Aparisi et al. (2018) adaptan un algoritmo genético (ver sección 2.5.1) para maximizar una función Fitnees (F) que penaliza aquellas soluciones con altos ARL_1 y ARL_0 inferiores a ARL_0^* :

$$F = 10000 - [w_1(ARL_0 - ARL_0^*) + w_2(ARL_1)]. \quad (3.12)$$

El valor 10000 se establece para obtener valores positivos de F y los pesos $w_1 = 1$ y $w_2 = 5$ se definen para equilibrar la escala de las dos condiciones de penalización.

Aparisi et al. (2018) incluyen en su trabajo una comparación del desempeño de los esquemas Y_T , $Y_S Y_L$ y la propuesta de gráfico de control de Steiner et al. (1996), basada en asignación de pesos. Los resultados muestran que el gráfico Y_T con dimensiones óptimas para la galga fue siempre la mejor opción para detectar cambios en la varianza del proceso. Para detectar cambios en la media la mejor opción se encuentra entre el esquema $Y_S Y_L$ y el gráfico de control de Steiner et al. (1996), dependiendo del tamaño de muestra empleado. Cuando el tamaño de la muestra es pequeño ($n \leq 7$) el esquema $Y_S Y_L$ presenta un mejor desempeño, mientras que para tamaños de muestra grandes ($n \geq 10$) el gráfico de Steiner et al. (1996) detecta los cambios con menor tiempo medio. Finalmente, en cambios simultáneos de la media y la varianza el mejor desempeño lo obtiene siempre uno de los dos esquemas, $Y_S Y_L$ o Y_T . El esquema $Y_S Y_L$ tiene el mejor desempeño cuando el cambio en la media es igual o más notable que el cambio en la varianza. Por el contrario, si el cambio en la varianza es más notable que el cambio en la media el esquema Y_T es el de mejor desempeño.

Los factores de amplitud (k) óptimos hallados por Aparisi et al. (2018) varían dependiendo del tamaño de muestra (n), de la probabilidad de falsa alarma deseada (α^*) y del esquema de control empleado, Y_T o $Y_S Y_L$. En todos los casos, el factor de amplitud k difiere de aquellos valores propuestos por Stevens (1948) y por Steiner et al. (1996).

3.7. Gráfico G_{S2} (Bezerra et al., 2018)

El gráfico G_{S2} fue propuesto por Bezerra et al. (2018) para identificar incrementos en la varianza de una variable X de distribución normal. El estadístico de control que se emplea en este gráfico se define como:

$$G_{S^2} = (2 - a)(k_S - t)^2 \Phi(k_S) Y_S + t[\Phi(k_L) - \Phi(k_S)] Y_C + a(k_L - t)^2 [1 - \Phi(k_L)] Y_L. \quad (3.13)$$

Aquí $k_S = (S - \mu_0)/\sigma_0$ y $k_L = (L - \mu_0)/\sigma_0$ son los factores de amplitud para las dimensiones de una galga 2-step, y $1 < a < 2$, $0 < t < 1$ son constantes que deben definirse en el diseño del gráfico. Nótese que en esta propuesta el diseño de la galga 2-step no se restringe a un diseño simétrico.

Por comodidad, para simplificar la presentación de las fórmulas matemáticas, definiremos los pesos $w_S = (2 - a)(k_S - t)^2 \Phi(k_S)$, $w_C = t[\Phi(k_L) - \Phi(k_S)]$ y $w_L = a(k_L - t)^2 [1 - \Phi(k_L)]$, con lo cual se puede notar que $G_{S^2} = w_S Y_S + w_C Y_C + w_L Y_L$ es una combinación lineal de los conteos Y_S , Y_C e Y_L .

Para un conjunto de valores fijos de (n, a, t, k_S, k_L) , el estadístico G_{S^2} varía en el rango $[nw_{\min}, nw_{\max}]$, donde $w_{\min} = \min(w_S, w_C, w_L)$ y $w_{\max} = \max(w_S, w_C, w_L)$. Por lo cual el límite de control superior (UCL) se debe seleccionar en el rango $[nw_{\min}, nw_{\max}]$ y el gráfico señala una alarma de cambio cuando $G_{S^2} > \text{UCL}$.

Dado que G_{S^2} es función de los conteos (Y_S, Y_C, Y_L) , este estadístico tiene un espacio muestral (Ω) finito, que se obtiene al generar todas las permutaciones de (Y_S, Y_C, Y_L) y calcular el estadístico G_{S^2} para cada permutación. En este caso, si definimos P_i como la probabilidad asociada a la i -ésima permutación $(y_S, y_C, y_L)_i$ de (Y_S, Y_C, Y_L) , y sea $g_{S^2} = w_S y_S + w_C y_C + w_L y_L$, entonces la probabilidad de alarma del gráfico G_{S^2} se obtiene como:

$$PA_{G_{S^2}} = \Pr(G_{S^2} > \text{UCL} | r) = \sum_{i=1}^{N_\Omega} P_i I_{\{g_{S^2} > \text{UCL}\}}((y_S, y_C, y_L)_i), \quad (3.14)$$

$$\text{con } P_i = P(y_S, y_C, y_L | r) = \frac{n!}{y_S! y_C! y_L!} q_S^{y_S} q_C^{y_C} q_L^{y_L}, \quad y_S + y_C + y_L = n, \quad (3.15)$$

$$q_S = \Phi\left(\frac{-k_S}{r}\right), \quad q_L = 1 - \Phi\left(\frac{k_L}{r}\right) \text{ y } q_C = 1 - q_S - q_L. \quad (3.16)$$

Aquí $N_\Omega = \binom{n+2}{2}$ es el tamaño de Ω e $I_A(\cdot)$ es una función indicadora que toma valor 1 cuando la condición A se cumple y 0 en otro caso.

Para determinar el diseño del gráfico G_{S^2} se fijan valores para: el tamaño de muestra (n) , el ARL_0 deseado (ARL_0^*) y una magnitud de incremento crítico ($r^* > 1$)

en la desviación estándar. Las amplitudes de las dimensiones de las galgas (k_s , k_L), las constantes (a , t) y el límite de control (UCL), se exploran con un algoritmo genético diseñado para minimizar el ARL_1 asociado al cambio crítico, bajo la restricción $ARL_0 = ARL_0^*$.

Bezerra et al. (2018) realizan la optimización anterior para dos casos: caso 1, en el cual se define un diseño simétrico de la galga ($k = k_s = -k_L$) y se fija $t = 0$, optimizando solo 3 parámetros (k , a , UCL); caso 2, en el cual se optimizan todos los parámetros (k_s , k_L , t , a , UCL). Los resultados obtenidos en ambos casos fueron siempre muy similares, lo cual favorece la idea de uso de dimensiones simétricas para la galga 2-step. Particularmente, en el caso 1 el valor de a siempre fue muy cercano a 1 y en ninguna de las optimizaciones realizadas el valor de k estuvo cercano al $k = 1.48$ sugerido por Stevens (1948) y Steiner et al. (1996) para el control de la varianza.

3.8. Conclusiones

En este capítulo se presentó una detallada revisión bibliográfica sobre los esquemas de control de variables basados en la inspección por galgas. Tal como se mostró, algunas de estas propuestas (Stevens, 1948; Steiner et al., 1996) presentan limitaciones de diseño que con frecuencia impiden al usuario obtener un esquema que satisfaga la tasa de falsas alarmas deseada. Las propuestas más recientes (Wu et al., 2009; Aparisi et al., 2018; Bezerra et al., 2018) superan esta dificultad de diseño al considerar la optimización conjunta de las dimensiones de las galgas y de los parámetros del gráfico de control

En la revisión se evidenció que en el conjunto de alternativas disponibles para el control de variables basado en inspección por galgas, no existe una propuesta con el mejor desempeño global. Por el contrario, cada propuesta presenta fortalezas para detectar ciertos tipos de cambio en el proceso. En este sentido, si el usuario desea seleccionar el mejor esquema para el control de su proceso, tendrá que realizar la labor de evaluar cada una de las propuestas y, de acuerdo a sus necesidades particulares, seleccionar entre ellas la de mejor desempeño.

Capítulo 4

Un esquema global para el control de variables basado en inspección por galgas ($wY_S Y_L$)

En este capítulo desarrollamos la propuesta de un nuevo esquema de control basado en la inspección por galgas. Este esquema, denominado el esquema $wY_S Y_L$, presenta un estadístico de control que contiene un nuevo parámetro, el peso w , cuya selección permite adaptar el esquema para obtener el mejor desempeño en la detección de un determinado tipo de cambio. El esquema $wY_S Y_L$ es una versión global del trabajo titulado:

- Aparisi F., Epprecht E., Mosquera J. (2018). Statistical process control based on optimum gages. *Quality and Reliability Engineering International*. 34 (1):2-14. DOI: 10.1002/qre.2135.

El estadístico del esquema $wY_S Y_L$ es en realidad una familia de estadísticos de control (conformada por todas las variaciones del peso w), a la cual pertenecen los estadísticos de control de todas las propuestas previas. Esto garantiza que cuando el esquema $wY_S Y_L$ es optimizado, se encuentra una configuración con igual o mejor desempeño que el de cualquiera de las propuestas previas.

El esquema $wY_S Y_L$ es inicialmente propuesto para el control de la media y la desviación de una variable X que, en el estado bajo control, sigue una distribución normal de parámetros conocidos (μ_0, σ_0) . La extensión del uso de este esquema para el control de variables con distribución de probabilidad asimétrica se desarrolla en el capítulo 5.

Los resultados que se presentan en este capítulo fueron incluidos en la publicación:

Mosquera J, Aparisi F y Epprecht E. (2018), A global scheme for controlling the mean and standard deviation of a process based on the optimal design of gauges. *Quality and Reliability Engineering International*. 34(5): 718-730.

Estos resultados también fueron divulgados en ponencia realizada en el *XXVII Simposio Internacional de Estadística*, realizado en la ciudad de Medellín – Colombia, agosto - 2017.

Mosquera J, Aparisi F. Un esquema para el control de la media y de la desviación estándar del proceso basado en el diseño óptimo de instrumentos gauge e inspección por atributos.

4.1. El esquema $wY_S Y_L$

Para controlar una variable $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ se toma una muestra aleatoria de n unidades del proceso y se verifican con una galga 2-step de dimensiones simétricas $S = \mu_0 - k\sigma_0$ y $L = \mu_0 + k\sigma_0$. Al finalizar la verificación se registran los conteos Y_S, Y_L y el proceso es diagnosticado bajo control cuando se cumple que:

$$\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) < UCL, \quad w \in (-n, 1]. \quad (4.1)$$

Por el contrario, si la condición no se cumple, el proceso es diagnosticado fuera de control.

Nótese que la regla de decisión (4.1) verifica simultáneamente que $wY_S + Y_L < UCL$ y $Y_S + wY_L < UCL$. Esto es equivalente a llevar dos gráficos de control, uno para el estadístico $wY_S + Y_L$ y otro para el estadístico $Y_S + wY_L$, con un límite de control común UCL. Con el resumen a través del máximo se facilita la representación gráfica, permitiendo llevar un solo un gráfico de control, sin pérdida alguna de eficiencia.

A través de la definición del peso w , el esquema $wY_S Y_L$ puede adaptar el estadístico de control para obtener su mejor desempeño en la detección de un cierto tipo de cambio en el proceso (Cambios solo en la media, solo en la varianza o cambios simultáneos en ambos parámetros). Fácilmente es posible verificar que con ciertos valores de w el estadístico $wY_S Y_L$ es equivalente a los estadísticos planteados por Stevens (1948), Wu et al. (2009) y Aparisi et al. (2018).

Por ejemplo, con $w = 1$, la regla de decisión (4.1) es equivalente a controlar la suma de los conteos $Y_S + Y_L$, lo cual coincide con las propuestas de Stevens (1948) y de Aparisi et al. (2018) para el control de la varianza. Este estadístico también lo emplea el gráfico np_x de Wu et al. (2009), quienes lo propusieron para realizar el control de la media. Sin embargo, en las evaluaciones posteriores realizadas por Aparisi et al. (2018), se evidencia que esta configuración es más efectiva para detectar cambios en la varianza que cambios en la media.

Con $w = 0$, al aplicar la ecuación 4.1 se lleva un control sobre el $\max(Y_S, Y_L)$. Lo anterior es equivalente a utilizar dos gráficos de control, uno para Y_S y otro para Y_L , con un límite control común (UCL). Bajo esta configuración el esquema $wY_S Y_L$ coincide con el esquema $Y_S Y_L$ propuesto por Aparisi et al. (2018), de buen desempeño para la detección de cambios en la media y la detección de cambios simultáneos en media y variabilidad.

Cuando $w = -1$ el estadístico que se vigila es $\max(Y_S - Y_L, Y_L - Y_S)$. En este caso dos gráficos alternativos pueden ser empleados: Un gráfico para el valor absoluto de la diferencia de conteos $|Y_S - Y_L|$, con un solo límite de control superior (UCL); Un gráfico para la diferencia $Y_S - Y_L$ con dos límites de control simétricos (LCL=-UCL). Bajo esta configuración el esquema $wY_S Y_L$ recoge la idea expuesta por Stevens (1948) para el control de cambios en la media.

Además de las equivalencias anteriores, con un poco más de labor algebraica, es posible identificar las condiciones particulares bajo las cuales la regla de decisión (4.1) coincide con los estadísticos de control propuestos en el esquema de asignación de pesos de Steiner et al. (1996) y con el gráfico G_{s2} de Bezerra et al. (2018). Estas equivalencias son demostradas en los Anexos A y B.

El aspecto visual del esquema $wY_S Y_L$ también es flexible y puede variar dependiendo de la elección de w . Para ilustrarlo hemos simulado el uso de una galga 2-step de dimensiones $S = 9.06$ y $L = 10.94$ para el control de un conjunto de 20 muestras de tamaño $n = 10$ de una variable aleatoria $X \sim N(\mu_0 = 10, \sigma_0 = 1)$. La Figura 4.1 muestra la forma sugerida para el gráfico $wY_S Y_L$ para 4 valores diferentes de w .

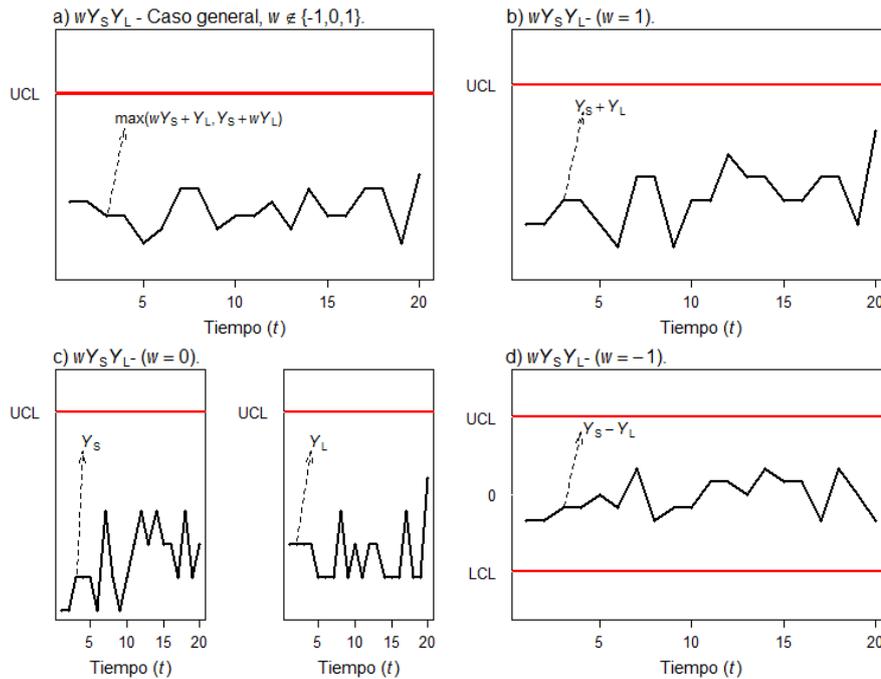


Figura 4.1. Ejemplos del gráfico de control $wY_S Y_L$. a) Caso general, $w \notin \{1, 0, -1\}$, b) $w = 1$, c) $w = 0$ y d) $w = -1$.

El desempeño del esquema $wY_S Y_L$ queda predeterminado cuando se definen los valores para los parámetros (n, w, UCL, k) . En la sección 4.1.1 se deducen las formulas estadísticas para evaluar este desempeño y en la sección 4.2 se plantea y desarrolla el problema de diseño optimo del esquema $wY_S Y_L$.

4.1.1. Cálculo de PA y ARL para el esquema $wY_S Y_L$

Para un tamaño de muestra fijo, definiremos Ω como el espacio muestral de los conteos Y_S, Y_L y a Ω_0 como el subconjunto de los elementos de Ω que satisfacen la regla de decisión (4.1). Dado que la regla de decisión (4.1) se satisface cuando simultáneamente se cumple que $Y_L < UCL - wY_S$ y $Y_L < \frac{UCL}{w} - \frac{1}{w}Y_S$, se deduce que Ω_0 está conformado por las duplas (y_S, y_L) que se encuentran en la zona delimitada por un par de líneas rectas con interceptos $(UCL, \frac{UCL}{w})$ y pendientes $(-w, \frac{-1}{w})$. Una representación gráfica de los conjuntos Ω_0 y Ω_1 (el complemento de Ω_0) se muestran en la Figura 4.2, para los casos con a) $w = -1$, b) $w = 0$, c) $w = 1$, d) $w > 1$ y e) $w = -n$, $UCL \approx 0$. Los casos d) y e) son incluidos para ilustrar la razón por la que el rango de variación de w se acota en el intervalo $[-n, 1]$.

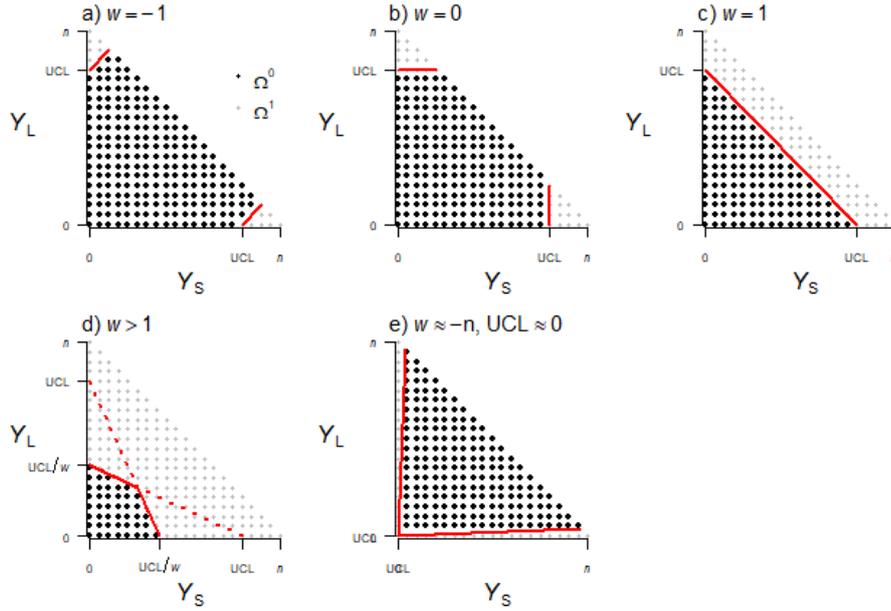


Figura 4.2. Representación de los conjuntos Ω^0 y Ω^1 en el gráfico $wY_S Y_L$.

En la Figura 4.2.d se puede notar que, cuando se selecciona un peso $w > 1$, las configuraciones (UCL, w) (líneas rojas punteadas) y $(UCL/w, 1/w)$ (líneas rojas continuas) generan el mismo conjunto Ω_0 . Esto significa que para cada peso $w > 1$, existe una solución dual $w^d = 1/w$ que cumple que $0 < w^d < 1$. La propiedad anterior permite que al ubicar un límite superior $w_{\max} = 1$ en el rango de variación de w , se tiene la garantía de que se no se omite ningún caso. Por el contrario, al ubicar este límite se evita la exploración de configuraciones duales en el diseño del gráfico.

En la Figura 4.2.e se presenta el caso límite para las pendientes máximas de la rectas que delimitan el conjunto Ω_0 . Este caso se presenta cuando $UCL \approx 0$ y las rectas tienden a ser paralelas a los ejes (Y_S, Y_L) , situación en la que el valor límite de las pendientes es $(n, 1/n)$, por lo cual el mínimo valor para w es $w_{\min} = -n$. Complementariamente, como resultado de restringir $w \in (-n, 1]$, se garantiza que $UCL \in (0, n]$.

Dado que los conteos Y_S, Y_L siguen una distribución de probabilidad conjunta multinomial de parámetros (n, q_S, q_L) , la probabilidad de alarma se obtiene como:

$$PA_{wY_S Y_L} = \Pr(\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) \geq UCL | \delta, r) = \sum_{i=1}^{N_\Omega} P_i I_{\{\{y_S, y_L\} \in \Omega_1\}}(\{y_S, y_L\}_i), \quad (4.2)$$

$$\text{con } P_i = P(y_S, y_L | \delta, r) = \frac{n! q_S^{y_S} q_L^{y_L} (1 - q_S - q_L)^{n - y_S - y_L}}{y_S! y_L! (n - y_S - y_L)!}, \quad y_S + y_L \leq n. \quad (4.3)$$

Con el diseño simétrico de la galga 2-step, cuando el proceso está bajo control, se cumple que $q_{S0} = q_{L0} = q_0/2$ y $q_0 = 2\Phi(-k)$. Por el contrario, si hay un cambio en la media a $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ o en la desviación estándar a $\sigma_1 = r\sigma_0$, las probabilidades q_S y q_L toman los valores:

$$q_S = \Phi\left(\frac{-k - \delta}{r}\right), \quad q_L = 1 - \Phi\left(\frac{k - \delta}{r}\right). \quad (4.4)$$

Nótese que para una variable X con distribución normal, y en general para variables con distribución simétrica, se cumple que cuando la galga 2-step es diseñada con dimensiones simétricas, el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ para detectar cambios en la media depende únicamente de la magnitud del cambio y no de su dirección. Esto es, $PA_{wY_S Y_L}(-\delta, r) = PA_{wY_S Y_L}(\delta, r)$.

Finalmente, dado que en el esquema $wY_S Y_L$ los puntos que se dibujan sobre el gráfico corresponden a observaciones iid, el ARL se obtiene como el recíproco de la probabilidad de alarma ($ARL = 1/PA$).

4.2. Diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$

En este punto asumiremos que el tamaño de la muestra (n) ha sido predeterminado a priori y orientamos el diseño óptimo a identificar la combinación de parámetros del gráfico de control (UCL, w) y el factor de amplitud (k) para las dimensiones de la galga 2-step, bajo la cual se detecta con la mayor rapidez (menor ARL_1) un cambio de magnitud crítica ($\delta = \delta^*$, $r = r^*$) en la media y en la desviación de la variable de calidad, sujeto a la restricción de cumplimiento de un nivel deseado para la frecuencia de falsa de alarmas ($ARL_0 = ARL_0^*$).

Bajo el diseño simétrico de las dimensiones de la galga se cumple que $k = -\Phi^{-1}\left(\frac{q_0}{2}\right)$, con lo cual el problema de localización de S y L se reduce a hallar el valor del porcentaje de unidades (q_0) que se clasifica por fuera del intervalo central cuando el proceso está bajo control.

En este punto vale la pena recordar que la distribución normal, al igual que muchas otras distribuciones de probabilidad, presentan un rango de variación no acotado. Esto quiere decir que teóricamente $X \in (-\infty, \infty)$. Por lo tanto, es posible que cuando $q_0 \approx 0$, se obtengan dimensiones S y L demasiado amplias, y que esto represente un problema para el diseño de la galga. También se puede presentar que si $q_0 \approx 1$ las dimensiones S

y L sean tan estrechas, que en la práctica el diseño de la galga 2-step sea equivalente a una galga 1-step (go/nogo). Para evitar esta clase de dificultades el usuario puede limitar el rango de búsqueda de q_0 sobre un intervalo de menor amplitud $0 < q_{\min} < q_0 < q_{\max} < 1$. En el desarrollo de nuestro problema de optimización hemos establecido un rango de búsqueda suficientemente amplio [$q_{\min}=0.0001, q_{\max}=0.99$].

Con las consideraciones anteriores, el problema de optimización es formulado como:

Dados:	$(n, ARL_0^*, \delta^*, r^*)$.	<i>(Establecidos por el usuario)</i>
Encontrar:	(w, UCL, q_0) .	
Que minimizan:	ARL_1 .	
Sujeto a las restricciones:	$ARL_0 = ARL_0^*$,	
	$w \in (-n, 1]$,	
	$UCL \in (0, n]$,	
	$q_0 \in [q_{\min}, q_{\max}]$.	

Para resolver este problema, inicialmente estudiaremos las propiedades de la función ARL_0 , la cual representa la restricción principal del problema.

$$ARL_0 = \left[\sum_{\{y_S, y_L\} \in \Omega_1} \frac{n!}{y_S! y_L! (n - y_S - y_L)!} (q_0/2)^{y_S + y_L} (1 - q_0)^{n - y_S - y_L} \right]^{-1}. \quad (4.5)$$

En la Figura 4.3 se ilustra la relación entre ARL_0 y los parámetros de diseño del esquema wY_SY_L (w, UCL, q_0). El caso que se ilustra es un ejemplo particular con $n = 7$. Como se puede notar, con valores fijos de n, UCL y w , el ARL_0 es una función monótona decreciente de q_0 . Según ello, para cada combinación (n, UCL, w) existe como máximo una raíz $q_0 = q_0^*$, con $q_0^* \in [q_{\min}, q_{\max}]$, que satisface la restricción $ARL_0 = ARL_0^*$. De acuerdo con la Figura 4.3 la raíz q_0^* no siempre existe. Por ejemplo, se observa que q_0^* no existe para $UCL = 1, 2$ y $ARL_0^* > 100$. Tampoco existe q_0^* para $ARL_0^* < 100$ cuando $w = -1.5, -1.0, -0.5, 0, 0.5$ y $UCL = 7$.

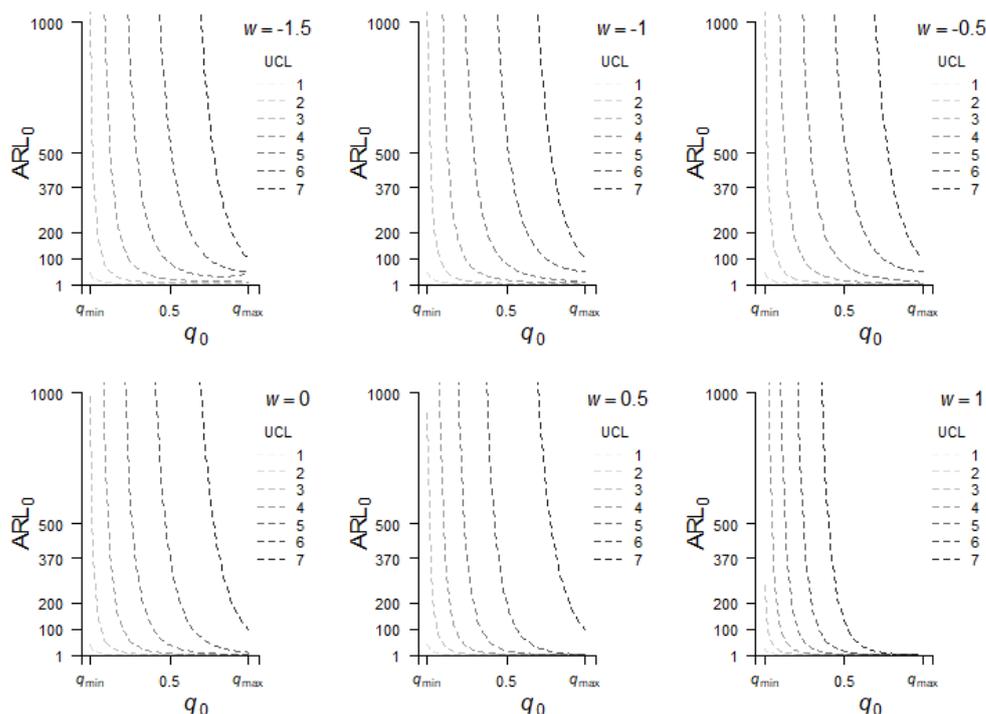


Figura 4.3. ARL_0 del esquema $wY_S Y_L$ como función de (w, UCL, q_0) . $n = 7$.

Para un valor particular $UCL = ucl$, la existencia de q_0^* se verifica cuando se comprueba que $ARL_0(n, ucl, w, q_{max}) < ARL_0^* < ARL_0(n, ucl, w, q_{min})$. Adicionalmente, si se fijan n y w , se puede notar que q_0^* es creciente en función de UCL , por lo tanto existirá un rango de valores de UCL $[ucl_{min}, ucl_{max}]$ en el cual se garantiza la existencia de q_0^* . Estas propiedades son empleadas para disminuir los tiempos de cómputo del algoritmo de optimización propuesto.

Una vez se verifica la existencia de q_0^* , dada la monotonía y continuidad de ARL_0 , su valor puede ser hallado a través de algún método numérico, tal como el algoritmo de bisección o el algoritmo de Newton Raphson. La convergencia del algoritmo de bisección es más segura que la del algoritmo de Newton Raphson, sin embargo su velocidad es menor. En este trabajo hemos implementado los dos algoritmos, verificando en todos los ensayos la convergencia de ambos métodos. Basados en el criterio de menor tiempo de cómputo, recomendamos emplear el algoritmo de Newton Raphson.

Hallar el valor $q_0 = q_0^*$ que satisface la restricción $ARL_0 = ARL_0^*$, es equivalente a hallar la raíz de la ecuación:

$$f(q_0) = \left(ARL_0^* \sum_{\{y_s, y_L\} \in \Omega_1} \sum_{\Omega_1} \frac{n! (q_0/2)^{y_s+y_L} (1-q_0)^{n-y_s-y_L}}{y_s! y_L! (n-y_s-y_L)!} \right) - 1, \quad (4.6)$$

cuya derivada $f'(q_0)$ es:

$$f'(q_0) = \frac{ARL_0^*}{2} \sum_{\{y_s, y_L\} \in \Omega_1} \sum_{\Omega_1} \left(\frac{n! (y_s + y_L - nq_0)}{y_s! y_L! (n - y_s - y_L)!} \left(\frac{q_0}{2} \right)^{y_s+y_L-1} (1 - q_0)^{n-y_s-y_L-1} \right). \quad (4.7)$$

Estas propiedades de ARL_0 son utilizadas para diseñar un algoritmo que encuentra la configuración óptima (w, UCL, q_0) . Este algoritmo se soporta en la exploración exhaustiva de los parámetros (w, UCL) y el hallazgo de la raíz q_0 a través del método de Newton Raphson. Su pseudo código se resume en los siguientes pasos:

Paso 0: Se crea un conjunto ordenado $W = \{w_1 < w_2 < w_3, \dots, < w_i <, \dots, < w_{max}\}$, con valores $-n < w_1 \leq w_{max} \leq 1$ para la exploración del peso del esquema wY_sY_L .

Paso 1: Se selecciona un valor w_i desde el conjunto W y se aplica el estadístico $\max(w_i y_s + y_L, y_s + w_i y_L)$ sobre todos los elementos de Ω . Como resultado se conforma el conjunto ordenado $UCL_i = \{ucl_{i1} < ucl_{i2} \dots < ucl_{ij} < \dots < ucl_{ij}\}$ que contiene los J posibles valores para la ubicación de UCL.

Paso 1.1: Se selecciona un valor ucl_{ij} desde el conjunto UCL_i y se verifica la existencia de la raíz q_{ij}^* que satisface $ARL_0 = ARL_0^*$ para la configuración (n, w_i, ucl_{ij}) . Si la raíz q_{ij}^* existe se ejecutan los pasos 1.1.1 y 1.1.2, de lo contrario se salta al paso 1.2

Paso 1.1.1: Se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson para hallar la raíz q_{ij}^* , solución a la ecuación 4.6, para (n, w_i, ucl_{ij}) .

Paso 1.1.2: Con los valores $(n, w_i, ucl_{ij}, q_{ij}^*)$ y las magnitudes de cambio (δ^*, r^*) , se calcula ARL_1 .

Paso 1.2: Se repite el paso 1.1 con un nuevo elemento de UCL_i hasta completar el conjunto UCL_i .

Paso 2: Se repite el paso 1 con un nuevo valor del conjunto W . El procedimiento finaliza cuando se ha explorado todo el conjunto W .

Paso 3: El mínimo ARL_1 y sus parámetros asociados $(n, w_i, ucl_{ij}, q_{ij}^*)$ corresponden a la solución óptima.

El algoritmo anterior garantiza el hallazgo de la solución óptima cuando el enmallado de valores de w (Paso 0) es suficientemente contiguo. Basados en los resultados observados en múltiples optimizaciones realizadas, sugerimos emplear $w_1 = -2$, $w_{max} = 1$ y $\nabla w = 0.1$. Nótese además que cuando se define un único valor para w , el algoritmo genera la optimización de un miembro de la familia $wY_S Y_L$. Por ejemplo, con $w = 1, 0, -1$ se optimizan los esquemas Y_T , $Y_S Y_L$ e $Y_S - Y_L$ respectivamente. El algoritmo anterior puede ser ajustado para otras distribuciones de probabilidad diferentes a la normal (ver capítulo 5) y alguna variación en la función objetivo.

Este algoritmo de optimización ha sido implementado en un software para Windows®, de desarrollo propio, que facilita los cálculos para al usuario. Adicionalmente, también fueron desarrolladas funciones del software R (R Core Team, 2018) que realizan la optimización. Para ejemplificar el uso de este software y del procedimiento de optimización, en la sección 4.2.1 se presenta un ejemplo de implementación del diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$.

4.2.1. Ejemplo de aplicación 1

En un proceso de llenado de bebidas carbonatadas, una variable crítica para la adecuada conservación y manipulación del producto final es la altura de llenado de la botella, definida como la distancia entre la tapa de la botella y el nivel de llenado. Cuando las botellas se llenan a nivel muy alto se incrementa el riesgo de ruptura, debido al exceso de presión. Por el contrario, botellas con muy bajo nivel de llenado pueden ser rechazadas por lo clientes por una aparente falta de contenido, además de incrementarse el riesgo de degradación del producto. En condiciones regulares de operación, la altura de llenado (X) sigue una distribución normal de parámetros $\mu_0 = 4$ cms y $\sigma_0 = 0.3$ cms. En este proceso es importante detectar en la mayor brevedad un desplazamiento de la media a $\mu_1 = 4.15$ ($\delta^* = 0.5$) y un incremento del 20% en la desviación estándar ($r^* = 1.2$).

Actualmente el control de la altura de llenado se realiza a través de un gráfico $\bar{X} - S$ diseñado con $ARL_0 = 370$ y tamaño de muestra $n = 6$. Dado que medir de forma exacta el volumen de llenado es bastante dispendioso, se pretende diseñar un esquema $wY_S Y_L$ que contribuya a agilizar el proceso de inspección. Para ello se dispone de una galga 2-step de dimensiones adaptables, como la que se muestra en la Figura 4.4.

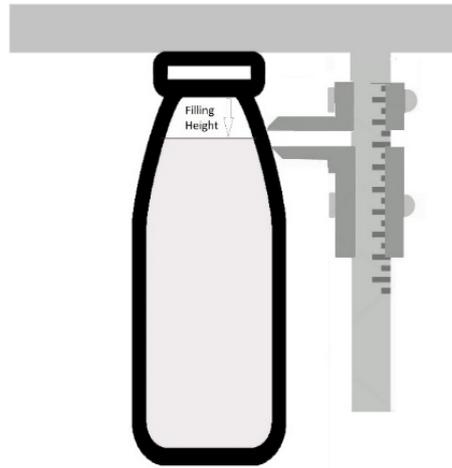


Figura 4.4. Boceto de galga 2-step para la verificación de la altura de llenado.

La Figura 4.5 muestra la interfaz del software que ha sido desarrollado para realizar la optimización. Para empezar, el usuario debe seleccionar el esquema que desea optimizar (Y_T , Y_sY_L , $Y_s - Y_L$, wY_sY_L) e ingresar los valores (n , ARL_0^* , δ^* , r^* , μ_0 , σ_0). Al finalizar el procedimiento se reportan en el cuadro de resultados los parámetros óptimos (UCL, w , q_0 , S , L). Adicionalmente se presenta el ARL_0 y el ARL_1 del esquema wY_sY_L óptimo y se proporcionan los ARL_1 para los gráficos de control por variables \bar{X} , $\bar{X} - S$ y S equivalentes. Esto es con $ARL_0 = 370$ y $n = 6$.

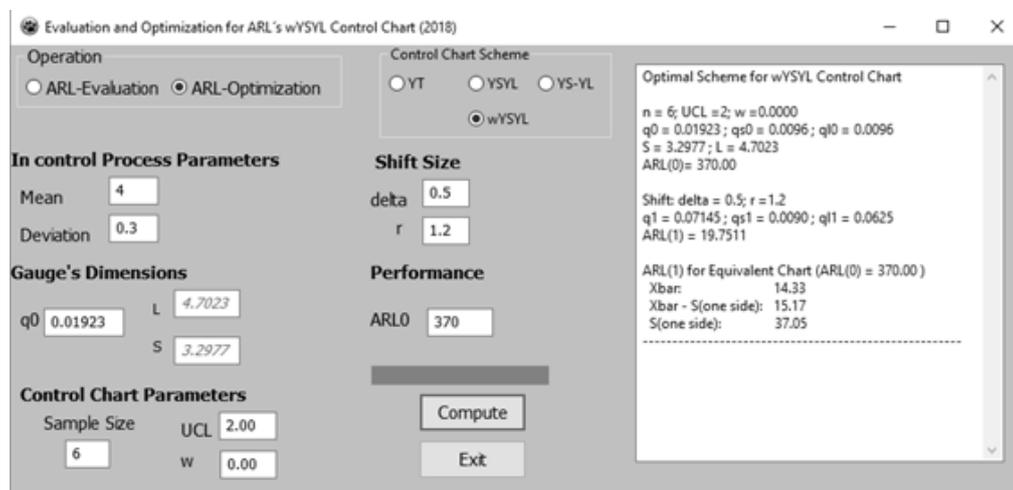


Figura 4.5. Interfaz de usuario del programa de optimización del esquema wY_sY_L .

Según el resultado, el gráfico de control del esquema wY_sY_L debe ser diseñado con $w = 0$, $UCL = 2$ y la galga 2-step se debe ajustar en sus dimensiones para detectar botellas con altura de llenado inferior a $S = 3.2977$ cms y superior a $L = 4.7023$ cms. Bajo esta configuración el esquema wY_sY_L presenta un $ARL_1 = 19.75$, el cual es superior al $ARL_1 = 15.17$ del gráfico $\bar{X}-S$ equivalente.

Dado que verificar la altura de llenado con la galga es mucho más sencillo y económico que obtener su medición exacta, es económicamente factible explorar incrementos en el tamaño de muestra para el esquema $wY_S Y_L$, con la intención de garantizar un desempeño similar al del gráfico $\bar{X}-S$ empleado actualmente. La Tabla 4.1 contiene los parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ para $n = 6, 7, 8$.

Tabla 4.1. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ para el ejemplo de aplicación 1. $n = 6, 7, 8$.

n	(w, UCL, q_0)	k	(S, L)	ARL_1
6	(0, 2, 0.01923)	2.341	(3.298, 4.702)	19.75
7	(0, 3, 0.07003)	1.812	(3.457, 4.544)	16.82
8	(0, 3, 0.06003)	1.881	(3.436, 4.564)	14.71

Como se observa, con $n = 8$ el ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ es ligeramente inferior al de un esquema $\bar{X}-S$ con $n = 6$. A pesar del incremento en el tamaño de muestra, es muy probable que verificar 8 botellas con la galga sea más rápido que medir la altura de llenado de 6 botellas.

4.3. Comparación del desempeño del esquema $wY_S Y_L$

En esta Sección se presenta una evaluación comparativa del desempeño del esquema $wY_S Y_L$ bajo 3 escenarios de cambio en la media y la desviación estándar de la variable de calidad:

1. Cambios solo en la media ($\delta^* \neq 0, r^* = 1$).
2. Cambios solo en la desviación estándar ($\delta^* = 0, r^* > 1$).
3. Cambios simultáneos en la media y la desviación estándar ($\delta^* \neq 0, r^* > 1$).

Sin pérdida de generalidad, la evaluación se realiza para una variable con distribución normal estándar, $X \sim N(\mu_0 = 0, \sigma_0 = 1)$. Además, dado que el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ es el mismo para incrementos/decrementos de la media de la misma magnitud absoluta, en los escenarios 1 y 3 solo se consideran magnitudes positivas ($\delta^* > 0$). Por simplicidad solo se reportan resultados de las optimizaciones realizadas con $ARL_0 = 370$, valor habitual en el diseño de gráficos de control. Los resultados obtenidos para otros valores de ARL_0 conducen a similares conclusiones.

La Tabla 4.2 contiene, en la columna 3, los ARL_1 's del esquema $wY_S Y_L$ optimizado para incrementos de la media (δ^*) y bajo diferentes tamaños de muestra (n). En las columnas 2 a 4 se presentan los ARL_1 's del esquema $Y_S Y_L$ optimizado y de los gráficos

por variables \bar{X} y $\bar{X}-S$. Para garantizar una comparación justa, todos los gráficos fueron diseñados con $ARL_0 = 370$. En el caso del esquema $\bar{X}-S$, fue diseñado con la misma probabilidad de falsa para cada gráfico \bar{X} y S .

Tabla 4.2. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Incrementos en la media (δ^*), $ARL_0 = 370$.

n	δ^*	ARL_1				% ARL_1^b ($b = Y_S Y_L$)
		$wY_S Y_L^\dagger$	$Y_S Y_L$	\bar{X}	$\bar{X}-S$	
5	0.25	159.6	164.2	133.0	181.6	2.8%
	0.50	46.7	49.0	33.4	50.5	4.6%
	0.75	16.4	17.3	10.8	15.5	5.1%
	1.00	7.1	7.4	4.5	6.0	4.9%
	1.25	3.7	3.8	2.4	2.9	4.2%
	1.50	2.3	2.3	1.6	1.8	3.3%
	1.75	1.6	1.7	1.2	1.3	2.4%
	2.00	1.3	1.3	1.1	1.1	1.4%
10	0.25	94.9	104.2	73.2	108.0	9.0%
	0.50	19.3	22.3	12.8	18.7	13.5%
	0.75	5.8	6.8	3.8	4.9	14.4%
	1.00	2.6	2.9	1.8	2.1	12.7%
	1.25	1.5	1.7	1.2	1.3	9.0%
	1.50	1.2	1.2	1.0	1.1	5.0%
15	0.25	62.8	73.2	47.3	71.4	14.2%
	0.50	10.4	12.9	7.0	9.7	19.5%
	0.75	3.1	3.8	2.2	2.6	18.4%
	1.00	1.6	1.8	1.2	1.3	13.0%
	1.25	1.1	1.2	1.0	1.1	6.0%
30	0.25	26.8	34.4	19.4	29.0	22.0%
	0.50	3.5	4.7	2.5	3.1	24.2%
	0.75	1.4	1.6	1.2	1.2	14.9%
	1.00	1.0	1.1	1.0	1.0	4.0%
50	0.25	12.9	17.5	9.2	13.1	26.2%
	0.50	1.8	2.3	1.4	1.6	21.8%
	0.75	1.0	1.1	1.0	1.0	6.4%

[†] En la optimización se obtuvo siempre $w = -1$

En la última columna de la Tabla 4.2 se incluye el indicador $\%ARL_1^b = [ARL_1(b) - ARL_1(wY_S Y_L)]/ARL_1(b)$, que mide la reducción porcentual del ARL_1 cuando se emplea el esquema $wY_S Y_L$ en lugar de un esquema alternativo b . En este caso empleamos $b = Y_S Y_L$ como la referencia de desempeño, dado que según la revisión de literatura, es el

esquema basado en galgas con el mejor desempeño conocido para la detección de cambios en la media.

Se destaca que siempre que el esquema $wY_S Y_L$ fue optimizado para cambios en la media el peso óptimo fue $w = -1$. Lo cual significa que la diferencia $Y_S - Y_L$ es el mejor estadístico de control para detectar cambios en la media de una variable normal. Este estadístico ya había sido sugerido por Stevens (1948), sin embargo su optimización conjunta con las dimensiones de la galga no había sido realizada.

Los datos en la Tabla 4.2 muestran que para cambios en la media el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ supera al del esquema $Y_S Y_L$. Por ejemplo, para $n = 10$ y $\delta^* = 0.25$, el esquema óptimo $Y_S Y_L$ presenta $ARL_1 = 104.20$, mientras que el esquema óptimo $wY_S Y_L$ presenta $ARL_1 = 94.85$, lo cual equivale a una reducción del 9% en ARL_1 , sin incurrir en ningún costo adicional. Para esta misma magnitud de cambio ($\delta^* = 0.25$), con $n = 50$, el porcentaje de reducción de ARL_1 es del 26.2%. Como se observa, la reducción porcentual es mayor cuando se incrementa el tamaño de muestra y los cambios son pequeños.

Para un cambio $\delta^* = 0.25$ con tamaño de muestra $n = 5, 10$, los ARL_1 's de los esquemas $wY_S Y_L$ e $Y_S Y_L$ son ambos menores a los ARL_1 's del esquema $\bar{X}-S$. Esta condición no se mantiene para el esquema $Y_S Y_L$ cuando $n \geq 15$, pero si permanece para el esquema $wY_S Y_L$ en todos los tamaños de muestra evaluados. De lo anterior se deduce que el esquema $wY_S Y_L$ es una alternativa de mayor eficiencia y economía que el gráfico $\bar{X}-S$ para el control de pequeños cambios en la media.

En la Tabla 4.3 se reportan los ARL_1 's del esquema $wY_S Y_L$ optimizado para incrementos en la desviación estándar (r^*) y diferentes tamaños de muestra (n). En la comparación se incluyen los ARL_1 's de los gráficos S y $\bar{X}-S$. Dado que en todas las optimizaciones se obtuvo un peso óptimo $w = 1$, bajo el cual el esquema $wY_S Y_L$ es equivalente al esquema Y_T de Aparisi et al. (2018), no se incluyen indicadores de comparación entre los dos esquemas y se ratifica que el esquema Y_T es la mejor alternativa para controlar los cambios que afectan solo a la desviación estándar.

Los resultados de la Tabla 4.3 muestran que, tal como se espera, los cambios en la desviación estándar son detectados con mayor prontitud por los gráficos de control por variables S y $\bar{X}-S$. Sin embargo, la diferencia en desempeño es poco notable cuando los cambios son moderados o grandes. En tales casos, el desempeño puede nivelarse con un ligero incremento del tamaño de muestra en el esquema $wY_S Y_L$.

Tabla 4.3. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Incrementos en la desviación estándar (r^*), $ARL_0 = 370$.

n	r^*	ARL_1			n	r^*	ARL_1		
		$wY_S Y_L^\dagger$	S	$\bar{X}-S$			$wY_S Y_L^\dagger$	S	$\bar{X}-S$
5	1.25	35.82	29.23	30.64	15	1.25	16.80	10.46	12.90
	1.50	9.89	8.02	8.03		1.50	3.86	2.53	2.81
	1.75	4.58	3.89	3.75		1.75	1.90	1.43	1.49
	2.00	2.83	2.51	2.38		2.00	1.35	1.15	1.16
	2.25	2.06	1.91	1.80		30	1.25	8.42	4.88
2.50	1.67	1.60	1.50	1.50	1.98		1.40	1.50	
10	1.25	23.5	15.73	18.66	50	1.25	4.76	2.76	3.30
	1.50	5.69	3.84	4.22		1.50	1.33	1.09	1.12
	1.75	2.65	1.96	2.05					
	2.00	1.74	1.41	1.43					
	2.25	1.37	1.20	1.20					

[†] En la optimización se obtuvo siempre $w = 1$

Finalmente, en la Tabla 4.4 se presentan los ARL_1 's del esquema $wY_S Y_L$ optimizado para cambios simultáneos en la media y en la desviación estándar (δ^* , r^*). En las columnas 3 a 5 se incluyen los pesos óptimos (w) obtenidos. En la mayoría de los casos el peso fue $w = (1, 0, -1)$, coincidiendo con alguno de los esquemas Y_T , $Y_S Y_L$ o $Y_S - Y_L$ respectivamente. Para el resto de casos, aquellos en donde $w \notin (1, 0, -1)$, sobre las columnas 12 - 14 se reporta el $\%ARL_1^b$, el cual se calculó utilizando como alternativa de referencia (b) el esquema $wY_S Y_L$ optimizado para un peso fijo $w = (1, 0, -1)$, el más cercano al peso óptimo. Adicionalmente, se incluyen en las columnas 9-11 los ARL_1 's del esquema $\bar{X}-S$.

Según los datos de la Tabla 4.4, cuando fue considerado un cambio grande en la desviación (r^*) y pequeño en la media (δ^*), el peso optimo fue siempre positivo con valor límite en $w = 1$. En estos casos el esquema $wY_S Y_L$ es equivalente al esquema Y_T , de mejor desempeño para detectar cambios en la desviación. Por el contrario, cuando δ^* es grande y r^* es pequeño, el peso optimo fue $-1 \leq w \leq 0$. Se deduce entonces que cuando el impacto principal lo genera el cambio en la media, el esquema $wY_S Y_L$ se aproxima al esquema $Y_S - Y_L$, el mejor esquema para detectar cambios en la media.

Tabla 4.4. Peso w y ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Cambios simultáneos en la media y desviación estándar (δ^* , r^*), $ARL_0 = 370$.

n	δ^*	ARL_1									$\% ARL_1^b$ ($b = wY_S Y_L^\dagger$)		
		w			$wY_S Y_L$			$\bar{X}-S$			r^*		
		1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6
5	0.2	1	1	1	45.4	14.3	6.7	37.5	11.6	5.4			
	0.4	0	1	1	29.7	11.9	6.0	23.9	9.3	4.8			
	0.6	0	0	1	17.1	8.9	5.1	13.5	6.9	4.1			
	0.8	0	0	1	9.9	6.2	4.3	7.6	4.9	3.3			
	1.0	-1	0	0	5.9	4.4	3.4	4.5	3.5	2.7			
10	0.2	1	1	1	30.5	8.4	3.8	23.2	6.2	2.9			
	0.4	0	1	1	16.8	6.9	3.4	12.7	4.5	2.6			
	0.6	0	0	1	8.2	4.7	2.9	6.2	3.6	2.2			
	0.8	0	0	0	4.5	3.2	2.4	3.3	2.5	2.6			
	1.0	-1	0	0	2.7	2.2	1.9	2.0	1.8	1.5			
15	0.2	0.1	1	1	22.2	5.7	2.6	16.4	4.1	2.0	6.5%		
	0.4	0	0.1	1	11.0	4.6	2.4	8.3	3.3	1.8		4.8%	
	0.6	0	0	1	5.1	3.1	2.1	3.8	2.4	1.6			
	0.8	-0.9	0	1	2.7	2.1	1.7	2.1	1.7	1.4	2.5%		
	1.0	-1	0	0	1.7	1.6	1.4	1.4	1.3	1.2			
30	0.2	0.4	1	1	11.0	2.8	1.5	8.0	2.0	1.2	9.7%		
	0.4	0	0.4	1	4.7	2.2	1.4	3.7	1.7	1.2		8.3%	
	0.6	0	0	1	2.2	1.6	1.2	1.8	1.4	1.1			
50	0.2	0.3	0.6	1	6.1	1.7	1.1	4.4	1.3	1.0	9.1%	2.8%	
	0.4	0	0.1	1	2.5	1.4	1.1	2.1	1.2	1.0		4.0%	
	0.6	-0.4	0	1	1.4	1.2	1.1	1.2	1.1	1.0	3.6%		

[†] El esquema es optimizado para un valor fijo w en el conjunto $(1, 0, -1)$. El valor seleccionado es el más cercano al w óptimo.

En aquellas situaciones intermedias, cuando las magnitudes δ^* y r^* son relativamente equilibradas, el esquema $wY_S Y_L$ muestra pesos $w \approx 0$, adoptando una configuración cercana a la del esquema $Y_S Y_L$. Las pocas situaciones con $w \notin (1, 0, -1)$ se presentaron con altos tamaños de muestra ($n = 15, 30, 50$), bajo combinaciones (δ^* , r^*) en las que ninguno de los cambios prevalece notoriamente. En esos casos la reducción porcentual del ARL_1 estuvo comprendida entre 2.5% y 9.7%.

4.3.1. Análisis de sensibilidad de los parámetros óptimos

En la optimización del esquema wY_sY_L el usuario debe indicar las magnitudes (δ^* , r^*) que definen el cambio crítico. En la literatura se encuentran algunos trabajos que identifican dependencia o sensibilidad de los parámetros óptimos frente a ligeras variaciones de las magnitudes de cambio crítico. Por ejemplo, esto fue evidenciado en el trabajo de Aparisi y García-Díaz (2007) para la optimización de los gráficos EWMA y MEWMA. En esta sección exploramos la estabilidad del diseño óptimo del esquema wY_sY_L cuando se varían las magnitudes de cambio (δ^* , r^*).

En la sección 4.3 se mencionó que para cambios en media el peso óptimo fue siempre $w = -1$ y para cambios en la desviación estándar el peso fue siempre $w = 1$. Por lo tanto, el peso óptimo es robusto para cada tipo de cambio. La Tabla 4.5 muestra los parámetros óptimos (UCL , q_0) que se obtuvieron en los escenarios de cambio solo en la media y solo en la desviación estándar, con $ARL_0 = 370$. Según estos resultados, los parámetros óptimos (UCL , q_0) presentan dependencia del tamaño de muestra (n).

Tabla 4.5. Parámetros óptimos del esquema wY_sY_L . Cambio solo en media (δ^*) y solo en la desviación estándar (r^*). $ARL_0 = 370$.

n	δ^*	r^*
	0.25 - 2.0	1.2 - 2.0
	$w = -1$	$w = 1$
	(UCL, q_0)	(UCL, q_0)
5	(4, 0.2754)	(1, 0.00054)
10	(6, 0.3470)	(2, 0.00792)
15	(8, 0.4325)	(3, 0.01919)
20	(10, 0.5200)	(4, 0.03010)
25	(11, 0.5039)	(5, 0.03974)
30	(12, 0.5012)	(6, 0.04808)
50	(16, 0.5420)	(8, 0.04867)

Particularmente se observan valores más bajos de q_0 cuando el esquema wY_sY_L se optimiza para cambios en la desviación estándar. Esto quiere decir que las dimensiones óptimas de la galga 2-step son diferentes para cada tipo de cambio. Para el control de la desviación estándar se requiere una galga de dimensiones amplias, mientras que para cambios en la media la galga debe tener dimensiones más estrechas.

Tabla 4.6. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Cambios simultáneos en la media y desviación estándar (δ^* , r^*). $ARL_0 = 370$.

n	δ^*	w					UCL					q_0				
		r^*					r^*					r^*				
		1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
5	0.20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.00054	0.00054	0.00054	0.00054	0.00054
	0.40	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0.0235	0.00054	0.00054	0.00054	0.00054
	0.60	0	0	1	1	1	2	2	1	1	1	0.0235	0.0235	0.00054	0.00054	0.00054
	0.80	-1	0	0	1	1	3	2	2	1	1	0.1097	0.0235	0.0235	0.00054	0.00054
	1.00	-1	0	0	1	1	3	2	2	1	1	0.1097	0.0235	0.0235	0.00054	0.00054
10	0.20	1	1	1	1	1	3	2	2	2	2	0.0298	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079
	0.40	0	1	1	1	1	3	2	2	2	2	0.0467	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079
	0.60	0	0	1	1	1	4	3	2	2	2	0.1076	0.0467	0.0079	0.0079	0.0079
	0.80	0	0	0	1	1	4	3	2	2	2	0.1076	0.0467	0.0111	0.0079	0.0079
	1.00	-1	0	0	0	1	4	3	3	2	2	0.1185	0.0467	0.0467	0.0111	0.0079
15	0.20	0.1	1	1	1	1 [†]	3.2	3	3	3	3 [†]	0.0611	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192 [†]
	0.40	0	0.1	1	1	1 [†]	4	2.2	3	3	3 [†]	0.0680	0.0290	0.0192	0.0192	0.0192 [†]
	0.60	0	0	1	1	1 [†]	5	3	3	3	3 [†]	0.1190	0.0301	0.0192	0.0192	0.0192 [†]
	0.80	-0.9	0	0	1	1 [†]	5.1	3	3	3	3 [†]	0.1899	0.0301	0.0301	0.0192	0.0192 [†]
	1.00	-1	0	0	1 [†]	1 [†]	6	3	3	3 [†]	3 [†]	0.2189	0.0301	0.0301	0.0192 [†]	0.0192 [†]
30	0.20	0.4	1	1	1 [†]	1 [†]	5.2	5	5	5 [†]	5 [†]	0.0587	0.0327	0.0327	0.0327 [†]	0.0327 [†]
	0.40	0	0.4	1	1 [†]	1 [†]	7	5.2	5	5 [†]	5 [†]	0.1157	0.0587	0.0327	0.0327 [†]	0.0327 [†]
	0.60	0	0	1	1 [†]	1 [†]	9	5	5	5 [†]	5 [†]	0.1889	0.0587	0.0327	0.0327 [†]	0.0327 [†]
50	0.20	0.3	0.6	1 [†]	1 [†]	1 [†]	8.5	7.4	8 [†]	8 [†]	8 [†]	0.0898	0.0586	0.0487 [†]	0.0487 [†]	0.0487 [†]
	0.40	0	0.1	1 [†]	1 [†]	1 [†]	11	5.2	8 [†]	8 [†]	8 [†]	0.1554	0.0415	0.0487 [†]	0.0487 [†]	0.0487 [†]
	0.60	-0.4	0	1 [†]	1 [†]	1 [†]	12	9	8 [†]	8 [†]	8 [†]	0.2334	0.1086	0.0487 [†]	0.0487 [†]	0.0487 [†]

[†] El cambio es relativamente grande y existen varias configuraciones del esquema $wY_S Y_L$ con $ARL_1 \approx 1$. Se presenta una de estas soluciones.

Como se mencionó en la sección 4.3, cuando el esquema wY_sY_L se optimiza para cambios simultáneos en la media y la desviación, el peso óptimo w depende del equilibrio de las magnitudes δ^* y r^* . Con tamaños de muestra $n = 5, 10, 15$ el peso w generalmente fue alguno de los 3 valores $w = (1, 0, -1)$. Para tamaños de muestra $n = 30, 50$ se presentaron valores alternativos de $w \notin (1, 0, -1)$. La Tabla 4.6 muestra las combinaciones óptimas de los parámetros w , UCL y q_0 para cambios simultáneos en media y variabilidad.

Cuando el esquema wY_sY_L fue optimizado para valores grandes de r^* y pequeños de δ^* , los parámetros óptimos son los mismos que se obtuvieron en los escenarios de cambio solo en la desviación estándar (ver Tabla 4.5). Esto quiere decir que la galga y gráfico de control que son óptimos para detectar cambios en la desviación, siguen siendo óptimos para un cambio simultáneo en la media y la desviación, siempre que el cambio en la media no sea muy grande. Para un cambio grande en la media, esta configuración pierde su optimalidad.

Para cuantificar esta pérdida de optimalidad, en la Tabla 4.7 se presentan los ARL_1 's de un esquema wY_sY_L optimizado para un cambio (δ^*, r^*) evaluados para un cambio $(\delta \neq \delta^*, r \neq r^*)$ distinto al punto de optimización. Para la comparación se seleccionan los casos $(\delta^*, r^*) = (0.4, 1.2), (0.4, 1.6), (0.8, 1.2), (0.8, 1.6)$ con tamaños de muestra $n = 5, 10, 15$. Esos casos definen diferentes condiciones de equilibrio entre las magnitudes δ^* y r^* .

Tabla 4.7. ARL_1 's del esquema wY_sY_L optimizado para magnitudes de cambio (δ^*, r^*) y evaluado en puntos de cambio $(\delta \neq \delta^*, r \neq r^*)$. $ARL_0 = 370$.

n	δ^*, r^*	ARL_1			
		δ, r			
		0.4, 1.2	0.4, 1.6	0.8, 1.2	0.8, 1.6
5	0.4, 1.2	29.72 [†]	7.38	10.15	4.37
	0.4, 1.6	33.05	6.28 [†]	13.18	4.39
	0.8, 1.2	34.88	14.58	9.91 [†]	6.66
	0.8, 1.6	29.72	7.38	10.15	4.37 [†]
10	0.4, 1.2	16.79 [†]	4.33	4.79	2.41
	0.4, 1.6	21.28	3.42 [†]	7.83	2.42
	0.8, 1.2	17.38	6.36	4.43 [†]	2.86
	0.8, 1.6	18.66	3.81	6.05	2.37 [†]
15	0.4, 1.2	10.95 [†]	3.06	2.95	1.72
	0.4, 1.6	14.97	2.38 [†]	5.02	1.75
	0.8, 1.2	12.08	6.05	2.70 [†]	2.30
	0.8, 1.6	11.88	2.53	3.50	1.66 [†]

[†] ARL_1 óptimo

Los puntos (0.4, 1.2) y (0.8, 1.6) representan cambios con equilibrio entre δ^* y r^* . Para estos puntos los ARL₁'s que se hallan utilizando uno u otro como punto de optimización son relativamente cercanos. La combinación (0.4, 1.6) representa un cambio pequeño en media y grande en la variabilidad, mientras que (0.8, 1.2) representa un cambio moderado en la media y pequeño en variabilidad. La dirección de cambio que presentan estos puntos es bastante diferente y ello se refleja en las notables diferencias de los ARL evaluados de forma cruzada.

Desde este análisis de sensibilidad se deduce entonces que el esquema $wY_S Y_L$ es una herramienta flexible para el control de la media y/o la variabilidad del proceso. Sin embargo, esta misma propiedad hace que su desempeño sea óptimo o cercano al óptimo, solo cuando el cambio que se presenta permanece en una dirección similar al cambio para el que fue optimizado. El usuario debe ser consciente que para un cambio en dirección contraria, su desempeño no será el óptimo. En este sentido, la selección de un peso neutral $w = 0$ puede ser la configuración más conservadora.

4.4. Conclusiones.

En este capítulo se presentó un nuevo esquema global basado en la inspección por galgas para el control de la media y la varianza de una variable de calidad con distribución normal. El nuevo esquema, denominado $wY_S Y_L$, puede ser visto como una familia de esquemas de control basados en inspección por galgas, que contiene a los esquemas previos propuestos por Stevens (1948), Steiner et al. (1996), Wu et al. (2009), Aparisi et al. (2018) y Bezerra et al. (2018). A través de su diseño óptimo se garantiza que el resultado será siempre el esquema de mejor desempeño para detectar el cambio crítico seleccionado. En la mayoría de los casos, el esquema óptimo coincide con alguna de las propuestas previas. Sin embargo, con un tamaño de muestra grande y para un cambio simultáneo en la media y la desviación, de pequeña magnitud, la optimización arroja un peso óptimo w asociado a un elemento de la familia $wY_S Y_L$, que no había sido considerado anteriormente.

Las evaluaciones mostraron que para el control de la varianza el mejor indicador es la suma de los conteos $Y_T = Y_S + Y_L$, para el control de la media el mejor indicador es la diferencia $Y_S - Y_L$, y que el esquema $Y_S Y_L$ es una alternativa conservadora, con buen desempeño para el control de cambios simultáneos en la media y la varianza con magnitudes δ^* y r^* equilibradas.

Capítulo 5

Adaptación del esquema $wY_S Y_L$ para el control de una variable con distribución asimétrica.

En este capítulo extendemos el uso del esquema $wY_S Y_L$ para el control de la media y la desviación estándar de una variable con distribución asimétrica. Como un supuesto de partida, asumiremos que en el estado fuera de control se modifican los valores de la media y/o de la desviación estándar de la distribución, pero que su asimetría permanece constante. Para modelar este tipo de cambios se requiere emplear distribuciones de probabilidad definidas por al menos 3 parámetros: Localización, escala y forma.

Para realizar esta adaptación, hemos considerado las distribuciones de probabilidad skew-normal, log-normal y Weibull, los cuales se caracterizan por ser suficientemente flexibles para modelar una gran variedad de condiciones de asimetría que se puedan presentar en una aplicación del CEP. A pesar de que los resultados que se muestran son particulares para estas distribuciones, la secuencia de pasos que realizamos puede ser empleada para incluir otras distribuciones de probabilidad no contempladas.

Destacamos que esta adaptación se ha realizado empleando directamente la distribución original de la variable, sin acudir a transformaciones que conduzcan a su normalización. Las razones por las que se descarta la aproximación por transformación son las siguientes:

1. La elección de la transformación $T(X)$ que conduce a normalizar un conjunto de datos es un problema muy particular, en el sentido de que esta transformación dependerá en gran medida de la magnitud y signo de la asimetría de la distribución original. Por ejemplo, las transformaciones \sqrt{X} , $\log(X)$ y $1/X$ contribuyen a normalizar variables con asimetría positiva, mientras que las

transformaciones del tipo X^c , con $c > 1$, suelen normalizar variables asimétricas negativas. Encontrar esta transformación no es un asunto sencillo y el resultado será muy particular para el caso de estudio, lo cual no permitiría obtener resultados generalizables.

2. El problema no termina con hallar la transformación adecuada. Para evaluar el desempeño del esquema $wY_S Y_L$, es necesario conocer/establecer una relación directa entre la media/desviación estándar de la variable original (μ, σ) y la media/desviación estándar de la variable transformada (μ', σ') . Esta equivalencia no es inmediata, ya que generalmente la transformación $T(X)$ será no lineal y por tanto se cumplirá que $\mu' \neq T(\mu)$ y $\sigma' \neq T(\sigma)$. Es el caso de una variable log-normal, cuya transformación es $\log(X)$ y tiene media μ' . Al utilizar el antilogaritmo $e^{\mu'}$ para deshacer la transformación, se obtiene la media geométrica de la variable original y no su valor esperado (μ) . En este caso particular, usar el esquema $wY_S Y_L$ para controlar la media de la variable transformada, es equivalente a controlar la media geométrica de la variable original (X) , que no ha sido el objetivo de diseño.
3. La complejidad del problema es aún mayor, si además tenemos en cuenta que la transformación que normaliza la distribución de la variable en el estado bajo control, no necesariamente es la misma que garantiza la normalidad cuando la variable cambia al estado fuera de control. Recordemos que para el diseño del esquema $wY_S Y_L$ es necesario tener una referencia de la distribución de la variable en ambos estados del proceso.

Al realizar la adaptación para variables con distribución asimétrica, nos enfrentamos a un desafío adicional, que consiste en obtener un gráfico de control sin sesgo, o con sesgo tolerable, en su curva ARL. Acosta-Mejía (1999) define un gráfico de control como ARL-insesgado, cuando se cumple que su curva ARL decrece para cualquier valor del parámetro θ que se aleja desde su valor bajo control ($\theta = \theta_0$). Esta es una propiedad deseable en el diseño de un gráfico de control, ya que garantiza que la curva ARL es máxima para el estado bajo control y que cualquier situación fuera de control será detectada en un tiempo medio menor al de la emisión de una falsa alarma. Las curvas ARL sesgadas son muy frecuentes cuando la variable de calidad o el estadístico de control tienen una distribución de probabilidad asimétrica.

En el caso de una variable normal, o al menos simétrica, la propiedad ARL-insesgado del esquema $wY_S Y_L$ se garantiza cuando se emplean dimensiones simétricas para el

diseño de la galga 2-step. Esto es fijando $S = X_{q_0/2}$ y $L = X_{1-q_0/2}$ (X_p representa el percentil de orden p en la distribución de X). En distribuciones asimétricas, mantener este criterio de ubicación de las dimensiones de las galgas, generalmente genera sesgo en la curva ARL del gráfico de control.

Debido a lo anterior, en la extensión a distribuciones asimétricas flexibilizaremos la ubicación de las galgas (S, L). Para esto incluimos un parámetro adicional ($0 < f < 1$), tal que $S = X_{fq_0}$ y $L = X_{1-(1-f)q_0}$. Bajo este nuevo diseño, cuando $f = 1/2$ se obtiene un balance entre las probabilidades que se acumulan por fuera de las dimensiones de la galga ($q_{S0} = q_{L0} = q_0/2$), y con $f \neq 1/2$ se define un desbalance entre estas probabilidades ($q_{S0} = fq_0, q_{L0} = (1-f)q_0$). Como se mostrará posteriormente, en muchos casos el desbalance es requerido para reducir, o eliminar, el sesgo en la curva ARL para la media.

El nuevo parámetro (f) es incluido en el algoritmo de optimización, al cual se adiciona una restricción que garantiza que la curva ARL del esquema $wY_S Y_L$ optimo es cuasi insesgada – su sesgo es despreciable.

5.1. Planteamiento general

Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad acumulada conocida $F_X(x|\theta)$, donde θ es el vector de parámetros que definen F_X . Si suponemos que el control de X se realiza a través del esquema $wY_S Y_L$, apoyado en la inspección con una galga 2-step de dimensiones $S = X_{fq_0}$ y $L = X_{1-(1-f)q_0}$, entonces la probabilidad de falsa alarma (α) no dependerá de F_X y se obtiene como:

$$\alpha_{wY_S Y_L} = \Pr(\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) \geq UCL | \theta = \theta_0) = \sum_{i=1}^{N_\Omega} P_i I_{\{(y_S, y_L) \in \Omega_1\}}(\{y_S, y_L\}_i), \quad (5.1)$$

$$\text{con } P_i = P(y_S, y_L | \theta = \theta_0) = \frac{n!}{y_S! y_L! (n - y_S - y_L)!} (q_0)^{y_S + y_L} (f)^{y_S} (1 - f)^{y_L} (1 - q_0)^{n - y_S - y_L}, \quad y_S + y_L \leq n.$$

De acuerdo con Chakraborti (2001) p. 305, un gráfico de control es de distribución libre “si la distribución bajo control de la longitud de racha (RL) en el estado bajo control es la misma para cualquier distribución continua”. Con la ubicación sugerida para las dimensiones de las galgas, el esquema $wY_S Y_L$ cumple con esta condición, por lo tanto es un gráfico de control, que a pesar de ser paramétrico, es de distribución libre.

Por el contrario, cuando hay un cambio en el vector de parámetros θ (de θ_0 a θ_1), el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ si depende de la distribución F_X y del nuevo valor de su vector parámetros ($\theta = \theta_1$). En este caso la potencia del gráfico es:

$$1 - \beta_{wY_S Y_L} = \Pr(\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) \geq \text{UCL} | \theta = \theta_1) = \sum_{i=1}^{N_\Omega} P_i I_{\{(y_S, y_L) \in \Omega_i\}}(\{y_S, y_L\}_i), \quad (5.2)$$

$$\text{con } P_i = P(y_S, y_L | \theta = \theta_1) = \frac{n!}{y_S! y_L! (n - y_S - y_L)!} q_S^{y_S} q_L^{y_L} (1 - q_S - q_L)^{n - y_S - y_L}, \quad y_S + y_L \leq n.$$

Aquí $q_S = F_X(S | \theta = \theta_1)$ y $q_L = 1 - F_X(L | \theta = \theta_1)$ son las probabilidades de clasificar una pieza en los intervalos extremos de la galga cuando hay un cambio en la variable de calidad. De acuerdo con la ecuación 5.2, para evaluar la potencia del esquema $wY_S Y_L$, es necesario encontrar una función o mecanismo que enlace los valores de la media y la desviación estándar (μ, σ) con las probabilidades q_S y q_L .

En las secciones 5.1.1 a 5.1.3 se desarrollan estas funciones de enlace para variables con distribución skew-normal, log-normal y Weibull.

5.1.1. Adaptación para la distribución skew-normal

La distribución skew-normal fue introducida por Azzalini (1985), como una extensión de la distribución normal que permite modelar la asimetría que presentan algunos conjuntos de datos. La función de densidad de una variable skew-normal está dada por:

$$f_X(x) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x - \xi}{\omega}\right) \Phi\left(\frac{d}{\sqrt{1 - d^2}} \frac{(x - \xi)}{\omega}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.3)$$

$$-\infty < \xi < \infty, \quad \omega > 0, \quad -1 < d < 1.$$

Aquí ξ, ω, d son los parámetros de localización, escala y forma de la distribución, $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ son las funciones de densidad y de probabilidad acumulada de una variable con distribución normal estándar. Los valores de la media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría de la distribución skew-normal corresponden a:

$$\mu = E(X) = \xi + \omega d \sqrt{2/\pi}, \quad (5.4)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \omega \sqrt{1 - 2d^2/\pi}, \quad (5.5)$$

$$\gamma = CA(X) = \frac{4 - \pi}{2} \left(\frac{d\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{1 - 2d^2/\pi}} \right)^3. \quad (5.6)$$

En la ecuación 5.6 se puede verificar que el parámetro de forma (d) define completamente la asimetría de la distribución, la cual está limitada al rango $(-1 < \gamma < 1)$. La Figura 5.1 muestra las diferentes formas que adquiere la densidad skew-normal cuando se varía el parámetro d . Particularmente, cuando $d = 0$ se obtiene una densidad normal, esto es $SN(\xi, \omega, 0) = N(\xi, \omega)$, y con $(\xi = 0, \omega = 1, d = 0)$ se obtiene la densidad normal estándar.

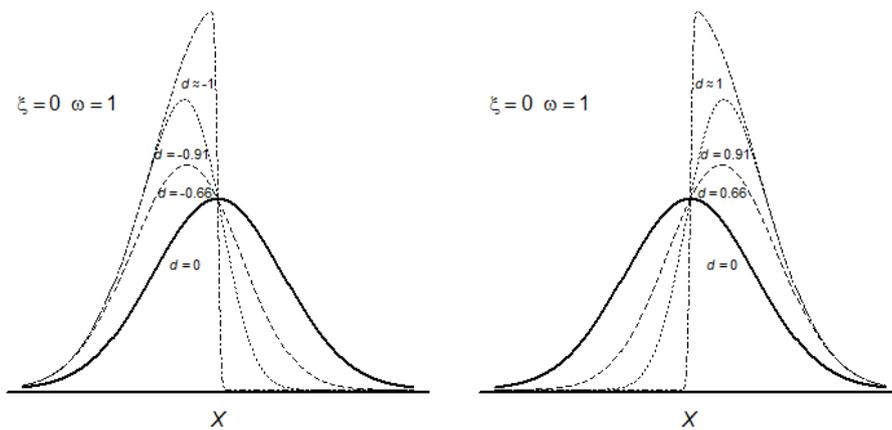


Figura 5.1. Efecto de la variación del parámetro de forma sobre la asimetría de la densidad skew-normal ($\xi = 0, \omega = 1, d$).

Sin pérdida de generalidad, las propiedades de la distribución skew-normal pueden ser estudiadas considerando una variable skew-normal estándar $Z_d \sim SN(\xi = 0, \omega = 1, d)$, ya que esta distribución cumple con la condición de ser cerrada ante transformaciones lineales afines. Esto quiere decir que la transformación $X = \xi + \omega Z_d$ genera toda una familia de variables aleatorias $X \sim SN(\xi, \omega, d)$ que comparten el mismo coeficiente de asimetría y presentan diferentes valores de la media y de la desviación estándar. De forma inversa, también se cumple que para cualquier variable $X \sim SN(\xi, \omega, d)$, la transformación $Z_d = \frac{X - \xi}{\omega} \sim SN(\xi = 0, \omega = 1, d)$.

La función de probabilidad acumulada de una variable skew-normal se obtiene como:

$$F_{Z_d}(z) = \Phi(z) - 2T\left(z, \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\right), \quad (5.7)$$

donde $T(h, b)$ es la función T de Owens, que corresponde a la integral de la densidad normal estándar bivariada limitada entre $Y_1 = h$, $Y_2 = 0$ y $Y_2 = b Y_1$. Como se observa en la ecuación 5.3 el cálculo de la densidad es bastante sencillo. Sin embargo, desde la ecuación 5.7 se puede notar que el cálculo de la probabilidad acumulada es mucho más complejo. Para realizar estos cálculos utilizaremos la librería *sn* (Azzalini, 2018) del software estadístico R (R Core Team, 2018). Esta librería contiene funciones para el cálculo de la densidad de probabilidad, de la probabilidad acumulada, de los percentiles de la distribución y para la generación de números aleatorios.

Para adaptar el esquema $wY_S Y_L$ utilizaremos el hecho de que los parámetros (ξ, ω, d) de una distribución skew-normal pueden identificarse para valores conocidos de (μ, σ, γ) . Para ello empleamos de forma inversa las ecuaciones 5.4 a 5.6. Por ejemplo, si una variable skew-normal (X) presenta en el estado bajo control $(\mu_0, \sigma_0, \gamma_0)$, entonces los parámetros de la distribución (ξ_0, ω_0, d_0) serán:

$$d_0 = \text{sgn}(\gamma_0) \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{|\gamma_0|^{2/3}}{|\gamma_0|^{2/3} + \left(\frac{4-\pi}{2}\right)^{2/3}}}, \quad \omega_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-2d_0^2/\pi}}, \quad \xi_0 = \mu_0 - \omega_0 d_0 \sqrt{2/\pi}. \quad (5.8)$$

Dado que los percentiles de una distribución skew-normal (ξ, ω, d) puede obtenerse como $X_p = \xi + \omega Z_{d,p}$, entonces al reemplazar los parámetros obtenidos en (5.8) en $S = X_{f q_0}$ y $L = X_{1-(1-f)q_0}$, se obtienen las dimensiones de la galga 2-step.

$$S = \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - d_0^2}} \left(Z_{d_0, f q_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - d_0 \right), \quad L = \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - d_0^2}} \left(Z_{d_0, 1-(1-f)q_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - d_0 \right). \quad (5.9)$$

Con un poco de algebra simple se deduce que una variable skew-normal con asimetría $\gamma = \gamma_0$ y valores modificados para la media y la desviación estándar $(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_1 = r\sigma_0)$ se obtiene cuando los parámetros de la distribución cambian a:

$$d_1 = d_0, \quad \omega_1 = r\omega_0, \quad \xi_1 = \xi_0 + \omega_0 \sqrt{2/\pi} \left(d_0(1-r) + \delta \sqrt{1-2d_0^2/\pi} \right). \quad (5.10)$$

Estos nuevos parámetros son empleados para derivar las expresiones para el cálculo de las probabilidades q_s, q_L (probabilidades de clasificar una pieza por debajo

y por encima de las dimensiones de la galga), cuando el cambio en la media y/o la desviación están presente en el proceso:

$$q_S = F_X(S|\xi_1, \omega_1, d_0) = F_{Z_{d_0}} \left(\frac{Z_{d_0, f q_0} - \sqrt{2/\pi} (d_0(1-r) + \delta\sqrt{1-2d_0^2/\pi})}{r} \right), \quad (5.11)$$

$$q_L = 1 - F_X(L|\xi_1, \omega_1, d_1) = 1 - F_{Z_{d_0}} \left(\frac{Z_{d_0, 1-(1-f)q_0} - \sqrt{2/\pi} (d_0(1-r) + \delta\sqrt{1-2d_0^2/\pi})}{r} \right). \quad (5.12)$$

5.1.2. Adaptación para la distribución log-normal

Según Cohen y Whitten (1980) p. 399, “La distribución log-normal deriva su nombre desde la relación que existe entre las variables aleatorias X y $Y = \log(X - \eta)$. Si Y se distribuye normalmente (μ', σ') , entonces X es log-normal (η, μ', σ') ”. De acuerdo con lo anterior, las funciones de densidad y de distribución acumulativa para una variable $X \sim LN(\eta, \mu', \sigma')$ están dadas por:

$$f_X(x) = \phi \left(\frac{\log(x - \eta) - \mu'}{\sigma'} \right), \quad \eta < x < \infty, \quad \eta < \mu' < \infty, \quad \sigma' > 0 \quad (5.13)$$

$$F_X(x) = \Phi \left(\frac{\log(x - \eta) - \mu'}{\sigma'} \right). \quad (5.14)$$

La media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría de una variable log-normal corresponden a:

$$\mu = E(X) = \eta + e^{(\mu' + \sigma'^2/2)}, \quad (5.15)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{e^{(2\mu' + \sigma'^2)} (e^{\sigma'^2} - 1)}, \quad (5.16)$$

$$\gamma = CA(X) = (e^{\sigma'^2} + 2) \sqrt{e^{\sigma'^2} - 1}. \quad (5.17)$$

Como se observa en la ecuación 5.17, en la densidad log-normal la asimetría es siempre es positiva ($\gamma > 0$) y depende únicamente del parámetro σ' . En la Figura 5.2 se ilustra el efecto de la variación de σ' sobre la asimetría de la densidad log-normal. En el recuadro interno de la figura se representa la relación entre γ y σ' .

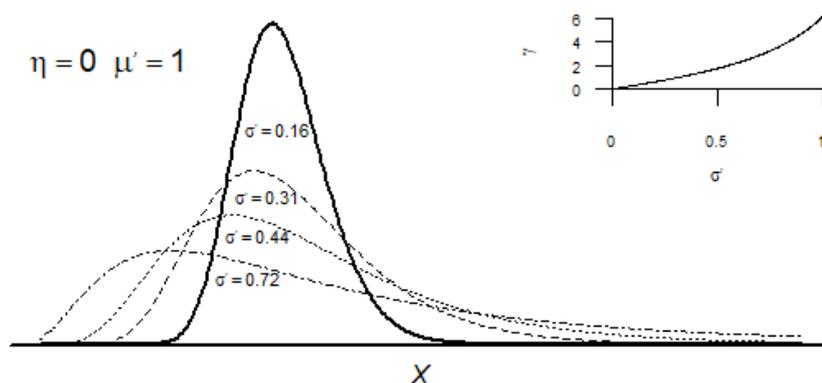


Figura 5.2. Efecto de la variación del parámetro de forma sobre la asimetría de la densidad log-normal ($\eta = 0, \mu' = 1, \sigma'$).

De forma general, a través de la transformación $X = \eta + e^{(\mu' + Z\sigma'^2)}$ (Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar), se puede generar toda una familia de densidades Log-Normales que tienen la misma asimetría y diferentes valores de la media y de la desviación estándar. Esto se logra fijando un valor para σ' y variando η y μ' .

Los parámetros (η, μ', σ') pueden deducirse cuando se conoce la media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría (μ, σ, γ) de la distribución. Para lo cual hemos desarrollado el siguiente procedimiento:

1. Para el valor conocido del coeficiente de asimetría ($\gamma > 0$) se halla la raíz σ' que satisface la ecuación 5.17. Dado que γ es una función monótona creciente para $\sigma' > 0$, se garantiza que la ecuación tiene una sola raíz real positiva. Con el cambio de variable $a = e^{\sigma'^2} - 1$, la ecuación 5.17 se convierte en la ecuación cúbica reducida $a^3 + 3a - \gamma = 0$, cuya raíz es hallada a través del método de Cardano.

$$a = \sqrt[3]{\frac{-\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + 1}} + \sqrt[3]{\frac{-\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + 1}}. \quad (5.18)$$

Al deshacer la transformación obtenemos $\sigma' = \sqrt{\log(a^2 + 1)}$.

2. El valor σ' (obtenido en el paso 1) y el valor conocido σ se utilizan para despejar μ' desde la ecuación 5.16. Al simplificar se obtiene:

$$\mu' = \log\left(\frac{\sigma}{\sqrt{e^{\sigma'^2} - 1}}\right) - \frac{\sigma'^2}{2}. \quad (5.19)$$

3. Con σ' , μ' (obtenidos en los pasos 1 y 2) y el valor conocido μ , se despeja η desde la ecuación 5.15.

$$\eta = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{e^{\sigma'^2} - 1}}. \quad (5.20)$$

Este procedimiento lo utilizamos para encontrar los parámetros $(\eta_0, \mu'_0, \sigma'_0)$ asociados a la distribución log-normal para una variable X que en el estado bajo control presenta media μ_0 , desviación σ_0 y coeficiente de asimetría γ_0 conocidos. Los parámetros obtenidos son empleados para definir la ubicación de las dimensiones de las galgas 2-step. Después de simplificar se obtienen las siguientes expresiones:

$$S = X_{fq_0} = \eta_0 + e^{(\mu'_0 + \sigma'_0 Z_{fq_0})} = \mu_0 + \frac{\sigma_0 e^{\left(\frac{-\sigma_0'^2}{2} + \sigma_0' Z_{fq_0}\right)}}{\sqrt{e^{\sigma_0'^2} - 1}}, \quad (5.21)$$

$$L = X_{1-(1-f)q_0} = \eta_0 + e^{(\mu'_0 + \sigma'_0 Z_{1-(1-f)q_0})} = \mu_0 + \frac{\sigma_0 e^{\left(\frac{-\sigma_0'^2}{2} + \sigma_0' Z_{1-(1-f)q_0}\right)}}{\sqrt{e^{\sigma_0'^2} - 1}}. \quad (5.22)$$

Aquí σ'_0 es la raíz de la ecuación 5.17 que satisface $\gamma = \gamma_0$ (Paso 1 del procedimiento).

Suponiendo que en el estado fuera de control la asimetría permanece constante $\gamma = \gamma_0$, pero la media se desplaza a $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y la desviación estándar se incrementa a $\sigma_1 = r\sigma_0$, deducimos la equivalencia entre los parámetros de la distribución log-normal en los estados bajo y fuera de control.

$$\sigma'_1 = \sigma'_0, \quad \mu'_1 = \log(r) + \mu'_0, \quad \eta_1 = \eta_0 + e^{(\mu'_0 + \sigma_0'^2/2)} \left((1-r) + \delta\sqrt{e^{\sigma_0'^2} - 1} \right). \quad (5.23)$$

Finamente, para calcular las probabilidades q_s , q_L de clasificar una pieza por debajo y por encima de las dimensiones de la galga con el proceso en el estado fuera control, las equivalencias obtenidas en (5.23) y la ubicación de las galgas que se definen en

(5.21)- (5.22) se reemplazan en la función de distribución acumulativa (5.14). Luego de simplificar se obtienen las siguientes expresiones:

$$q_S = F_X(S|\eta_1, \mu'_1, \sigma'_0) = \Phi \left(Z_{f q_0} + \frac{1}{\sigma'_0} \log \left(\frac{1}{r} + e^{(\sigma'_0 Z_{f q_0} + \sigma'^2_0/2)} \left(\left(1 - \frac{1}{r} \right) - \frac{\delta}{r} \sqrt{e^{\sigma'^2_0} - 1} \right) \right) \right), \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} q_L &= 1 - F_X(L|\eta_1, \mu'_1, \sigma'_0) = \\ &= 1 - \\ &\quad - \Phi \left(Z_{1-(1-f)q_0} + \frac{1}{\sigma'_0} \log \left(\frac{1}{r} + e^{(\sigma'_0 Z_{1-(1-f)q_0} + \sigma'^2_0/2)} \left(\left(1 - \frac{1}{r} \right) - \frac{\delta}{r} \sqrt{e^{\sigma'^2_0} - 1} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.1.3. Adaptación para la distribución Weibull

Los orígenes de la distribución Weibull son anteriores a la década de 1920. Frechet (1927) fue el primero en obtenerla como una distribución para modelar valores extremos. Posteriormente Rosin y Rammler (1933) la utilizaron para describir el comportamiento del tamaño de una partícula en un proceso de triturado. Sin embargo, su gran difusión y extensiva aplicación se logra después de los trabajos de Weibull (1939, 1951). Actualmente esta distribución suele emplearse para modelar variables de tiempo de vida y variables aleatorias en las áreas de la hidrología, climatología, economía, actuaría e ingeniería. Extensas revisiones de la distribución Weibull y de sus aplicaciones se encuentra disponibles en el trabajo de Hallinan (1993) y en el libro de texto de Rinne (2008).

Las funciones de densidad y de probabilidad acumulada para una variable aleatoria Weibull se definen como:

$$f_X(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{x - \eta}{a} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x - \eta}{a} \right)^b}, \quad -\infty < \eta < x < \infty, \quad a, b > 0. \quad (5.26)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x - \eta}{a} \right)^b}. \quad (5.27)$$

Aquí (η, a, b) son los parámetros de localización, escala y forma de la distribución. La distribución Weibull puede ser vista como una familia de distribuciones que incluye como casos especiales a la distribución Exponencial ($b = 1$), a la distribución de Rayleigh ($b = 2$) y, bajo la transformación $Y = \log(X)$, a la distribución de Gumbel.

La media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría de una variable Weibull corresponden a:

$$\mu = E(X) = \eta + a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right), \quad (5.28)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = a \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)}, \quad (5.29)$$

$$\gamma = CA(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{b}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{b}\right)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right)^{3/2}}. \quad (5.30)$$

Aquí $\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t} dt$ es la función gamma, la cual extiende el concepto de número factorial a los números reales. Esta función cumple que $\Gamma(c) = (c - 1)\Gamma(c - 1)$ y particularmente $\Gamma(c) = (c - 1)!$ cuando c es un número entero. Su derivada, corresponde a $\Gamma'(c) = \Gamma(c)\psi(c)$, donde $\psi(c) = \gamma' + \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{c+j-1}\right)$ es la función digamma y $\gamma' \approx 0.57715665$ es la constante de Euler-Mascheroni. Estas propiedades de la función gamma serán empleadas en desarrollos posteriores.

Como se observa en la ecuación 5.30, el parámetro de forma b determina la asimetría de la distribución Weibull. Con $0.5 < b < 2.7$ la distribución es asimétrica positiva ($6.6 < \gamma < 0.275$) y con $5.2 < b < 39$ es asimétrica negativa ($-0.275 < \gamma < -1$). En el rango $2.7 < b < 5.2$ la distribución Weibull es aproximadamente simétrica ($-0.275 < \gamma < 0.275$) y con $b \approx 3.6$ es muy similar a una densidad normal. La Figura 5.3 muestra el efecto de la variación del parámetro b sobre la forma de la distribución Weibull. En el recuadro interno de la figura se representa la relación entre γ y b .

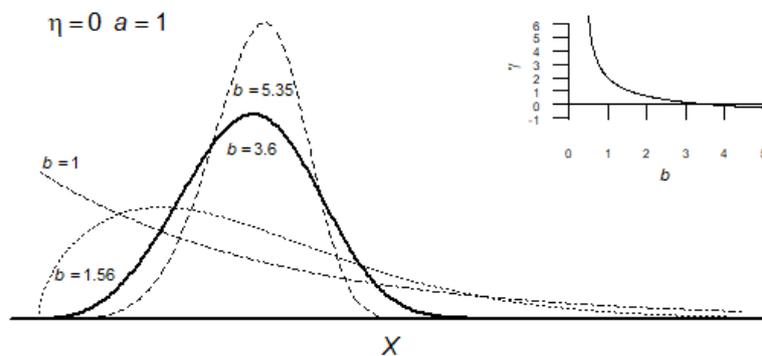


Figura 5.3. Efecto de la variación del parámetro de forma sobre la asimetría de la densidad Weibull ($\eta = 0, a = 1, b$)

Los parámetros (η, a, b) pueden deducirse para valores conocidos de la media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría (μ, σ, γ) de la distribución. Para lo cual desarrollamos el siguiente procedimiento:

1. Para el valor γ conocido se halla la raíz b que satisface la ecuación 5.30, lo cual no tiene solución analítica. Sin embargo, dado que γ es una función monótona decreciente de b (ver recuadro en Figura 5.3), nos apoyamos en el método de Newton Raphson para hallar esta raíz. Para esto, la ecuación 5.30 se expresa como:

$$f(b) = \Gamma_3 - 3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\Gamma_1^3 - \gamma(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (5.31)$$

con derivada:

$$f'(b) = -\frac{3}{b^2} \left(\Gamma_3\Psi_3 - \Gamma_1\Gamma_2(\Psi_1 - 2\Psi_2) + \Gamma_1^3\Psi_1 - \gamma(\Gamma_1\Psi_2 - \Gamma_1^2\Psi_1)\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2} \right). \quad (5.32)$$

Por simplicidad, en las ecuaciones 5.31 y 5.32 hemos empleado la notación Γ_i y ψ_i para referirnos a los términos $\Gamma\left(1 + \frac{i}{b}\right)$ y $\psi\left(1 + \frac{i}{b}\right)$ respectivamente.

2. Los valores de b (obtenido en el paso 1) y σ se utilizan para despejar a desde la ecuación 5.29. Al simplificar se obtiene:

$$a = \frac{\sigma}{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}}. \quad (5.33)$$

3. Con los valores b, a (obtenidos en los pasos 1 y 2) y μ , se despeja η desde la ecuación 5.28.

$$\eta = \mu - a\Gamma_1. \quad (5.34)$$

El procedimiento anterior es empleado para deducir los parámetros de una variable Weibull que en el estado bajo control presenta $(\mu_0, \sigma_0, \gamma_0)$ conocidos. Una vez hallados los valores (η_0, a_0, b_0) , se deducen las expresiones que definen las dimensiones de la galga 2-step:

$$S = X_{fq_0} = \eta_0 + a_0(-\log(1 - fq_0))^{\frac{1}{b_0}} = \mu_0 + \frac{\sigma_0\Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}}(-\log(1 - fq_0))^{\frac{1}{b_0}}, \quad (5.35)$$

$$L = X_{1-(1-f)q_0} = \eta_0 + a_0(-\log((1 - f)q_0))^{\frac{1}{b_0}} = \mu_0 + \frac{\sigma_0\Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}}(-\log((1 - f)q_0))^{\frac{1}{b_0}}. \quad (5.36)$$

Aquí b_0 es la raíz de la ecuación 5.31 que satisface $\gamma = \gamma_0$ (Paso 1 del procedimiento).

Suponiendo que en el estado fuera de control la asimetría permanece constante $\gamma = \gamma_0$, pero la media se desplaza a $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y la desviación estándar se incrementa a $\sigma_1 = r\sigma_0$, deducimos la equivalencia entre los parámetros de la distribución Weibull en los estados bajo y fuera de control.

$$b_1 = b_0, \quad a_1 = ra_0, \quad \eta_1 = \eta_0 + a_0(\Gamma_1(1 - r) + \delta\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}). \quad (5.37)$$

Estos nuevos parámetros se utilizan para calcular las probabilidades q_S , q_L de clasificar una pieza por debajo y por encima de las dimensiones de la galga con el proceso en el estado fuera control. Luego de simplificar se obtienen las siguientes expresiones:

$$q_S = F_X(S|\eta_1, a_1, b_0) = 1 - e^{\frac{1}{r^{b_0}}\left((-\log(1-fq_0))^{\frac{1}{b_0}} - \Gamma_1(1-r) - \delta\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}\right)^{b_0}}, \quad (5.38)$$

$$q_L = 1 - F_X(L|\eta_1, a_1, b_0) = e^{\frac{1}{r^{b_0}}\left((-\log((1-f)q_0))^{\frac{1}{b_0}} - \Gamma_1(1-r) - \delta\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}\right)^{b_0}}. \quad (5.39)$$

5.2. Diseño óptimo del esquema wY_sY_L en distribuciones asimétricas

En el planteamiento de este nuevo problema de optimización se tienen en consideración algunas condiciones que no fueron requeridas en el caso de la distribución normal (ver capítulo 4). Por ejemplo, en el control de la media de una variable con distribución normal o simétrica, bajo las dimensiones simétricas de la galga 2-step, se garantiza que la curva ARL de cualquier configuración del esquema wY_sY_L será simétrica e insesgada. En la adaptación para distribuciones asimétricas las dos propiedades anteriores están garantizadas. Por el contrario, sucede que casi siempre esta curva ARL es asimétrica y en muchas ocasiones altamente sesgada.

El problema de una curva ARL-sesgada se relaciona con la existencia de algún nivel de cambio en la media, para el cual el tiempo medio de detección será superior al tiempo medio entre falsas alarmas. De otro lado, una curva ARL excesivamente asimétrica indica que el esquema tiene muy buen desempeño para detectar cambios de la media en una de las direcciones, pero su desempeño puede ser muy pobre para cambios en la dirección contraria. Este desbalance en el desempeño, es un inconveniente de diseño si recordamos que el esquema $wY_S Y_L$ fue concebido para detectar oportunamente cambios bidireccionales en la media (incrementos/decrementos) y/o incrementos en la varianza.

Para balancear, más no necesariamente igualar, el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ en ambas direcciones de cambio de la media, y garantizar la obtención de una curva ARL-insesgada para la media, hemos realizado algunos ajustes a nuestra propuesta de diseño óptimo. Entre los cuales se encuentran permitir un desbalance entre las probabilidades de los intervalos extremos de la galga y modificar la función objetivo.

En el caso de distribuciones asimétricas, la optimización se orienta a encontrar la configuración (w, UCL, q_0, f) que, para una distribución de probabilidad (*Dist*) con coeficiente de asimetría (γ) y un tamaño de muestra fijo (n), cumple con la restricción $ARL_0 = ARL_0^*$ y minimiza el más alto de los ARL_1 evaluados en las dos direcciones de cambio. Esto es equivalente a minimizar $ARL_{1,max} = \max(ARL_{1^+} = ARL(+\delta^*, r^*), ARL_{1^-} = ARL(-\delta^*, r^*))$. Nótese que cuando el esquema $wY_S Y_L$ se optimiza para un cambio solo de la desviación (esto es, $\delta^* = 0$ y $r^* > 1$), el problema de asimetría y de sesgo de la curva ARL son irrelevantes. Esto debido a que no existe interés en detectar decrementos en la desviación. En este caso la función objetivo se simplifica a $ARL_{1,max} = ARL(0, r^*)$.

Complementariamente, hemos incluido una restricción adicional al problema de optimización, con el objetivo de garantizar que la curva ARL del esquema $wY_S Y_L$ óptimo es insesgada, o cuasi insesgada (sesgo despreciable). Esta restricción solo se activa cuando el punto de optimización incluye un cambio en la media ($\delta^* \neq 0, r^*$). Si el punto de optimización es un cambio solo de la desviación estándar, la restricción se inactiva.

En la formulación de esta restricción hemos tenido en cuenta que una curva ARL puede ser considerada cuasi insesgada, cuando se satisface que para cambios muy pequeños del parámetro ($\theta = \theta_0 \pm \varepsilon$), ambos valores del ARL son inferiores al ARL_0 objetivo (ARL_0^*). Esto es equivalente a verificar que $\max(ARL(\delta = \varepsilon, r = 1), ARL(\delta = -\varepsilon, r = 1)) < ARL_0^*$. En nuestro diseño hemos definido $\varepsilon = 0.02$, que representa nuestro

máximo sesgo tolerable en la curva ARL de la media. Con las consideraciones anteriores, el nuevo problema de optimización es formulado como:

Dados:	$(\text{Dist}, \gamma, n, \text{ARL}_0^*, \delta^*, r^*)$. (Establecidos por el usuario)
Encontrar:	(w, UCL, q_0, f) .
Que minimizan:	$\text{ARL}_{1.\text{max}} = \max(\text{ARL}_{1^+}, \text{ARL}_{1^-})$.
Sujeto a las restricciones:	$\text{ARL}_0 = \text{ARL}_0^*$. (Restricción 1) $\max(\text{ARL}(-\varepsilon, 1), \text{ARL}(\varepsilon, 1)) < \text{ARL}_0^*$ (Restricción 2) $w \in [-n, 1]$, $\text{UCL} \in (0, n]$, $f, q_0 \in (0, 1)$, $0.005 < \min(fq_0, (1-f)q_0) < 0.495$.

La última restricción se incluye para evitar que alguna de las probabilidades $fq_0 = fq_0$, $q_{L0} = (1-f)q_0$ asuman valores demasiado pequeños, o demasiado grandes, bajo los cuales se dificulte la labor del diseño de la galga 2-step. Recordemos que con probabilidades fq_0 o q_{L0} muy pequeñas, las dimensiones de las galgas pueden ser demasiado amplias, mientras que un valor de 0.5 para alguna de estas probabilidades, es equivalente a diseñar una galga go/nogo.

Para solucionar el problema de optimización, nos apoyaremos nuevamente en las propiedades de la función ARL_0 . En la sección 5.1 se mencionó que el ARL_0 del esquema $wY_S Y_L$ no depende de la distribución de la variable y en la sección 4.2 se mostró que el ARL_0 es una función decreciente de q_0 para valores fijos de (n, w, UCL) . Esta propiedad se sigue cumpliendo para un valor fijo del nuevo parámetro f . Lo anterior garantiza que si fijamos valores para (n, w, UCL, f) existirá como máximo una raíz q_0^* que satisface la restricción $\text{ARL}_0 = \text{ARL}_0^*$. De nuevo utilizamos el método de Newton Raphson para hallar la raíz q_0^* de la ecuación equivalente:

$$f(q_0) = \text{ARL}_0^* \sum_{\{y_S, y_L\} \in \Omega_1} \sum_{\{y_S, y_L\} \in \Omega_1} \left(\frac{n! (fq_0)^{y_S+y_L} (f)^{y_S} (1-f)^{y_L} (1-q_0)^{n-y_S-y_L}}{y_S! y_L! (n-y_S-y_L)!} \right) - 1, \quad (5.40)$$

cuya derivada $f'(q_0)$ es:

$$f'(q_0) = \text{ARL}_0^* \sum_{\{y_S, y_L\} \in \Omega_1} \sum_{\{y_S, y_L\} \in \Omega_1} \left(\frac{n! (y_S + y_L - nq_0)}{y_S! y_L! (n - y_S - y_L)!} f^{y_S} (1 - f)^{y_L} q_0^{y_S + y_L - 1} (1 - q_0)^{n - y_S - y_L - 1} \right). \quad (5.41)$$

Apoyados en esta propiedad, modificamos el algoritmo que fue empleado en la optimización del esquema para una variable normal, incluyendo la verificación de la restricción de sesgo y la búsqueda del nuevo parámetro f . Bajo esta modificación, el algoritmo es general y puede ser empleado para obtener los parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ para el control de una variable con distribución normal o con distribución asimétrica (log-normal, skew-normal, Weibull). El nuevo Pseudo código se describe a continuación:

Paso 0: Se crean los conjuntos ordenados $W = \{w_1 < w_2 < w_3, \dots, < w_i <, \dots, < w_{max}\}$, $-n < w_1 \leq w_{max} \leq 1$, para la exploración del peso del esquema $wY_S Y_L$, y $F = \{f_1 < f_2 < f_3, \dots, < f_h <, \dots, < f_{max}\}$, $0 < f_1 \leq f_{max} < 1$, para explorar las ubicaciones alternativas de las dimensiones de la galga (sugerencia: $w_1 = -2$, $w_{max} = 1$ y $\nabla w = 0.1$; $f_1 = 0.05$, $f_{max} = 0.95$ y $\nabla f = 0.025$).

Paso 1: Se selecciona un valor w_i desde el conjunto W y se aplica el estadístico $\max(w_i y_S + y_L, y_S + w_i y_L)$ sobre todos los elementos de Ω . Como resultado se conforma el conjunto ordenado $UCL_i = \{ucl_{i1} < ucl_{i2} \dots < ucl_{ij} < \dots < ucl_{ij}\}$ que contiene los J posibles ubicaciones de UCL.

Paso 1.1: Se selecciona un valor ucl_{ij} desde el conjunto UCL_i .

Paso 1.1.1: Se fijan los valores w_i , ucl_{ij} y se selecciona un valor f_h desde el conjunto F , verificando la existencia de la raíz q_{ijh}^* que satisface $\text{ARL}_0 = \text{ARL}_0^*$ para (n, w_i, ucl_{ij}, f_h) . Si la raíz q_{ijh}^* existe, se realizan los pasos 1.1.1.1 a 1.1.1.4, de lo contrario se salta al paso 1.1.2.

Paso 1.1.1.1: Se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson para hallar la raíz q_{ijh}^* , solución a la ecuación 4.6, para (n, w_i, ucl_{ij}, f_h) .

Paso 1.1.1.2: Si $\delta^* > 0$. Se realiza el paso 1.1.1.3, de lo contrario se salta al paso 1.1.1.4.

Paso 1.1.1.3: Se verifica que la configuración $(n, w_i, ucl_{ij}, f_h, q_{ijh}^*)$ satisface la Restricción 2. Si la restricción se satisface, se ejecuta el paso 1.1.1.4, de lo contrario se salta al paso 1.1.2.

Paso 1.1.1.4: Con los valores $(n, w_i, ucl_{ij}, f, q_{ijh}^*)$ y las magnitudes de cambio (δ^*, r^*) , se calcula $\max(ARL_{1^+} = ARL(+\delta^*, r^*), ARL_{1^-} = ARL(-\delta^*, r^*))$.

Paso 1.1.2: Se repite el paso 1.1.1 con el siguiente valor f_h , hasta completar el conjunto F .

Paso 1.2: Se repite el paso 1.1 con el siguiente valor UCL_i hasta completar el conjunto UCL_i .

Paso 2: Se repite el paso 1 con el siguiente valor w_i . El procedimiento finaliza cuando se ha explorado todo el conjunto W .

Paso 3: El mínimo $ARL_{1,max}$ y sus parámetros asociados $(n, w_i, ucl_{ij}, f_h, q_{ijh}^*)$ corresponden a la solución óptima.

De forma particular, si en el Paso 1 se define el conjunto unitario $F = \{1/2\}$, el procedimiento busca el mejor esquema $wY_S Y_L$ dentro del conjunto de esquemas con dimensiones de la galga 2-step que generan colas equiprobables en la distribución de la variable. Complementariamente, el usuario tiene la posibilidad de desactivar/activar la verificación del sesgo (paso 1.1.1.3) de acuerdo con su tolerancia/no tolerancia de una condición de sesgo en la curva ARL. Finalmente, si se adapta el cálculo del ARL_1 en el paso 1.1.1.4, el algoritmo puede ser extendido para nuevas distribuciones de probabilidad no contempladas en este trabajo.

Esta rutina de optimización fue programada en funciones del Software R (R Core Team, 2018) (Ver Anexo C). Como resultado, la rutina entrega la mejor configuración hallada y una hoja de cálculo con el listado descendente (de mejor a peor desempeño) de todas las configuraciones que cumplen con las restricciones del problema. Esta hoja de cálculo se suministra con la intención de que el usuario pueda conocer el desempeño de configuraciones alternativas y optar por una solución simple de buen desempeño. Por ejemplo, puede ser más sencillo implementar un esquema con $w = 1, 0, -1$, que un esquema con valor no entero para w .

Para ilustrar el diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$ desarrollaremos el siguiente caso de ejemplo:

Supongamos una variable de calidad que en el estado bajo control presenta una distribución Weibull con $\mu_0 = 10, \sigma_0 = 2$ y $\gamma = 1.75$, equivalente a $X \sim Weibull(\eta = 7.816, a = 2.259, b = 1.093)$. Se desea implementar un

esquema $wY_S Y_L$ para detectar un cambio en la media al nivel $\mu_1 = 11.2$ ($\delta^* = 0.6$), con tamaño de muestra $n = 5$ y que satisfaga la condición $ARL_0 = 370$.

La Figura 5.4 muestra la curva ARL de los esquemas óptimos obtenidos cuando la optimización fue realizada para las condiciones: a. $f = 1/2$, sin restricción de sesgo; b. f óptimo, sin restricción de sesgo; c. f óptimo con restricción de sesgo. En el recuadro de la derecha se presentan los parámetros óptimos para cada caso.

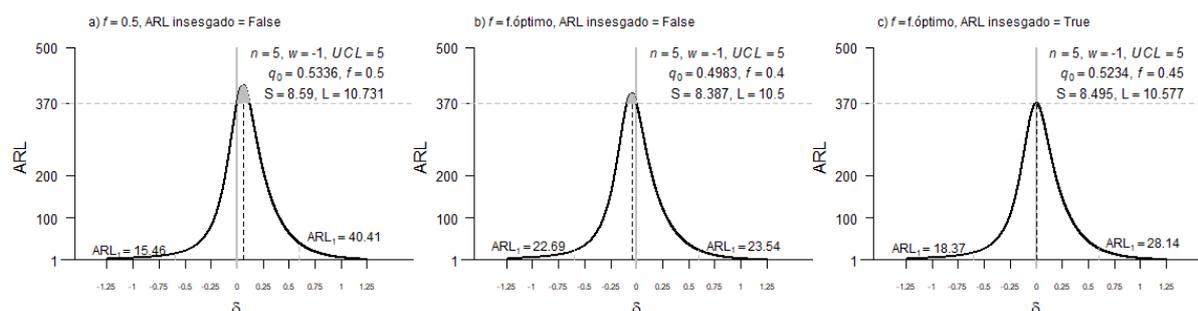


Figura 5.4. Curvas ARL de los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ para el ejemplo de aplicación:

$$X \sim Weibull(\mu_0 = 10, \sigma_0 = 2, \gamma = 1.75), ARL_0^* = 370, n = 5, \delta^* = 0.6, r^* = 1.$$

Como se puede observar en la Figura 5.4, con el valor fijo $f = 1/2$ (condición a) el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ en el punto de optimización fue el más limitado ($ARL_{1+} = 40.41$), mientras que su desempeño en la dirección contraria es notablemente mejor ($ARL_{1-} = 15.46$). Bajo la condición b, al incluir el parámetro f en la optimización, se obtuvo una mejora notable del desempeño en el punto de optimización ($ARL_{1+} = 23.54$) y un balance casi perfecto con su desempeño en la dirección contraria ($ARL_{1-} = 22.69$). En ambos casos las curvas ARL presentan un sesgo (zona sombreada), que es de menor magnitud bajo la condición b.

Finalmente, se obtuvo una curva ARL insesgada cuando se activó la restricción de ARL-sesgo (caso c). Bajo la restricción, se incrementó ligeramente el ARL_1 del punto de optimización ($ARL_{1+} = 28.14$) y se generó un pequeño desbalance con el desempeño del esquema en la dirección contraria ($ARL_{1-} = 18.37$). A pesar de ello, tanto el desempeño en el punto de optimización, como el balance con el desempeño en la dirección contraria, son bastante mejores que lo obtenido bajo la condición a, y no muy lejanos del desempeño observado bajo la condición b.

En la sección 5.3 se presenta una evaluación mucho más amplia del desempeño del esquema $wY_S Y_L$ para el control de variables con distribuciones asimétricas, en la cual se consideran diferentes condiciones de diseño.

5.3. Evaluación del desempeño del esquema wY_sY_L en distribuciones asimétricas

En esta sección se reportan los resultados que se obtuvieron cuando el esquema wY_sY_L fue optimizado para las tres distribuciones de probabilidad: skew-normal, log-normal y Weibull. Estas optimizaciones fueron realizadas para un $ARL_0^* = 370$ y variación del tamaño de la muestra ($n = 5, 10, 15, 30$), del coeficiente de asimetría (γ) y de las magnitudes de cambio en la media (δ^*) y en la desviación estándar (r^*).

En el reporte solo se incluyen los resultados para coeficientes de asimetría positivos ($\gamma = 0.5, 1.0, 2.0$). Esto debido a que la solución óptima (w, UCL, q_0, f) para una distribución asimétrica positiva, es equivalente a la que se obtendrá para la imagen de esta distribución, la cual tiene la misma magnitud de asimetría en el sentido negativo. Para hacer la equivalencia entre las dos soluciones, solo se requiere cambiar el valor de la fracción f por su complemento $1-f$, con lo cual la solución óptima para la distribución asimétrica negativa será ($w, UCL, q_0, 1-f$). En el caso de la distribución skew-normal, cuyo coeficiente de asimetría está acotado en el rango $(-1, 1)$, la optimización se realizó para los valores ($\gamma = 0.5, 0.99$).

Debido a la abundancia de parámetros (w, UCL, q_0, f), y a la sensibilidad de los mismos, suele suceder que con una ligera modificación del punto de optimización (δ^*, r^*) la solución óptima presenta variación. Esto conlleva a que las soluciones sean aparentemente inestables o poco robustas. Para agregar un poco de robustez a los resultados y simplificar el reporte, reportamos una solución cuasi-óptima, en lugar de la solución óptima. Para ello reordenamos todo el subconjunto de soluciones que satisfacen las restricciones de diseño y cuyo valor $ARL_{1,max}$ es prácticamente igual al de la solución óptima (máximo un deterioro del 2.5% respecto al $ARL_{1,max}$ óptimo). Estas soluciones son ordenadas en función de la sencillez operativa de su implementación práctica. Para lo cual tenemos en consideración que las soluciones con w entero, ($w = 1, -1, 0, 2$), en ese orden, son más sencillas de implementar que una solución con w no entero. Como un segundo criterio de ordenamiento, otorgamos prioridad a aquella solución con $f \approx 0.5$. Luego del ordenamiento, la primera de estas soluciones es seleccionada como la más sencilla solución con desempeño cuasi equivalente a la solución óptima.

Las Tabla 5.1 presenta los ARL_1 obtenidos en la optimización del esquema wY_sY_L para cambios solo en la desviación ($\delta^* = 0, r^* > 1$). Dado que el insesgamiento de la curva ARL no es una propiedad requerida para el control de la desviación estándar, las optimizaciones se realizaron sin considerar la restricción de ARL-sesgo. El supraíndice

que acompaña cada ARL_1 representa el número asociado a la configuración cuasi óptima para el punto de optimización. El listado con todas las soluciones obtenidas se presenta en la Tabla 5.2.

Tabla 5.1. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Incrementos de la desviación estándar (r^*), $ARL_0 = 370$.

n	r^*	$max (ARL_1^+ ; ARL_1^-)$							
		$\gamma = 0.5$			$\gamma = 1.0$			$\gamma = 2.0$	
		skew-normal	log-normal	Weibull	*skew-normal	log-normal	Weibull	log-normal	**Weibull
5	1.25	33.80 ¹	33.37 ¹	18.93 ¹	6.45 ¹	26.91 ¹	10.41 ¹	15.22 ¹	3.68 ¹
	1.50	9.42 ¹	9.38 ¹	5.76 ¹	2.75 ¹	7.53 ¹	3.74 ¹	4.55 ¹	1.98 ¹
	1.75	4.50 ¹	4.52 ¹	3.11 ¹	1.89 ¹	3.79 ¹	2.32 ¹	2.60 ¹	1.53 ¹
	2.00	2.86 ¹	2.88 ¹	2.17 ¹	1.54 ¹	2.53 ¹	1.77 ¹	1.92 ¹	1.34 ¹
	2.25	2.13 ¹	2.15 ¹	1.74 ¹	1.36 ¹	1.95 ¹	1.50 ¹	1.60 ¹	1.24 ¹
	2.50	1.75 ¹	1.77 ¹	1.50 ¹	1.25 ¹	1.65 ¹	1.35 ¹	1.42 ¹	1.17 ¹
10	1.25	21.70 ¹	21.57 ¹	10.96 ²	3.01 ²	16.95 ²	4.83 ²	7.51 ²	1.72 ²
	1.50	5.33 ¹	5.34 ¹	3.29 ²	1.55 ²	4.29 ²	1.98 ²	2.31 ²	1.20 ²
	1.75	2.56 ¹	2.58 ¹	1.91 ²	1.34 ¹	2.25 ¹	1.41 ²	1.50 ²	1.17 ¹
	2.00	1.72 ¹	1.74 ¹	1.44 ²	1.16 ¹	1.59 ¹	1.27 ¹	1.32 ¹	1.08 ¹
	2.25	1.38 ¹	1.39 ¹	1.24 ²	1.08 ¹	1.31 ¹	1.14 ¹	1.17 ¹	1.05 ¹
15	1.25	15.44 ¹	15.24 ¹	7.96 ¹	2.55 ¹	11.81 ¹	4.15 ¹	6.16 ¹	1.59 ¹
	1.50	3.54 ¹	3.53 ¹	2.25 ¹	1.29 ¹	2.86 ¹	1.59 ¹	1.84 ¹	1.11 ¹
	1.75	1.79 ¹	1.79 ¹	1.38 ¹	1.09 ¹	1.57 ¹	1.18 ¹	1.25 ¹	1.03 ¹
30	1.25	7.78 ¹	7.77 ¹	4.05 ²	1.47 ²	5.88 ²	2.13 ²	2.80 ³	1.12 ¹
	1.50	1.86 ¹	1.87 ¹	1.41 ¹	1.06 ¹	1.62 ¹	1.16 ¹	1.24 ¹	1.01 ¹
	1.75	1.17 ¹	1.18 ¹	1.07 ¹	1.01 ¹	1.12 ¹	1.02 ¹	1.03 ¹	1.00 ¹

* Corresponde a $\gamma = 0.99$.

** Equivalente a una distribución exponencial de 2 parámetros.

Tabla 5.2. Listado de configuraciones cuasi óptimas del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Incrementos de la desviación estándar (r^*), $ARL_0 = 370$.

$n = 5$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 10$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 15$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 30$ (w, UCL, q_0, f)
(1.0, 2.0, 0.0167, 0.500) ¹	(1.0, 3.0, 0.0298, 0.500) ¹ (0.0, 2.0, 0.0111, 0.500) ²	(1.0, 3.0, 0.0192, 0.500) ¹	(1.0, 5.0, 0.0327, 0.500) ¹ (0.8, 3.6, 0.0196, 0.500) ² (-0.3, 2.7, 0.0144, 0.575) ³

Según los datos de la Tabla 5.1, una mayor asimetría de la distribución agrega más sensibilidad el esquema $wY_S Y_L$ para detectar incrementos de la desviación estándar. Por ejemplo, en la distribución log-normal con asimetría $\gamma = 0.5$ y tamaño de muestra $n = 5$, se obtuvo un $ARL_1 = 9.38$ para un incremento del 50% en la desviación estándar

($r^* = 1.5$). En esta misma distribución, con asimetrías $\gamma = 1.0, 2.0$ y el mismo tamaño de muestra, los ARL_1 's se reducen a 7.53 y 4.55 respectivamente. Una reducción similar se observa para todas las distribuciones y cualquier incremento de la desviación. Adicionalmente se observa que, a pesar de la igualdad entre la media, la desviación estándar y la asimetría de las tres distribuciones, el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ no es el mismo. La variación en el desempeño es consecuencia de las diferentes formas que adquieren las colas de las 3 distribuciones. Una cola inferior muy corta, mejora la sensibilidad del esquema $wY_S Y_L$ para detectar los incrementos de la desviación estándar. Esta forma es característica de la distribución Weibull y de la distribución skew-normal con $\gamma \approx 1$.

Al verificar las soluciones en la Tabla 5.2, se puede notar que para cada tamaño de muestra $n = 5, 15$ se obtuvo una configuración común para todas las distribuciones. El desempeño de estas configuraciones fue óptimo o casi óptimo, para todas las magnitudes de incremento (r^*) evaluadas. Ambas soluciones presentan un peso óptimo $w = 1$ y dimensiones de la galga con balance en las probabilidades sobre las colas de la distribución ($f = 0.5$). Para los tamaños de muestra $n = 10, 30$, prevalecen las soluciones con peso $w = 1$ y $f = 0.5$. Esta configuración se obtuvo para las distribuciones con baja asimetría ($\gamma = 0.5$), a excepción de la distribución Weibull, y en distribuciones con mayor asimetría ($\gamma = 1.0, 2.0$), cuando el factor de incremento r^* fue grande o moderado. Nótese que las configuraciones con peso $w \neq 1$ solo se presentaron en la distribución Weibull ($\gamma = 0.5$) o para pequeños incrementos de la desviación estándar.

Desde el análisis anterior se deduce que, similar que en la distribución normal, la suma de los conteos $Y_S + Y_L$ es también una buena alternativa para el control de la desviación en distribuciones asimétricas. Adicionalmente, dado que en el control de la desviación no se requiere garantizar una curva ARL insesgada, un diseño de galga 2-step con dimensiones que generan equiprobabilidad sobre las colas de la distribución es también una buena alternativa.

En la Tabla 5.3 se resumen los resultados de las optimizaciones del esquema $wY_S Y_L$ para cambios solo en la media ($\delta^* \neq 0, r^* = 1$). En estas optimizaciones se activa la restricción de ARL-sesgo y se minimiza el mayor de los ARL_1 en las dos direcciones de cambio. Esta función objetivo garantiza que el resultado es el mismo para incrementos o decrementos de la misma magnitud absoluta ($|\delta^*|$), por esta razón solo se reportan los resultados para incrementos de la media ($\delta^* > 0$).

Tabla 5.3. ARL_1 's óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Cambios en la media (δ^*), $ARL_0 = 370$.

		(ARL ₁ ⁺ - ARL ₁ ⁻)							
n	δ^*	$\gamma = 0.5$			$\gamma = 1.0$			$\gamma = 2.0$	
		skew-normal	log-normal	Weibull	*skew-normal	log-normal	Weibull	log-normal	**Weibull
5	0.25	(168.5 - 141.3) ¹	(162.8 - 147.1) ¹	(165.1 - 141.5) ¹	(147.5 - 95.6) ²	(159.7 - 149.7) ³	(163.4 - 103.1) ⁴	(148.9 - 74.3) ⁴	(142.7 - 40.1) ⁵
	0.50	(55.0 - 35.8) ¹	(51.7 - 38.2) ¹	(53.5 - 37.9) ¹	(55.7 - 22.5) ²	(49.3 - 41.5) ³	(58.2 - 43.6) ³	(51.0 - 14.1) ⁴	(55.5 - 8.9) ⁵
	0.75	(20.3 - 12.1) ¹	(18.8 - 13.0) ¹	(20.1 - 13.4) ¹	(23.3 - 8.5) ²	(17.1 - 15.4) ³	(21.1 - 16.9) ³	(18.7 - 5.2) ⁴	(22.1 - 4.0) ⁵
	1.00	(8.6 - 5.4) ¹	(8.0 - 5.7) ¹	(8.9 - 6.1) ¹	(10.6 - 4.4) ²	(6.9 - 7.4) ³	(8.6 - 8.3) ³	(7.4 - 2.8) ⁴	(9.1 - 2.5) ⁵
	1.25	(4.2 - 3.0) ¹	(4.0 - 3.2) ¹	(4.5 - 3.4) ¹	(5.4 - 2.7) ²	(4.0 - 2.6) ⁴	(3.9 - 4.8) ³	(3.3 - 1.9) ⁴	(3.9 - 1.8) ⁵
	1.50	(2.4 - 2.0) ¹	(2.4 - 2.1) ¹	(2.7 - 2.2) ¹	(3.0 - 1.9) ²	(2.2 - 1.8) ⁴	(2.7 - 1.9) ⁴	(1.7 - 1.5) ⁴	(1.9 - 1.5) ⁵
	1.75	(1.6 - 1.5) ¹	(1.6 - 1.5) ¹	(1.8 - 1.6) ¹	(1.8 - 1.5) ²	(1.5 - 1.5) ⁴	(1.7 - 1.5) ⁴	(1.2 - 1.3) ⁴	(1.1 - 1.3) ⁵
10	0.25	(102.9 - 85.0) ¹	(101.4 - 82.9) ²	(99.2 - 81.7) ³	(79.8 - 60.8) ⁴	(87.3 - 76.6) ⁴	(87.0 - 68.3) ⁴	(63.6 - 53.2) ⁵	(45.6 - 48.6) ⁷
	0.50	(20.7 - 180.7) ¹	(20.3 - 16.9) ²	(22.5 - 19) ²	(19.4 - 12.2) ⁴	(18.7 - 13.7) ⁴	(18.6 - 13) ⁴	(10.8 - 9.6) ⁵	(10.2 - 10.9) ⁷
	0.75	(6.0 - 6.1) ¹	(5.9 - 5.5) ²	(6.6 - 6.2) ²	(7.2 - 4.5) ⁴	(5.7 - 4.5) ⁴	(6.5 - 4.6) ⁴	(3.1 - 3.6) ⁵	(3.6 - 3.4) ⁸
	1.00	(2.5 - 2.9) ¹	(2.5 - 2.6) ²	(2.7 - 2.9) ²	(3.3 - 2.4) ⁴	(2.4 - 2.3) ⁴	(2.9 - 2.4) ⁴	(1.4 - 2.0) ⁵	(1.5 - 2.1) ⁸
	1.25	(1.5 - 1.8) ¹	(1.5 - 1.6) ²	(1.5 - 1.8) ²	(1.8 - 1.6) ⁴	(1.4 - 1.5) ⁴	(1.6 - 1.6) ⁴	(1.3 - 1.2) ⁶	(1.4 - 1.2) ⁹
	1.50	(1.1 - 1.4) ¹	(1.1 - 1.3) ²	(1.2 - 1.3) ²	(1.3 - 1.3) ⁴	(1.1 - 1.2) ⁴	(1.2 - 1.3) ⁴	(1.0 - 1.1) ⁶	(1.0 - 1.1) ⁹
15	0.25	(65.9 - 55.7) ¹	(64.8 - 57.2) ¹	(70.6 - 55.8) ¹	(40.3 - 43.3) ³	(59.3 - 60.1) ¹	(56.4 - 40.1) ⁴	(38.6 - 29.8) ⁸	(25.6 - 19.4) ⁸
	0.50	(10.4 - 9.6) ¹	(10.3 - 9.8) ¹	(11.6 - 9.6) ¹	(8.4 - 7.6) ³	(8.7 - 8.3) ¹	(7.9 - 9.4) ⁵	(5.8 - 4.9) ⁹	(5.4 - 4.5) ¹⁰
	0.75	(2.9 - 3.2) ¹	(2.9 - 3.2) ¹	(3.3 - 3.1) ¹	(3.4 - 2.8) ³	(2.4 - 2.9) ¹	(3.3 - 2.6) ⁶	(2.0 - 1.9) ⁸	(2.0 - 1.8) ⁹
	1.00	(1.5 - 1.5) ²	(1.5 - 1.5) ²	(1.6 - 1.6) ¹	(1.8 - 1.6) ³	(1.3 - 1.6) ¹	(1.6 - 1.5) ⁶	(1.2 - 1.3) ⁸	(1.2 - 1.3) ⁸
30	0.25	(27.2 - 23) ¹	(26.7 - 23.7) ¹	(29.3 - 24.3) ²	(11.6 - 12.2) ³	(21.7 - 21.8) ⁵	(19.8 - 19) ⁶	(12.8 - 12.5) ⁷	(6.3 - 5.5) ⁸
	0.50	(3.4 - 3.2) ¹	(3.3 - 3.3) ¹	(3.7 - 3.4) ²	(2.4 - 2.3) ⁴	(2.8 - 2.8) ¹	(2.5 - 2.4) ⁴	(1.8 - 1.8) ⁸	(1.7 - 1.6) ⁸
	0.75	(1.3 - 1.4) ¹	(1.3 - 1.4) ¹	(1.3 - 1.4) ²	(1.3 - 1.3) ²	(1.2 - 1.3) ¹	(1.2 - 1.3) ²	(1.1 - 1.1) ⁸	(1.1 - 1.1) ⁸

* Corresponde a $\gamma = 0.99$.

** Equivalente a una distribución exponencial de 2 parámetros.

Cada elemento de la Tabla 5.3 corresponde a la pareja (ARL_{1+}, ARL_{1-}) asociada al desempeño del esquema en los puntos de incremento y decremento de la media, además del supraíndice que identifica la solución cuasi óptima seleccionada para el punto de optimización. El listado con todas las configuraciones obtenidas se presenta en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4. Listado de configuraciones cuasi óptimas del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Cambios en la media (δ^*), $ARL_0 = 370$.

$n = 5$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 10$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 15$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 30$ (w, UCL, q_0, f)
(-1.0, 4.0, 0.274, 0.475) ¹	(-2.0, 7.0, 0.523, 0.500) ¹	(-1.0, 9.0, 0.565, 0.500) ¹	(-1.0, 12.0, 0.501, 0.500) ¹
(-1.0, 4.0, 0.266, 0.425) ²	(-1.0, 7.0, 0.505, 0.500) ²	(-1.0, 8.0, 0.433, 0.500) ²	(-1.0, 11.0, 0.415, 0.500) ²
(-1.0, 5.0, 0.531, 0.475) ³	(-1.0, 5.0, 0.216, 0.475) ³	(-2.0, 7.0, 0.335, 0.475) ³	(-1.1, 8.0, 0.231, 0.475) ³
(-1.0, 4.0, 0.271, 0.450) ⁴	(-2.0, 6.0, 0.352, 0.475) ⁴	(-1.0, 7.0, 0.313, 0.475) ⁴	(-1.1, 9.0, 0.320, 0.500) ⁴
(-1.0, 4.0, 0.252, 0.375) ⁵	(-1.0, 7.0, 0.499, 0.475) ⁵	(-1.1, 8.0, 0.486, 0.500) ⁵	(-1.1, 11.8, 0.563, 0.500) ⁵
	(-1.0, 6.0, 0.344, 0.475) ⁶	(-0.1, 8.0, 0.401, 0.475) ⁶	(-1.6, 9.0, 0.353, 0.500) ⁶
	(-2.0, 7.0, 0.516, 0.475) ⁷	(-1.0, 8.0, 0.426, 0.475) ⁷	(-2.0, 9.0, 0.359, 0.500) ⁷
	(-1.0, 7.0, 0.336, 0.450) ⁸	(-0.1, 9.0, 0.510, 0.475) ⁸	(-1.1, 10.0, 0.409, 0.500) ⁸
		(-0.4, 9.0, 0.522, 0.475) ⁹	

Como se puede observar en la Tabla 5.3, el conjunto de soluciones tienden a cambiar cuando se modifica la asimetría de la distribución. Por ejemplo, se observa que con tamaño de muestra $n = 5$ y asimetría $\gamma = 0.5$, la solución 1 $(-1.0, 4.0, 0.274, 0.475)$ es cuasi-óptima para cualquiera de la distribuciones y para cualquier magnitud de cambio (δ^*). Sin embargo, bajo una mayor asimetría ($\gamma = 1.0$), la anterior solución no satisface la restricción de ARL-sesgo. Debido a ello, es descartada como solución al problema y en su lugar surge un nuevo conjunto de soluciones alternativas (soluciones 2 a 4) que si satisfacen la restricción. Situación similar se presenta con un nuevo nivel de asimetría ($\gamma = 2.0$). En este caso las soluciones 2 y 3 no son ARL-insesgadas y surge la solución 5 como alternativa.

Como se observa en la Tabla 5.4, para un tamaño de muestra $n = 5$, las diferencias entre las soluciones 1, 2, 4 y 5 no son sustanciales. Estas soluciones solo difieren ligeramente en los parámetros que definen la ubicación de las dimensiones de la galga (q_0, f). Justamente esta posibilidad de ajustar q_0 y f es la propiedad que permite al esquema $wY_S Y_L$ satisfacer la restricción de ARL-sesgo. Se puede notar que un factor de ajuste ($f < 0.5$) fue requerido cuando el tamaño de la muestra fue insuficiente para garantizar cierta simetría en la distribución del estadístico de control del esquema $wY_S Y_L$. Por ejemplo, con tamaño de muestra $n = 5$ este ajuste fue siempre requerido,

mientras que para tamaños de muestra $n = 10, 15$, el ajuste solo fue requerido para asimetrías moderadas y grandes $\gamma = 1.0, 2.0$, y para $n = 30$ las soluciones tienden a no requerir ningún ajuste.

En cuanto al peso óptimo w , se observa que este fue siempre negativo ($w < 0$), con prevalencia de los pesos enteros $w = -1, -2$. Los pesos w no enteros se presentaron con tamaños de muestra $n = 15, 30$, en donde la abundancia de soluciones es mucho mayor, y bajo asimetrías $\gamma = 1.0, 2.0$.

Finalmente, en las Tabla 5.5 y Tabla 5.6 se presentan los resultados de las optimizaciones del esquema $wY_S Y_L$ para cambios simultáneos en la media y la desviación ($\delta^* > 0, r^* > 1$). En estas optimizaciones también estuvo activa la restricción de ARL-Sesgo para cambios en la media. En la Tabla 5.5 se reporta la pareja (ARL_{1+}, ARL_{1-}) y un supraíndice que indica la solución seleccionada para cada puntos de optimización (δ^*, r^*). El listado de soluciones se presenta en la Tabla 5.6.

Desde la Tabla 5.5 se observa que el conjunto de soluciones varía dependiendo de la distribución de probabilidad, de su asimetría y del equilibrio/desequilibrio entre las magnitudes de cambio δ^* y r^* . Al igual que en el caso de la distribución normal, el peso w tiende a ser positivo cuando el cambio dominante es un cambio en la desviación, y tiende a ser negativo cuando el cambio en la media es el más significativo. Pesos bajos ($w \approx 0$), se observaron para magnitudes de cambio (δ^*, r^*) con un equilibrio relativo.

Con los tamaños de muestra $n = 5, 10, 15$ la solución seleccionada siempre requirió un ajuste de las dimensiones de la galga ($f < 0.5$). Mientras que para $n = 30$ este ajuste no fue requerido por la soluciones óptimas asociadas a cambios grandes en la media y pequeños en la desviación. En estos últimos casos se obtuvo $w = -1$ y $f = 0.5$.

Tabla 5.5. ARL₁'s óptimos del esquema $wY_S Y_L$. Distribuciones asimétricas. Cambios en la media y en la desviación estándar (δ^* , r^*), ARL₀ = 370.

n	γ	δ^*	(ARL ₁ ⁺ - ARL ₁ ⁻)								
			skew-normal			log-normal			Weibull		
			$r^* = 1.2$	$r^* = 1.4$	$r^* = 1.6$	$r^* = 1.2$	$r^* = 1.4$	$r^* = 1.6$	$r^* = 1.2$	$r^* = 1.4$	$r^* = 1.6$
5	0.5	0.2	(52.9 - 39.1) ¹	(16.8 - 12.3) ¹	(7.7 - 6.0) ¹	(54.3 - 38.1) ³	(17.0 - 12.2) ³	(7.7 - 6.0) ³	(46.5 - 20.3) ⁵	(14.9 - 8.1) ⁵	(7.1 - 4.7) ⁵
		0.4	(39.6 - 20.2) ²	(15.8 - 9.0) ¹	(7.8 - 4.8) ¹	(43.6 - 25.8) ⁴	(16.1 - 8.8) ³	(7.8 - 4.8) ³	(32.0 - 10.1) ⁵	(13.9 - 5.3) ⁵	(7.3 - 3.6) ⁵
		0.6	(24.9 - 10.4) ²	(13.2 - 6.3) ¹	(7.2 - 3.8) ¹	(23.6 - 12.6) ⁴	(13.5 - 6.2) ³	(7.2 - 3.8) ³	(19.4 - 5.8) ⁶	(10.6 - 3.7) ⁵	(6.5 - 2.8) ⁵
	1.0	0.2	(55.8 - 5.1) ⁷	(10.6 - 3.3) ⁷	(5.3 - 2.6) ⁷	(68.4 - 40.0) ⁸	(22.6 - 13.5) ⁸	(10.3 - 6.9) ⁸	(73.5 - 21.9) ¹¹	(25.8 - 9.9) ¹¹	(12.0 - 6.0) ¹¹
		0.4	(40.4 - 2.9) ⁷	(18.8 - 2.3) ⁷	(8.0 - 2.1) ⁷	(51.2 - 16.2) ⁹	(22.8 - 9.1) ⁸	(11.1 - 5.3) ⁸	(47.1 - 11.0) ¹²	(26.0 - 5.9) ¹¹	(13.9 - 4.3) ¹¹
		0.6	(26.0 - 4.4) ⁷	(14.6 - 1.8) ⁷	(9.6 - 1.7) ⁷	(28.2 - 13.6) ¹⁰	(19.3 - 6.1) ⁸	(10.7 - 4.0) ⁸	(27.1 - 5.7) ¹²	(18.6 - 4.0) ¹¹	(12.8 - 3.2) ¹¹
	2.0	0.2				(94.4 - 37) ¹³	(33.5 - 13.8) ¹³	(14.9 - 7.5) ¹³	(104.3 - 7.4) ¹⁶	(21.2 - 3.7) ¹⁸	(7.9 - 2.8) ¹⁸
		0.4				(59.4 - 15.7) ¹⁴	(36.8 - 8.3) ¹³	(18.4 - 5.3) ¹³	(61.1 - 10.1) ¹⁷	(42.1 - 3.1) ¹⁶	(17.0 - 2.1) ¹⁸
		0.6				(28.9 - 7.5) ¹⁴	(26 - 3.4) ¹⁵	(18.6 - 3.9) ¹³	(32.9 - 5.5) ¹⁷	(28.2 - 2.2) ¹⁶	(21.9 - 2.2) ¹⁶
10	0.5	0.2	(36.0 - 25.9) ¹	(9.8 - 7.2) ¹	(4.3 - 3.4) ¹	(36.3 - 25.9) ⁴	(9.8 - 7.2) ⁴	(4.3 - 3.4) ⁴	(29.2 - 20.3) ⁶	(7.9 - 5.9) ⁶	(3.6 - 3.0) ⁶
		0.4	(24.1 - 10.8) ²	(9.1 - 5.1) ¹	(4.3 - 2.8) ¹	(23.1 - 11.8) ⁵	(9.0 - 5.2) ⁴	(4.3 - 2.8) ⁴	(19.7 - 6.4) ⁷	(7.5 - 4.5) ⁶	(3.7 - 2.6) ⁶
		0.6	(11.8 - 6.6) ³	(7.1 - 3.0) ²	(4.0 - 2.2) ¹	(11.0 - 7.0) ³	(7.1 - 3.0) ⁵	(3.9 - 2.3) ⁴	(10.1 - 5.0) ⁸	(6.0 - 2.3) ⁷	(3.4 - 2.2) ⁶
	1.0	0.2	(37.4 - 3.3) ⁹	(5.6 - 2.0) ⁹	(2.5 - 1.5) ⁹	(44.2 - 22.9) ⁶	(11.1 - 5.6) ¹⁵	(4.5 - 2.8) ¹⁵	(41.4 - 5.9) ⁹	(8.5 - 2.7) ⁹	(3.5 - 1.9) ⁹
		0.4	(22.8 - 4.1) ¹⁰	(10.1 - 1.5) ⁹	(3.6 - 1.3) ⁹	(29.5 - 8.9) ¹³	(12.0 - 4.4) ⁶	(5.1 - 2.1) ¹⁵	(26.7 - 3.2) ¹⁶	(11.4 - 1.9) ⁹	(4.6 - 1.5) ⁹
		0.6	(11.5 - 7.9) ¹¹	(8.1 - 1.5) ¹²	(4.6 - 1.2) ⁹	(11.9 - 6.8) ¹⁴	(9.9 - 2.9) ⁶	(5.2 - 2.0) ⁶	(11.9 - 4.3) ¹⁷	(8.9 - 1.5) ¹⁸	(5.1 - 1.3) ⁹
	2.0	0.2				(62.4 - 20.5) ¹⁹	(16.3 - 2.7) ²¹	(5.2 - 1.8) ²¹	(73.7 - 2.0) ²³	(4.9 - 1.3) ²⁶	(2.1 - 1.2) ²⁶
		0.4				(29.0 - 14.6) ²⁰	(19.4 - 3.8) ¹⁹	(8.8 - 2.5) ¹⁹	(23.2 - 8.6) ²⁴	(24.6 - 1.3) ²⁷	(4.6 - 1.1) ²⁶
		0.6				(9.0 - 6.4) ²⁰	(12.6 - 2.6) ¹⁷	(8.5 - 1.6) ²²	(7.9 - 8.3) ²⁵	(10.5 - 4.9) ²⁴	(11.3 - 1.1) ²⁷

Tabla 5.5. Continuación

<i>n</i>	γ	δ^*	(ARL ₁₊ - ARL ₁₋)								
			skew-norm			log-normal			Weibull		
			$r^* = 1.2$	$r^* = 1.4$	$r^* = 1.6$	$r^* = 1.2$	$r^* = 1.4$	$r^* = 1.6$	$r^* = 1.2$	$r^* = 1.4$	$r^* = 1.6$
15	0.5	0.2	(26.8 - 19.1) ¹	(6.7 - 4.7) ⁴	(2.9 - 2.3) ⁴	(26.6 - 19.4) ⁶	(6.6 - 5.0) ⁶	(2.9 - 2.3) ⁸	(19.1 - 11.3) ⁹	(4.6 - 3.3) ⁹	(2.2 - 1.8) ⁹
		0.4	(16.6 - 7.3) ²	(6.2 - 3.5) ¹	(2.9 - 1.9) ⁴	(15.6 - 7.8) ²	(6.0 - 3.6) ⁶	(2.9 - 2.0) ⁶	(13.4 - 4.7) ¹⁰	(4.4 - 2.5) ⁹	(2.2 - 1.6) ⁹
		0.6	(7.3 - 3.7) ³	(4.7 - 2.1) ⁵	(2.7 - 1.6) ⁴	(6.8 - 4.0) ⁷	(4.6 - 2.1) ⁵	(2.6 - 1.7) ⁶	(6.4 - 3.3) ¹¹	(3.8 - 1.9) ⁹	(2.1 - 1.4) ⁹
	1.0	0.2	(26.9 - 1.9) ¹²	(3.1 - 1.3) ¹²	(1.5 - 1.1) ¹²	(32.5 - 16.1) ¹⁶	(7.6 - 4.0) ⁹	(3.1 - 2.0) ¹⁶	(30.2 - 4.7) ¹⁹	(4.7 - 1.6) ¹²	(2.0 - 1.3) ¹²
		0.4	(14.2 - 4.0) ¹³	(6.4 - 1.1) ¹²	(2.1 - 1.1) ¹²	(19.2 - 5.2) ¹⁷	(7.8 - 2.9) ¹⁶	(3.5 - 1.8) ¹⁶	(17.9 - 3.9) ²⁰	(7.4 - 1.5) ¹⁹	(2.7 - 1.1) ¹²
		0.6	(5.2 - 5.3) ¹⁴	(5.5 - 1.3) ¹⁵	(2.9 - 1.0) ¹²	(7.0 - 3.2) ¹⁸	(6.1 - 1.9) ¹⁷	(3.4 - 1.5) ¹⁶	(6.6 - 3.7) ²¹	(6.0 - 1.4) ²²	(3.3 - 1.1) ¹⁹
	2.0	0.2				(45.3 - 11.3) ²³	(9.8 - 1.7) ¹²	(3.0 - 1.3) ¹²	(57.8 - 1.9) ²⁵	(2.5 - 1.1) ²⁷	(1.4 - 1.0) ²⁸
		0.4				(16.3 - 7.1) ²⁴	(12.1 - 2.1) ²³	(5.0 - 1.5) ²³	(10.7 - 5.6) ¹⁴	(17 - 1.2) ²⁵	(2.5 - 1.0) ²⁷
		0.6				(4.7 - 3.2) ²⁴	(7.2 - 3.3) ²⁴	(5.2 - 1.3) ²³	(3.7 - 3.8) ²⁶	(4.9 - 3.3) ¹⁴	(7.5 - 1.1) ²⁵
30	0.5	0.2	(14.3 - 9.8) ¹	(3.2 - 2.4) ¹	(1.6 - 1.4) ¹	(14.1 - 9.8) ⁴	(3.2 - 2.4) ¹	(1.6 - 1.4) ¹	(9.9 - 5.6) ⁸	(2.3 - 1.7) ⁸	(1.3 - 1.2) ⁸
		0.4	(7.0 - 3.1) ²	(3.0 - 1.8) ¹	(1.6 - 1.2) ¹	(6.5 - 3.3) ²	(2.9 - 1.9) ⁴	(1.6 - 1.2) ¹	(6.4 - 2.9) ²	(2.2 - 1.4) ⁸	(1.3 - 1.1) ⁸
		0.6	(2.9 - 2.2) ³	(2.2 - 1.3) ²	(1.5 - 1.1) ¹	(2.8 - 2.1) ⁵	(2.1 - 1.3) ⁶	(1.6 - 1.2) ⁷	(2.7 - 1.6) ⁹	(1.9 - 1.2) ⁸	(1.3 - 1.1) ¹⁰
	1.0	0.2	(13.8 - 1.2) ¹¹	(1.5 - 1.0) ¹¹	(1.1 - 1.0) ¹⁵	(17.1 - 9.0) ¹⁶	(3.6 - 2.1) ¹⁹	(1.6 - 1.3) ¹⁹	(15 - 2.5) ²³	(2.2 - 1.1) ²⁵	(1.2 - 1.0) ²⁵
		0.4	(5.7 - 1.7) ¹²	(2.9 - 1.0) ¹¹	(1.2 - 1.0) ¹¹	(7.7 - 2.7) ¹⁷	(3.6 - 1.6) ²⁰	(1.7 - 1.1) ¹⁹	(7.6 - 2.5) ²⁴	(3.2 - 1.1) ²³	(1.4 - 1.0) ²⁵
		0.6	(1.9 - 1.9) ¹³	(2.5 - 1.1) ¹⁴	(1.5 - 1.0) ¹¹	(2.6 - 2.2) ¹⁸	(2.7 - 1.2) ²¹	(1.8 - 1.1) ²²	(2.5 - 1.4) ²⁴	(2.8 - 1.1) ²⁶	(1.6 - 1.0) ²⁵
	2.0	0.2				(24.4 - 5.1) ²⁷	(4.5 - 1.1) ²⁵	(1.5 - 1.0) ²⁵	(33.8 - 1.5) ²⁹	(1.5 - 1.0) ³²	(1.1 - 1.0) ³⁴
		0.4				(6.6 - 3.2) ¹⁸	(5.3 - 1.2) ²⁷	(2.3 - 1.1) ²⁷	(2.2 - 2.4) ³⁰	(8.1 - 1.0) ²⁹	(1.4 - 1.0) ³⁵
		0.6				(1.7 - 1.6) ¹⁸	(2.8 - 1.2) ²⁸	(2.3 - 1.0) ²⁷	(1.4 - 1.3) ³¹	(1.6 - 1.2) ³³	(3.4 - 1.0) ³⁶

Tabla 5.6. Listado de configuraciones cuasi óptimas del esquema wY_sY_L . Distribuciones asimétricas. Cambios simultáneos en media y desviación (δ^* , r^*), $ARL_0 = 370$.

$n = 5$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 10$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 15$ (w, UCL, q_0, f)	$n = 30$ (w, UCL, q_0, f)
(1.0, 2.0, 0.017, 0.300) ¹	(1.0, 3.0, 0.030, 0.325) ¹	(1.0, 4.0, 0.041, 0.325) ¹	(1.0, 6.0, 0.048, 0.325) ¹
(-0.1, 1.9, 0.023, 0.400) ²	(0.9, 3.0, 0.044, 0.425) ²	(0.0, 6.0, 0.180, 0.475) ²	(0.0, 9.0, 0.188, 0.475) ²
(1.0, 2.0, 0.017, 0.325) ³	(-1.0, 5.0, 0.216, 0.475) ³	(-0.1, 6.7, 0.253, 0.475) ³	(-1.0, 11.0, 0.415, 0.500) ³
(-1.0, 3.0, 0.109, 0.450) ⁴	(1.0, 3.0, 0.030, 0.300) ⁴	(1.0, 3.0, 0.019, 0.325) ⁴	(1.0, 7.0, 0.065, 0.325) ⁴
(0.0, 2.0, 0.022, 0.325) ⁵	(0.4, 4.0, 0.106, 0.450) ⁵	(0.0, 4.0, 0.067, 0.450) ⁵	(-1.0, 10.0, 0.337, 0.500) ⁵
(-1.0, 2.0, 0.022, 0.325) ⁶	(1.0, 4.0, 0.065, 0.200) ⁶	(1.0, 4.0, 0.041, 0.300) ⁶	(8.0, 0.0, 0.150, 0.475) ⁶
(-1.0, 2.0, 0.021, 0.250) ⁷	(0.0, 3.0, 0.045, 0.400) ⁷	(0.0, 7.0, 0.253, 0.475) ⁷	(1.0, 10.0, 0.126, 0.350) ⁷
(1.0, 3.0, 0.067, 0.200) ⁸	(-0.6, 3.6, 0.116, 0.450) ⁸	(1.0, 3.0, 0.019, 0.300) ⁸	(1.0, 6.0, 0.048, 0.200) ⁸
(0.0, 3.0, 0.102, 0.400) ⁹	(0.9, 3.0, 0.041, 0.300) ⁹	(1.0, 4.0, 0.041, 0.175) ⁹	(-0.1, 8.0, 0.180, 0.475) ⁹
(-1.0, 4.0, 0.271, 0.450) ¹⁰	(-1.0, 4.0, 0.107, 0.375) ¹⁰	(0.0, 4.0, 0.066, 0.425) ¹⁰	(1.0, 8.0, 0.084, 0.225) ¹⁰
(0.9, 3.0, 0.097, 0.350) ¹¹	(-2.0, 6.0, 0.352, 0.475) ¹¹	(-1.0, 5.0, 0.137, 0.475) ¹¹	(0.9, 4.0, 0.026, 0.275) ¹¹
(-1.0, 3.0, 0.103, 0.375) ¹²	(-1.0, 3.0, 0.044, 0.325) ¹²	(0.9, 3.0, 0.026, 0.275) ¹²	(-1.0, 7.0, 0.144, 0.450) ¹²
(1.0, 4.0, 0.158, 0.100) ¹³	(0.0, 5.0, 0.189, 0.450) ¹³	(-2.0, 5.0, 0.133, 0.425) ¹³	(-2.0, 8.0, 0.244, 0.500) ¹³
(-1.0, 4.0, 0.266, 0.425) ¹⁴	(-1.0, 6.0, 0.344, 0.475) ¹⁴	(-2.0, 7.0, 0.335, 0.475) ¹⁴	(-1.0, 6.0, 0.101, 0.450) ¹⁴
(-1.0, 3.0, 0.101, 0.350) ¹⁵	(0.9, 2.9, 0.030, 0.175) ¹⁵	(-1.0, 4.0, 0.071, 0.400) ¹⁵	(0.0, 4.0, 0.029, 0.350) ¹⁵
(-1.0, 3.0, 0.090, 0.250) ¹⁶	(-1.0, 3.0, 0.045, 0.350) ¹⁶	(1.0, 5.0, 0.069, 0.200) ¹⁶	(1.0, 9.0, 0.104, 0.200) ¹⁶
(-1.0, 4.0, 0.252, 0.375) ¹⁷	(-1.0, 5.0, 0.212, 0.450) ¹⁷	(0.0, 6.0, 0.178, 0.450) ¹⁷	(-0.1, 10.7, 0.281, 0.475) ¹⁷
(0.9, 3.0, 0.086, 0.225) ¹⁸	(0.0, 3.0, 0.041, 0.300) ¹⁸	(-0.1, 7.0, 0.302, 0.475) ¹⁸	(-1.0, 12.0, 0.501, 0.500) ¹⁸
	(1.0, 6.0, 0.170, 0.100) ¹⁹	(0.9, 4.0, 0.056, 0.300) ¹⁹	(1.0, 7.0, 0.065, 0.200) ¹⁹
	(-1.0, 7.0, 0.499, 0.475) ²⁰	(-1.0, 5.0, 0.135, 0.450) ²⁰	(1.0, 8.0, 0.084, 0.200) ²⁰
	(0.9, 3.0, 0.040, 0.275) ²¹	(-1.0, 7.0, 0.313, 0.475) ²¹	(0.0, 11.0, 0.271, 0.475) ²¹
	(0.9, 4.9, 0.116, 0.150) ²²	(0.0, 5.0, 0.112, 0.400) ²²	(1.0, 10.0, 0.126, 0.225) ²²
	(-1.0, 3.0, 0.039, 0.225) ²³	(1.0, 7.0, 0.143, 0.100) ²³	(0.9, 6.0, 0.059, 0.225) ²³
	(-2.0, 6.0, 0.343, 0.450) ²⁴	(-1.0, 8.0, 0.426, 0.475) ²⁴	(-1.0, 8.0, 0.202, 0.475) ²⁴
	(-2.0, 7.0, 0.516, 0.475) ²⁵	(-1.0, 4.0, 0.057, 0.250) ²⁵	(0.9, 4.0, 0.025, 0.250) ²⁵
	(0.9, 3.0, 0.038, 0.225) ²⁶	(-0.1, 1.0, 0.628, 0.475) ²⁶	(0.0, 8.0, 0.147, 0.450) ²⁶
	(-1.0, 3.0, 0.040, 0.250) ²⁷	(0.9, 3.0, 0.024, 0.225) ²⁷	(1.0, 11.0, 0.148, 0.100) ²⁷
		(0.0, 3.0, 0.025, 0.250) ²⁸	(-0.1, 13.7, 0.440, 0.475) ²⁸
			(0.0, 9.0, 0.166, 0.375) ²⁹
			(-1.6, 9.0, 0.353, 0.500) ³⁰
			(-1.1, 10.0, 0.409, 0.500) ³¹
			(0.0, 4.0, 0.029, 0.325) ³²
			(-1.1, 9.0, 0.320, 0.500) ³³
			(0.0, 5.0, 0.050, 0.350) ³⁴
			(0.9, 5.0, 0.038, 0.150) ³⁵
			(0.0, 8.0, 0.139, 0.400) ³⁶

5.4. Conclusiones

En este capítulo se desarrolló la adaptación del esquema $wY_S Y_L$ para el control de variables con distribución de probabilidad asimétrica. Para lograr este objetivo se desarrolló una estrategia de adaptación que fue implementada para las distribuciones skew-normal, log-normal y Weibull. Esta estrategia es general y puede ser empleada para adaptar el esquema a otras distribuciones que no fueron consideradas en este trabajo. Para realizar la adaptación solo se requiere disponer de una función o mecanismo que enlace los valores de la media y la desviación estándar de la distribución con las probabilidades de clasificar una pieza en cada uno de los intervalos extremos de la galga 2-step.

Al diseño del esquema $wY_S Y_L$ se le incorporo un nuevo parámetro, el factor f , que modifica la ubicación de las dimensiones de la galga 2-step, permitiendo un desbalance entre las probabilidades acumuladas por fuera de estas dimensiones. Con este desbalance se logra corregir el problema de sesgo en la curva ARL para el control de la media, además de balancear el desempeño del esquema para detectar cambios en ambas direcciones, incremento/decremento.

Bajo las nuevas condiciones de diseño, el problema de optimización del esquema $wY_S Y_L$ es ahora más complejo, ya que presenta un nuevo parámetro de diseño y una nueva restricción. Para resolver este problema se adaptó el algoritmo de optimización, incorporando estos nuevos elementos. Los resultados de las optimizaciones ratifican que la suma $Y_S + Y_L$ es un buen estadístico para el control de la varianza y que la diferencia $Y_S - Y_L$ lo es para el control de la media, incluso en distribuciones asimétricas. Los resultados de las optimizaciones se reportan en tablas que pueden ser usadas como guía para el diseño del esquema $wY_S Y_L$, para $ARL_0^* = 370$, tamaños de muestra = 5, 10, 15, 30 y asimetrías $\gamma = 0.5, 1.0, 2.0$. Para valores distintos de estos parámetros, el usuario puede emplear la función de optimización creada en el software estadístico R (R Core Team, 2018).

Capítulo 6

Esquema $wY_S Y_L$ con estrategias de tamaño de muestra adaptativo ($wY_S Y_L$ -DS/ $wY_S Y_L$ -VSS)

En la sección 4.3 se realizó una comparación del desempeño del esquema óptimo $wY_S Y_L$ y de los habituales gráficos de control por variables \bar{X} , S y \bar{X} - S . En esa comparación se evidenció que, bajo el mismo tamaño de muestra, el esquema $wY_S Y_L$ tiene un desempeño ligeramente inferior al del gráfico \bar{X} en el control de la media, y al del gráfico S en el control de la variabilidad. Evidentemente, el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ se puede mejorar con un incremento en el tamaño de la muestra, lo cual tiene como consecuencia un mayor esfuerzo de muestreo (mayor costo y carga operativa).

En este capítulo implementaremos dos estrategias de tamaño de muestra adaptativo, DS y VSS, diseñadas para mejorar el desempeño del esquema $wY_S Y_L$, sin necesidad de recurrir a un incremento sostenido en el esfuerzo de muestreo. Como se mostrará en el desarrollo del capítulo, el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ mejora notablemente bajo las estrategias DS y VSS, garantizando siempre el mismo, o incluso menor, esfuerzo de muestreo que el del esquema de tamaño de muestra fijo ($wY_S Y_L$ -FSS). La mejora es tan notable, que incluso supera el desempeño de los tradicionales gráficos de control por variables \bar{X} , S y \bar{X} - S .

Las estrategias DS y VSS son desarrolladas para el control de una variable (X) que en el estado bajo control sigue una distribución normal de media (μ_0) y desviación estándar (σ_0) conocidas. La extensión de esta propuesta para el control de variables con distribución asimétrica no es abordada en esta tesis. Este tema será desarrollado en una investigación posterior.

Con el contenido de este capítulo, relacionado con la adaptación de la estrategia DS para el esquema $wY_S Y_L$, se ha conformado el artículo de investigación titulado:

Mosquera J., Aparisi F. (2019). Optimal double sampling control chart based on gauges. *Quality Engineering*. Submitted.

En el momento de la redacción de esta memoria, este artículo ha sido sometido a evaluación en la revista *Quality Engineering*, clasificada en el tercil 1 del índice JCR.

Los resultados relacionados con la implementación de la estrategia VSS para el esquema $wY_S Y_L$ fueron divulgados en el XXVII Simposio internacional de Estadística, Medellín – Colombia, 2017, a través de la ponencia titulada:

Mosquera J, Aparisi F. Diseño óptimo de un esquema para el control de la media y de la desviación estándar del proceso basado en inspección por atributos con Tamaño de Muestra Variable.

6.1. El esquema $wY_S Y_L$ con estrategia de doble muestreo ($wY_S Y_L$ -DS)

El esquema $wY_S Y_L$ -DS se desarrolla con el objetivo de identificar cambios de la media (incrementos o decrementos) o incrementos de la desviación estándar en una variable con distribución normal. Dada la simetría de la distribución, nos apoyamos en una galga 2-step de dimensiones simétricas ($S = \mu_0 - k\sigma_0$, $L = \mu_0 + k\sigma_0$) para la clasificación de las unidades.

Bajo la estrategia DS, el diagnóstico del proceso se puede generar en 1 o 2 etapas de muestreo. Inicialmente, se extrae del proceso una muestra aleatoria global de $n^T = n^I + n^{II}$ unidades y, en una primera etapa de muestreo, se verifican las primeras n^I unidades con la galga 2-step, registrando los conteos parciales:

Y_S^I : Conteo de unidades de la *primera muestra* que son más pequeñas que S.

Y_L^I : Conteo de unidades de la *primera muestra* que son más grandes que L.

Con estos conteos (Y_S^I, Y_L^I), el proceso se diagnostica bajo control cuando:

$$\max(wY_S^I + Y_L^I, Y_S^I + wY_L^I) < WL, \quad (6.1)$$

o fuera de control cuando:

$$\max(wY_S^I + Y_L^I, Y_S^I + wY_L^I) \geq UCL^I. \quad (6.2)$$

Aquí, $w \in (-n^T, 1]$ es el peso de la combinación lineal, que adapta la forma del estadístico $\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L)$ para obtener mayor sensibilidad frente cambios de la media, de la desviación, o cambios simultáneos en ambos parámetros. Los valores WL y UCL^I definen la ubicación de los límites de advertencia y de control para el gráfico en la primera etapa de muestreo. Estos límites deben cumplir que:

$$0 < WL \leq n^I, \quad (6.3)$$

$$WL < UCL^I \leq n^I + 0.5. \quad (6.4)$$

Si con los datos de la primera muestra se toma una decisión (bajo/fuera de control), no será necesario verificar las unidades restantes. De lo contrario, cuando $WL \leq \max(wY_S^I + Y_L^I, Y_S^I + wY_L^I) < UCL^I$, se requerirá pasar a la segunda etapa de muestreo y verificar las unidades restantes.

Nótese que, de acuerdo con la ecuación 6.4, es posible que el límite UCL^I se ubique ligeramente por encima de n^I , que corresponde al máximo valor posible para el estadístico de control. En consecuencia, si se selecciona esta configuración ($UCL^I > n^I$), se anula la posibilidad de que una señal de cambio sea emitida en la primera etapa de muestreo. Bajo ese diseño particular, la emisión de la señal de cambio se restringe a la segunda etapa de muestreo.

Cuando la segunda etapa de muestreo es requerida, se verifican con la galga las restantes n^{II} unidades y se registran los conteos globales:

$Y_S^T = Y_S^I + Y_S^{II}$: Conteo de unidades de la *muestra global* más pequeñas que S ,

$Y_L^T = Y_L^I + Y_L^{II}$: Conteo de unidades de la *muestra global* más grandes que L .

En esta segunda etapa se utilizan los conteos globales para diagnosticar el proceso. El diagnóstico bajo control se genera cuando:

$$\max(wY_S^T + Y_L^T, Y_S^T + wY_L^T) < UCL^{II}, \quad (6.5)$$

y el diagnóstico fuera de control se genera cuando:

$$\max(wY_S^T + Y_L^T, Y_S^T + wY_L^T) \geq UCL^{II}. \quad (6.6)$$

Aquí, UCL^{II} representa la ubicación del límite de control de la segunda etapa de muestreo y debe satisfacer que:

$$WL < UCL^{II} \leq n^I + n^{II}. \quad (6.7)$$

La Figura 6.1 ilustra el aspecto gráfico sugerido del esquema $wY_S Y_L$ -DS. Esta figura muestra dos configuraciones de diseño para el límite de control de primera etapa: a) $UCL^I \leq n^I$ - activo; b) $UCL^I > n^I$ - inactivo. Bajo la configuración a, ambos límites de control son trazados, mientras que en la configuración b, dado que el efecto del límite UCL^I es nulo, esta línea es omitida y la representación gráfica se simplifica.

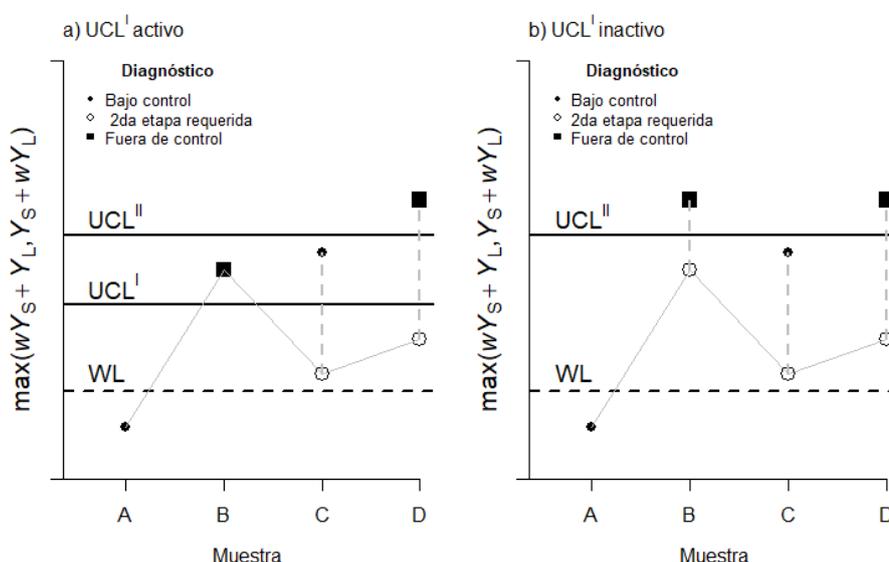


Figura 6.1. Aspecto gráfico del esquema $wY_S Y_L$ -DS.

Como se observa en la Figura 6.1a, el diagnóstico de las muestras A y B se genera solo con la verificación de la primera submuestra. Por el contrario, las muestras B y C si requieren de la verificación de la muestra total. El diagnóstico es el mismo bajo la configuración b. Sin embargo, dado que en esta configuración la señal fuera de control no puede ser emitida con la primera submuestra, en la muestra B sí se requiere de la verificación de la muestra total.

Para definir el diseño del esquema $wY_S Y_L$ -DS, el usuario debe determinar los siguientes parámetros:

- n^I, n^{II} : Tamaños de muestra de la primera y segunda etapa.
- S, L : Dimensiones de la galga.
- w : Peso de la combinación lineal.

WL: Límite de advertencia.

UCL^I, UCL^{II}: Límites de Control para la primera y segunda etapa.

En la determinación de los tamaños de muestra (n^I , n^{II}) es conveniente tener en consideración el esfuerzo de muestreo que demandará la operación del esquema $wY_S Y_L$ -DS. Recordemos que cuando el tamaño de muestra es fijo, los esfuerzos del muestreo son conocidos a priori. Por el contrario, en las estrategias de tamaño de muestra adaptativo, el tamaño de muestra es una variable aleatoria y los esfuerzos del muestreo no pueden ser predichos a priori. Sin embargo, los tamaños de muestra máximo y medio si pueden conocerse, por lo tanto pueden ser empleados para controlar desde el diseño los esfuerzos máximos y medio de muestreo.

El esfuerzo máximo de muestreo se genera cuando se evalúa toda la muestra global (cuando se pasa a la segunda etapa). Este esfuerzo máximo puede controlarse si se restringe la selección de los tamaños de muestra al cumplimiento de la condición $n^I + n^{II} \leq n_{max}$. Donde n_{max} es el tamaño de muestra asociado al nivel máximo de recursos disponibles en un instante de tiempo para el procedimiento de inspección. También se puede controlar el esfuerzo medio de muestreo. Para ello n^I y n^{II} deben seleccionarse de manera que, mientras el proceso está bajo control (se asume que así permanece la mayor parte del tiempo), se garantice un tamaño de muestra medio n_0 . El valor n_0 puede ser seleccionado basado en el consumo medio de recursos. Por ejemplo, basado en los costos de inspección promedio tolerables, entre otras consideraciones.

En la sección 6.1 se deducen las expresiones para el cálculo de las medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -DS, y en la sección 6.3 se presenta un procedimiento para obtener su diseño óptimo. En ese procedimiento se incluyen las restricciones anteriormente enunciadas.

6.1.1. Medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -DS.

Antes de deducir las medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -DS, recordaremos que cuando una pieza es verificada con una galga 2-step de dimensiones simétricas ($S = \mu_0 - k\sigma_0$, $L = \mu_0 + k\sigma_0$), se cumple que si la media del proceso ha cambiado a $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y la desviación estándar a $\sigma_1 = r\sigma_0$, entonces las probabilidades (q_S , q_L), de clasificar la pieza en los intervalos inferior o superior de la galga, corresponden a:

$$q_S = \Phi\left(\frac{-k - \delta}{r}\right) \quad , \quad q_L = 1 - \Phi\left(\frac{k - \delta}{r}\right). \quad (6.8)$$

En la estrategia DS se extrae una muestra global de tamaño $n^T = n^I + n^{II}$ y la verificación de las piezas se realiza en dos etapas ($j = I, II$), cada una con tamaño de muestra n^j . Luego de la verificación con la galga 2-step, en cada etapa se genera una pareja de conteos (Y_S^j, Y_L^j) , los cuales siguen una distribución conjunta multinomial de parámetros (n^j, q_S, q_L) .

De acuerdo con las reglas de decisión del esquema $wY_S Y_L$ -DS, la alarma de cambio puede emitirse en cualquiera de las dos etapas de muestreo. Según ello, la probabilidad de alarma (PA) corresponde a:

$$PA_{wY_S Y_L-DS} = \Pr(\text{Alarma}|\delta, r) = P_a^I + P_a^{II}. \quad (6.9)$$

Aquí, P_a^I y P_a^{II} son las probabilidades de que la alarma se emita en la etapa I o II respectivamente. Para calcular estas probabilidades se definen los subconjuntos Ω_1^I , Ω_W^I y Ω_1^T , como:

$\Omega_1^I = \{y_S^I, y_L^I: \max(wy_S^I + y_L^I, y_S^I + wy_L^I) \geq UCL^I\}$. Conteos de etapa I que generan una alarma.

$\Omega_W^I = \{y_S^I, y_L^I: WL \leq \max(wy_S^I + y_L^I, y_S^I + wy_L^I) < UCL^I\}$ Conteos de etapa I que postergan el diagnóstico del proceso a la etapa II.

$\Omega_1^T = \{y_S^T, y_L^T: \max(wy_S^T + y_L^T, y_S^T + wy_L^T) \geq UCL^{II}\}$. Conteos totales que generan una alarma en la etapa II.

Seguindo esta definición de conjuntos, las probabilidades P_a^I y P_a^{II} corresponden a:

$$P_a^I = \Pr((Y_S^I, Y_L^I) \in \Omega_1^I) = \sum_{(y_S^I, y_L^I) \in \Omega_1^I} \frac{n^I! (q_{S1})^{y_S^I} (q_{L1})^{y_L^I} (1 - q_{S1} - q_{L1})^{n^I - y_S^I - y_L^I}}{y_S^I! y_L^I! (n^I - y_S^I - y_L^I)}, \quad (6.10)$$

$$P_a^{II} = \Pr([(Y_S^I, Y_L^I) \in \Omega_W^I] \cap [(Y_S^T, Y_L^T) \in \Omega_1^T]). \quad (6.11)$$

Dado que los conteos totales (Y_S^T, Y_L^T) dependen de los conteos parciales de primera etapa (Y_S^I, Y_L^I) , entonces P_a^{II} es una probabilidad de intersección entre dos eventos dependientes. Esta probabilidad es resuelta utilizando el teorema de la probabilidad total.

$$P_a^{II} = \sum_{(y_S^I, y_L^I) \in \Omega_w^I} \sum_{(Y_S^T, Y_L^T) \in \Omega_1^T | Y_S^I = y_S^I, Y_L^I = y_L^I} \Pr(Y_S^I = y_S^I, Y_L^I = y_L^I). \quad (6.12)$$

La probabilidad condicional al interior de la ecuación 6.12 es reescrita como:

$$\begin{aligned} \Pr((Y_S^T, Y_L^T) \in \Omega_1^T | Y_S^I = y_S^I, Y_L^I = y_L^I) &= \\ &= \Pr(\max(wY_S^T + Y_L^T, Y_S^T + wY_L^T) \geq \text{UCL}^{II} | Y_S^I = y_S^I, Y_L^I = y_L^I) = \\ &= \Pr([w(y_S^I + Y_S^{II}) + (y_L^I + Y_L^{II}) \geq \text{UCL}^{II}] \cup \\ &\cup [(y_S^I + Y_S^{II}) + w(y_L^I + Y_L^{II}) \geq \text{UCL}^{II}]) = \\ &= \Pr([wY_S^{II} + Y_L^{II} \geq \text{UCL}^{II} - (wy_S^I + y_L^I)] \cup \\ &\cup [Y_S^{II} + wY_L^{II} \geq \text{UCL}^{II} - (y_S^I + wy_L^I)]) = \\ &= \sum_{y_S^{II}, y_L^{II} \in \Omega_1^{II} | (y_S^I, y_L^I)} \frac{n^{II}! (q_{S1})^{y_S^{II}} (q_{L1})^{y_L^{II}} (1 - q_{S1} - q_{L1})^{n^{II} - y_S^{II} - y_L^{II}}}{y_S^{II}! y_L^{II}! (n^{II} - y_S^{II} - y_L^{II})!}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde el conjunto $\Omega_1^{II} | (y_S^I, y_L^I)$ está conformado por las parejas de conteos de etapa II que, para una pareja fija de conteos de etapa I (y_S^I, y_L^I) , generan una alarma en el gráfico de control. Esto es:

$$\Omega_1^{II} | (y_S^I, y_L^I) = \{y_S^{II}, y_L^{II} : [(wy_S^I + y_L^{II}) \geq \text{UCL}^{II} - (wy_S^I + y_L^I)] \cup [(y_S^{II} + wy_L^I) \geq \text{UCL}^{II} - (y_S^I + wy_L^I)]\}.$$

Finalmente, al reemplazar la ecuación 6.13 en la ecuación 6.12 y resolver la probabilidad no condicionada $\Pr(Y_S^I = y_S^I, Y_L^I = y_L^I)$, se obtiene:

$$P_a^{II} = \sum_{(y_S^I, y_L^I) \in \Omega_w^I} \sum_{(Y_S^T, Y_L^T) \in \Omega_1^T | (y_S^I, y_L^I)} \left(\frac{\sum_{y_S^{II}, y_L^{II} \in \Omega_1^{II} | (y_S^I, y_L^I)} \frac{n^{II}! (q_{S1})^{y_S^{II}} (q_{L1})^{y_L^{II}} (1 - q_{S1} - q_{L1})^{n^{II} - y_S^{II} - y_L^{II}}}{y_S^{II}! y_L^{II}! (n^{II} - y_S^{II} - y_L^{II})!}}{\left[\frac{n^I! (q_{S1})^{y_S^I} (q_{L1})^{y_L^I} (1 - q_{S1} - q_{L1})^{n^I - y_S^I - y_L^I}}{y_S^I! y_L^I! (n^I - y_S^I - y_L^I)!} \right]} \right). \quad (6.14)$$

Dado que en el esquema $wY_S Y_L$ -DS existe independencia entre las observaciones de cualquier par de instantes de muestreo, entonces se cumple que el ARL es el recíproco de la probabilidad de alarma.

$$ARL(\delta, r) = \frac{1}{PA} = \frac{1}{P_a^I + P_a^{II}} \quad (6.15)$$

La evaluación de desempeño puede complementarse con la valoración indirecta de los esfuerzos del muestreo, característica que guarda relación directa con el tamaño de la muestra. Ya se mencionó anteriormente que en la estrategia DS el tamaño de muestra es una variable aleatoria. La primera muestra se inspecciona siempre, mientras que la segunda muestra solo se inspecciona en una fracción de las ocasiones. De acuerdo con lo anterior, el valor medio del tamaño de muestra (Average Sample Size, ASS) se calcula como:

$$ASS(\delta, r) = E(n|\delta, r) = n^I + n^{II}P_w, \quad (6.16)$$

con P_w que representa la probabilidad de inspeccionar la segunda muestra. Esto es:

$$P_w = \Pr\left((Y_S^I, Y_L^I) \in \Omega_w^I\right) = \sum_{(y_S^I, y_L^I) \in \Omega_w^I} \sum_{(y_S^I, y_L^I) \in \Omega_w^I} \frac{n^I! (q_{S1})^{y_S^I} (q_{L1})^{y_L^I} (1 - q_{S1} - q_{L1})^{n^I - y_S^I - y_L^I}}{y_S^I! y_L^I! (n^I - y_S^I - y_L^I)!} \quad (6.17)$$

Otro indicador relacionado con el esfuerzo de muestreo es el número de unidades que se inspeccionan hasta que el gráfico emite la alarma. Este indicador es también una variable aleatoria con valor esperado (Average Number of Observation to Signal, ANOS) igual a:

$$ANOS(\delta, r) = ARL(\delta, r)ASS(\delta, r). \quad (6.18)$$

Las cuatro medidas de desempeño (PA, ARL, ASS y ANOS) pueden ser calculadas para ambos estados del proceso: bajo control ($\delta = 0, r = 1$) y fuera de control ($\delta \neq 0$ o $r > 1$). Cuando se evalúan para el estado bajo control, se denotan como (α , ARL_0 , ASS_0 y $ANOS_0$) y evaluadas en el estado fuera de control, se denotan como ($1 - \beta$, ARL_1 , ASS_1 y $ANOS_1$).

6.2. El esquema $wY_S Y_L$ con estrategia de tamaño de muestra variable ($wY_S Y_L$ -VSS)

Siguiendo la propuesta original Prabhu et al. (1993) y de Costa (1994), en la estrategia VSS se incluye la posibilidad de variar el tamaño de muestra entre dos cantidades ($n = n^I, n^{II}$, con $n^I < n^{II}$). A diferencia de la estrategia DS, donde el incremento

del tamaño de muestra se genera en el mismo instante de muestreo, en la estrategia VSS el cambio de tamaño de muestra se aplica en el siguiente instante de muestreo.

Una primera dificultad que debe superar el diseño de la estrategia VSS, se relaciona con la dependencia entre la distribución de probabilidad del estadístico de control y el tamaño de la muestra. Esto sucede en el control por galgas, debido a que los conteos (Y_S, Y_L) siguen una distribución multinomial, que depende del tamaño de la muestra. Por ejemplo, con tamaño de muestra n_I , los conteos $(Y_S, Y_L) \in [0, n_I]$, y con tamaño de muestra n_{II} , $(Y_S, Y_L) \in [0, n_{II}]$. Este cambio de escala (generado por el cambio en el tamaño de muestra) dificulta la representación de las observaciones sobre un solo gráfico de control. Una solución, de alta complejidad operativa, consiste en utilizar alternadamente dos gráficos de control, uno para cada tamaño de muestra.

En el gráfico \bar{X} -VSS (Prabhu et al. ,1993; Costa, 1994) el problema anterior fue resuelto a través de la estandarización de \bar{X} , la cual sigue una distribución normal estándar que no depende del tamaño de la muestra. Para los conteos (Y_S, Y_L) no existe una transformación que estandarice su distribución para diferentes tamaños de muestra. Sin embargo, si se dispone de una transformación que al menos iguale la escala de los conteos. Bajo la transformación porcentual $Y_S^{\%} = Y_S/n, Y_L^{\%} = Y_L/n$, se obtiene una escala común, $(Y_S^{\%}, Y_L^{\%}) \in [0, 1]$, que no depende del tamaño de muestra. Esta escala única permite que las observaciones se dibujen en un solo gráfico de control. En este gráfico representaremos el estadístico $wY_S Y_L$, calculado sobre los conteos normalizados. Esto es:

$$\max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) = \frac{\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L)}{n}, \quad (6.19)$$

$$w \in (-n, 1], \quad n = n^I, n^{II}.$$

En el gráfico se incluyen unas líneas asociadas al límite de advertencia (WL) y a los límites de control (UCL = UCL^I, UCL^{II}), cuyo valor puede ser distinto para cada tamaño de muestra $n = n^I, n^{II}$. La ubicación del punto en el gráfico determina el diagnóstico del proceso y el tamaño de la próxima muestra. Para ello se definen las siguientes reglas de decisión:

1. Si $\max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) < WL$, el diagnóstico es bajo control y la próxima muestra tendrá el menor tamaño ($n = n_1$).
2. Si $WL \leq \max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) < UCL$, el diagnóstico es bajo control, pero la próxima muestra será de tamaño $n = n_2$.

3. Si $\max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) \geq UCL$, el proceso está fuera de control.

En las reglas de decisión 2 y 3, el valor del límite de control depende del actual de tamaño de muestra. Esto es $UCL = UCL^I, UCL^{II}$ para $n = n^I, n^{II}$, respectivamente.

Para garantizar la consistencia entre las reglas de decisión, los valores de WL, UCL^I y UCL^{II} deben satisfacer que:

$$0 < WL < UCL^I \leq 1.05 \quad , \quad 0 < WL < UCL^{II} \leq 1. \quad (6.20)$$

Nótese que, si se selecciona un valor $UCL^I \in (1, 1.05]$, dado que el máximo valor para el estadístico de control es 1, la alarma de cambio solo podrá ser emitida cuando se emplea el mayor tamaño de muestra ($n = n^{II}$). Esta configuración puede ser útil para disminuir el tiempo medio de detección de un cambio de pequeña magnitud. Sin embargo, es posible que como consecuencia, se retrase la detección de cambios grandes.

En la Figura 6.2 se ilustra el aspecto gráfico del esquema $wY_S Y_L$ -VSS. En esta figura se muestran dos configuraciones de diseño para el límite de control de primera etapa: a) $UCL^I \leq 1$ - activo; b) $UCL^I > 1.05$ - inactivo. En el caso b, dado el efecto nulo del límite UCL^I , este no es dibujado y la representación gráfica se simplifica.

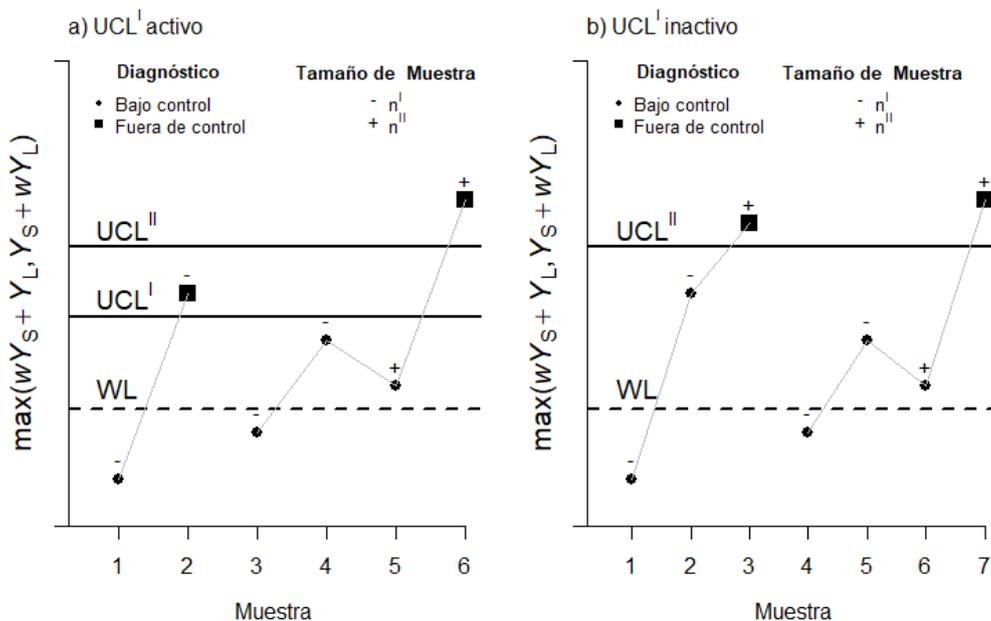


Figura 6.2. Aspecto gráfico del esquema $wY_S Y_L$ -VSS.

En las Figura 6.2a y Figura 6.2b se representan dos secuencias de observaciones que finalizan con un diagnóstico fuera de control. Bajo la configuración a, la primera secuencia está formada por las muestras 1 y 2, ambas con el menor tamaño de muestra (n^I). En la segunda muestra se genera la primera alarma de cambio en el proceso. Luego de corregir la situación fuera de control, el control se reinicia con el menor tamaño de muestra para la muestra 3. A partir de esta muestra comienza una nueva secuencia. Una advertencia de cambio en el tamaño de muestra se genera en la observación 4 y se aplica para la muestra 5. Con el mayor tamaño de muestra (n^{II}) se obtienen las observaciones 5 – 6 y la nueva señal de cambio en el proceso se presenta en la observación 6.

Nótese que bajo la configuración b, la primera secuencia (muestras 1-3) tiene ahora una observación adicional. Esto se debe a que la omisión del primer límite de control anula la posibilidad de emitir el diagnóstico fuera de control con una muestra del menor tamaño. Bajo esta configuración, la muestra 2 solo indica una señal de incremento en el tamaño de muestra, que se hace efectivo en la muestra 3, con el cual finalmente se genera la alarma de cambio. La segunda secuencia no cambia en su interpretación.

De acuerdo con las reglas de decisión propuestas, en el diseño del esquema wY_sY_L -VSS el usuario debe determinar los siguientes parámetros:

n^I, n^{II} :	Tamaños de muestra
S, L :	Dimensiones de la galga.
w :	Peso de la combinación lineal.
WL :	Límite de advertencia.
UCL^I, UCL^{II} :	Límites de Control para el primer y segundo tamaño de muestra.

Similar que en el esquema DS, en el esquema VSS también es conveniente controlar desde el diseño el esfuerzo máximo y medio del muestreo. En la estrategia VSS, el esfuerzo máximo se puede controlar estableciendo un límite superior n_{max} para el tamaño de muestra más alto. Esto es, $n^{II} \leq n_{max}$. También el esfuerzo medio de muestreo puede controlarse, si se restringe la selección de los tamaños de muestra n^I y n^{II} al subconjunto que garantiza un tamaño de muestra medio n_0 , cuando el proceso permanece en el estado bajo control.

En la sección 6.2.1 se deducen las expresiones para el cálculo de las medidas de desempeño del esquema wY_sY_L -VSS, y en la sección 6.3 se presenta un procedimiento

para obtener su diseño óptimo. En ese procedimiento se incluyen las restricciones anteriormente enunciadas.

6.2.1. Medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -VSS

Recordemos que en la estrategia VSS el estadístico de control presenta una estructura de dependencia de orden 1. Bajo esta dependencia entre observaciones la probabilidad de alarma no es constante, por lo cual el desempeño estadístico del esquema suele ser evaluado en términos del ARL. Para calcular el ARL, y otras medidas de desempeño como el ASS y el ANOS, nos apoyaremos en el enfoque de cadenas de Márkov propuesto por Brook y Evans (1972), quienes proponen dividir el rango de variación del gráfico de control en m estados transitorios y 1 estado absorbente.

En el esquema $wY_S Y_L$ -VSS es suficiente con definir los siguientes 3 estados:

E₁. La observación genera un diagnóstico bajo control con próximo tamaño de muestra $n = n^I$. Esto sucede cuando:

$$\max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) < WL, \text{ o}$$

$$\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) < WL \cdot n, \text{ con } n = n^I, n^{II}.$$

E₂. La observación genera un diagnóstico bajo control con próximo tamaño de muestra $n = n^{II}$. Esto sucede cuando:

$$WL \leq \max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) < UCL, \text{ con } UCL = UCL^I, UCL^{II}, \text{ o}$$

$$WL \cdot n \leq \max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) < UCL \cdot n, \text{ con } (n, UCL) = (n^I, UCL^I), (n^{II}, UCL^{II}).$$

E₃. La observación genera un diagnóstico fuera de control. Esto sucede cuando:

$$\max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) \geq UCL, \text{ o}$$

$$\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) \geq UCL \cdot n, \text{ con } (n, UCL) = (n^I, UCL^I), (n^{II}, UCL^{II}).$$

Los estados E₁ y E₂ son transitorios y E₃ es el estado absorbente. De acuerdo con esta definición de estados, las matrices de probabilidades de transición **P** y de probabilidades de transición entre estados transitorios **R** tienen la siguiente estructura:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 1 - p_{11} - p_{12} \\ p_{21} & p_{22} & 1 - p_{21} - p_{22} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

En este punto, nuevamente tenemos en consideración que cuando una pieza es verificada con una galga 2-step de dimensiones simétricas ($S = \mu_0 - k\sigma_0$, $L = \mu_0 + k\sigma_0$), se cumple que, si la media del proceso cambia a $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y la desviación estándar a $\sigma_1 = r\sigma_0$, entonces las probabilidades (q_S, q_L), de clasificar la pieza en los intervalos inferior o superior de la galga, corresponden a:

$$q_S = \Phi\left(\frac{-k - \delta}{r}\right), \quad q_L = 1 - \Phi\left(\frac{k - \delta}{r}\right). \quad (6.22)$$

Las probabilidades q_S y q_L son empleadas para calcular las probabilidades de transición p_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} p_{i1} &= \Pr(\max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) < WL \mid \delta, r, n^i, WL, k) = \\ &= \Pr(\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) < WL \cdot n^i \mid \delta, r, WL, k) = \\ &= \sum_{(y_S, y_L) \in E_1} \sum \frac{n^i! (q_S)^{y_S} (q_L)^{y_L} (1 - q_S - q_L)^{n^i - y_S - y_L}}{y_S! y_L! (n^i - y_S - y_L)!}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} p_{i2} &= \Pr(WL \leq \max(wY_S^{\%} + Y_L^{\%}, Y_S^{\%} + wY_L^{\%}) < UCL^i \mid \delta, r, n^i, UCL^i, WL, k) = \\ &= \Pr(WL \cdot n^i \leq \max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) < UCL^i \cdot n^i \mid \delta, r, WL, k) = \\ &= \sum_{(y_S, y_L) \in E_2} \sum \frac{n^i! (q_S)^{y_S} (q_L)^{y_L} (1 - q_S - q_L)^{n^i - y_S - y_L}}{y_S! y_L! (n^i - y_S - y_L)!}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

con $y_S + y_L \leq n^i, i = I, II$.

Para el estado bajo control del proceso ($\delta = 0, r = 1$), las probabilidades $q_S = q_L = q_0/2$ son reemplazadas en las ecuaciones 6.23 y 6.24, para $i = I, II$, y se conforma la matriz $\mathbf{R}_{0(2 \times 2)}$, requerida en el cálculo del ARL_0^{ZS} (ARL_0 zero state). Para este cálculo asumiremos que cuando el control inicia, dado que el estado bajo control del proceso

está garantizado, se emplea el menor tamaño de muestra ($n = n^I$). Esto significa que la cadena de Márkov inicia en el estado E_1 y $\boldsymbol{\pi}_0 = [1, 0]$.

$$ARL_0^{ZS} = \boldsymbol{\pi}_0[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0]^{-1}\mathbf{1} = \frac{(1 - p_{22}) + p_{12}}{(1 - p_{22})(1 - p_{11}) - p_{12}p_{21}}. \quad (6.25)$$

El desempeño estadístico del esquema en el estado fuera de control ($\delta \neq 0, r > 1$) es evaluado través del ARL^{SS} (ARL steady state). Para su cálculo, se requiere conformar la matriz $\mathbf{R}_{2 \times 2}$ (utilizando las ecuaciones 6.22 a 6.24). Una vez se dispone de \mathbf{R} , el ARL^{SS} se obtiene como:

$$ARL^{SS} = \boldsymbol{\pi}[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1}\mathbf{1} = \frac{\pi_1(1 - p_{22} + p_{12}) + \pi_2(1 - p_{11} + p_{21})}{(1 - p_{22})(1 - p_{11}) - p_{12}p_{21}}, \quad (6.26)$$

donde el vector de probabilidades estables ($\boldsymbol{\pi}$), para los estados de la cadena de Márkov en el estado bajo control del proceso, corresponde a:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2] = \frac{\boldsymbol{\pi}_0[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0]^{-1}}{ARL_0^{ZS}} = \frac{1}{1 - p_{22} + p_{12}} [1 - p_{22}, p_{12}]. \quad (6.27)$$

Este vector $\boldsymbol{\pi}$ también es empleado para calcular el tamaño de muestra medio del procedimiento de verificación, cuando el proceso está bajo control (ASS_0):

$$ASS_0 = \pi_1 n^I + \pi_2 n^{II} \quad (6.28)$$

Finalmente el número medio de unidades que son inspeccionadas mientras el proceso está fuera de control ($ANOS_1$), se calcula como:

$$ANOS_1 = \boldsymbol{\pi}[\mathbf{I} - \mathbf{R}]^{-1} \begin{bmatrix} n^I \\ n^{II} \end{bmatrix} = \frac{n^I \pi_1 (1 - p_{22} + p_{12}) + n^{II} \pi_2 (1 - p_{11} + p_{21})}{(1 - p_{22})(1 - p_{11}) - p_{12}p_{21}}. \quad (6.29)$$

6.3. Diseño óptimo de los esquemas $wY_sY_L - DS / wY_sY_L - VSS$

En esta sección se aborda el problema de diseño óptimo de los esquemas $wY_sY_L - DS$ y $wY_sY_L - VSS$. Ambos problemas presentan un objetivo de diseño común, que consiste

en encontrar la configuración de los parámetros $(n^I, n^{II}, WL, UCL^I, UCL^{II}, w, S, L)$ bajo la cual se obtiene el menor ARL_1 en la detección de un cambio de magnitud $(\delta = \delta^*, r = r^*)$ de interés para el usuario.

Las restricciones de los dos problemas de diseño también son muy similares. En ambos casos se desea controlar la frecuencia de emisión de falsas alarmas y los esfuerzos máximo y medio del muestreo. Para ello se requiere que el usuario establezca a priori niveles deseados para el ARL_0 (ARL_0^*), para el tamaño de muestra máximo (n_{max}) y para el tamaño de muestra medio (n_0).

Dado que μ_0 y σ_0 son conocidos, y que bajo un diseño de galga 2-step de dimensiones simétricas ($S = \mu_0 - k\sigma_0, L = \mu_0 + k\sigma_0$) se cumple que $q_0 = 2\Phi(-k)$, entonces se tiene que $k = -\Phi^{-1}(q_0/2)$, y el problema de encontrar las dimensiones óptimas (S, L) se reduce a encontrar un valor óptimo para q_0 .

Con las consideraciones anteriores, formalmente el problema de optimización es definido como:

Dados: $(n_0, n_{max}, ARL_0^*, \delta^*, r^*)$. (Establecidos por el usuario)

Encontrar: $(n^I, n^{II}, WL, UCL^I, UCL^{II}, w, q_0)$.

Que minimizan: ARL_1 .

Sujeto a las restricciones:

Restricción 1 $ARL_0 = ARL_0^*$.

Restricción 2 $ASS_0 = n_0$.

Restricción 3 $n^I + n^{II} \leq n_{max}$. (Aplica para $wY_S Y_L$ -DS)

$n^{II} \leq n_{max}$. (Aplica para $wY_S Y_L$ -VSS)

A pesar de que la estructura del problema es muy similar para ambos esquemas (VSS y DS), el rango de variación de los parámetros de diseño (variables de decisión) si presenta diferencias. En la Tabla 6.1 se describe el rango de variación de los parámetros de diseño para cada esquema.

Tabla 6.1. Rango de variación de los parámetros de diseño de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS.

$wY_S Y_L$ -DS	$wY_S Y_L$ -VSS
$n^I = 1, 2, 3, \dots, n_0 - 1,$	$n^I = 1, 2, 3, \dots, n_0 - 1,$
$n^{II} = n_0 + 1 - n^I, n_0 + 2 - n^I, \dots, n_{max} - n^I,$	$n^{II} = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_{max},$
$q_0 \in [q_{min}, q_{max}],$	$q_0 \in [q_{min}, q_{max}],$
$w \in [- (n^I + n^{II}), 1],$	$w \in [-n^{II}, 1],$
$0 < WL \leq n^I,$	$0 < WL < UCL^I \leq 1.05,$
$WL < UCL^I \leq n^I + 0.5,$	$0 < WL < UCL^{II} \leq 1.$
$WL < UCL^{II} \leq n^I + n^{II}.$	

En la formulación de ambos problemas intervienen funciones no lineales (ARL_1 , ARL_0 , ASS_0) de un conjunto de 5 variables de decisión continuas (WL , UCL^I , UCL^{II} , w , q_0) y 2 enteras (n^I , n^{II}). En ambos caso, el problema tiene una elevada complejidad y es muy difícil, quizás imposible, encontrar la solución óptima a través de los métodos de optimización tradicionales. Debido a lo anterior, nos apoyaremos en un algoritmo genético (GA) para buscar la solución óptima o alguna cercanamente óptima.

Para lograr un buen desempeño en el GA se requiere establecer una función de aptitud (Fitness), capaz de discriminar entre buenas y malas soluciones. Para este problema hemos definido la siguiente función Fitness:

$$Fitness = 10000 - \left[p_1 (ARL_0^* - ARL_0) + p_2 (ASS_0 - n_0) + p_3 \left(\frac{ARL_1}{ARL_{1,Benchmark}} \right) \right]. \quad (6.30)$$

La fracción de la ecuación 6.30 que está contenida entre corchetes, representa una función de penalización, que disminuye el puntaje de una solución de acuerdo al nivel de incumplimiento de las restricciones 1 - 2 y del cociente entre los ARL_1 's de la solución y de un esquema de referencia (Benchmark) para el punto de optimización (δ^* , r^*). Como esquema de referencia empleamos el grafico de control \bar{X} -S, diseñado con $ARL_0 = ARL_0^*$ y $n = n_0$. Los pesos $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 100$ fueron fijados para equilibrar el impacto de las tres condiciones de penalidad sobre la función Fitness y 10000 es un valor umbral establecido solo con la intención de que la función Fitness sea siempre positiva.

El mismo algoritmo genético que fue empleado en trabajos previos (Aparisi y García-Díaz, 2004; Champ y Aparisi, 2008; Aparisi y De Luna, 2009; Pérez et al. , 2010;

Aparisi et al., 2012, 2018, Epprecht, Aparisi y García-Bustos, 2013b, Ho y Aparisi, 2016, entre otros) ha sido adaptado para dar solución a estos dos problemas de diseño óptimo. Esta adaptación fue programada en un software de entorno Windows, bajo el lenguaje Delphi. También fueron programados, en funciones del software R (R Core Team, 2018) (Anexo D), el cálculo de los indicadores de desempeño de los esquemas wY_sY_L -DS y wY_sY_L -VSS, y se incorporaron estas funciones como argumentos de entrada para la función ga , de la librería GA (Scrucca, 2013, 2017), que contiene las rutinas requeridas para implementar un algoritmo genético.

En la sección 6.3.1 se presenta un nuevo ejemplo de aplicación para los esquemas de control basados en la inspección por galgas. Este ejemplo es empleado para ilustrar el diseño óptimo de los esquemas wY_sY_L -DS y wY_sY_L -VSS y para mostrar el funcionamiento del software de optimización.

6.3.1. Ejemplo de aplicación 2

En un proceso de mecanizado, el diámetro interno (X) de una pieza es una variable clave de calidad. Con el proceso bajo control, X sigue una distribución aproximadamente normal de media $\mu_0 = 30$ mm y desviación $\sigma_0 = 0.2$ mm. En este proceso, se presenta una pérdida significativa de calidad cuando la media cambia a $\mu_1 = 30.1$ mm ($\delta^* = 0.5$) y simultáneamente la desviación se incrementa en un 20% ($r^* = 1.2$). Actualmente, el control se realiza con un esquema \bar{X} - S , diseñado para un tamaño de muestra $n = 6$ y $ARL_0 = 370$, bajo el cual se obtiene un $ARL_1 = 15.17$ para el cambio crítico ($\delta^* = 0.5$, $r^* = 1.2$). Con la intención de simplificar el procedimiento de inspección y reducir los esfuerzos del muestreo, se pretende diseñar un esquema de control basado en la inspección con una galga 2-step cómo la que se muestra en la Figura 6.3. Las dimensiones de esta galga serán adaptadas de acuerdo el diseño óptimo del esquema.

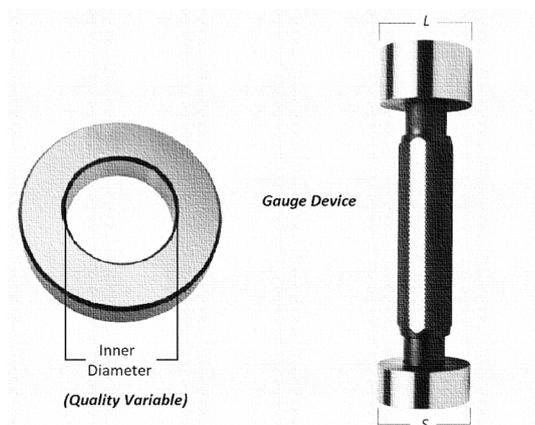


Figura 6.3. Boceto galga 2-step para verificación de diámetro interno.

Inicialmente se explora la posibilidad de utilizar un esquema $wY_S Y_L$ -FSS. Considerando la economía de la inspección basada en galgas, la optimización se realiza bajo los tamaños de muestra $n = 6, 7, 8, \dots, 11$ y $ARL_0 = 370$. Los diseños óptimos se muestran en la Tabla 6.2. Como se puede observar, con $n = 6$ el ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ -FSS es mayor que el del actual esquema \bar{X} -S. Sin embargo, si el tamaño de muestra se incrementa hasta $n = 8$, se obtiene un ARL_1 ligeramente inferior al del esquema \bar{X} -S ($n = 6$). Naturalmente, este incremento en el tamaño de muestra ($n = 6$ a $n = 8$) implica un mayor esfuerzo de muestreo.

Tabla 6.2. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -FSS para el ejemplo de aplicación 2.

(n, UCL, q_0, w)	(S, L)	ARL_1
(6, 2, 0.01923,0)	(29.532 , 30.468)	19.75
(7, 3, 0.07003,0)	(29.638 , 30.362)	16.82
(8, 3, 0.06003,0)	(29.624 , 30.376)	14.71
(9, 3, 0.05253,0)	(29.612 , 30.388)	13.13
(10, 4, 0.1076,0)	(29.678 , 30.322)	11.72
(11, 4, 0.0963,0)	(29.667 , 30.333)	10.49

Nuestra propuesta de diseño de las estrategias DS y VSS está orientada a mejorar el desempeño del esquema $wY_S Y_L$, pero sin incrementar el esfuerzo de muestreo. Para controlar el esfuerzo de muestreo, restringimos el diseño para garantizar un tamaño de muestra medio $n_0 = 6$ y un máximo tamaño de muestra $n_{max} = 12$, equivalente al doble del tamaño de muestra medio requerido $n_{max} = 2n_0$.

En la Figura 6.4 se muestra el software que ha sido desarrollado para optimizar los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Sobre la sección inferior-izquierda el usuario debe ingresar los parámetros μ_0 y σ_0 , las magnitudes de cambio crítico (δ^* , r^*) y los valores ARL_0^* , n_0 y n_{max} , que definen sus restricciones asociadas a la frecuencia emisión de falsas alarmas y a los esfuerzos de muestreo medio y máximo, respectivamente. El peso del esquema (w) puede ser buscado por el GA o definido a priori por el usuario. El software también permite al usuario restringir la búsqueda de la solución dentro de un conjunto de esquemas que no contemplan la posibilidad de emitir la alarma con el tamaño de muestra más bajo. Para esto debe activar la casilla de verificación “*No Control Limit for n_1* ”. Esta acción es equivalente a definir $UCL^1 = n^1 + 0.5$ en el esquema $wY_S Y_L$ -DS, o $UCL^1 = 1.05$ en el esquema $wY_S Y_L$ -VSS.

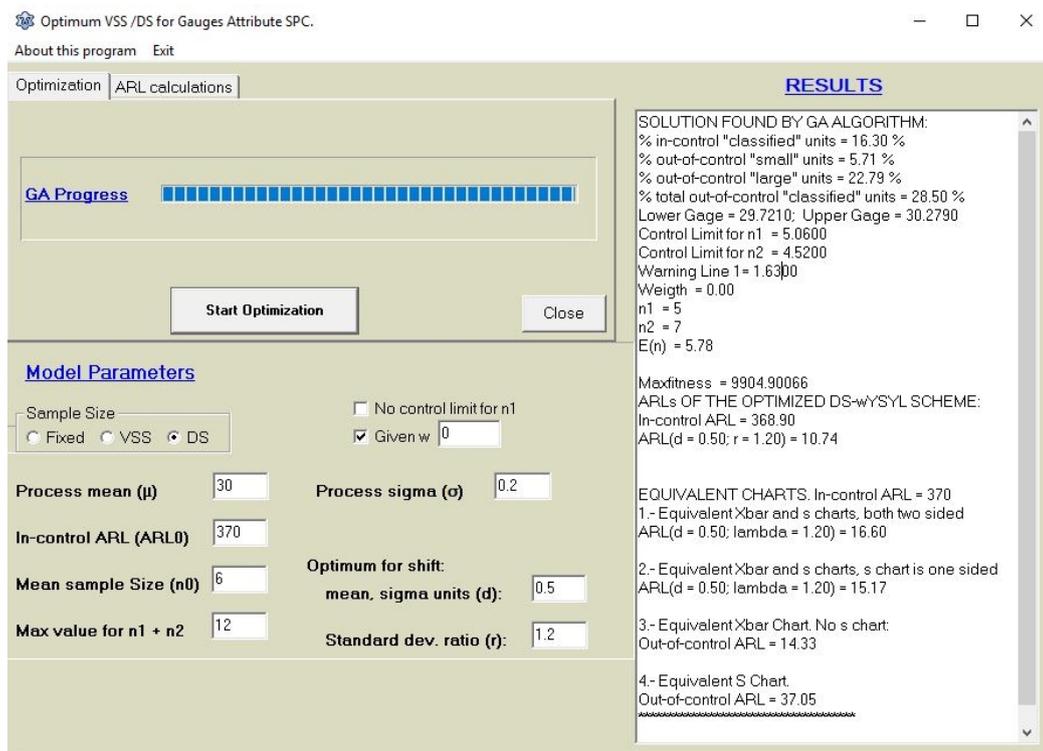


Figura 6.4. Interfaz de usuario del programa de optimización de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS.

Luego de especificar las condiciones de diseño, se selecciona el esquema a optimizar (DS o VSS) y se inicia la ejecución del GA. Los resultados se reportan sobre la sección derecha del software. Este reporte incluye los parámetros óptimos de diseño del esquema, las medidas de desempeño ARL_0 , ARL_1 , ASS_0 , y como una referencia de desempeño, se incluyen los ARL_1 de los gráficos de control por variables \bar{X} , S y $\bar{X}-S$. Los resultados que se muestran en la Figura 6.4 corresponden a la optimización del esquema $wY_S Y_L$ -DS para el caso de ejemplo. Los mismos valores de entrada fueron empleados para la optimización del esquema $wY_S Y_L$ -VSS. Ambos resultados se resumen en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3. Parámetros óptimos de los esquemas $wY_S Y_L$ -VSS y $wY_S Y_L$ -DS para el ejemplo de aplicación 2.

Esquema	$(n_I, n_{II}, WL, UCL^I, UCL^{II}, w, q_0)$	(S, L)	(ARL_0, ASS_0, ARL_1)
$wY_S Y_L$ -DS	(5, 7, 1.64, NL, 4.52, 0, 0.163)	(29.72, 30.28)	(368.9, 5.78, 10.74)
$wY_S Y_L$ -VSS	(2, 12, 0.07, NL, 0.26, -1, 0.129)	(29.70, 30.30)	(368.6, 5.98, 10.46)

Según los datos de la Tabla 6.3, en ambos esquemas (DS y VSS) la mejor solución se obtuvo cuando el límite de control de primera etapa (UCL^I) fue descartado. Particularmente, se observa una notable diferencia en la estructura de los tamaños de muestra óptimos de los dos esquemas. El esquema DS selecciona los dos tamaños de muestra ($n^I = 5, n^{II} = 7$) más cercanos al tamaño de muestra medio ($n_0 = 6$), mientras que el esquema VSS opta por tamaños de muestra más lejanos entre sí ($n^I = 2, n^{II} = 12$). Otra diferencia destacable se encuentra en el estadístico de control. Para el esquema VSS la diferencia $Y_S - Y_L$ fue el estadístico seleccionado, mientras que en el esquema DS el control se realiza sobre el máximo de los dos conteos, esto es $\max(Y_S, Y_L)$.

Ambos esquemas presentan ARL_1 muy similares (10.74, 10.46) e inferiores a los de los esquemas $wY_S Y_L$ -FSS y \bar{X} -S, equivalentes en tamaño de muestra. Frente a este par de esquemas de referencia, la reducción del ARL_1 es del 45.6% y 29.2%, respectivamente. El desempeño del esquema $wY_S Y_L$, bajo las estrategias DS y VSS, es similar al que se obtendría bajo tamaño de muestra de fijo (Tabla 6.2) con $n = 11$. Según ello, el mismo nivel de desempeño se obtiene en las estrategias DS y VSS con un ahorro en el esfuerzo de muestreo del 45.5%.

En la Figura 6.5 se ilustra el funcionamiento de los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS para el caso de ejemplo 2. Los puntos dibujados corresponden a simulaciones del procedimiento de control bajo los dos esquemas. Las 5 primeras observaciones fueron simuladas en la condición bajo control del proceso y las muestras restantes se simularon bajo el cambio crítico. Estas simulaciones se realizaron hasta que el gráfico señaló la alarma de cambio.

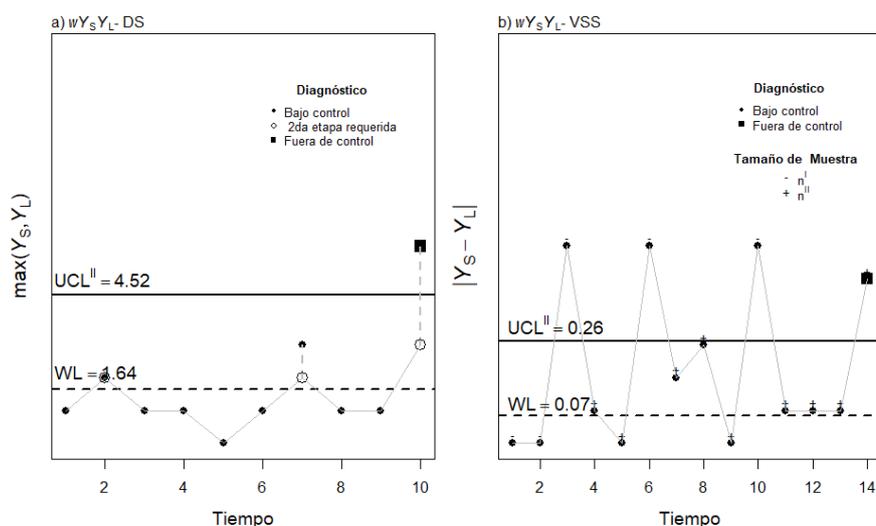


Figura 6.5. Simulación de la operación de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS óptimos para el ejemplo de aplicación 2.

De acuerdo con la Figura 6.5.a, en el esquema $wY_S Y_L$ -DS la alarma fue emitida 5 muestras después de generado el cambio, en la décima observación. En la operación del esquema, solo las muestras 2, 7 y 10 requirieron la verificación de la muestra completa. En el esquema $wY_S Y_L$ -VSS (Figura 6.5.b), la alarma se emitió en la muestra 14, es decir 8 muestras después del cambio. Las observaciones 1, 2, 3, 7 y 10 corresponden a muestras con tamaño $n^I = 2$ y las restantes observaciones son muestras de tamaño $n^{II} = 12$. Nótese que en el esquema VSS, las observaciones 3, 7 y 10 superan el límite de control UCL^{II} , pero no se consideran una alarma de cambio. Esto es debido a que UCL^{II} representa el valor límite solo para las muestras de mayor tamaño de muestra.

La comparación anterior fue incluida solo con el propósito de ilustrar la operación de los dos esquemas óptimos (DS, VSS) y no pretende establecer un punto de comparación del desempeño entre estos dos esquemas. Esta comparación de desempeño es desarrollada en la Sección 6.4.

6.4. Evaluación del desempeño de los esquemas $wY_S Y_L$ - DS / $wY_S Y_L$ - VSS

En esta sección se presenta una evaluación comparativa del desempeño del esquema $wY_S Y_L$ bajo las estrategias de tamaño de muestra adaptativo (DS y VSS) y de tamaño de muestra fijo (FSS). Sin pérdida de generalidad, la evaluación se realiza para una variable con distribución normal estándar, $X \sim N(\mu_0 = 0, \sigma_0 = 1)$, y sobre tres escenarios de cambios en la media y desviación estándar:

1. Cambios solo en la media ($\delta^* \neq 0, r^* = 1$).
2. Cambios solo en la desviación estándar ($\delta^* = 0, r^* > 1$).
3. Cambios simultáneos en la media y la desviación estándar ($\delta^* \neq 0, r^* > 1$).

En los escenarios 1 y 3 solo se consideran magnitudes de cambio positivas ($\delta^* > 0$). Esto debido a que, en una variable con distribución simétrica, el esquema $wY_S Y_L$ tiene el mismo desempeño para detectar incrementos/decrementos de la media de la misma magnitud absoluta. Lo anterior se cumple para cualquiera de las estrategias FSS, DS y VSS.

Para garantizar una comparación justa, la optimización de los tres esquemas $wY_S Y_L$ (FSS, DS, VSS) fue realizada para un valor común $ARL_0^* = 370$. Esta evaluación es realizada para diferentes tamaños de muestra medio $n_0 = 5, 7, 10, 15, 20$ y un máximo tamaño de muestra $n_{max} = 2n_0$, que actúa como restricción de diseño en las estrategias

DS y VSS. En la estrategia FSS, n_0 representa el tamaño de muestra fijo ($n = n_0$). Al igualar los tamaños de muestra medio de las tres estrategias ($ASS_0 = n_0$) garantizamos que su implementación demandará similares esfuerzos de muestreo, mientras el proceso permanece bajo control. Adicionalmente, para evaluar el esfuerzo medio de muestreo que demanda cada esquema con el proceso en el estado fuera de control, se incluye el cálculo del $ANOS_1$ en la comparación.

Como una referencia de desempeño, también se incluye en la comparación los ARL_1 de los habituales gráficos de control por variables \bar{X} , S y $\bar{X}-S$. El gráfico S es diseñado con solo un límite de control superior (configuración más eficiente para detectar incrementos en la desviación estándar) y el esquema $\bar{X}-S$ es diseñado con la misma probabilidad de falsa alarma para cada gráfico individual.

En las Tablas 6.4 y 6.5 se resumen los resultados de la comparación para los escenarios 1 y 2 (cambios solo en media y cambios solo en varianza), respectivamente. En las columnas 3 a 7 se reportan los ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ óptimo bajo las estrategias DS, VSS, FSS, el ARL_1 del esquema $\bar{X}-S$ y el ARL_1 de uno de los dos gráficos individuales, \bar{X} o S . El gráfico \bar{X} se usa como referencia de desempeño para los cambios solo en la media (Tabla 6.4) y el gráfico S para los cambios solo en la varianza (Tabla 6.5). En cada tabla, sobre las últimas 3 columnas, se reporta el indicador $ANOS_1$, evaluado para el esquema óptimo $wY_S Y_L$, bajo las estrategias DS, VSS y FSS. Los valores entre paréntesis representan el $\%ARL_1$ (columnas 3-4) y el $\%ANOS_1$ (columnas 8-9), que miden la reducción porcentual en el ARL_1 , o en el $ANOS_1$, que se obtiene cuando se emplea la estrategia DS o VSS, en lugar de la estrategia FSS.

Los datos de las Tablas 6.4 y 6.5 muestran que el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ mejora notablemente cuando se incorporan las estrategias DS y VSS. Esta mejora en el desempeño es observada para ambas estrategias, en todas las magnitudes de cambio y para todos los tamaños de muestra. La reducción porcentual del ARL_1 ($\%ARL_1$) estuvo contenida en el rango (27.2%, 64.0%) para cambios en la media y en el rango (5.5%, 56.9%) cuando el cambio fue en la varianza. Según estos resultados, la estrategia VSS es más eficaz que la estrategia DS para detectar cambios de pequeña y moderada magnitud, pero es más lenta para detectar cambios grandes. Adicionalmente se observa que, a pesar de ser esquemas basados en inspección por galgas, los esquemas $wY_S Y_L$ -VSS y $wY_S Y_L$ -DS son incluso más rápidos en la detección de cambios que los gráficos de control por variables \bar{X} , S y $\bar{X}-S$.

Tabla 6.4. ARL_1 's y $ANOS_1$'s para los esquemas óptimos wY_sY_L -FSS, wY_sY_L -DS y wY_sY_L -VSS. Cambios en la media (δ^*) y $ARL_0^* = 370$.

n_0	δ^*	ARL_1					$ANOS_1$		
		wY_sY_L			$\bar{X}-S$	\bar{X}	wY_sY_L		
		DS	VSS	FSS			DS	VSS	FSS
5	0.2	148.7 (27.2)	<u>140.0</u> (31.4)	204.2	227.7	177.6	767.3 (24.8)	<u>738.1</u> (27.7)	1021.0
	0.4	40.6 (45.9)	<u>33.8</u> (55.0)	75.2	84.8	56.6	228.2 (39.3)	<u>208.0</u> (44.6)	375.9
	0.6	13.7 (54.5)	<u>10.6</u> (64.8)	30.0	30.7	20.6	86.0 (42.7)	<u>75.0</u> (50.0)	150.0
	0.8	5.8 (63.3)	<u>4.8</u> (65.0)	13.7	12.6	8.9	40.9 (40.1)	<u>35.3</u> (48.3)	68.3
	1.0	<u>3.0</u> (57.6)	<u>3.0</u> (57.9)	7.1	6.0	4.5	23.8 (32.8)	<u>21.0</u> (40.7)	35.4
	1.2	<u>1.9</u> (54.3)	2.2 (47.3)	4.1	3.3	2.7	16.3 (21.0)	<u>15.5</u> (24.8)	20.7
	1.4	<u>1.4</u> (48.2)	1.8 (31.9)	2.7	2.1	1.8	<u>12.9</u> (4.8)	13.0 (4.0)	13.5
7	0.2	<u>106.8</u> (37.6)	<u>106.8</u> (37.6)	171.2	193.4	143.8	<u>784.4</u> (34.6)	819.6 (31.6)	1198.6
	0.4	23.4 (56.0)	<u>21.1</u> (60.3)	53.2	57.9	38.3	<u>191.8</u> (48.5)	195.6 (47.5)	372.2
	0.6	7.3 (62.2)	<u>6.5</u> (66.0)	19.2	18.5	12.7	68.5 (49.1)	<u>67.2</u> (50.1)	134.6
	0.8	<u>3.2</u> (62.2)	<u>3.2</u> (61.3)	8.3	7.2	5.3	33.8 (42.1)	<u>32.9</u> (43.7)	58.4
	1.0	<u>1.8</u> (57.7)	2.2 (49.3)	4.3	3.5	2.8	21.6 (28.1)	<u>21.5</u> (28.6)	30.1
	1.2	<u>1.3</u> (49.0)	1.8 (30.1)	2.6	2.1	1.8	<u>16.9</u> (7.0)	17.3 (4.6)	18.1
	10	0.2	<u>75.6</u> (44.3)	78.2 (42.3)	135.6	154.7	109.9	<u>810.7</u> (40.2)	862.1 (36.4)
0.4		13.6 (60.8)	<u>13.1</u> (62.3)	34.8	36.3	24.2	<u>170.2</u> (51.0)	177.5 (48.9)	347.6
0.6		<u>4.1</u> (64.0)	<u>4.1</u> (64.0)	11.4	10.3	7.4	60.6 (46.9)	<u>59.3</u> (48.0)	114.0
0.8		<u>1.9</u> (60.0)	2.3 (52.5)	4.8	4.0	3.1	32.7 (32.2)	<u>32.1</u> (33.3)	48.2
1.0		<u>1.3</u> (49.7)	1.8 (29.8)	2.6	2.1	1.8	<u>23.9</u> (6.9)	24.1 (5.9)	25.6
15	0.2	<u>48.5</u> (49.8)	50.5 (47.8)	96.7	112.1	76.2	<u>791.8</u> (45.4)	880.6 (39.3)	1449.9
	0.4	7.4 (62.9)	<u>7.2</u> (63.6)	19.8	19.9	13.6	<u>147.0</u> (50.6)	155.9 (47.6)	297.3
	0.6	<u>2.3</u> (61.2)	2.6 (56.7)	6.0	5.3	4.0	56.5 (37.3)	<u>55.5</u> (38.4)	90.2
	0.8	<u>1.3</u> (49.7)	1.8 (31.0)	2.6	2.2	1.9	<u>36.2</u> (7.9)	36.5 (7.3)	39.3
20	0.2	<u>34.5</u> (52.9)	34.7 (52.6)	73.3	84.8	56.6	<u>776.2</u> (47.0)	829.5 (43.4)	1465.5
	0.4	4.8 (63.0)	<u>4.7</u> (64.0)	13.0	12.6	8.9	<u>135.9</u> (47.6)	136.7 (47.3)	259.6
	0.6	<u>1.7</u> (56.3)	2.1 (46.0)	3.9	3.3	2.7	57.7 (25.4)	<u>56.8</u> (26.6)	77.4

Al evaluar el $ANOS_1$, observamos que para cambios en la media (Tabla 6.4), las estrategias DS y VSS también contribuyen a reducir el número de medio de unidades que se inspeccionan con el proceso fuera de control. Esta reducción ($\%ANOS_1$) estuvo comprendida en el rango (4.8%, 51.0%). En los escenarios de cambios en varianza (Tabla 6.5), esta reducción se observó en algunos casos. Por ejemplo, en cambios pequeños o moderado ($r^* \leq 1.4$) con tamaño medio de muestra ($n_0 > 5$). Por el contrario, para cambios grandes ($r^* \geq 1.6$) el $ANOS_1$ de las estrategias DS y VSS suele ser mayor al de la estrategia VSS. A pesar de lo anterior, estas situaciones no deben ser un limitante para la implementación de las estrategias de tamaño de muestra adaptativo. Ya que es

muy probable que los costos adicionales que se pueden generar como consecuencia del incremento en el ANOS₁, sean muchos menores que los ahorros económicos que se obtienen con una detección más oportuna del cambio. Según lo cual, en el balance general, las estrategias DSS y VSS seguirán presentando una ventaja económica.

Tabla 6.5. ARL₁'s y ANOS₁'s para los esquemas óptimos wY_sY_L-FSS, wY_sY_L-DS y wY_sY_L-VSS. Incrementos en la desviación (r*) y ARL₀* = 370.

n ₀	r*	ARL ₁					ANOS ₁		
		wY _s Y _L			$\bar{X}-S$	S	wY _s Y _L		
		DS	VSS	FSS			DS	VSS	FSS
5	1.2	43.8 (14.4)	<u>33.4</u> (34.8)	51.2	44.8	42.5	262.0 (- 2.4)	<u>225.1</u> (12.1)	255.97
	1.4	12.1 (20.9)	<u>9.4</u> (38.5)	15.3	12.5	12.3	82.7 (- 8.4)	<u>72.1</u> (5.5)	76.30
	1.6	5.4 (22.6)	<u>4.7</u> (32.5)	7.0	5.6	5.7	40.3 (-16.0)	<u>32.5</u> (6.5)	34.75
	1.8	3.2 (21.9)	<u>3.1</u> (23.9)	4.1	3.4	3.5	25.2 (-23.4)	22.0 (-7.6)	<u>20.43</u>
	2.0	<u>2.3</u> (20.2)	2.5 (13.3)	2.8	2.4	2.5	18.3 (-29.6)	17.3 (-22.3)	<u>14.13</u>
	2.2	<u>1.8</u> (17.9)	2.1 (3.0)	2.2	1.9	2.0	14.6 (-34.2)	14.8 (-35.8)	<u>10.88</u>
7	1.2	28.7 (33.0)	<u>21.8</u> (49.2)	42.9	37.1	32.9	246.4 (17.9)	<u>201.4</u> (32.9)	300.18
	1.4	7.1 (40.7)	<u>5.9</u> (50.4)	11.9	12.9	8.7	71.4 (14.4)	<u>60.8</u> (27.1)	83.41
	1.6	<u>3.2</u> (40.5)	3.3 (38.2)	5.4	4.2	4.0	35.9 (4.1)	<u>34.1</u> (9.1)	37.48
	1.8	<u>2.0</u> (37.0)	2.4 (23.8)	3.2	2.5	2.5	24.3 (- 8.9)	24.7 (-10.4)	<u>22.34</u>
	2.0	<u>1.5</u> (32.3)	2.0 (13.0)	2.3	1.8	1.9	19.4 (-22.6)	19.4 (-22.5)	<u>15.85</u>
10	1.2	21.5 (38.6)	<u>17.8</u> (49.3)	35.1	29.2	24.4	276.2 (21.3)	<u>214.8</u> (38.8)	350.94
	1.4	<u>4.9</u> (45.5)	<u>4.9</u> (45.8)	9.0	6.8	6.0	75.2 (16.8)	<u>70.9</u> (21.6)	90.45
	1.6	<u>2.3</u> (42.3)	2.7 (32.7)	4.0	3.0	2.8	<u>38.8</u> (2.2)	39.5 (0.5)	39.66
	1.8	<u>1.5</u> (35.6)	2.0 (16.6)	2.4	1.9	1.8	27.8 (-16.3)	27.9 (-16.8)	<u>23.87</u>
15	1.2	15.4 (41.3)	<u>11.9</u> (54.6)	26.2	21.1	16.8	308.3 (21.5)	<u>266.5</u> (32.2)	392.94
	1.4	<u>3.3</u> (45.6)	3.4 (45.3)	6.1	4.4	3.9	77.8 (15.6)	<u>75.9</u> (17.7)	92.15
	1.6	<u>1.7</u> (39.2)	2.1 (22.3)	2.7	2.0	1.9	<u>40.7</u> (0.6)	44.8 (-9.5)	40.95
	1.8	<u>1.2</u> (29.1)	1.6 (5.5)	1.7	1.4	1.3	29.8 (-14.4)	31.6 (-21.4)	<u>26.04</u>
20	1.2	12.4 (39.7)	<u>8.9</u> (56.9)	20.6	16.1	12.6	332.2 (19.3)	<u>249.5</u> (39.4)	411.86
	1.4	<u>2.7</u> (41.1)	<u>2.7</u> (41.2)	4.6	3.3	2.8	82.5 (9.8)	<u>78.9</u> (13.8)	91.48
	1.6	<u>1.4</u> (33.6)	1.9 (13.7)	2.1	1.6	1.5	44.4 (-3.3)	44.2 (-2.9)	<u>42.96</u>

Tabla 6.6. ARL_1 's y $ANOS_1$'s de los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios simultáneos en la media y en la desviación (δ^* , r^*), $ARL_0^* = 370$.

		ARL ₁												ANOS ₁								
		wY _S Y _L -DS			wY _S Y _L -VSS			wY _S Y _L -FSS			\bar{X} -S			wY _S Y _L -DS			wY _S Y _L -VSS			wY _S Y _L -FSS		
		r*			r*			r*			r*			r*			r*			r*		
n ₀	δ*	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6
5	0.2	33.4 (26.5)	10.6 (26.1)	5.0 (25.0)	26.0 (42.7)	8.3 (41.5)	4.6 (31.3)	45.4	14.3	6.7	37.5	11.6	5.4	202.2 (10.9)	72.9 (-2.1)	37.8 (-13.0)	177.7 (21.7)	64.3 (9.9)	35.6 (-6.5)	227.0	71.4	33.4
	0.4	18.5 (37.7)	7.6 (36.3)	4.2 (30.3)	14.4 (51.6)	6.5 (45.5)	4.1 (32.3)	29.7	11.9	6.0	23.9	9.3	4.8	116.3 (21.7)	53.7 (10.1)	31.8 (-6.2)	103.5 (30.4)	49.6 (17)	30.9 (-3.0)	148.6	59.7	30.0
	0.6	8.9 (47.8)	5.1 (42.7)	3.3 (35.8)	7.9 (53.8)	4.8 (46.5)	3.5 (32.6)	17.1	9.0	5.1	13.5	6.9	4.1	60.2 (29.7)	37.4 (16.5)	25.5 (0.5)	58.0 (32.2)	36.5 (18.4)	25.7 (-0.5)	85.6	44.8	25.6
7	0.2	24.7 (34.3)	6.6 (40.8)	3.1 (40.3)	18.7 (50.3)	5.6 (49.9)	3.2 (37.3)	37.6	11.1	5.1	30.2	11.6	4.0	215.5 (18.2)	67.0 (13.8)	34.8 (3.4)	175.7 (33.3)	57.5 (26.1)	33.2 (7.8)	263.3	77.8	36.0
	0.4	13.0 (44.6)	5.4 (41.4)	2.8 (39.9)	10.9 (53.9)	4.8 (48.0)	3.0 (34.3)	23.5	9.2	4.6	17.9	8.6	3.6	113.2 (31.3)	56.4 (12.3)	31.9 (1.2)	116.2 (29.5)	49.4 (23)	31.0 (3.8)	164.8	64.2	32.3
	0.6	6.1 (50.0)	4.0 (39.3)	2.4 (39.1)	5.8 (52.5)	3.8 (42.2)	2.8 (29.3)	12.2	6.6	3.9	9.4	5.8	3.0	57.6 (32.4)	41.1 (10.8)	28.1 (-2.4)	59.7 (30.0)	39.7 (14.0)	28.2 (-2.8)	85.2	46.1	27.4
10	0.2	18.3 (39.9)	4.6 (45.5)	2.2 (42.0)	15.0 (50.7)	4.6 (45.5)	2.6 (31.8)	30.5	8.4	3.8	23.2	6.2	2.9	233.1 (23.5)	70.6 (16.0)	37.7 (1.1)	214.9 (29.5)	69.7 (17.1)	36.7 (3.7)	304.8	84.1	38.1
	0.4	8.9 (46.8)	3.8 (45.5)	2.0 (41.0)	7.7 (53.9)	3.7 (47.0)	2.4 (29.5)	16.8	6.9	3.4	12.7	5.0	2.6	114.9 (31.6)	59.4 (13.7)	34.9 (-2.0)	112.2 (33.2)	55.0 (20.2)	33.8 (1.1)	167.9	68.9	34.2
	0.6	4.0 (51.3)	2.9 (39.7)	1.8 (39.2)	3.9 (52.4)	2.8 (40.5)	2.2 (25.5)	8.2	4.7	2.9	6.2	3.6	2.2	57.5 (30.3)	49.9 (-5.4)	31.2 (-7.2)	57.9 (29.7)	41.1 (13.3)	30.0 (-3.1)	82.4	47.4	29.1
15	0.2	12.0 (46.0)	3.1 (45.4)	1.6 (38.4)	10.1 (54.5)	3.2 (43.4)	2.1 (19.8)	22.2	5.7	2.6	16.4	4.1	2.0	236 (29.2)	73.0 (14.7)	37.0 (6.4)	205.6 (38.4)	72.0 (15.8)	40.4 (-2.5)	333.5	85.5	39.5
	0.4	5.1 (53.3)	2.4 (47.2)	1.5 (36.9)	5.1 (53.5)	2.8 (38.8)	2.0 (17.1)	11.0	4.6	2.4	8.3	3.3	1.8	112.4 (31.6)	58.0 (15.8)	36.9 (-3.4)	110.3 (32.8)	59.5 (13.5)	39.0 (-9.5)	164.3	68.8	35.7
	0.6	2.4 (51.8)	1.7 (45.0)	1.3 (35.3)	2.7 (46.0)	2.2 (31.1)	1.7 (15.0)	5.1	3.1	2.1	3.8	2.4	1.6	59.0 (22.6)	42.5 (10.1)	33.4 (-8.3)	58.7 (22.9)	45.8 (3.1)	33.7 (-9.4)	76.2	47.2	30.8
20	0.2	9.7 (42.2)	2.5 (40.7)	1.4 (32.9)	7.3 (56.9)	2.6 (37.9)	1.7 (16.1)	16.8	4.2	2.1	12.4	3.1	1.6	262.2 (22.0)	77.5 (8.8)	43.3 (-4.2)	207.2 (38.4)	76.5 (9.9)	43.4 (-4.5)	336.2	85.0	41.6
	0.4	3.8 (51.4)	2.0 (39.6)	1.3 (30.8)	3.7 (52.4)	2.2 (32.8)	1.6 (13.5)	7.8	3.3	1.9	6.0	2.5	1.5	113.9 (27.1)	63.8 (4.3)	40.4 (-6.5)	108.3 (30.7)	63.3 (5)	40.5 (-6.8)	156.2	66.7	37.9
	0.6	1.9 (47.8)	1.4 (37.9)	1.2 (25.6)	2.2 (37.1)	1.9 (19.6)	1.5 (6.3)	3.6	2.3	1.6	2.7	1.8	1.3	62.0 (13.3)	49.5 (-6.3)	38.1 (-18.9)	63.4 (11.3)	52.0 (-11.7)	36.7 (-14.3)	71.5	46.5	32.1

La Tabla 6.6 muestra los resultados de las evaluaciones realizadas para cambios simultáneos en la media y en la varianza del proceso. Al igual que en los anteriores escenarios (cambios solo en la media, cambios solo en la varianza), también se observa que las estrategias de tamaño de muestra adaptativo (DS y VSS) contribuyeron siempre a mejorar el desempeño del esquema para detectar cualquier tipo de cambio en la variable de calidad. En estos escenarios, la reducción del ARL_1 se presentó en el rango (6.3%, 54.5%) y nuevamente el desempeño de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS fue siempre mejor que el del esquema $\bar{X} - S$ equivalente en tamaño de muestra.

La evaluación termina con el análisis de los parámetros óptimos de diseño de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Estos parámetros se reportan en la Tabla 6.7, para los escenarios de cambio solo en la media y solo en la varianza, y en la Tabla 6.8.

Tabla 6.7. Parámetros óptimos para los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios solo en media (δ^*) y solo en la desviación (r^*) y $ARL_0^* = 370$.

		Parámetros óptimos ($wY_S Y_L$ -DS)															
		Cambios solo en la media								Cambios solo en la desviación							
n_0	δ^*	n^I	n^{II}	WL	UCL ^I	UCL ^{II}	w	q_0	r^*	n^I	n^{II}	WL	UCL ^I	UCL ^{II}	w	q_0	
5	0.2 – 2.0	4	6	2.0	NL	5.5	-0.1	0.315	1.2 – 2.0	4	6	1.0	2.5	3.0	0.5	0.046	
7	0.2 – 2.0	5	9	2.0	NL	6.5	-1.1	0.358	1.2 – 2.0	5	9	1.0	NL	4.0	1.0	0.046	
10	0.2 – 2.0	8	12	3.0	NL	9.0	-1.0	0.428	1.2 – 2.0	6	14	1.0	NL	5.0	1.0	0.052	
15	0.2 – 2.0	12	18	4.0	NL	12.0	-1.0	0.524	1.2 – 2.0	8	21	1.0	4.0	6.0	1.0	0.050	
20	0.2 – 2.0	12	28	3.0	NL	13.0	-1.0	0.460	1.2 – 2.0	13	23	2.0	6.0	9.0	1.0	0.085	
		Parámetros óptimos ($wY_S Y_L$ -VSS)															
		Cambios solo en la media								Cambios solo en la desviación							
n_0	δ^*	n^I	n^{II}	WL	UCL ^I	UCL ^{II}	w	q_0	r^*	n^I	n^{II}	WL	UCL ^I	UCL ^{II}	w	q_0	
5	0.2 – 1.0	1	10	0.19	NL	0.53	-1.0	0.422	1.2 – 1.4	3	10	0.10	0.70	0.30	0.5	0.068	
	1.2 – 1.4	2	10	0.33	NL	0.53	-1.0	0.434	1.6 – 2.2	4	10	0.14	0.64	0.26	1.0	0.052	
7	0.2 – 0.6	1	14	0.09	NL	0.46	-1.0	0.409	1.2 – 1.6	5	14	0.03	NL	0.20	1.0	0.036	
	0.8 – 1.2	2	14	0.23	NL	0.55	-0.85	0.417	1.8 – 2.0	5	14	0.08	0.55	0.23	1.0	0.056	
10	0.2 – 0.4	1	20	0.16	NL	0.49	-1.0	0.375	1.2	9	17	0.11	NL	0.21	1.0	0.064	
	0.6 – 1.0	2	20	0.16	NL	0.41	-1.25	0.409	1.4 – 1.6	6	20	0.14	NL	0.24	1.0	0.068	
									1.8	7	20	0.07	0.32	0.20	0.95	0.040	
15	0.2 – 0.4	1	29	0.13	NL	0.40	-1.0	0.603	1.2	8	30	0.13	NL	0.27	0.87	0.124	
	0.6 – 0.8	3	30	0.18	NL	0.35	-1.0	0.497	1.4 – 1.6	6	29	0.07	NL	0.21	0.80	0.090	
									1.8	13	28	0.11	0.26	0.14	0.69	0.053	
20	0.2 – 0.4	7	40	0.15	NL	0.34	-1.0	0.632	1.2	15	37	0.13	NL	0.24	1.0	0.104	
	0.6	3	39	0.13	NL	0.32	-1.0	0.532	1.4 – 1.6	7	39	0.13	NL	0.21	1.0	0.090	

Como se observa en la Tabla 6.7, en cada tipo de cambio y tamaño de muestra, se obtuvo una sola configuración del esquema $wY_S Y_L$ -DS que es óptima para todas las magnitudes de cambio. Para los cambios en la media, la solución descartó siempre el límite de control de primera etapa y el peso óptimo w fue negativo, con prevalencia del valor $w = -1.0$ (diferencia de los conteos $Y_S - Y_L$). Para cambios en la varianza, el peso w fue siempre positivo, con prevalencia del valor $w = 1.0$ (suma de los conteos $Y_S + Y_L$), y el límite de control de primera etapa fue descartado o ubicado en una posición bastante alta (de acuerdo con el bajo valor que asume el parámetro $q_0 < 0.09$), bajo la cual se anula o disminuye la probabilidad de tomar una decisión con la primera muestra.

Una mayor variedad de soluciones fueron halladas en las optimizaciones del esquema $wY_S Y_L$ -VSS. Como se observa, para cada tamaño de muestra y tipo de cambio, se encontraron 2 o 3 diferentes configuraciones que son localmente óptimas para cierto rango de magnitudes de cambio. En todos los casos se observa que la configuración óptima para cambios pequeños no es óptima frente a cambios de mayor magnitud. Esta condición se observa en ambos tipos de cambio: solo en media y solo en varianza.

Para cambios pequeños en la media ($\delta^* < 0.4$), el esquema óptimo $wY_S Y_L$ -VSS sugiere emplear la diferencia $Y_S - Y_L$ ($w = -1.0$) como estadístico de control y simultáneamente descarta el límite de control asociado al menor tamaño de muestra ($UCL^I = NL$). Para cambios más grandes ($\delta^* \geq 0.6$), el peso w varía ligeramente, pero toma siempre un valor negativo cercano o igual a -1 ($w \approx -1$). Para los cambios en la varianza, cuando el cambio es pequeño ($r^* < 1.6$), la solución óptima descartó el límite de control UCL^I , o lo ubicó en una posición relativamente alta. En este caso, la solución hallada siempre presentó un peso óptimo cercano o igual a 1 ($w \approx 1$).

Finalmente, en la Tabla 6.8 se presentan los parámetros óptimos de diseño de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS para cambios simultáneos en la media y la varianza. En las columnas 3-5 (esquema $wY_S Y_L$ -DS) y 6-8 (esquema $wY_S Y_L$ -VSS) se reporta un número asociado a la solución hallada (n_0, δ^*, r^*). El listado de soluciones se reporta en las columnas 9 -16 ($wY_S Y_L$ -DS) y 17-24 ($wY_S Y_L$ -VSS), respectivamente.

Tabla 6.8. Parámetros óptimos para los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios simultáneos en la media (δ^*) y en la desviación (r^*), $ARL_0^* = 370$.

		Identificación Soluciones						Listado de Soluciones															
		$wY_S Y_L$ -DS			$wY_S Y_L$ -VSS			$wY_S Y_L$ -DS							$wY_S Y_L$ -VSS								
		r^*			r^*																		
n_0	δ^*	1.2	1.4	1.6	1.2	1.4	1.6	id	n^I	n^{II}	WL	UCL ^I	UCL ^{II}	w	q_0	id	n^I	n^{II}	WL	UCL ^I	UCL ^{II}	w	q_0
5	0.2	1	1	1	2	1	1	1	4	6	1.0	2.5	3.0	0.5	0.046	1	3	10	0.07	0.90	0.30	0.5	0.069
	0.4	1	1	1	3	2	2	2	3	7	1.0	NL	3.5	-0.5	0.115	2	3	10	0.07	0.81	0.29	0.5	0.068
	0.6	2	1	1	3	3	2									3	3	10	0.07	NL	0.27	0.0	0.072
7	0.2	1	1	1	1	1	1	1	5	9	1.0	NL	4.0	1.0	0.046	1	5	14	0.03	NL	0.20	1.0	0.036
	0.4	2	1	1	2	1	1	2	6	8	2.0	NL	5.0	0	0.136	2	2	14	0.06	NL	0.27	-0.16	0.095
	0.6	2	2	1	4	3	1									3	4	14	0.12	0.59	0.25	0.24	0.094
																4	2	14	0.17	NL	0.39	0.0	0.234
10	0.2	1	1	1	3	2	1	1	6	14	1.0	NL	5.0	1.0	0.052	1	7	19	0.07	0.41	0.16	0.8	0.044
	0.4	2	1	1	3	2	1	2	9	11	3.0	NL	7.0	0	0.190	2	5	20	0.06	0.61	0.21	0.55	0.077
	0.6	2	1	1	4	3	1									3	5	20	0.12	NL	0.20	0.32	0.067
																4	3	20	0.17	NL	0.33	0.0	0.211
15	0.2	2	1	1	3	2	1	1	8	21	1.0	4.0	6.0	1.0	0.050	1	13	25	0.10	0.36	0.17	1.0	0.058
	0.4	3	2	1	5	3	4	2	12	18	2.0	4.5	5.5	0.2	0.081	2	10	30	0.14	0.58	0.23	0.91	0.104
	0.6	3	2	2	6	5	4	3	9	21	2.0	NL	8.0	0	0.155	3	11	29	0.11	0.52	0.20	0.73	0.082
																4	12	27	0.11	0.31	0.19	0.53	0.074
																5	5	29	0.13	NL	0.24	0.0	0.140
																6	2	30	0.16	NL	0.32	-0.58	0.334
20	0.2	2	1	1	3	2	1	1	13	23	2.0	6.0	9.0	1.0	0.085	1	18	38	0.11	0.18	0.13	1.0	0.032
	0.4	3	2	1	4	2	1	2	15	21	2.5	7.0	9.0	0.7	0.113	2	7	38	0.11	NL	0.20	0.54	0.104
	0.6	4	3	2	4	4	1	3	14	26	1.8	5.1	6.5	-0.15	0.089	3	15	40	0.13	NL	0.21	0.79	0.104
								4	18	22	6.0		14.0	0	0.308	4	6	40	0.11	NL	0.20	0.0	0.127

Según la Tabla 6.8, la solución óptima cambia notablemente dependiendo del equilibrio entre las magnitudes δ^* y r^* . Esta situación ya había sido identificada en la optimización del esquema wY_sY_L -FSS. Por ejemplo, si el cambio dominante es un cambio en la varianza, la solución óptima (solución 1) tiende a coincidir con la solución reportada en la Tabla 6.7 como óptima para cambios solo en la varianza del proceso. Esto quiere decir que un esquema óptimo para cambios en varianza, permanece siendo óptimo cuando de manera simultánea se presenta un cambio en la media de menor impacto relativo. Por el contrario, cuando el cambio en la media presenta igual o mayor impacto que el cambio en la varianza, la solución 1 deja de ser óptima y se presentan soluciones alternativas con mejor desempeño. Como se puede observar, el número de soluciones alternativas es mayor para tamaños de muestra medio más grandes.

6.5. Conclusiones

En este capítulo se desarrolló la adaptación de las estrategias de tamaño de muestra adaptativo DS y VSS sobre el esquema de control wY_sY_L . Los parámetros óptimos de los esquemas wY_sY_L -DS y wY_sY_L -VSS son obtenidos a través un procedimiento de optimización apoyado en la implementación de un algoritmo genético. Para facilitar los cálculos se ha desarrollado un software que se encuentra disponible para los usuarios.

Las evaluaciones realizadas muestran que bajo las estrategias DS y VSS, se cumple el objetivo de reducir el tiempo medio de detección de cambios en el esquema wY_sY_L . Esta reducción se obtiene para cualquier tipo y magnitud de cambio. Como novedad, se observa que bajo las estrategias DS y VSS el esquema wY_sY_L supera siempre el desempeño estadístico de los gráficos de control de control por variables \bar{X} , S y \bar{X} - S , al tiempo que se mantiene la sencillez del procedimiento de inspección basado en galgas y se reducen los esfuerzos del muestreo.

Según la evaluación, los parámetros óptimos de diseño del esquema wY_sY_L -DS son más robustos que los del esquema wY_sY_L -VSS ante variaciones en la magnitud del cambio. Los parámetros óptimos del esquema wY_sY_L -DS solo presentan variación debida al tamaño de la muestra, al tipo de cambio, pero no varían respecto a la magnitud del cambio. Por el contrario, los parámetros óptimos del esquema wY_sY_L -VSS si presentan variación de acuerdo a la magnitud de cambio. Para cambios pequeños el esquema óptimo wY_sY_L -VSS adopta una configuración diferente a la configuración óptima para cambios grandes. Justamente esta propiedad repercute en que el esquema wY_sY_L -VSS sea más sensible que el esquema wY_sY_L -DS para detectar cambios pequeños en la variable, pero menos sensible para detectar cambios de mayor magnitud.

Capítulo 7

Esquema $wY_S Y_L$ -EWMA

En este capítulo se explora la adaptación de un estadístico recursivo tipo EWMA sobre el esquema $wY_S Y_L$. Esta adaptación se realiza con el objetivo de mejorar su desempeño en la detección de pequeños cambios en la variable de proceso, sin necesidad de, por ejemplo, recurrir a la variación del tamaño de la muestra. Dado que el nuevo esquema, denominado $wY_S Y_L$ -EWMA, es un esquema con tamaño de muestra fijo, en su implementación no requiere ningún esfuerzo adicional de muestreo, con lo cual mantiene la mayor sencillez en su operación.

Apoyados en el enfoque de cadenas de Márkov, se deducen las expresiones para el cálculo del indicador ARL, con el cual se mide el desempeño estadístico del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA. El diseño de este esquema se aborda como un problema de optimización que busca la configuración de parámetros que minimizan el ARL fuera de control (ARL_1), sujeto a la restricción de cumplimiento de una frecuencia de falsas alarmas deseada por el usuario. Debido a la complejidad del cálculo del ARL_1 y a los elevados tiempos de cómputo, la solución exacta al problema de optimización no es sencilla de obtener. Como una alternativa, con muy buenos resultados, se adapta un Algoritmo Genético que proporciona una muy buena solución para este problema.

La adaptación del estadístico EWMA se realiza para el problema del control de la media y la desviación estándar de una variable con distribución normal. Sin embargo, bajo una lógica similar y algunas consideraciones adicionales, la adaptación puede ser extendida al problema de control de una variable con distribución asimétrica, como se vio en el capítulo 5 para la estrategia FSS. Esa adaptación hace parte de las ideas para futuras investigaciones derivadas de la presente tesis.

7.1. El esquema $wY_S Y_L$ -EWMA

En el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA el control de la media y/o la varianza se realiza a través de la extracción de una muestra de n unidades del proceso. Estas unidades son verificadas con una galga 2-step de dimensiones simétricas ($S = \mu_0 - k\sigma_0$, $L = \mu_0 + k\sigma_0$) y los conteos Y_S , Y_L se emplean para calcular el estadístico recursivo Z_t , definido como:

$$Z_t = \lambda\varphi + (1 - \lambda)Z_{t-1}, \quad \lambda \in (0,1]. \quad (7.1)$$

Aquí, $\varphi = \max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L)$ es el mismo estadístico empleado en el esquema $wY_S Y_L$, λ es el parámetro de memoria del estadístico EWMA y w es el peso de la combinación lineal de los conteos Y_S , Y_L . Cada observación de Z_t se dibuja en un gráfico temporal, junto a un solo límite de control superior ubicado en la posición $UCL = \mu_\varphi + L_z\sigma_\varphi\sqrt{\lambda/(2 - \lambda)}$. La alarma de cambio en el proceso se genera cuando la observación supera o iguala el valor de UCL.

El valor L_z es el parámetro de diseño que define la ubicación del límite control y los valores μ_φ y σ_φ representan la media y la desviación estándar de φ cuando el proceso está bajo control. El valor μ_φ también es el valor de inicio del estadístico EWMA ($Z_0 = \mu_\varphi$).

Para calcular μ_φ y σ_φ se requiere generar la función de probabilidad de φ , la cual se obtiene, para un tamaño de muestra fijo n , a través de la enumeración de todos los pares $\{y_S, y_L\}$ que conforman el espacio muestral Ω de los conteos Y_S , Y_L . Para cada pareja $\{y_S, y_L\}$, dado un valor fijo w , se calcula el estadístico φ . Finalmente, la distribución de probabilidad de φ se obtiene al sumar la probabilidad de todas las parejas $\{y_S, y_L\}$ que generan un valor común para φ . Esto es, dados n , w , q_0 :

$$P(\varphi|\mu_0, \sigma_0) = \sum_{i=1}^{N_\Omega} P_i I_{\{\max(wy_S+y_L, y_S+wy_L)=\varphi\}}(\{y_S, y_L\}_i), \quad (7.2)$$

$$\text{con } P_i = P(y_S, y_L|\mu_0, \sigma_0) = \frac{n! \binom{q_0}{2}^{y_S+y_L} (1-q_0)^{n-y_S-y_L}}{y_S! y_L! (n-y_S-y_L)!}, \quad y_S + y_L \leq n. \quad (7.3)$$

Por ejemplo, si suponemos que una variable de calidad $X \sim N(\mu_0 = 10, \sigma_0 = 1)$ es controlada a través de la verificación de $n = 10$ piezas, con una galga 2-step de dimensiones $S = 9.06$, $L = 10.94$ (equivalente a $q_0 = 0.3472$) y un estadístico de control

$\varphi = \max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L)$, con $w = -1$. Entonces la distribución de probabilidad de φ , con el proceso bajo control, es justamente la que se muestra en la Tabla 7.1:

Tabla 7.1. Función de probabilidad del estadístico $wY_S Y_L$. ($n = 10, w = -1, q_0 = 0.3472$).

(Y_S, Y_L)	φ	$P(\varphi \mu_0, \sigma_0)$
(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)	0	0.214
(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (3,2), (2,3), (4,3), (3,4), (5,4), (4,5)	1	0.371
(0,2), (2,0), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)	2	0.241
(0,3), (3,0), (1,4), (4,1), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3)	3	0.117
(0,4), (4,0), (1,5), (5,1), (2,6), (6,2), (3,7), (7,3)	4	0.043
(0,5), (5,0), (1,6), (6,1), (2,7), (7,2)	5	0.012
(0,6), (6,0), (1,7), (7,1), (2,8), (8,2)	6	0.002
(0,7), (7,0), (1,8), (8,1)	7	0.000
(0,8), (8,0), (1,9), (9,1)	8	0.000
(0,9), (9,0)	9	0.000
(0,10), (10,0)	10	0.000

Conocida la función $P(\varphi|\mu_0, \sigma_0)$, los parámetros μ_φ y σ_φ corresponden a:

$$\mu_\varphi = E(\varphi|\mu_0, \sigma_0) = \sum_{\varphi} \varphi P(\varphi|\mu_0, \sigma_0), \quad (7.4)$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt{V(\varphi|\mu_0, \sigma_0)} = \sqrt{\sum_{\varphi} (\varphi - \mu_\varphi)^2 P(\varphi|\mu_0, \sigma_0)}. \quad (7.5)$$

Al aplicar las ecuaciones 7.4 y 7.5 a los datos de la Tabla 7.1, se obtienen los valores $\mu_\varphi = 1.45$ y $\sigma_\varphi = 1.17$, requeridos para construir el gráfico de control $wY_S Y_L$ -EWMA. El aspecto visual de este gráfico es bastante simple. Para ilustrarlo, hemos simulado el uso del gráfico EWMA ($\lambda = 0.5, L_z = 2.5$) para el control de 20 muestras del caso de ejemplo. Para cada muestra se calcula el estadístico EWMA y su representación se muestra en la Figura 7.1.

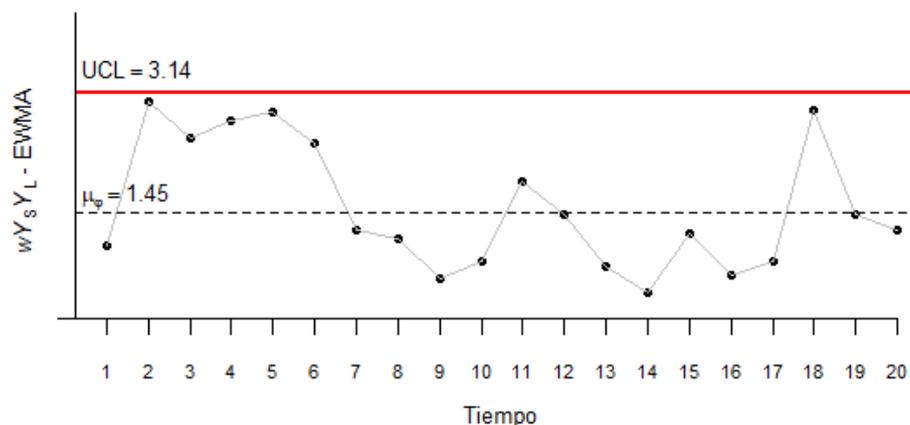


Figura 7.1. Aspecto gráfico del esquema $wY_s Y_L - EWMA$.

En el diseño del esquema $wY_s Y_L - EWMA$, se asume que el tamaño de muestra (n) está predeterminado, por lo tanto el usuario debe completar el diseño, definiendo los siguientes parámetros:

- S, L : Dimensiones de la galga.
- w : Peso de la combinación lineal.
- L_z : Límite de advertencia.

Nótese que con un peso $w < -1$, el valor mínimo del estadístico φ es negativo y varía dependiendo del tamaño de la muestra n . En este caso, el estadístico no está acotado en el extremo inferior. Por el contrario, si restringimos la elección de w sobre el intervalo $[-1, 1]$, podemos garantizar entonces que ambos estadísticos, φ y Z_t , serán siempre positivos, sin importar el tamaño de la muestra. Disponer de un valor mínimo conocido para el estadístico Z_t simplifica la labor de cómputo del ARL en el esquema $wY_s Y_L - EWMA$ (sección 7.2). Otro argumento considerado en nuestra sugerencia, tiene que ver con la poca frecuencia con que se obtuvieron soluciones óptimas con peso $w < -1$ en la optimización del esquema $wY_s Y_L$, bajo las estrategias FSS, DS y VSS.

En la sección 7.3 se presenta un procedimiento de diseño óptimo del esquema $wY_s Y_L - EWMA$. Este procedimiento se orienta a encontrar la configuración de parámetros de diseño que minimiza el ARL_1 del $wY_s Y_L - EWMA$, sujeto al cumplimiento de la frecuencia de falsas alarma deseada por el usuario ($ARL_0 = ARL_0^*$). Las expresiones para el cálculo del ARL se deducen en la sección 7.2.

7.2. Medidas de desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA

El desempeño estadístico del esquema $Y_S Y_L$ -EWMA es evaluado a través del ARL. Para calcular este indicador emplearemos una cadena de Márkov (Brook y Evans, 1972) definida por m estados transitorios y 1 estado absorbente. El estado absorbente corresponde a la zona del gráfico en la que se genera el diagnóstico fuera de control $[UCL, \infty)$. Los estados transitorios se conforman con la subdivisión en m intervalos del rango $(Z_{min}, UCL)^2$, que corresponde a la zona del diagnóstico bajo control. Cada intervalo tiene una amplitud común $\Delta = (UCL - Z_{min})/m$, con límites inferior y superior (l_i, u_i) , para $i = 1, 2, 3, \dots, m$, ubicados en:

$$l_i = Z_{min} + (i - 1)\Delta, \quad (7.6)$$

$$u_i = Z_{min} + i\Delta. \quad (7.7)$$

De acuerdo con las ecuaciones 7.6 y 7.7, el punto medio del i -ésimo intervalo será:

$$M_i = Z_{min} + (i - 0.5)\Delta. \quad (7.8)$$

La matriz \mathbf{R} , de probabilidades de transición entre estados transitorios, tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

En esta matriz, $p_{ij} = P(Z_{t+1} \in E_j | Z_t \in E_i)$ es la probabilidad de que el proceso estocástico pase del estado E_i al estado E_j en un solo paso. Esta probabilidad es aproximada por:

$$\begin{aligned} p_{ij} &\approx \Pr(l_j \leq Z_{t+1} < u_j | Z_t = M_i) = \Pr(l_j \leq \lambda\phi + (1 - \lambda)Z_t < u_j | Z_t = M_i) = \\ &= \Pr\left(\frac{l_j - (1 - \lambda)M_i}{\lambda} \leq \phi < \frac{u_j - (1 - \lambda)M_i}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

² $Z_{min} = 0$ cuando $w \in [-1, 1]$

Las ecuaciones 7.6 a 7.8 son reemplazadas en la ecuación 7.10. Luego de simplificar se obtiene:

$$p_{ij} \approx \Pr\left(Z_{min} + \frac{\Delta}{\lambda}(j - 1 - (1 - \lambda)(i - 0.5)) \leq \varphi < Z_{min} + \frac{\Delta}{\lambda}(j - (1 - \lambda)(i - 0.5))\right). \quad (7.11)$$

La matriz \mathbf{R} , definida en la ecuación 7.9, contiene información esencial para el cálculo de los indicadores de desempeño estadístico del esquema wY_sY_L -EWMA. En el estado bajo control del proceso ($\delta = 0, r = 1$) este desempeño es evaluado a través del ARL_0^{ZS} .

$$ARL_0^{ZS} = \boldsymbol{\pi}_0[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0]^{-1}\mathbf{1}. \quad (7.12)$$

Aquí \mathbf{R}_0 es la matriz \mathbf{R} evaluada para las magnitudes de cambio ($\delta = 0, r = 1$) y el vector $\boldsymbol{\pi}^0 = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0]$, con $\pi_{i^*}^0 = 1$, identifica el estado i^* en el que inicia el proceso estocástico. Dado que el estadístico EWMA inicia en $Z_0 = \mu_\varphi$, entonces $i^* = \left\lfloor 1 + \frac{\mu_\varphi - Z_{min}}{\Delta} \right\rfloor$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la función piso.

El desempeño estadístico del esquema wY_sY_L -EWMA en el estado fuera de control ($\delta \neq 0, r > 1$) se evalúa a través del ARL_1^{SS} .

$$ARL_1^{SS} = \boldsymbol{\pi}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_1]^{-1}\mathbf{1}. \quad (7.13)$$

Aquí \mathbf{R}_1 es la matriz \mathbf{R} evaluada para las magnitudes de cambio ($\delta \neq 0, r > 1$) y $\boldsymbol{\pi}$ es el vector de probabilidades estables de los m estados transitorios para el proceso bajo control.

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\boldsymbol{\pi}_0[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0]^{-1}}{ARL_0^{ZS}}. \quad (7.14)$$

Nótese que, para calcular los indicadores ARL_0^{ZS} y ARL_1^{SS} , es necesario conformar las matrices \mathbf{R}_0 y \mathbf{R}_1 , cuyas entradas corresponden con las probabilidades de transición (p_{ij}) definidas en la ecuación 7.11. El cálculo de estas probabilidades requiere del conocimiento de la función de probabilidad de φ para los estados bajo y fuera de control del proceso. En la sección 7.1 se mostró como se obtiene la función de

probabilidad $P(\varphi)$ para el estado bajo control, la cual puede ser usada para el cálculo del ARL_0^{ZS} . Sin embargo, para el cálculo del ARL_1 se requiere deducir la función $P(\varphi|\mu_1, \sigma_1)$ para el proceso fuera de control. Esta función depende de:

1. La media (μ_1) y la desviación (σ_1) de la variable de calidad (X) en el estado fuera de control.
2. El tamaño de la muestra (n).
3. El peso de la combinación lineal (w).
4. El factor de amplitud de las dimensiones de la galga 2-step ($k = -\Phi^{-1}(q_0/2)$).

Al fijar en el diseño los valores de n , w y q_0 , entonces $P(\varphi|\mu_1, \sigma_1)$ se obtiene enumerando todos los pares $\{y_S, y_L\}$ que conforman el espacio muestral Ω de los conteos Y_S, Y_L . Aplicando este concepto, sin pérdida de generalidad, para valores de la media $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ y de la desviación $\sigma_1 = r\sigma_0$, la función $P(\varphi|\mu_1, \sigma_1)$ corresponde a:

$$P(\varphi|\mu_1, \sigma_1) = P(\varphi|\delta, r) = \sum_{h=1}^{N_\Omega} P_h I_{\{\max(wy_S + y_L, y_S + wy_L) = \varphi\}}(\{y_S, y_L\}_h), \quad (7.15)$$

$$\text{con } P_h = P(y_S, y_L|\delta, r) = \frac{n! q_S^{y_S} q_L^{y_L} (1 - q_S - q_L)^{n - y_S - y_L}}{y_S! y_L! (n - y_S - y_L)!}, \quad y_S + y_L \leq n, \quad (7.16)$$

$$q_S = \Phi\left(\frac{-k - \delta}{r}\right), \quad q_L = 1 - \Phi\left(\frac{k - \delta}{r}\right). \quad (7.17)$$

Para determinar el número de estados transitorios (m) en la cadena de Márkov hemos fijado una amplitud $\Delta = 0.01$ para cada intervalo. Por lo tanto, $m = \left\lceil \frac{UCL - Z_{min}}{0.01} \right\rceil$. La precisión del cálculo del ARL fue verificada por simulación para una amplia variedad de configuraciones del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA.

7.3. Diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA

En el diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA se busca la configuración (w, L_z, λ, q_0) que, para un tamaño de muestra fijo (n), cumple con la restricción $ARL_0^{ZS} = ARL_0^*$ y minimiza el ARL_1^{SS} asociado a un cambio de magnitudes relativas ($\delta = \delta^*, r = r^*$) de interés para el usuario.

Formalmente, el problema es formulado como:

Dados: $(n, ARL_0^*, \delta^*, r^*)$. *(Establecidos por el usuario)*

Encontrar: (w, L_z, λ, q_0) .

Que minimizan:	ARL_1^{SS} .
Sujeto a las restricciones:	$ARL_0^{ZS} = ARL_0^*$,
	$w \in [-1, 1]$,
	$L_z \in (0, 4]$,
	$\lambda \in (0, 1]$,
	$q_0 \in [q_{\min}, q_{\max}]$.

Este problema de optimización no es sencillo de resolver. Como se puede notar en las ecuaciones 7.12 y 7.13, las funciones ARL_1^{SS} (objetivo) y ARL_0^{ZS} (restricción de diseño) no tienen una expresión de cálculo cerrada. Por el contrario, su cómputo se realiza a través de una aproximación por cadenas de Márkov, en el cual se realizan operaciones con matrices y vectores de alta dimensión. Adicionalmente, en el cómputo de las entradas de estas matrices y vectores se involucran funciones no lineales y términos combinatorios. Este es el caso por ejemplo, de las probabilidades de transición p_{ij} que conforman la matriz \mathbf{R} (ver ecuaciones 7.9 a 7.11 y 7.15 a 7.17).

Problemas similares a este, en el pasado han sido resueltos con éxito a través de la implementación de algoritmos genéticos (Aparisi y García-Díaz, 2004, 2007). Siguiendo esta línea, para hallar la solución a este problema particular, hemos adaptado las entradas de la función *ga* (ver Anexo E), de la librería GA (Scrucca, 2013, 2017), que contiene las rutinas requeridas para implementar un algoritmo genético en el software R 3.5.0. En esta adaptación, la función Fitness ha sido definida como:

$$Fitness = 10000 - \left[p_1(ARL_0^* - ARL_0^{ZS}) + p_2 \left(\frac{ARL_1^{SS}}{ARL_{1,Benchmark}} \right) \right]. \quad (7.18)$$

La fracción entre corchetes de la ecuación 7.18 disminuye el puntaje de una solución de acuerdo al nivel de incumplimiento de la restricción y del cociente entre los ARL_1 's de la solución y de un esquema de referencia (Benchmark). Nuevamente emplearemos un gráfico de control \bar{X} -S, diseñado con $ARL_0 = ARL_0^*$, como esquema de referencia. Los pesos $p_1 = 1$ y $p_2 = 100$ fueron definidos para equilibrar las dos condiciones de penalización.

Definido el problema de optimización, ilustraremos su implementación a través del mismo caso de ejemplo que fue empleado en la sección 6.3.1 para ilustrar el diseño

óptimo de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. En este caso de ejemplo los parámetros de entrada son ($n = 6, ARL_0^* = 370, \mu_0 = 30, \sigma_0 = 0.2, \delta^* = 0.5, r^* = 1.2$). Los resultados de la optimización se resumen en la Tabla 7.2. Como referencia adicional, se incluyen en la Tabla los ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ bajo las estrategia FSS, DS y VSS, además de los ARL_1 de los gráficos de control por variables \bar{X}, S y $\bar{X}-S$.

Tabla 7.2. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA para ejemplo de aplicación 2.

$wY_S Y_L$ -EWMA		ARL ₁						
Parámetros Óptimos (w, L_z, λ, q_0)	Dim. Galga (S, L)	Esquema $wY_S Y_L$				Gráficos por variables		
		EWMA	FSS	DS	VSS	\bar{X}	S	$\bar{X}-S$
(0.19, 2.733, 0.14, 0.1373)	(29.703, 30.297)	10.22	19.75	10.74	10.46	14.33	37.05	15.17

Como se observa, en este caso de ejemplo el ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA es muy similar al de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS, $wY_S Y_L$ -VSS y notoriamente menor al del esquema $wY_S Y_L$ -FSS y al de los gráficos de control por variables \bar{X}, S y $\bar{X}-S$. Según esto, si la elección de la herramienta para el control de proceso se basa en un criterio estadístico, se tiene que el esquema $wY_S Y_L$, bajo cualquiera de las estrategias EWMA, DS o VSS, es la mejor opción. Sin embargo, si en la elección se incluye un criterio de sencillez operativa, la balanza se inclinará notoriamente a favor de la estrategia EWMA, ya que al manejar un tamaño de muestra fijo, su operación será mucho más sencilla que la de una estrategia con tamaño de muestra adaptativo.

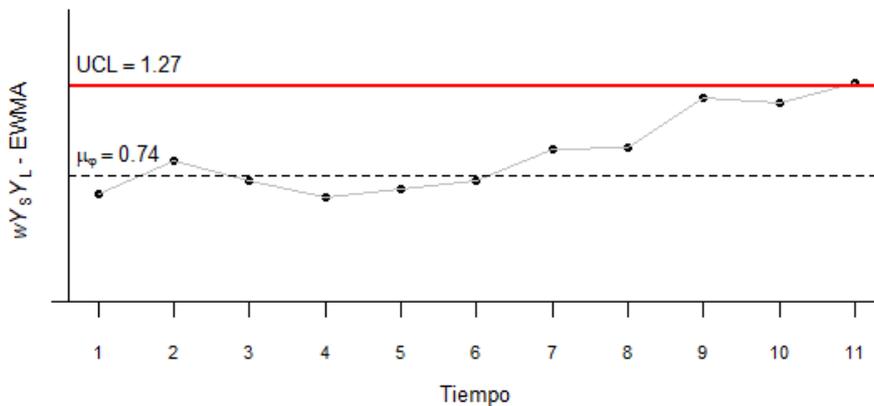


Figura 7.2. Simulación de la operación del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA óptimo para el ejemplo de aplicación 2.

Para completar el caso de ejemplo, simulamos la operación del esquema óptimo $wY_S Y_L$ -EWMA para futuras observaciones del proceso. En la Figura 7.2, las 5 primeras observaciones fueron simuladas en la condición bajo control del proceso y las muestras restantes se simularon bajo el cambio crítico hasta que el gráfico señaló la

alarma de cambio. Tal como se observa, a partir de la muestra 5 el estadístico EWMA presentó una tendencia creciente hasta generar la señal de alarma en la muestra 11.

Una evaluación comparativa del desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA, realizada sobre un escenario más amplio de comparación, es incluida en la sección 7.4.

7.4. Evaluación comparativa del desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA

Siguiendo la línea de las evaluaciones de desempeño que se han realizado en capítulos anteriores, la presente evaluación se realiza considerando el control de una variable que sigue una distribución normal estándar, a través de un esquema $wY_S Y_L$ -EWMA diseñado con $ARL_0^* = 370$. En los escenarios de evaluación se incluye la variación del tamaño de muestra ($n = 5, 7, 10, 15, 20$) y de las magnitudes críticas (δ^* , r^*) bajo tres tipos de cambios:

1. Cambios solo en la media ($\delta^* \neq 0, r^* = 1$).
2. Cambios solo en la desviación estándar ($\delta^* = 0, r^* > 1$).
3. Cambios simultáneos en la media y la desviación estándar ($\delta^* \neq 0, r^* > 1$).

También para el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA se cumple que la curva ARL para cambios en la media es simétrica. Debido a ello, en los escenarios 1 y 3 solo se consideran magnitudes de cambio positivas ($\delta^* > 0$). Como referentes de desempeño, se incluyen los esquemas $wY_S Y_L$ de tamaño de muestra fijo (FSS) y de tamaño de muestra adaptativo (DS, VSS), además de los gráficos de control por variables \bar{X} , S y $\bar{X}-S$. El esquema $wY_S Y_L$, bajo las estrategias DS y VSS, fue diseñado con un tamaño de muestra medio equivalente ($n_0 = n$) y máximo tamaño de muestra $n_{max} = 2n_0$.

En la Tabla 7.3 se presentan los resultados de la evaluación para cambios solo en la media. En esta tabla se reportan los parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA (Columnas 3-6) y los ARL_1 de todos los esquemas incluidos en la comparación (Columnas 7-12). En cada fila, en negrilla se destaca el mínimo valor ARL_1 observado para cada magnitud de cambio.

Tabla 7.3. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA y ARL_1 para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios en la media (δ^*) y $ARL_0^* = 370$.

n	δ^*	$wY_S Y_L$ - EWMA				ARL_1					
		Parámetros óptimos				$wY_S Y_L$				$\bar{X} - S$	\bar{X}
		L_Z	w	λ	q_0	FSS	EWMA	VSS	DS		
5	0.2	2.27	-1.0	0.05	0.508	204.2	129.9	140.0	148.7	227.7	177.6
	0.4	2.27	-1.0	0.05	0.508	75.2	30.8	33.8	40.6	84.8	56.6
	0.6	2.63	-1.0	0.11	0.449	30.0	12.2	10.6	13.7	30.7	20.6
	0.8	2.87	-1.0	0.20	0.458	13.7	6.5	4.8	5.8	12.6	8.9
	1.0	3.04	-1.0	0.33	0.391	7.1	4.2	3.0	3.0	6.0	4.5
	1.2	3.23	-0.9	0.45	0.340	4.1	3.0	2.2	1.9	3.3	2.7
	1.4	3.27	-1.0	0.72	0.255	2.7	2.2	1.8	1.4	2.1	1.8
7	0.2	2.29	-1.0	0.05	0.506	171.2	94.6	106.8	106.8	193.4	143.8
	0.4	2.48	-1.0	0.08	0.489	53.2	20.5	21.1	23.4	57.9	38.3
	0.6	2.74	-1.0	0.14	0.502	19.2	8.2	6.5	7.3	18.5	12.7
	0.8	3.07	-1.0	0.30	0.439	8.3	4.5	3.2	3.2	7.2	5.3
	1.0	3.19	-1.0	0.42	0.426	4.3	3.0	2.2	1.8	3.5	2.8
	1.2	3.40	-1.0	0.69	0.296	2.6	2.2	1.8	1.3	2.1	1.8
	10	0.2	2.29	-0.9	0.05	0.539	135.6	64.6	76.6	75.6	154.7
0.4		2.67	-1.0	0.11	0.505	34.8	13.4	12.7	13.6	36.3	24.2
0.6		2.98	-1.0	0.23	0.471	11.4	5.5	4.1	4.1	10.3	7.4
0.8		3.14	-1.0	0.33	0.468	4.8	3.2	2.3	1.9	4.0	3.1
1.0		3.34	-1.0	0.54	0.429	2.6	2.1	1.8	1.3	2.1	1.8
15	0.2	2.52	-1.0	0.08	0.528	96.7	42.3	50.5	48.5	112.1	76.2
	0.4	2.79	-0.9	0.14	0.496	19.8	8.4	7.2	7.4	19.9	13.6
	0.6	3.18	-1.0	0.33	0.491	6.0	3.6	2.6	2.3	5.3	4.0
	0.8	3.40	-0.9	0.54	0.446	2.6	2.2	1.8	1.3	2.2	1.9
20	0.2	2.29	-1.0	0.05	0.541	73.3	29.1	34.7	34.5	84.8	56.6
	0.4	3.01	-1.0	0.22	0.507	13.0	6.1	4.7	4.8	12.6	8.9
	0.6	3.28	-1.0	0.40	0.473	3.9	2.7	2.1	1.7	3.3	2.7

En los datos de la Tabla 7.3 se observa que el valor mínimo ARL_1 es generado por el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA en todos los casos en donde la magnitud de cambio en la media fue pequeña. En esos casos, el ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ -FSS es bastante alto ($ARL_1 > 50$) y el estadístico EWMA fue la mejor opción para lograr su reducción. Por el contrario, cuando la magnitud de cambio es moderado o grande, a pesar de que el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA es más rápido que el esquema $wY_S Y_L$ -FSS, no es el más rápido para la detección del cambio. En estos casos, el mejor desempeño lo presenta el esquema $wY_S Y_L$ -VSS, si la magnitud de cambio es moderada, o el esquema $wY_S Y_L$ -DS, para cambios más grandes. Respecto a los gráficos de control por variables, el ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA fue siempre menor o muy similar al del esquema $\bar{X}-S$, y solo fue menor que el del gráfico \bar{X} cuando la magnitud de cambio fue grande.

Al analizar los parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA, se evidencia que la configuración óptima es diferente para cada magnitud de cambio particular, con cierta tendencia en algunos parámetros. Por ejemplo, cuando se incrementa la magnitud de cambio, se observa también un incremento de los parámetros λ y L_z , los cuales determinan la memoria del estadístico EWMA y la amplitud del límite del control. Esto quiere decir que para lograr el buen desempeño observado en la detección de cambios pequeños, el estadístico EWMA opta por incluir una mayor fracción de la información pasada del proceso, mientras que para cambios grandes da mucho mayor peso a la información más reciente. También se observa una tendencia decreciente en el parámetro q_0 , que define la amplitud de las dimensiones de la galga 2-step. Cuando el cambio es pequeño las dimensiones óptimas son más estrechas y para cambios grandes tienden a ser un poco más amplias. Particularmente el peso w permanece bastante estable, con ligeras variaciones alrededor del valor $w = -1$.

Tabla 7.4. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA y ARL_1 para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios en la varianza (r^*) y $ARL_0^* = 370$.

n	r^*	$wY_S Y_L$ - EWMA				ARL_1					
		Parámetros óptimos				$wY_S Y_L$				\bar{X} -S	S
		L_z	w	λ	q_0	FSS	EWMA	VSS	DS		
5	1.2	2.36	1.0	0.05	0.125	51.2	21.8	33.4	43.8	44.8	42.5
	1.4	3.19	0.9	0.17	0.053	15.3	8.8	9.4	12.1	12.5	12.3
	1.6	3.53	1.0	0.23	0.037	7.0	5.2	4.7	5.4	5.6	5.7
	1.8	3.53	1.0	0.23	0.037	4.1	3.7	3.1	3.2	3.4	3.5
	2.0	3.53	1.0	0.23	0.037	2.8	2.9	2.5	2.3	2.4	2.5
	2.2	3.53	1.0	0.23	0.037	2.2	2.5	2.1	1.8	1.9	2.0
7	1.2	2.55	1.0	0.08	0.102	42.9	17.2	21.8	28.7	37.1	32.9
	1.4	3.05	0.9	0.17	0.051	11.9	6.9	5.9	7.1	12.9	8.7
	1.6	3.59	1.0	0.20	0.021	5.4	4.1	3.3	3.2	4.2	4.0
	1.8	3.59	1.0	0.20	0.021	3.2	2.9	2.4	2.0	2.5	2.5
	2.0	3.59	1.0	0.20	0.021	2.3	2.3	2.0	1.5	1.8	1.9
	2.2	3.59	1.0	0.20	0.021	2.3	2.3	2.0	1.5	1.8	1.9
10	1.2	2.69	1.0	0.11	0.089	35.1	13.5	17.8	21.5	29.2	24.4
	1.4	3.09	1.0	0.20	0.061	9.1	5.4	4.9	4.9	6.8	6.0
	1.6	3.38	0.8	0.30	0.039	4.0	3.2	2.7	2.3	3.0	2.8
	1.8	3.96	1.0	0.39	0.023	2.4	2.2	2.0	1.5	1.9	1.8
15	1.2	2.59	0.6	0.11	0.101	26.2	10.4	11.9	15.4	21.1	16.8
	1.4	3.20	1.0	0.30	0.057	6.1	4.0	3.4	3.3	4.4	3.9
	1.6	3.55	1.0	0.39	0.032	2.7	2.4	2.1	1.7	2.0	1.9
	1.8	3.68	1.0	0.51	0.033	1.7	1.7	1.6	1.2	1.4	1.3
20	1.2	2.68	1.0	0.12	0.076	20.6	8.3	8.9	12.4	16.1	12.6
	1.4	3.28	1.0	0.38	0.052	4.6	3.3	2.7	2.7	3.3	2.8
	1.6	3.50	1.0	0.54	0.045	2.2	2.0	1.9	1.4	1.6	1.5

En la Tabla 7.4, bajo la misma estructura de la Tabla 7.3, se presentan los resultados de las optimizaciones para los escenarios de cambios solo en la varianza. En esta tabla nuevamente se observa que el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA fue la mejor opción para cambios pequeños en la varianza, pero que es un poco más lento que los esquemas $wY_S Y_L$ -VSS y $wY_S Y_L$ -DS para cambios moderados y grandes. Cuando los cambios son muy grandes (por ejemplo $r^* \geq 1.8$), la reducción del ARL_1 (respecto al ARL_1 del esquema $wY_S Y_L$ -FSS) es casi nula. En esos mismos casos, el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA es muy similar al de los gráficos por variables \bar{X} - S y S .

También en los escenarios de cambio en varianza se observa alta variación en la configuración óptima del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA. Nuevamente los parámetros λ y L_z presentan una tendencia creciente respecto a la magnitud del cambio (r^*) y las dimensiones óptimas de la galga son más amplias para cambios más grandes. En estos escenarios, similar a lo observado en el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA, el peso w permaneció bastante estable alrededor del valor $w = 1$.

Finalmente en la Tabla 7.5 se presentan los resultados de las optimizaciones realizadas para cambios simultáneos en media y varianza. En estos escenarios de cambio, la tendencia general de las soluciones es similar a la observada en los escenarios de cambios solo en media y solo en varianza. La única diferencia sustancial se observa en el valor óptimo del peso w , el cual presenta variación que depende del equilibrio entre las magnitudes de cambio (δ^* , r^*). Similar a lo que ya ha sido identificado para las estrategias FSS, DS y VSS, cuando el cambio es grande en la media y pequeño en la varianza, el peso óptimo tiende a ser negativo, con valor límite $w \approx -1$. Por el contrario, si el cambio es grande en la varianza y pequeño en la media, el peso óptimo tiende a ser positivo con límite $w \approx 1$, y con equilibrio entre las magnitudes de cambio el peso tiende a ser $w \approx 0$.

Tabla 7.5. Parámetros óptimos del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA y ARL_1 para los esquemas óptimos $wY_S Y_L$ -FSS, $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS. Cambios simultáneos en la media y la varianza (δ^* , r^*) y $ARL_0^* = 370$.

n	δ^*	r^*	$wY_S Y_L$ - EWMA				ARL ₁						
			Parámetros óptimos				$wY_S Y_L$				\bar{X} -S	\bar{X}	S
			L_Z	w	λ	q_0	FSS	EWMA	VSS	DS			
5	0.2	1.2	2.54	0.7	0.08	0.116	45.4	19.6	26.0	33.4	37.5	53.4	42.5
		1.4	2.97	0.9	0.11	0.047	14.3	8.4	8.3	10.6	11.6	24.4	12.3
		1.6	3.20	1.0	0.14	0.037	6.7	5.1	4.6	5.0	5.4	14.1	5.7
	0.4	1.2	2.70	0.4	0.11	0.086	29.7	14.4	14.4	18.5	23.9	24.8	42.5
		1.4	3.20	1.0	0.14	0.037	11.9	7.4	6.5	7.6	9.3	14.5	12.3
		1.6	3.20	1.0	0.14	0.037	6.0	4.7	4.1	4.2	4.8	9.8	5.7
	0.6	1.2	2.71	0.0	0.14	0.141	17.1	9.6	7.9	8.9	13.5	12.0	42.5
		1.4	3.02	0.5	0.17	0.065	9.0	6.0	4.8	5.1	6.9	8.4	12.3
		1.6	3.77	0.3	0.30	0.028	5.1	4.2	3.5	3.3	4.1	6.5	5.7
7	0.2	1.2	2.55	0.6	0.08	0.067	37.6	15.5	18.7	24.7	30.2	46.7	32.9
		1.4	3.24	1.0	0.17	0.034	11.1	6.6	5.6	6.6	11.6	22.4	8.7
		1.6	3.61	0.9	0.26	0.028	5.1	4.0	3.2	3.1	4.0	13.3	4.0
	0.4	1.2	2.63	0.3	0.11	0.091	23.5	11.2	10.9	13.0	17.9	18.8	32.9
		1.4	3.04	0.7	0.20	0.072	9.2	5.8	4.8	5.4	8.6	11.8	8.7
		1.6	3.61	0.9	0.26	0.028	4.6	3.7	3.0	2.8	3.6	8.5	4.0
	0.6	1.2	2.92	0.0	0.20	0.120	12.2	7.1	5.8	6.1	9.4	8.4	32.9
		1.4	3.28	0.4	0.30	0.055	6.6	4.7	3.8	4.0	5.8	6.4	8.7
		1.6	3.61	0.9	0.26	0.028	3.9	3.3	2.8	2.4	3.0	5.2	4.0
10	0.2	1.2	2.83	0.6	0.17	0.090	30.5	12.4	15.0	18.3	23.2	39.2	24.4
		1.4	3.23	1.0	0.23	0.052	8.4	5.1	4.6	4.6	6.2	19.9	6.0
		1.6	3.60	0.9	0.39	0.038	3.8	3.1	2.6	2.2	2.9	12.3	2.8
	0.4	1.2	2.78	0.1	0.17	0.126	16.8	8.5	7.7	8.9	12.7	13.5	24.4
		1.4	3.23	1.0	0.23	0.052	6.9	4.5	3.7	3.8	5.0	9.2	6.0
		1.6	3.60	0.9	0.39	0.038	3.4	2.8	2.4	2.0	2.6	7.0	2.8
	0.6	1.2	3.07	-0.2	0.30	0.162	8.2	5.2	3.9	4.0	6.2	5.6	24.4
		1.4	3.09	0.2	0.26	0.054	4.7	3.6	2.8	2.9	3.6	4.6	6.0
		1.6	3.70	0.7	0.39	0.025	2.9	2.5	2.2	1.8	2.2	4.1	2.8
15	0.2	1.2	2.61	0.8	0.11	0.087	22.2	9.1	10.1	12.0	16.4	30.6	16.8
		1.4	3.08	1.0	0.23	0.052	5.7	3.8	3.2	3.1	4.1	16.8	3.9
		1.6	3.32	0.6	0.42	0.048	2.6	2.4	2.1	1.6	2.0	11.0	1.9
	0.4	1.2	2.87	0.0	0.20	0.116	11.0	6.1	5.1	5.1	8.3	8.8	16.8
		1.4	3.21	0.6	0.42	0.071	4.6	3.3	2.8	2.4	3.3	6.6	3.9
		1.6	3.32	0.6	0.42	0.048	2.4	2.2	2.0	1.5	1.8	5.4	1.9
	0.6	1.2	3.20	-0.3	0.36	0.205	5.1	3.6	2.7	2.4	3.8	3.5	16.8
		1.4	3.26	0.2	0.42	0.051	3.1	2.6	2.2	1.7	2.4	3.2	3.9
		1.6	3.41	0.5	0.60	0.056	2.1	1.9	1.7	1.3	1.6	3.0	1.9

Tabla 7.5. Continuación

n	δ^*	r^*	$wY_S Y_L$ - EWMA				ARL ₁						
			Parámetros óptimos				$wY_S Y_L$				\bar{X} -S	\bar{X}	S
			L_Z	W	λ	q_0	FSS	EWMA	VSS	DS			
20	0.2	1.2	2.79	0.6	0.18	0.092	16.8	7.3	7.3	9.7	12.4	24.8	12.6
		1.4	3.06	0.9	0.28	0.064	4.2	3.1	2.6	2.5	3.1	14.5	2.8
		1.6	3.28	1.0	0.48	0.068	2.1	1.9	1.7	1.4	1.6	9.8	1.5
	0.4	1.2	2.95	0.0	0.26	0.160	7.8	4.7	3.7	3.8	6.0	6.4	12.6
		1.4	3.28	0.7	0.40	0.045	3.3	2.7	2.2	2.0	2.5	5.2	2.8
		1.6	3.50	0.7	0.72	0.046	1.9	1.8	1.6	1.3	1.5	4.4	1.5
	0.6	1.2	3.01	-0.1	0.32	0.283	3.6	2.8	2.2	1.9	2.7	2.5	12.6
		1.4	3.28	0.2	0.50	0.060	2.3	2.1	1.9	1.4	1.8	2.4	2.8
		1.6	3.34	0.3	0.70	0.078	1.6	1.6	1.5	1.2	1.3	2.4	1.5

7.5. Conclusiones

Basados en los resultados de las evaluaciones realizadas en el presente capítulo, se concluye que la incorporación de memoria al esquema $wY_S Y_L$ contribuyó de forma efectiva a mejorar su desempeño en la detección de cambios de pequeña y moderada magnitud en la variable de calidad. Como se pudo observar, para disminuir el tiempo medio de detección de cambios pequeños, el estadístico EWMA disminuye el valor del parámetro de memoria (λ), otorgando una mayor participación a la información colectada en los anteriores instantes de muestreo. Bajo esta configuración, el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA constituye la mejor alternativa basada en inspección por galgas para el control de la variable, ya que su desempeño es superior al de las estrategias de tamaño de muestra adaptativo (VSS y DS). Una ventaja adicional que presenta el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA frente a los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS, tiene que ver con su sencillez operativa. Dado que este es un esquema de tamaño de muestra fijo, el aspecto visual del gráfico de control, las reglas de decisión y la logística requerida para realizar el muestreo, son mucho más sencillas que en los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS.

A pesar de las ventajas mencionadas anteriormente, se recomienda que el usuario evalúe con detenimiento la implementación de un esquema $wY_S Y_L$ -EWMA cuando el cambio crítico es moderado o grande. En estos casos, la reducción del ARL₁, frente a un esquema $wY_S Y_L$ -FSS, no es tan notoria y los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS tienen mejor desempeño estadístico. En este tipo de cambios es necesario que el usuario tome la decisión sobre el esquema a utilizar considerando los criterios de desempeño estadístico, a favor de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS, y de sencillez operativa, a favor del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA.

Las tablas con parámetros óptimos que fueron suministradas al interior del capítulo, pueden ser usadas como guía para el diseño de un esquema $wYsY_L$ -EWMA, cuando se desea un $ARL_0 = 370$ y tamaños de muestra $n = 5, 7, 10, 15, 20$. Para valores distintos en estas entradas, el usuario puede utilizar las funciones que fueron diseñadas en el software R (R Core Team, 2018) para tal fin, que se encuentran disponibles en el Anexo E.

Capítulo 8

Conclusiones, líneas futuras de investigación y contribuciones

En este capítulo presentamos una discusión de los resultados obtenidos con el desarrollo de esta tesis doctoral, con los cuales se da respuesta a los objetivos planteados en el capítulo 1. Particularmente, el desarrollo de los objetivos específicos 1-4 corresponde al material presentado en los Capítulos 4-7, respectivamente.

Al interior de cada capítulo, y en la definición del alcance del proyecto (sección 1.4), fueron declarados los supuestos sobre la variable de calidad y sobre el proceso en general, bajo los cuales se desarrollaron los nuevos esquemas de control sugeridos en esta tesis. A pesar de que estos supuestos suelen cumplirse con frecuencia en la práctica del CEP, es innegable que ellos no abarcan todo el universo de situaciones que se pueden presentar. En este sentido, la extensión de nuestras propuestas para abarcar nuevas condiciones de la variable de calidad u otras condiciones del proceso, representan una oportunidad de desarrollo de futuros proyectos de investigación. Estas ideas de *investigación futura* se esbozan con mayor detalle en la sección 8.2.

Finalmente, en la sección 8.3 se presenta una relación de los productos académicos que se obtuvieron en el desarrollo de esta tesis doctoral.

8.1. Conclusiones

Dando cumplimiento al objetivo general, con el desarrollo de esta tesis doctoral hemos contribuido al mejoramiento del desempeño estadístico de los esquemas basados en la inspección por galgas para el control de una variable cuantitativa de calidad.

Como se evidenció en la revisión bibliográfica (capítulo 3), este problema ya había sido formalmente estudiado desde la década los 40's, Tippett (1944), Stevens (1948), Mace (1952) y Ott y Mundel (1954) son las primeras referencias, y posteriormente fue retomado por Steiner et al. (1996), Steiner (1998), Wu et al. (2009), Aparisi et al. (2018) y Bezerra et al. (2018). En estos trabajos fue sugerido el uso de diferentes estadísticos para el control de la variable de calidad y se ha abordado el problema de diseño óptimo del esquema de control desde diferentes perspectivas. En los primeros trabajos, se realizaba la optimización independiente de los parámetros del gráfico de control y de las dimensiones de la galga. Los trabajos más recientes abordaron ambos problemas bajo una sola optimización conjunta.

Las evaluaciones de desempeño que han sido realizadas, muestran que entre las alternativas disponibles no existe una propuesta con el mejor desempeño global. Por el contrario, cada propuesta presenta fortalezas para detectar algún tipo de cambio en particular. En consecuencia, si el usuario desea identificar el mejor esquema para el control de su proceso, deberá evaluar cada una de estas propuestas y seleccionar aquella con el mejor desempeño para su interés particular.

En la primera contribución de esta tesis, nosotros hemos desarrollado un nuevo esquema de control basado en la inspección con una galga 2-step, el esquema $wY_S Y_L$. El estadístico de control de este nuevo esquema, $\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L)$, es flexible y representa una familia de estadísticos conformada por todas las variaciones del peso w . A través de la variación de w , el estadístico tiene la capacidad de adaptarse para obtener su mejor desempeño en la detección de un cambio crítico de interés para el usuario. En este trabajo hemos demostrado que para ciertos valores particulares de w , el estadístico del esquema $wY_S Y_L$ es equivalente a los estadísticos de control que han sido sugeridos en los trabajos previos. Esta propiedad garantiza que al optimizar el diseño del esquema global $wY_S Y_L$, el resultado será siempre el esquema particular con el mejor desempeño estadístico para el control de la variable.

Para seleccionar este diseño óptimo, estudiamos las propiedades estadísticas del esquema $wY_S Y_L$ y basados en estas propiedades, desarrollamos un procedimiento de optimización exacto, a través del cual se obtiene la configuración que garantiza una frecuencia deseada de falsas de alarmas y el mejor desempeño en la detección de un cambio crítico en la variable de calidad. A través de esta optimización se selecciona simultáneamente: el mejor estadístico de control, los valores óptimos para la ubicación del límite de control en el gráfico y las dimensiones óptimas para el diseño de la galga 2-step. Esta rutina de optimización fue programa en funciones del software R (R Core

Team, 2018) y en un software de entorno Windows. Ambas versiones del programa se encuentran disponibles para al usuario.

En las optimizaciones realizadas fue frecuente encontrar una configuración óptima del esquema $wY_S Y_L$ que coincide con alguno de los estadísticos propuestos previamente en la literatura. Por ejemplo, para el control de la media de una variable con distribución normal, el mejor estadístico fue el valor absoluto de la diferencia de los conteos $|Y_S - Y_L|$. Por el contrario, para el control de la varianza el mejor estadístico fue la suma $Y_S + Y_L$. El control simultáneo de los conteos Y_S e Y_L , a través de dos gráficos individuales, fue una alternativa con buen desempeño para el control de cambios simultáneos en ambos parámetros (media y desviación). Los tres estadísticos anteriores corresponden a los valores particulares $w = -1, 1, 0$, respectivamente. Estos estadísticos ya habían sido propuestos anteriormente por Stevens (1948), Wu et al. (2009) y Aparisi et al., (2018). A pesar de ello, aún en estos casos, nuestra propuesta presenta un valor agregado. Por ejemplo, en el caso del gráfico $Y_S - Y_L$, su optimización conjunta con las dimensiones de la galga no había sido realizada hasta el momento, y para los gráficos $Y_S + Y_L$ e $Y_S Y_L$ esta optimización fue realizada a través de un método heurístico. Adicionalmente, cuando el tamaño de la muestra fue grande ($n \geq 15$) y el esquema se optimizó para un cambio simultáneo en la media y la desviación estándar de pequeña magnitud, la optimización arrojó un peso $w \neq -1, 1, 0$, que corresponde a un nuevo esquema que no había sido considerado anteriormente.

En una comparación del desempeño estadístico del esquema $wY_S Y_L$ se evidenció que, bajo el mismo tamaño de muestra, el esquema $wY_S Y_L$ es un poco más lento que los habituales gráficos de control por variables $(\bar{X}, S, \bar{X} - S)$ para detectar el cambio crítico. A pesar de ello, la diferencia no es tan grande y puede ser compensada con un ligero incremento del tamaño de muestra en el esquema $wY_S Y_L$. Este incremento es factible debido a que generalmente la verificación con una galga suele ser mucho más económica y sencilla que una medición exacta. Incluso, con el incremento en el tamaño de muestra, es muy probable que el esquema $wY_S Y_L$ mantenga su ventaja económica y operativa frente a un esquema por variables de menor tamaño de muestra.

En una segunda contribución, hemos extendido la utilidad del esquema $wY_S Y_L$ para realizar el control de una variable con distribución asimétrica. Hasta el momento, los trabajos previos habían mencionado pasivamente la posibilidad de realizar esta adaptación, sin llegar a realizar su desarrollo. Al abordar este problema hemos descubierto que la adaptación no es trivial y que no basta con transformar la variable de calidad para lograr la normalidad en su distribución. Las razones por la cual se

descarta una aproximación basada en una transformación se explican en detalle en la introducción del capítulo 5.

Particularmente, realizamos la extensión a las distribuciones skew-normal, log-normal y Weibull. Estas tres distribuciones son bastante flexibles en su forma y permiten modelar el comportamiento de muchas variables en el contexto de control de la calidad. Dado que la estrategia metodológica que se siguió para lograr la adaptación es bastante general, esta puede ser usada como modelo de referencia para extender el uso del esquema $wY_S Y_L$ a otras distribuciones de probabilidad. Para esto solo se requiere encontrar una función, o mecanismo, que enlace los valores de la media y la desviación estándar de la distribución con las probabilidades de clasificar una pieza en cada intervalo extremo de la galga 2-step.

En la extensión del esquema $wY_S Y_L$ para el control de la media en distribuciones asimétricas nos encontramos con un nuevo desafío, relacionado con la asimetría y posible sesgo de la curva ARL. A pesar de que la asimetría de la curva ARL es una propiedad inevitable cuando se controla una variable con distribución asimétrica, hemos intentado reducir su efecto, modificando la función objetivo del procedimiento de optimización. En este caso, la optimización se orientó a minimizar el $\max(ARL_{1+}, ARL_{1-})$, con lo cual pretendemos evitar un desbalance extremo en el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ para detectar cambios de la media en las direcciones de incremento y decremento. Complementariamente, para evitar el sesgo de la curva ARL, incluimos un nuevo parámetro de diseño, el factor f , que permite generar un desbalance entre las probabilidades acumuladas en los intervalos extremos de las dimensiones de la galga 2-step. En muchos casos, este desbalance contribuye a reducir el sesgo de la curva ARL para la media hasta niveles tolerables.

Como se puede deducir, existe un mayor nivel de complejidad en el problema de diseño óptimo del esquema $wY_S Y_L$ para una variable con distribución asimétrica. Esto debido a que este problema tiene un parámetro de diseño adicional (f) y una nueva restricción (curva ARL insesgada). Para encontrar la configuración óptima, hemos modificado el algoritmo de optimización del esquema $wY_S Y_L$. Con esta modificación el algoritmo es ahora más general y puede ser empleado para otras distribuciones de probabilidad.

Las optimizaciones realizadas para las distribuciones skew-normal, log-normal y Weibull, mostraron que la suma $Y_S + Y_L$ y la diferencia $Y_S - Y_L$ siguen siendo buenos estadísticos para el control de la varianza o de la media respectivamente, incluso en estas distribuciones asimétricas. Un diseño de galga 2-step con desbalance entre las

probabilidades acumuladas en los intervalos extremos ($f < 0.5$), fue generalmente seleccionado como óptimo para el control de la media cuando el tamaño de muestra fue pequeño. En los demás casos, control de la varianza, o control de la media con tamaño de muestra grande, este desbalance no fue requerido ($f = 0.5$) por el diseño óptimo.

Posteriormente, en la tercera contribución de esta tesis, desarrollamos la adaptación de dos estrategias de tamaño de muestra adaptativo (DS y VSS) para el esquema $wY_S Y_L$. Esta adaptación se realizó con el objetivo de mejorar el desempeño estadístico del esquema $wY_S Y_L$ en el control de una variable con distribución normal, sin necesidad de recurrir a un incremento en los esfuerzos medio de muestreo del procedimiento de inspección. Para ambas estrategias se dedujeron las expresiones estadísticas para el cálculo de los indicadores de desempeño y se resolvió el problema de optimización de sus parámetros a través de la implementación de un algoritmo genético.

Las evaluaciones realizadas mostraron que bajo las estrategias DS y VSS, el esquema $wY_S Y_L$ detecta el cambio en la variable en un tiempo medio notablemente menor al requerido bajo una estrategia de tamaño de muestra fijo (FSS). Esta condición se cumplió para todos los tipos de cambio, sin importar su magnitud, ni el tamaño de muestra. Adicionalmente, como novedad, se observa que con las estrategias DS y VSS, el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ fue siempre mejor que el de los gráficos de control por variables \bar{X}, S y $\bar{X}-S$ equivalentes en tamaño de muestra. Esto quiere decir que hemos cumplido con el objetivo de suministrar una herramienta de control de proceso, de mayor sencillez operativa que los gráficos de control por variable y con mejor desempeño estadístico.

Finalmente, nuestras contribuciones finalizan con la incorporación de memoria al esquema $wY_S Y_L$, a través de la adaptación de un estadístico recursivo EWMA. Basados en una cadena Márkov, dedujimos las expresiones estadísticas para el cálculo del ARL del nuevo esquema $wY_S Y_L$ -EWMA y nuevamente utilizamos un algoritmo genético para encontrar su diseño óptimo. Las evaluaciones realizadas mostraron que el esquema $wY_S Y_L$ -EWMA es el más rápido para detectar cambios pequeños en la variable de calidad. En este clase de cambios, este esquema presenta un menor ARL_1 que los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS, equivalentes en tamaño de muestra. Cuando el cambio es moderado, el mejor desempeño lo presenta el esquema $wY_S Y_L$ -VSS y para cambios pequeños es mejor el desempeño del esquema $wY_S Y_L$ -DS.

En el análisis de sensibilidad sobre el diseño óptimo de los esquemas desarrollados en esta tesis, encontramos que los parámetros de los esquemas wY_sY_L -FSS y wY_sY_L -DS son robustos a la variación de la magnitud de cambio crítico. Esto quiere decir que una sola configuración tiene el mejor desempeño para detectar cualquier magnitud de cambio en la variable, siempre que este cambio afecte solo a uno de los parámetros (la media o la desviación estándar) y permanezcan fijos el tamaño de la muestra (n) y el ARL_0^* de diseño. Por el contrario, los parámetros óptimos de los esquemas wY_sY_L -VSS y wY_sY_L -EWMA son menos robustos a la variación en la magnitud del cambio.

En el esquema wY_sY_L -VSS fue frecuente observar 2 tipos de configuraciones óptimas, una para cambios pequeños y otra para cambios grandes. Frente a cambios pequeños la configuración óptima tiende a seleccionar dos tamaños de muestra muy extremos. El primer tamaño de muestra suele ser muy pequeño y su potencia estadística es muy baja para detectar un cambio. Generalmente la potencia de esta muestra solo es suficiente para motivar el cambio a un tamaño de muestra mucho más grande. Bajo este mayor tamaño de muestra, la potencia estadística se eleva y el cambio tiende a ser detectado con mayor velocidad. Esta configuración es bastante adecuada para cambios pequeños, pero suele generar un retraso en la detección de un cambio grande. Debido a esto, cuando se optimiza para un cambio grande, el esquema wY_sY_L -VSS adopta una configuración alternativa, en la cual el tamaño de la primera muestra se incrementa para aumentar su potencia en la detección del cambio.

En el esquema wY_sY_L -EWMA, la robustez de las soluciones óptimas es muy baja, dado que generalmente se observó una configuración óptima para cada magnitud de cambio. Para cambios pequeños, el estadístico EWMA óptimo reduce el valor del parámetro de memoria ($\lambda \rightarrow 0$), otorgando una mayor participación a la información recolectada en los anteriores instantes de muestreo. Con esta configuración, se dispone de mayor información del proceso y el procedimiento tiende a disminuir el tiempo medio de detección del cambio. Nótese que esta configuración restringe el rango de movimiento del estadístico EWMA, por lo cual, si se presenta un cambio grande, es muy probable que se requiera de una mayor tiempo medio para que el estadístico pueda superar el límite de control. Esta es la razón por la que, cuando se optimiza para un cambio grande, el esquema óptimo suele renunciar a la memoria ($\lambda \rightarrow 1$), permitiendo una mayor amplitud de movimiento al estadístico EWMA.

Como se puede notar, los esquemas wY_sY_L -VSS y wY_sY_L -EWMA tienen la propiedad de adaptarse para obtener un mejor desempeño en la detección de cambios pequeños y moderados en la variable. Sin embargo, esta mejora generalmente se obtiene bajo

una configuración que genera un retraso en la detección de cambios de mayor magnitud. Conociendo lo anterior, recomendamos al usuario tener en cuenta esta propiedad para la selección del esquema de control basado en galgas.

Como criterio de selección es recomendable que el usuario establezca un balance entre el desempeño estadístico del esquema y su sencillez operativa. Recordemos que los esquemas $wY_S Y_L$ -FSS y $wY_S Y_L$ -EWMA son esquemas con tamaño de muestra fijo, por lo tanto su implementación, al igual que el aspecto visual del gráfico de control, es muy sencilla. Por el contrario, en los esquemas $wY_S Y_L$ -DS y $wY_S Y_L$ -VSS, la implementación de las reglas de cambio de tamaño de muestra se requiere de una mayor logística para la inspección.

8.2. Líneas futuras de investigación

Los esquemas de control propuestos en la presente tesis, fueron desarrollados bajo el supuesto de que se conocen a priori los valores de la media y la desviación estándar (μ_0, σ_0) de la variable en el estado bajo control. Cuando μ_0 y σ_0 son conocidos, las expresiones estadísticas que hemos suministrado proporcionan la evaluación exacta del desempeño estadístico del esquema $wY_S Y_L$, bajo las estrategias FSS, DS, VSS, EWMA. Sobre este conocimiento de μ_0 y σ_0 , también se soportan los algoritmos de búsqueda de la configuración óptima.

En la práctica del CEP, es común que el usuario desconozca los parámetros de la variable (μ_0, σ_0) y que deba emplear datos del proceso para obtener una estimación. Bajo este escenario de parámetros estimados, el desempeño de los esquemas es incierto, al igual que es incierta la optimalidad del diseño que hemos sugerido. En este sentido se presentan dos oportunidades para el desarrollo de futuros proyectos de investigación. Un primer proyecto puede ser dirigido a evaluar el *efecto del error de estimación de los parámetros (μ_0, σ_0) sobre el desempeño real del esquema $wY_S Y_L$, bajo las estrategias FSS, DS, VSS, EWMA, y sobre la robustez de su diseño óptimo*. Este objetivo es similar al desarrollados en los trabajos de Aparisi, Mosquera y Epprecht (2018), Mosquera, Aparisi y Epprecht (2018b), Mosquera, Aparisi y Epprecht (2019b) para los gráficos S , \bar{X} y \bar{X} - S . Un segundo proyecto puede dirigirse a la *evaluación de la eficiencia económica y estadística de implementar una alternativa de estimación de los parámetros (μ_0, σ_0) basados en los conteos de la verificación por galgas*.

En el desarrollo de esta tesis, también asumimos que el diseño de la galga 2-step puede ser adaptado para satisfacer de forma exacta las dimensiones sugeridas por la

configuración óptima. También suponemos que esta galga no presenta desgaste alguno y que no existe un error de calibración. En este sentido, *el estudio del efecto del error de calibración de la galga, o de una condición de desgaste, sobre el desempeño del esquema wY_sY_L* , puede ser el tema de un futuro proyecto de investigación.

Otro tema de investigación, que complementaría el trabajo realizado en la presente tesis, se relaciona con la *extensión del esquema wY_sY_L , bajo las estrategias DS, VSS, EWMA, para el control de una variable con distribución asimétrica*. Recordemos que en esta tesis, la extensión a otras distribuciones solo fue estudiada para la estrategia FSS. Sin embargo, hemos demostrado que el esquema wY_sY_L es un esquema de libre distribución y que su extensión a otras distribuciones es perfectamente posible. Incluso, es posible realizar *la extensión del esquema wY_sY_L , bajo las estrategias FSS, DS, VSSS, EWMA, para el control simultáneo de dos o más variables de calidad*.

Otro tema de interés en el CEP, se relaciona con la cuantificación de la capacidad del proceso para satisfacer las especificaciones. Este análisis, denominado Análisis de Capacidad de Proceso, generalmente utiliza las mediciones que han sido dibujadas en un gráfico de control por variables. En el caso del esquema wY_sY_L , los registros del muestreo corresponden a los conteos Y_s , Y_L de piezas clasificadas en los intervalos extremos de la galga 2-step. Estos conteos contienen valiosa información de la variable de proceso y puede ser empleados para *realizar el Análisis de Capacidad de Procesos basados en verificaciones con una galga 2-step*. Esta idea puede ser desarrollada en un proyecto de investigación posterior.

Finamente, para un futuro nos hemos planteado crear una librería del software R (R Core Team, 2018), que recibirá el nombre de GAUGE_SPC, con el objetivo de documentar las funciones de cálculo de los indicadores de desempeño de los esquemas wY_sY_L y facilitar al usuario la labor de diseño e implementación de los esquemas propuestos en la presente tesis.

8.3. Contribuciones

Los resultados de esta tesis doctoral fueron divulgados en los siguientes *eventos y reuniones científico/académicas del área de la estadística*:

- Mosquera J, Aparisi F. Un esquema para el control de la media y de la desviación estándar del proceso basado en el diseño óptimo de instrumentos gauge e

inspección por atributos. *XXVII Simposio Internacional de Estadística*. Medellín-Colombia. Agosto 2017. **Ponencia**.

- Mosquera J, Aparisi F. Diseño óptimo de un esquema para el control de la media y de la desviación estándar del proceso basado en inspección por atributos con Tamaño de Muestra Variable. *XXVII Simposio Internacional de Estadística*. Medellín-Colombia. Agosto 2017. **Ponencia**.
- Mosquera J. Control Estadístico de Procesos: Diseño óptimo de esquemas de control por atributos para el monitoreo de variables cuantitativas. *Ciclo de conferencias de la Escuela de Estadística, Universidad del Valle*. Diciembre 2017. **Conferencia**.

Para facilitar al usuario la implementación de los esquemas de control sugeridos en esta tesis, hemos desarrollado dos aplicaciones de *software* que realizan los cálculos de los indicadores de desempeño del esquema wY_sY_L , bajo las estrategias FSS, DS y VSS, y proporcionan su diseño óptimo.

- Mosquera J., Aparisi F., Epprecht E. (2018). Optimizador del esquema de control wY_sY_L . **Software**.
- Aparisi F., Mosquera J. (2019). Optimizador de los esquemas de control wY_sY_L -DS y wY_sY_L -VSS. **Software**.

Con algunas de las contribuciones de la presente tesis doctoral, se conformaron **artículos de divulgación** que fueron publicados, o han sido sometidos a evaluación, en revistas científicas del área de la estadística y la investigación operativa. Estas revistas están ubicadas en el primer y segundo cuartil del índice JCR.

- Mosquera J., Aparisi F., Epprecht E. (2018). A global scheme for controlling the mean and standard deviation of a process based on the optimal design of gauges. *Quality and Reliability Engineering International*. 34 (5):718-730, 2018, DOI: 10.1002/qre.2282.
- Mosquera J. Aparisi F. (2019). Optimal double sampling control chart based on gauges. *Quality Engineering*. Submitted.

También se participó en el desarrollo de uno de los artículos que en esta tesis ha sido referenciado como trabajo previo y que fue la base para elaboración de la propuesta de esta tesis doctoral.

- Aparisi F., Epprecht E., Mosquera J. (2018). Statistical process control based on optimum gages. *Quality and Reliability Engineering International*. 34 (1):2-14. DOI: 10.1002/qre.2135.

Complementariamente, con los resultados obtenidos en el desarrollo de otras líneas de investigación, se han publicado/sometido otros artículos relacionados con el estudio del efecto del error de estimación sobre el desempeño de los gráficos de control de variables y con el desarrollo de un gráfico de control C con una estrategia de doble muestreo.

- Aparisi F., Mosquera J., Epprecht E. (2018) Simultaneously guaranteeing the in-control and out-of-control performances of the S^2 control chart with estimated variance. *Quality and Reliability Engineering International*. 34(6):1110 – 1126. DOI: 10.1002/qre.2311.
- Mosquera J., Aparisi F., Epprecht E. (2019). Design of an \bar{X} control chart with guaranteed joint in-control and out-of-control performances when the mean and variance are estimated. *Quality and Reliability Engineering International*. In press. DOI: 10.1002/qre.2492.
- Campuzano M., Carrión A., Mosquera J (2019). Characterisation and optimal design of a new double sampling C chart. *European Journal of Industrial Engineering*. In press.
- Mosquera J., Aparisi F., Epprecht E. (2019) Guaranteeing acceptable in-control and out-of-control performance of joint \bar{X} - S control charts with estimated parameters. *Quality and Reliability Engineering International*. Submitted. En segunda revisión.

Aunque estos últimos artículos no tienen una relación directa con el tema desarrollado en esta tesis doctoral, son el producto de la participación activa en otras líneas de investigación relacionadas con el control estadístico de procesos.

Referencias bibliográficas

- Acosta-Mejía, C. A. (1999). Improved p charts to monitor process quality. *IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers)*, 31(6):509-516. DOI:10.1023/A:1007646205589.
- Alwan, L. y Roberts, H. (1995). The problem of misplaced control limits. *Applied Statistics*, 44(3):269-278.
- Aparisi, F. (1996). Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes. *International Journal of Production Research*, 34(10):2853-2862. DOI:10.1080/00207549608905062.
- Aparisi, F. y De Luna, M. A. (2009). Synthetic \bar{X} control charts optimized for in-control and out-of-control regions. *Computers and Operations Research*, 36(12):3204-3214. DOI:10.1016/j.cor.2009.02.024.
- Aparisi, F. Epprecht, E. K. y Mosquera, J. (2018). Statistical process control based on optimum gages. *Quality and Reliability Engineering International*, 34(5):718-730. DOI:10.1002/qre.2135.
- Aparisi, F. Epprecht, E. K. y Ruiz, O. (2012). T^2 control charts with variable dimension. *Journal of Quality Technology*, 44(4):375-393.
- Aparisi, F. García-Bustos, S. y Epprecht, E. K. (2014). Optimum multiple and multivariate poisson statistical control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(2):221-234. DOI:10.1002/qre.1490.
- Aparisi, F. y García-Díaz, J. C. (2004). Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving-average control charts using genetic algorithms. *Computers and Operations Research*, 31(9):1437-1454. DOI:10.1016/S0305-0548(03)00099-6.

- Aparisi, F. y García-Díaz, J. C. (2007). Design and optimization of EWMA control charts for in-control, indifference, and out-of-control regions. *Computers and Operations Research*, 34(7):2096-2108. DOI:10.1016/j.cor.2005.08.003.
- Aparisi, F. Mosquera, J. y Epprecht, E. K. (2018). Simultaneously guaranteeing the in-control and out-of-control performances of the S^2 control chart with estimated variance. *Quality and Reliability Engineering International*, 34(6):1110-1126. DOI:10.1002/qre.2311.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12(2):171-178. DOI:10.2307/4615733.
- Azzalini, A. (2018). sn: The skew-normal and related distributions such as the skew-t. R package version 1.5-3.
- Beja, A. y Ladany, S. P. (1974). Efficient sampling by artificial attributes. *Technometrics*, 16(4):601-611. DOI:10.1080/00401706.1974.10489243.
- Bezerra, E. L. Ho, L. L. y da Costa Quinino, R. (2018). G_{s2} : An optimized attribute control chart to monitor process variability. *International Journal of Production Economics*, 195: 287-295. DOI:10.1016/j.ijpe.2017.10.023.
- Borrór, C. M. Champ, C. W. y Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 30(4):352-361. DOI:10.1080/00224065.1998.11979871.
- Brook, D. y Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM lengths. *Biometrika*, 59: 539-549.
- Campuzano, M. Carrión, A. y Mosquera, J. (2019). Characterization and optimal design of a new double sampling C chart. *European Journal of Industrial Engineering*, In press: 1-17.
- Capizzi, G. y Masarotto, G. (2003). An adaptive exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, 45(3):199-207. DOI:10.1198/004017003000000023.
- Celano, G. y Fichera, S. (1999). Multiobjective economic design of an \bar{X} control chart. *Computers and Industrial Engineering*, 37(1):129-132. DOI:10.1016/S0360-8352(99)00038-8.
- Chakraborti, S. (2001). Nonparametric control charts: An overview and some results. *Journal of Quality Technology*, 33(3):304-305.
- Champ, C. W. y Aparisi, F. (2008). Double sampling Hotelling's T^2 charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 24: 153-166. DOI:10.1002/qre.872.

- Champ, C. W. y Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Technometrics*, 29(4):393-399. DOI:10.2307/1269449.
- Chou, C. Y. Cheng, J. C. y Lai, W. T. (2008). Economic design of variable sampling intervals EWMA charts with sampling at fixed times using genetic algorithms. *Expert Systems with Applications*, 34(1):419-426. DOI:10.1016/j.eswa.2006.09.009
- Chou, C. Y. Wu, C. C. y Chen, C. H. (2006). Joint economic design of variable sampling Intervals \bar{X} and R charts using genetic algorithms. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 35(4): 1027-1043. DOI:10.1080/03610910600880575.
- Cohen, A. C. y Whitten, B. J. (1980). Estimation in the three-parameter log-normal distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 75(370):399-404. DOI:10.1080/01621459.1980.10477484.
- Costa, A. F. B. (1994). \bar{X} charts with variable sample size. *Journal of Quality Technology*, 26(3):155-163. DOI:10.1080/00224065.1994.11979523.
- Croasdale, R. (1974). Control charts for a double-sampling scheme based on average production run lengths. *International Journal of Production Research*, 12(5):585-592. DOI:10.1080/00207547408919577.
- Crowder, S. V. (1987a). A simple method for studying run – length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics*, 29(4):401-407. DOI:10.1080/00401706.1987.10488267.
- Crowder, S. V. (1987b). Average run lengths of exponentially weighted moving average control charts. *Journal of Quality Technology*, 19(3):161-164. DOI:10.1080/00224065.1987.11979055.
- Crowder, S. V. (1989). Design of exponentially weighted moving average schemes. *Journal of Quality Technology*, 21(3):155-162. DOI:10.1080/00224065.1989.11979164
- Das, N. (2009). A comparison study of three non-parametric control charts to detect shift in location parameters. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 41(7-8): 799-807. DOI:10.1007/s00170-008-1524-3.
- Daudin, J. J. (1992). Double sampling \bar{X} charts. *Journal of Quality Technology*, 24(2):78-87. DOI:10.1080/00224065.1992.12015231.
- De Araújo Rodrigues, A. A. Epprecht, E. K. y De Magalhães, M. S. (2011). Double-sampling control charts for attributes. *Journal of Applied Statistics*, 38(1):87-112. DOI:10.1080/02664760903266007.

- Derya, K. O. y Canan, H. (2012). Control charts for skewed distributions: Weibull, gamma, and log-normal. *Metodoloski Zvezki*, 9(2):95-106.
- Duncan, A. (2000). *Control de calidad y estadística industrial*. (5ª Edición). Editorial AlfaOmega.
- Epprecht, E. K. Aparisi, F. y García-Bustos, S. (2013). Optimal linear combination of Poisson variables for multivariate statistical process control. *Computers & Operations Research*, 40(12):3021-3032. DOI:10.1016/j.cor.2013.07.007.
- Epprecht, E. K. y Costa, A. F. B. (2001). Adaptive sample size control charts for attributes. *Quality engineering*, 13(3):465-473.
- Epprecht, E. K. Costa, A. F. B. y Mendes, F. C. T. (2003). Adaptive control charts for attributes. *IIE Transactions*, 35(6):567-582. DOI:10.1080/07408170304427.
- Epprecht, E. K. Simões, B. F. T. y Mendes, F. C. T. (2010). A variable sampling interval EWMA chart for attributes. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 49(1-4): 281-292. DOI:10.1007/s00170-009-2390-3.
- Faraz, A. Heuchenne, C. y Saniga, E. (2012). Optimal T^2 control chart with a double sampling scheme - an alternative to the MEWMA chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(7): 751-760. DOI:10.1002/qre.1268.
- Farnum, N. R. y Stanton, L. W. (1991). Narrow limit gauging: Go or no go? *Quality Engineering*, 3(3): 293-307. DOI:10.1080/08982119108918859.
- Frechet, M. (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Soc. Polonaise Math.*, 6:93-116.
- Gan, F. F. (1990a). Monitoring observations generated from a binomial distribution using modified exponentially weighted moving average control chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 37(1-2):45-60. DOI:10.1080/00949659008811293.
- Gan, F. F. (1990b). Monitoring poisson observations using modified exponentially weighted moving average control charts. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 19(1): 103-124. DOI:10.1080/03610919008812847.
- Giner-Bosch, V. (2014). *Precontrol óptimo. Caracterización, análisis y técnicas de resolución*. Tesis doctoral. Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad, Universidad Politécnica de Valencia. <http://hdl.handle.net/10251/46373>.

- Giner-Bosch, V. San Matías, S. Clemente-Císcar M. Carrión A. (2016). Optimal design of pre-control plans. *Quality and Reliability Intenational Engineering*. 32(2):623-634. DOI: 10.1002/qre.1777.
- Giner-Bosch, V. Trank, K.P. Castagliola, P. Khoo, M.B.C. (2019). An EWMA control chart for the multivariate coefficient of variation. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(6):1515-1541. DOI:10.1002/qre.2459.
- Gutierrez H. (2013). *Control estadístico de la calidad y seis sigma*. (3ª Edicion). Mc Graw Hill Interamericana.
- Grigoryan, A. y He, D. (2005). Multivariate double sampling |S| charts for controlling process variability. *International Journal of Production Research*, 43(4):715-730. DOI:10.1080/00207540410001716525.
- Hallinan, A. J. (1993). A Review of the Weibull distribution. *Journal of Quality Technology*, 25(2):85-93. DOI:10.1080/00224065.1993.11979431.
- He, D. y Grigoryan, A. (2002). Construction of double samplings-control charts for agile manufacturing. *Quality and Reliability Engineering International*, 18(4):343-355. DOI:10.1002/qre.466.
- He, D. y Grigoryan, A. (2003). An improved double sampling *S* chart. *International Journal of Production Research*, 41(12):2663-2679. DOI:10.1080/0020754031000093187.
- He, D. y Grigoryan, A. (2006). Joint statistical design of double sampling \bar{X} and *S* charts. *European Journal of Operational Research*, 168(1):122-142. DOI:10.1016/j.ejor.2004.04.033.
- He, D., Grigoryan, A. y Sigh, M. (2002). Design of double- and triple-sampling \bar{X} control charts using genetic algorithms. *International Journal of Production Research*, 40(6):1387-1404. DOI:10.1080/00207540110118415.
- Ho, L. L. y Aparisi, F. (2016). ATTRIVAR: Optimized control charts to monitor process mean with lower operational cost. *International Journal of Production Economics*, 182:472-483. DOI:10.1016/j.ijpe.2016.09.011.
- Hillier, F. y Lieberman, G.J. (2002). *Investigación de Operaciones*. (7ª Edición). Mc Graw Hill.
- Ho, L. L. y Quinino, R. C. (2013). An attribute control chart for monitoring the variability of a process. *Internacional Journal of Production Economics*, 145(1):263-267. DOI:10.1016/j.ijpe.2013.04.046.

- Hunter, J. S. (1986). The exponentially weighted moving average. *Journal of Quality Technology*, 18(4):203-210. DOI:10.1080/00224065.1986.11979014.
- Inghilleri, R. Lupo, T. y Passannanti, G. (2015). An effective double sampling scheme for the C control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(2):205-216. DOI:10.1002/qre.1572.
- Irianto, D. y Shinozaki, N. (1998). An optimal double sampling \bar{X} control chart. *International Journal of Industrial Engineering - Applications and Practice*, 31(2):205-216.
- Kaya, I. (2009). A genetic algorithm approach to determine the sample size for attribute control charts. *Information Sciences*, 179(10):1552-1566. DOI:10.1016/j.ins.2008.09.024.
- Khoo, M. B. C. (2004). S^2 control chart based on double sampling. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(2):249-258.
- Kuo, T.-I. y Lee, P.-H. (2013). Design of adaptive S control charts. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(11):2002-2014. DOI:10.1080/00949655.2012.678360.
- Ladany, S. P. (1975). Optimal narrow-limit control charts. *International Journal of Production Research*, 13(4):351-358.
- Ladany, S. P. (1976). Determination of optimal compressed limit gaging sampling plans. *Journal of Quality Technology*, 8(4):225-231. DOI:10.1080/00224065.1976.11980748.
- Lee, P.-H. (2011). Adaptive R charts with variable parameters. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(5):2003-2010. DOI:10.1016/j.csda.2010.11.026.
- Lowry, C. A. Woodall, W. H. Champ, C. W. y Rigdon, S. E. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, 34(1):46-53. DOI:10.1080/00401706.1992.10485232.
- Lucas, J. M. y Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average Control schemes: Properties and enhancements. *Technometrics*, 32(1):1-12. DOI:10.2307/1269835
- Mace, A. E. (1952). The use of limit gages in process control. *Industrial Quality Control*, 8(4):24-31.
- MacGregor, J. F. y Harris, T. F. (1993). The exponentially weighted moving variance. *Journal of Quality Technology*, 25(2):106-118. DOI:10.1002/nav.20369.

- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to statistical quality control* (6th ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Montgomery, D. C. Gardiner, J. S. y Pizarro, B. A. (1987). Statistical process control methods for detecting small process shifts. *En Frontiers in Statistical Quality Control* (pp. 161-178). West Germany: Physica-Verlag.
- Mosquera, J. Aparisi, F. y Epprecht, E. K. (2018). A global scheme for controlling the mean and standard deviation of a process based on the optimal design of gauges. *Quality and Reliability Engineering International*, 34(5):1-13. DOI:10.1002/qre.2282.
- Mosquera, J. Aparisi, F. y Epprecht, E. K. (2019a). Design of an \bar{X} control chart with guaranteed joint in-control and out-of-control performances when the mean and variance are estimated. *Quality and Reliability Engineering International*, In press: 1-19. DOI:10.1002/qre.2492.
- Mosquera, J. Aparisi, F. y Epprecht, E. K. (2019b). Guaranteeing acceptable in-control and out-of-control performance of joint $\bar{X} - S$ control charts with estimated parameters. *Submitted*.
- Ott, E. R. y Mundel, A. B. (1954). Narrow-limit gaging. *Industrial Quality Control*, 10(5):21-28.
- Oviedo, O. Peñabaena, R. Mantilla, M. y Lacouture, C. (2014). The application of the Márkov Chain in Statistical Quality Monitoring. *International Journal of Advances in Mechanical & Automobile Engineering*, 1(1):68-72. DOI:10.15242/IJAMAE.E1113510.
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika Trust*, 41(1):100-115.
- Pérez, E. Carrión, A. Jabaloyes, J. y Aparisi, F. (2010). Optimization of the new DS-U control chart: An application of Genetic Algorithms. *En 9th WSEAS international conference on applications of computer engineering* (pp. 105-109).
- Prabhu, S. S. y Runger, G. C. (1997). Designing a multivariate EWMA control chart. *Journal of Quality Technology*, 29(1): 8-15.
- Prabhu, S. S. Runger, G. C. y Keats, J. B. (1993). \bar{X} chart with adaptive sample sizes. *The International Journal Of Production Research*, 31(12):2895-2909. DOI:10.1080/00207549308956906.
- Psarakis, S. (2015). Adaptive control charts: Recent developments and extensions. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(7):1265-1280. DOI:10.1002/qre.1850.

- R Core Team. (2018). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. Retrieved from <https://www.r-project.org/>
- Reynolds, M. R. y Stoumbos, Z. G. (2004). Control charts and the efficient allocation of sampling resources. *Technometrics*, 46(2):200-214. DOI:10.1198/004017004000000257.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull distribution. A handbook*. CRC Press.
- Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1(3):239-250. DOI:10.1080/00401706.1959.10489860.
- Robinson, P. B. y Ho, T. Y. (1978). Average run lengths of geometric moving average charts by numerical methods. *Technometrics*, 20(1):85-93. DOI:10.1080/00401706.1978.10489620.
- Rosin, P. y Rammler, E. (1933). Laws governing the fineness of powdered coal. *Journal of Institute of Fuel*, 7:29-36.
- San Matías, S. Jabaloyes, J. Carrión, A. (2004). Some modifications of the classical pre-control technique. *Quality and Reliability Engineering International*, 20(1):47-60.
- Scrucca, L. (2013). GA: a package for genetic algorithms in R. *Journal of Statistical Software*, 53(4): 1-37. DOI:10.1359/JBMR.0301229.
- Scrucca, L. (2017). On some extensions to GA package: hybrid optimisation, parallelisation and islands evolution. *The R Journal*, 9(June):187-206.
- Shainin, D. Shainin, P. (1989). Pre-control versus \bar{X} & R charting: continuous or immediate quality improvement? *Quality Engineering*, 1(4):419-429. DOI:10.1080/089982118908962677.
- Shewhart, W. (1927). Quality Control. *Bell System Technical Journal*, 6(4):722-735.
- Shewhart, W. (1931). *Economic control of quality of manufactured product*. New York: Van Nostrand Company, Inc.
- Steiner, S. H. (1997). Pre-control and some simple alternatives. *Quality Engineering*, 10(1):65-74. DOI:10.1080/089982119708919110.
- Steiner, S. H. (1998). Grouped data exponentially weighted moving average control charts. *Applied Statistics*, 47(2):203-216.
- Steiner, S. H. Geyer, P. L. y Wesolowsky, G. O. (1996). Shewhart control charts to detect mean and standard deviation shifts based on grouped data. *Quality and Reliability Engineering International*, 12:345-353.

- Stevens, W. L. (1948). Control by gauging. *Journal of the Royal Society. Series B (Methodological)*, 10(1):54-108.
- Sweet, A. L. (1986). Control charts using coupled exponentially weighted moving averages. *IEEE Transactions*, 18:26-33.
- Tagaras, G. (1998). A survey of recent developments in the design of adaptive control charts. *Journal of Quality Technology*, 30(3):212-231. DOI:10.1080/00224065.1998.11979850
- Tippett, L. H. C. (1944). The efficient use of gauges in quality control. *Engineer*, 177:481-483.
- Torng, C.-C. Lee, P.-H. Liao, H.-S. y Liao, N.-Y. (2009). An economic design of double sampling \bar{X} charts for correlated data using genetic algorithms. *Expert Systems with Applications*, 36(10): 12621-12626. DOI:10.1016/j.eswa.2009.05.017.
- Valencia, P. E. (1997). Optimización mediante algoritmos genéticos. *Anales del Instituto de Ingenieros de Chile*, (Agosto): 83-92.
- Waldmann, K.-H. (1986). Bounds for the distribution of the run length of geometric moving average charts. *Applied Statistics*, 35(2):151-158. DOI:10.2307/2347265.
- Weibull, W. (1939). A statistical theory of strength of materials. *IVB-Handl.*, 151:1-45.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18:293-297.
- Wu, Z. y Jiao, J. (2008). A control chart for monitoring process mean based on attribute inspection. *International Journal of Production Research*, 46(15):4331-4347. DOI:10.1080/00207540601126770.
- Wu, Z. Khoo, M. B. C. Shu, L. y Jiang, W. (2009). An np control chart for monitoring the mean of a variable based on an attribute inspection. *International Journal of Production Economics*, 121(1):141-147. DOI:10.1016/j.ijpe.2009.04.021.

Anexo A. Equivalencia entre el esquema $wYsY_L$ y el gráfico para datos agrupados (Steiner et al., 1996)

La regla de decisión del gráfico de control de datos agrupados (Steiner et al., 1996) fue deducida considerando el test de hipótesis compuesto:

$$H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{1+} \text{ o } \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{1-}. \quad (\text{A.1})$$

Aquí $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)$ es el vector de parámetros a controlar, $\boldsymbol{\theta}_0 = (\mu_0, \sigma_0)$ es el vector con el valor de estos parámetros cuando el proceso está bajo control y $\boldsymbol{\theta}_{1+} = (\mu_{1+}, \sigma_{1+})$, $\boldsymbol{\theta}_{1-} = (\mu_{1-}, \sigma_{1-})$ es el vector con valores que representan cambios significativos de (μ, σ) en las direcciones de incremento y decremento respectivamente. En este trabajo fue empleado el criterio del test de cociente de verosimilitud compuesta para derivar la regla decisión a favor de H_0 :

$$\max \left(\sum_{i=1}^n \frac{z_i^+}{n}, \sum_{i=1}^n \frac{z_i^-}{n} \right) < \text{UCL}'. \quad (\text{A.2})$$

Aquí z_i^+ y z_i^- son la pareja de pesos que se asignan a cada observación que se clasifica en el grupo $j \in \{1, 2, 3, \dots, g+1\}$ y UCL' es un límite de control superior. Para una galga 2-step, los pesos z_i^+ y z_i^- se calculan como se muestra en la Tabla A.1

Tabla A.1 Pesos z_i^+ y z_i^- para una galga 2-step. (Steiner et al., 1996).

	Intervalo		
Peso	$j = 1$ $x_i < S$	$j = 2$ $S < x_i < L$	$j = 3$ $x_i > L$
z_i^+	$\ln \left(\frac{q_{S1+}}{q_{S0}} \right)$	$\ln \left(\frac{1 - q_{S1+} - q_{L1+}}{1 - q_{S0} - q_{L0}} \right)$	$\ln \left(\frac{q_{L1+}}{q_{L0}} \right)$
z_i^-	$\ln \left(\frac{q_{S1-}}{q_{S0}} \right)$	$\ln \left(\frac{1 - q_{S1-} - q_{L1-}}{1 - q_{S0} - q_{L0}} \right)$	$\ln \left(\frac{q_{L1-}}{q_{L0}} \right)$

Las parejas (q_{S0}, q_{L0}) , (q_{S1+}, q_{L1+}) y (q_{S1-}, q_{L1-}) son las probabilidades de clasificar una observación en el primer y tercer intervalo cuando el vector de parámetros es θ_0 , θ_{1+} y θ_{1-} respectivamente. Esto es:

$$\begin{aligned} q_{S0} &= P(X < S | \mu_0, \sigma_0), & q_{L0} &= P(X > L | \mu_0, \sigma_0), \\ q_{S1+} &= P(X < S | \mu_{1+}, \sigma_{1+}), & q_{L1+} &= P(X > L | \mu_{1+}, \sigma_{1+}), \\ q_{S1-} &= P(X < S | \mu_{1-}, \sigma_{1-}) & \text{y } q_{L1-} &= P(X > L | \mu_{1-}, \sigma_{1-}). \end{aligned} \quad (A.3)$$

La regla de decisión que se define en la ecuación (A.2) se cumple cuando simultáneamente:

$$\left(\frac{z_1^+}{n}\right)Y_S + \left(\frac{z_2^+}{n}\right)Y_C + \left(\frac{z_3^+}{n}\right)Y_L < \text{UCL}, \quad (A.4)$$

$$\left(\frac{z_1^-}{n}\right)Y_S + \left(\frac{z_2^-}{n}\right)Y_C + \left(\frac{z_3^-}{n}\right)Y_L < \text{UCL}' \quad (A.5)$$

Dado que $Y_C = n - Y_S - Y_L$, las ecuaciones (A.4) - (A.5) pueden simplificarse:

$$(z_1^+ - z_2^+)Y_S + (z_3^+ - z_2^+)Y_L < n(\text{UCL}' - z_2^+), \quad (A.6)$$

$$(z_1^- - z_2^-)Y_S + (z_3^- - z_2^-)Y_L < n(\text{UCL}' - z_2^-). \quad (A.7)$$

Nótese que si la distribución de probabilidad de X es simétrica, cuando la galga 2-step se diseña con dimensiones equidistantes a la media ($S = \mu_0 - k\sigma_0$, $L = \mu_0 + k\sigma_0$), entonces se cumple que $q_{S0} = q_{L0} = q_0/2$. Además, si (μ_{1+}, μ_{1-}) son equidistantes al valor de la hipótesis nula ($\mu_{1+} - \mu_0 = \mu_0 - \mu_{1-}$), entonces $q_{S+} = q_{L-}$ y $q_{L+} = q_{S-}$. Bajo estas condiciones, se cumple que $z_1^+ = z_3^-$, $z_2^+ = z_2^-$, $z_3^+ = z_1^-$. Al reemplazar estas igualdades en las ecuaciones (A.6) y (A.7) y sustituir $w_1 = (z_1^+ - z_2^+) = (z_3^- - z_2^-)$ y $w_2 = (z_3^+ - z_2^+) = (z_1^- - z_2^-)$, se obtiene:

$$w_1Y_S + w_2Y_L < n(\text{UCL}' - z_2^+) \quad (A.8)$$

$$w_2Y_S + w_1Y_L < n(\text{UCL}' - z_2^-) \quad (A.9)$$

Finamente, si ambas ecuaciones se dividen por w_2 y se definen los valores $w = \frac{w_1}{w_2}$, $UCL = \frac{n(UCL' - z_2^+)}{w_2}$, entonces las ecuaciones (A.8)(A.9) se reducen a:

$$wY_S + Y_L < UCL \quad (A.10)$$

$$Y_S + wY_L < UCL \quad (A.11)$$

Dado que la ecuaciones (A.10) y (A.11) se satisfacen simultáneamente cuando $\max(wY_S + Y_L, Y_S + wY_L) < UCL$, entonces se demuestra que, para una *distribución simétrica*, cuando se diseña para cambios críticos (μ_{1+}, μ_{1-}) *equidistantes de la hipótesis nula*, el gráfico de Steiner es un elemento de la familia $wY_S Y_L$, que se obtiene cuando a los parámetros de diseño (w, UCL, k) se asignan los valores:

$$w = \frac{\ln\left(\frac{q_{S+}}{q_{S0}}\right) - \ln\left(\frac{1 - q_{S+} - q_{L+}}{1 - q_{S0} - q_{L0}}\right)}{\ln\left(\frac{q_{L+}}{q_{L0}}\right) - \ln\left(\frac{1 - q_{S+} - q_{L+}}{1 - q_{S0} - q_{L0}}\right)} \quad (A.12)$$

$$UCL = \frac{n\left(UCL' - \ln\left(\frac{1 - q_{S+} - q_{L+}}{1 - q_{S0} - q_{L0}}\right)\right)}{\ln\left(\frac{q_{L+}}{q_{L0}}\right) - \ln\left(\frac{1 - q_{S+} - q_{L+}}{1 - q_{S0} - q_{L0}}\right)} \quad (A.13)$$

Para una variable X con distribución normal, la ubicación de las dimensiones sugerida por Steiner ($k = 0.6120, 1.4825, 0.8487$), equivale a definir $q_0 = 0.5405, 0.1382, 0.3960$.

Anexo B. Equivalencia entre el esquema $wY_S Y_L$ y el gráfico de control G_{S^2}

En el gráfico G_{S^2} , el estadístico de control está definido como:

$$G_{S^2} = (2 - a)(k_S - t)^2 \Phi(k_S) Y_S + t[\Phi(k_L) - \Phi(k_S)] Y_C + a(k_L - t)^2 [1 - \Phi(k_L)] Y_L. \quad (\text{A.14})$$

Aquí $k_S = (S - \mu_0)/\sigma_0$ y $k_L = (L - \mu_0)/\sigma_0$ son los factores de amplitud para las dimensiones de una galga 2-step, y $1 < a < 2$, $0 < t < 1$ son constantes que deben definirse en el diseño del gráfico. Nótese que si se definen los pesos $w_S = (2 - a)(k_S - t)^2 \Phi(k_S)$, $w_C = t[\Phi(k_L) - \Phi(k_S)]$ y $w_L = a(k_L - t)^2 [1 - \Phi(k_L)]$, se tiene que $G_{S^2} = w_S Y_S + w_C Y_C + w_L Y_L$ es una combinación lineal de los conteos Y_S , Y_C e Y_L .

Particularmente, si la galga 2-step se diseña con dimensiones equidistantes a la media ($k_S = k_L = k$) y se fija un valor $a = 1$, dado que $\Phi(k_S) = 1 - \Phi(k_L)$, entonces los pesos w_S y w_L tomarán un valor común $w = w_S = w_L = (k - t)^2 q_0/2$. Bajo estas condiciones, la regla de decisión a favor de la hipótesis nula se reduce a:

$$w(Y_S + Y_L) + w_C Y_C \leq \text{UCL}'. \quad (\text{A.15})$$

Al sustituir la igualdad $Y_C = n - Y_S - Y_L$ en la ecuación (A.15) y dividir el resultado por $(w - w_C)$, se tiene que el estado bajo control del proceso es aceptado cuando:

$$Y_S + Y_L < \frac{\text{UCL}' - n * w_C}{w - w_C} - 1. \quad (\text{A.16})$$

Con lo anterior se demuestra que, bajo un diseño de galga 2-step de *dimensiones equidistantes a la media* y un valor fijo $a = 1$, el gráfico G_{S^2} coincide con el gráfico Y_T propuesto por Aparisi, Epprecht et al. (2018), el cual es una configuración particular del esquema $wY_S Y_L$ con peso fijo $w = 1$.

Anexo C. Funciones del software R para el cálculo del ARL y la optimización del esquema wY_sY_L

Función de enlace entre las magnitudes de cambio (δ, r) y las probabilidades (q_s, q_L) acumuladas en los intervalos extremos de la galga 2-step, para una distribución de probabilidad (*dist*) determinada y valores fijos del coeficiente de asimetría (*skew*), del porcentaje (q) de unidades en los intervalos extremos de la galga y del factor de balance entre las probabilidades en intervalos extremos (f).

Requerida para el cálculo del ARL del esquema wY_sY_L .

```
conv<-function(delta,r,q,mu=10,sig=1,dist="norm",skew=0,f=0.5){
if (q<=0|q>=1|f<=0|f>=1) {stop("Parametros Inconsistentes")}
if(dist=="norm"){
  if(f==0.5){zs=qnorm(q/2); zl=-zs}else{zs=qnorm(f*q); zl=qnorm(1-(1-f)*q)}
  qsd= pnorm((zs-delta)/r)
  qld= 1-pnorm((zl-delta)/r)
  S=mu+zs*sig; L=mu+zl*sig
  sol<-c(qsd,qld,S,L)
  names(sol)<-c("qsd","qld","S","L")}
else if(dist=="weibull"){
  b=Root.skew(skew,"weibull")
  gam1=gamma(1+(1/b));gam2=gamma(1+(2/b));
  a=sig/sqrt(gam2-(gam1^2))
  eta=mu-a*gam1
  S=eta+a*((-log(1-f*q))^(1/b)); L=eta+a*((-log((1-f)*q))^(1/b))
  a1=r*a; eta1=eta+a*(gam1*(1-r)+delta*sqrt(gam2-(gam1^2)))
  qsd=pweibull(S-eta1,b,a1); qld=1-pweibull(L-eta1,b,a1)
  sol<-c(qsd,qld,S,L,eta,a,b,eta1,a1,b)
  names(sol)<-c("qsd","qld","S","L","eta0","a0","b0","eta1","a1","b1")}
else if (dist=="lognorm3"){
  if(f==0.5){zs=qnorm(q/2); zl=-zs}else{zs=qnorm(f*q); zl=qnorm(1-(1-f)*q)}
  siglog=Root.skew(skew,"lognorm3")
  mulog=log(sig/sqrt(exp(siglog^2)-1))-0.5*(siglog^2)
  eta=mu-sig/sqrt(exp(siglog^2)-1)
  S=eta+exp(mulog+siglog*zs); L=eta+exp(mulog+siglog*zl)
  siglog1=siglog; mulog1=log(r)+mulog
  eta1=eta +exp(mulog+0.5*(siglog^2))*(1-r+delta*sqrt(exp(siglog^2)-1))
  qsd= plnorm3(S,eta1, mulog1, siglog1); qld= 1-plnorm3(L,eta1, mulog1, siglog1)
  sol<-c(qsd,qld,S,L,eta,mulog,siglog,eta1,mulog1,siglog1)
  names(sol)<-c("qsd","qld","S","L","eta0","mulog0","siglog0","eta1","mulog1","siglog1")}
else if (dist=="snorm"){
  d=Root.skew(skew,dist)
  lambda=d/sqrt(1-d^2)
  zs=qsn(f*q,0,1,lambda)
  zl=qsn(1-(1-f)*q,0,1,lambda)
  omega=sig/sqrt(1-2*(d^2)/pi)
  xi=mu-omega*d*sqrt(2/pi)
  S=xi+zs*omega; L=xi+zl*omega
  omega1=r*omega; xi1=xi+omega*sqrt(2/pi)*(d*(1-r)+delta*sqrt((pi/2)-d^2))
  qsd= psn((zs-sqrt(2/pi))*(d*(1-r)+delta*sqrt((pi/2)-d^2)))/r,0,1,lambda)
  qld= 1-psn((zl-sqrt(2/pi))*(d*(1-r)+delta*sqrt((pi/2)-d^2)))/r,0,1,lambda)
  sol<-c(qsd,qld,S,L,xi,omega,d,xi1,omega1,d)
  names(sol)<-c("qsd","qld","S","L","xi0","omega0","d0","xi1","omega1","d1")}
else{stop("dist must be: norm, snorm, lognorm3, weibull")}
return(sol)}
```

Función de cómputo del ARL del esquema $wY_S Y_L$ para valores fijos de n , UCL, w , q_S y q_L

```

ARLwYsYl<-function(n,Lc,w,qs,ql){
  Prob=0
  if ((min(qs,ql) < 0.0)|((qs + ql) > 1.0)| (n <= 0)| (Lc<=0)) {ARL=NA}
  else {
    fact.n<-factorial(n)
    for (s in 0:n){
      fact.s<-factorial(s)
      for (l in 0:(n-s)){
        if (((w*s+l)<Lc)&((s+w*l)<Lc)){Prob = Prob + (fact.n/(fact.s*factorial(l)*factorial(n-s-
          l)))*(qs^s)*(ql^l)*((1-qs-ql)^(n-s-l))}
      }}
    ARL=1/(1-round(Prob,8)) }
  names(ARL)<-"ARL"; return(ARL) }

```

Función que genera, para una pareja (n, w) , las posibles ubicaciones para el límite de control (UCL). Requerida por la función de optimización del esquema $wY_S Y_L$.

```

Genera.LC<-function(w,n,decreasing = FALSE){
  Yl<-rep((0:n),n+1)
  Ys<-rep((0:n),each=n+1)
  Yt<-Yl+Ys
  Yl<-Yl[Yt<=n]
  Ys<-Ys[Yt<=n]
  LC<-unique(apply(data.frame(w*Ys+Yl,Ys+w*Yl),1,max))
  LC<-LC[LC>0]
  return(sort(LC,decreasing = FALSE))}

```

Función de cálculo del valor del parámetro de forma de la distribución (*dist*) asociado a un coeficiente de asimetría (*skew*) deseado. Requerida por la función de optimización del esquema $wY_S Y_L$.

```

Root.skew<-function(skew,dist,tol=0.000001,maxiter=100){
  k=0

  if(dist=="lognorm3"){
    if(skew<=0){stop("for Lognormal distribución, skewness must be positive")}
    q=skew; p=3; delta= ((q/2)^2)+((p/3)^3)
    a1=(-(q/2)+sqrt(delta)); a2=(-(q/2)-sqrt(delta))
    a=sign(a1)*(abs(a1))^(1/3)+sign(a2)*(abs(a2))^(1/3)
    siglog=sqrt(log((a^2)+1))}
  else if(dist=="snorm"){
    if(abs(skew)>=0.9951){stop("for skew-normal distribución, skewness must be (-1,1)")}
    else{d=sign(skew)*sqrt((pi/2)*(abs(skew)^(2/3))/((abs(skew)^(2/3)) + ((4-pi)/2)^(2/3)))}
  else if(dist=="weibull"){
    if(skew<(-1.1)){stop("for Weibull distribución, skewness must be upper than -1.1")}
    f<-función(x,skew){
      gam1=gamma(1+(1/x));gam2=gamma(1+(2/x));gam3=gamma(1+(3/x))
      f1<-(gam3-3*gam1*gam2+2*(gam1^3)-skew*((gam2-(gam1^2))^(3/2)))
      return(f1) }
    if((skew >=0.3)){a<-0.1;b<-2.8}
    else if((skew<0.3)&(skew>=-0.3)){a<-2.6;b<-6}
    else if((skew<(-0.3)&(skew>=(-1))){a<-5;b<-50}
    else if((skew<(-1)&(skew>=(-1.1))){a<-40;b<-160}
    if(skew<(-1)){tol=0.000000001}
    repeat{
      c<-(a+b)/2

```

```

fc<-f(c,skew)
if(fc*f(b,skew)>0){b<-c}else{a<-c}
k<-k+1
if (abs(fc)<tol|k>maxiter){break}
}
}
xk=c
}
if(dist=="lognorm3"){xsal=siglog;names(xsal)="sigmalog"}
else if(dist=="weibull"){xsal=xk;names(xsal)="b"}
else if(dist=="snorm"){xsal=d;names(xsal)="d"}
return(xsal)
}

```

Optimizador del esquema $wYsYl$, para valores fijos de n , δ , r , ARL_0^* . El usuario puede indicar:

- La distribución ($dist = "norm", "snorm", "lognorm3", "weibull"$).
 - El coeficiente de asimetría ($skew$)
 - El esquema a optimizar ($esq = ("wYsYl", "YsYl", "YsYl", "YT")$)
 - Activar/desactivar la restricción de sesgo ($UB.restr=T/F$)
 - Activar/desactivar la búsqueda de la fracción óptima f ($search.f=T/F$)
 - Explorar una solución simple cuasi equivalente ($ESE=T/F$)
-

```

Opt.YsYl<-function(n,delta,r,ARLdes,esq=c("wYsYl","YsYl","YsYl","YT"),mu=10,sig=1,dist="norm",
skew=0,search.f=F,UB.restr=F,ESE=T){

```

```

esq.val=c("Ys-Yl","YsYl","YT","wYsYl")
if(is.na(match(esq,esq.val))){stop("esq must be: wYsYl, YsYl, Ys-Yl or YT")}

```

```

t <- proc.time(); par<-c(n,delta,r,ARLdes); names(par)<-c("n","delta","r","ARL.0 deseado")
cat("\n","----- Input -----","\n")
print(par)
cat("\n","Esquema: ", esq)
cat("\n","Distribución: ", dist, ", Asimetria: ", skew)
dw=0.1; w.min=-2; df=0.025;e=0.02; cont=0

```

```

if(esq=="wYsYl"){w.p=c(1,-1,0,seq(w.min,-1-dw,dw),seq(-1+dw,-dw,dw),seq(dw,(1-dw),dw))}
else{w.p = match(esq,esq.val)-2}

```

```

if(search.f&&(dist!="norm")){f.p=c(0.5,seq(0.1,0.5-df,df),seq(0.5+df,0.9,df))
f.p=f.p[order(abs(f.p-0.5))]}
else{f.p=0.5}

```

```

cond=F; optimos<-data.frame(n=n,Lc=0,w=0,q=0,f=0,ARL1=0,ARL0=0)

```

```

for (w in w.p){
L.p=Genera.LC(w,n)
for(Lc in L.p){
for(f in f.p){
q<-RootARL.wYsYl(n,Lc,w,ARLdes,f)
ARL0=ARLwYsYl(n,Lc,w,q*f,q*(1-f))
min.col<-min(f*q,(1-f)*q)
if(min.col<0.005|min.col>0.498|abs(ARL0-ARLdes)>0.8){next}
else{
if((dist=="norm"|(delta==0))){
qd1<-conv(delta,r,q,mu,sig,dist,skew,f)[1:2]
ARL1=ARLwYsYl(n,Lc,w,qd1[1],qd1[2])}
}
}
}
}

```

```

else{clas=T
  if(UB.restr){
    qde1<-conv(e,1,q,mu,sig,dist,skew,f)[1:2]; qde2<-conv(-e,1,q,mu,sig,dist,skew,f)[1:2]
    T1<-ARLwYsYl(n,Lc,w,qde1[1],qde1[2]); T2<-ARLwYsYl(n,Lc,w,qde2[1],qde2[2])
    clas=ifelse(max(T1,T2)<ARLdes,T,F)}

  if(clas==T){
    qd1<-conv(delta,r,q,mu,sig,dist,skew,f)[1:2] ; A1=ARLwYsYl(n,Lc,w,qd1[1],qd1[2])
    qd2<-conv(-delta,r,q,mu,sig,dist,skew,f)[1:2]; A2= ARLwYsYl(n,Lc,w,qd2[1],qd2[2])
    ARL1=max(A1,A2)}
  else{next}
}
cont=cont+1
optimos[cont,]<-c(n,Lc,w,q,f,ARL1,ARL0)
}}}}

optimos<-optimos[order(optimos$ARL1),]
optimo.G=optimos[1,]
if(ESE==F){ sol<-cbind(optimo.G,1) }
else{
  opt.c=with(optimos,((ARL1<(optimo.G$ARL1*1.025))|((ARL1-optimo.G$ARL1)<0.1)))
  optimos.c=optimos[opt.c,]
  orden= with(optimos.c,order(ifelse(w==2,3,ifelse(w==0,2,ifelse(w==1,1,ifelse(w==1,0,4))))
    ,abs(f-0.5)))
  optimos.c=optimos.c[orden,]
  sol= as.numeric(cbind(optimos.c[1,],round((optimos.c[1,6]/optimo.G$ARL1)-1,4)))
}

Lc.opt=sol[2];w.opt=sol[3];q.opt=sol[4];f.opt=sol[5]

t <- proc.time()-t
cat("\n","----- Output -----","\n")
cat("\n","Tiempo de ejecución: ", round(t[3],2), " Segundos")
cat("\n"," ARL0 =", round(ARLwYsYl(n,Lc.opt,w.opt,q.opt*f.opt,q.opt*(1-f.opt)),4))
if((dist=="norm")|(delta==0)){
  ARL1.p<-sol[6];ARL1.n<-NA
  cat("\n"," ARL1 =", round(ARL1.p,3))}
else{
  qd1<-conv(delta,r,q.opt,mu,sig,dist,skew,f.opt)[1:2]
  qd2<-conv(-delta,r,q.opt,mu,sig,dist,skew,f.opt)[1:2]
  ARL1.p<-ARLwYsYl(n,Lc.opt,w.opt,qd1[1],qd1[2])
  ARL1.n<-ARLwYsYl(n,Lc.opt,w.opt,qd2[1],qd2[2])
  cat("\n"," ARL1(delta,r)=", round(ARL1.p,3))
  cat("\n"," ARL1(-delta,r)=", round(ARL1.n,3)) }
sol<-c(n,round(Lc.opt,2),round(w.opt,3),round(q.opt,5),round(f.opt,3),round(ARL1.p,3),
  round(ARL1.n,3),sol[8])
names(sol)<-c("n","Lc","w","q","f","ARL1+","ARL1-","%opt")
return(list(sol,optimos.c))}

```

Anexo D. Funciones del software R para el cálculo del ARL y la optimización del esquema wY_sY_L -DS y wY_sY_L -VSS

Función de cálculo del ARL, ANOS y ASS en el esquema wY_sY_L -DS para valores fijos de $n_1, n_2, UCL_1, LW, UCL_2, w, q_0, \delta, r$, para la distribución normal.

```
ARLwYsYL.DS<-function(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,delta,r,mu=10,sig=1,dist="norm",skew=0){
  n1.fact<-factorial(n1); n2.fact<-factorial(n2)
  qd=conv(delta,r,q,mu,sig,dist,skew)[1:2]
  qsd<-qd[1]; qld<-qd[2]

  IC.PNS.n1<-0; OOC.PNS.n1<-0;
  IC.PS.n1<-0; OOC.PS.n1<-0;
  IC.PS.n2<-0; OOC.PS.n2<-0;

  for (s in 0:n1){
    s.fact<-factorial(s)
    for (l in 0:(n1-s)){
      wYSYL.n1<-w*s+l; wYLYS.n1<-w*l+s;
      Cte1<-(n1.fact/(s.fact*factorial(l)*factorial(n1-s-l)))
      IC.Prob.n1 = Cte1*((q/2)^(s+l))*((1-q)^(n1-s-l))
      OOC.Prob.n1 = Cte1*(qsd^s)*(qld^l)*((1-qsd-qld)^(n1-s-l))

      if(wYSYL.n1<Lw&wYLYS.n1<Lw){
        IC.PNS.n1<-IC.PNS.n1+IC.Prob.n1;OOC.PNS.n1<-OOC.PNS.n1+OOC.Prob.n1}
      else if(wYSYL.n1>=Lc1|wYLYS.n1>=Lc1) {
        IC.PS.n1<-IC.PS.n1+IC.Prob.n1;OOC.PS.n1<-OOC.PS.n1+OOC.Prob.n1}
      else{
        IC.Prob.n2<-0;OOC.Prob.n2<-0
        for (s2 in 0:n2){
          s2.fact<-factorial(s2)
          for (l2 in 0:(n2-s2)){
            wYSYL.n2<-w*s2+l2; wYLYS.n2<-w*l2+s2;
            Cte2<-(n2.fact/(s2.fact*factorial(l2)*factorial(n2-s2-l2)))
            if(wYSYL.n2>=Lc2-wYSYL.n1|wYLYS.n2>=Lc2-wYLYS.n1){
              IC.Prob.n2<-IC.Prob.n2+Cte2*((q/2)^(s2+l2))*((1-q)^(n2-s2-l2))
              OOC.Prob.n2<-OOC.Prob.n2 +Cte2*(qsd^s2)*(qld^l2)*((1-qsd-qld)^(n2-s2-l2)) }
            } }
          IC.PS.n2 = IC.PS.n2 + IC.Prob.n2*IC.Prob.n1
          OOC.PS.n2 = OOC.PS.n2 + OOC.Prob.n2*OOC.Prob.n1 }
        } }
  } }

  ARL0<-1/(max(0.0001,IC.PS.n1+IC.PS.n2))
  ARL1<-1/(max(0.0001,OOC.PS.n1+OOC.PS.n2))
  ASS0<-n1+n2*(1-IC.PS.n1-IC.PNS.n1)
  ASS1<-n1+n2*(1-OOC.PS.n1-OOC.PNS.n1)
  ANOS0<-ARL0*ASS0
  ANOS1<-ARL1*ASS1
  salida<-c(ARL0,ASS0,ANOS0,ARL1,ASS1,ANOS1)
  names(salida)<-c("ARL0","ASS0","ANOS0","ARL1","ASS1","ANOS1")
  return(round(salida,3))}
```

Función de cálculo del ARL, ANOS y ASS en el esquema wY_sY_L -VSS para valores fijos de $n_1, n_2, UCL_1, LW, UCL_2, w, q_0, \delta, r$, para la distribución normal.

```

ARLwYsYL.TMV<-function(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,delta,r,mu=10,sig=1,dist="norm",skew=0){
  fact.n1<-factorial(n1); fact.n2<-factorial(n2)

  ARL=0
  LC1=n1*Lc1;LW1=Lw*n1;LC2=n2*Lc2;LW2=Lw*n2;
  qd=conv(delta,r,q,mu,sig,dist,skew)[1:2]; qs<-qd[1]; ql<-qd[2]

  p11=0; p12=0; q11=0; q12=0; p21=0; p22=0; q21=0; q22=0

  for (s in 0:n1){
    fact.s=factorial(s)
    for (l in 0:(n1-s)){
      cte<- (fact.n1/(fact.s*factorial(l)*factorial(n1-s-l)))
      if (((w*s+l)<LW1)&((s+w*l)<LW1)){
        p11 = p11 + cte*(q/2)^(s+l)*((1-q)^(n1-s-l))
        q11 = q11 + cte*(qs^s)*(ql^l)*((1-qs-ql)^(n1-s-l))
      }
      else if (((w*s+l)<LC1)&((s+w*l)<LC1)){
        p12 = p12 + cte*(q/2)^(s+l)*((1-q)^(n1-s-l))
        q12 = q12 + cte*(qs^s)*(ql^l)*((1-qs-ql)^(n1-s-l)) } } }

  for (s in 0:n2){
    fact.s=factorial(s)
    for (l in 0:(n2-s)){
      cte<- (fact.n2/(fact.s*factorial(l)*factorial(n2-s-l)))
      if (((w*s+l)<LW2)&((s+w*l)<LW2)){
        p21 = p21 + cte*(q/2)^(s+l)*((1-q)^(n2-s-l))
        q21 = q21 + cte*(qs^s)*(ql^l)*((1-qs-ql)^(n2-s-l)) }
      else if (((w*s+l)<LC2)&((s+w*l)<LC2)){
        p22 = p22 + cte*(q/2)^(s+l)*((1-q)^(n2-s-l))
        q22 = q22 + cte*(qs^s)*(ql^l)*((1-qs-ql)^(n2-s-l)) } } }

  p11=min(p11,0.99999);p12=min(p12,0.99999); p21=min(p21, 0.99999);p22=min(p22, 0.99999);
  q11=min(q11, 0.99999);q12=min(q12, 0.99999);q21=min(q21, 0.99999);q22=min(q22, 0.99999);
  p1=(1-p22)/(1-p22+p12); p2=p12/(1-p22+p12)
  ARL[1]= min(10000,(p1*(1-p22+p12)+p2*(1-p11+p21))/((1-p11)*(1-p22)-p21*p12)) #ARL0ss
  ARL[2]= p1*n1+(1-p1)*n2 #ASS0
  ARL[3]= (p1*((1-p22)*n1+p12*n2)+p2*(p21*n1+(1-p11)*n2))/((1-p11)*(1-p22)-p21*p12) #Anos0
  ARL[4]= min(10000,(p1*(1-q22+q12)+p2*(1-q11+q21))/((1-q11)*(1-q22)-q21*q12)) #ARL1
  ARL[5]= (p1*((1-q22)*n1+q12*n2)+p2*(q21*n1+(1-q11)*n2))/((1-q11)*(1-q22)-q21*q12) #ANos1
  ARL[6]= (1-p22+p12)/((1-p11)*(1-p22)-p21*p12) #ARL0 zero state

  names(ARL)<-c("ARL0 ", "E(n)0","ANOS0","ARL1","ANOS1")
  return(round(ARL,3))}

```

Decodificación del cromosoma solución de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS/VSS.Función requerida por el algoritmo genético. UCL_1 y w pueden ser prefijados ($F.Lc1, F.w$)

```

decode.wYsYIDS <- function(string,n.max,maxim,l,F.Lc1,F.w,F.n1) {#l:longitud de las cadenas,
q <- q.min + (q.max-q.min)*binary2decimal(string[1:l[1]])/maxim[1]
if(is.na(F.w)==F){w=F.w}else{
w <- w.min + (w.max-w.min)*binary2decimal(string[(l[1]+1):sum(l[1:2])])/maxim[2] }
n1<-1+ floor((binary2decimal(string[(sum(l[1:2])+1):sum(l[1:3])])/maxim[3])*(n-2))
n2<-(n-n1)+ floor((binary2decimal(string[(sum(l[1:2])+1):sum(l[1:3])])/maxim[3])*(n.max-n))
Lw <- 0.01+(n1-0.01)*binary2decimal(string[(sum(l[1:4])+1):sum(l[1:5])])/maxim[5]
Lc.min<- Lw +0.01
if(is.na(F.Lc1)==F){Lc1=n1+0.5}else{
  Lc1<-Lc.min + (n1+0.5-Lc.min)*binary2decimal(string[(sum(l[1:5])+1):sum(l[1:6])])/maxim[6]}
Lc2<-Lc.min+(n1+n2-Lc.min)*binary2decimal(string[(sum(l[1:6])+1):sum(l[1:7])])/maxim[7]
return(c(q,w,n1,n2,Lw,Lc1,Lc2))}

```

```

decode.wYsYITMV <- function(string,n2.max,maxim,l,F.Lc1,F.w) {#l:longitud de las cadenas,
q <- q.min + (q.max-q.min)*(binary2decimal(string[1:l[1]])/maxim[1]
if(is.na(F.w)==F){w=F.w}else{
w <- w.min + (w.max-w.min)*(binary2decimal(string[(l[1]+1):sum(l[1:2])])/maxim[2] )
n1 <- 1+ floor((binary2decimal(string[(sum(l[1:2])+1):sum(l[1:3])])/maxim[3])*(n-2))
n2 <- (n+1)+ floor((binary2decimal(string[(sum(l[1:3])+1):sum(l[1:4])])/maxim[4])*(n.max-n-1))
Lw <- 0.05 + (1-0.05)*(binary2decimal(string[(sum(l[1:4])+1):sum(l[1:5])])/maxim[5]
Lc.min<- Lw +0.05
if(is.na(F.Lc1)==F){Lc1=F.Lc1}else{
  Lc1<-Lc.min + (1.05-Lc.min)*binary2decimal(string[(sum(l[1:5])+1):sum(l[1:6])])/maxim[6]}
Lc2<-Lc.min+(1-Lc.min)*binary2decimal(string[(sum(l[1:6])+1):sum(l[1:7])])/maxim[7]
return(c(q,w,n1,n2,Lw,Lc1,Lc2))}

```

Función de evaluación de la aptitud (Fitness) de un cromosoma solución de los esquemas $wY_S Y_L$ -DS/VSS. UCL_1 y w pueden ser prefijados ($F.Lc1, F.w$).

Funciones requeridas por el algoritmo genético.

```

fitn.wYsYIDS<-function(string,n.max,maxim,l,F.Lc1,F.w,fit){
sol<-decode.wYsYIDS(string,n.max,maxim,l,F.Lc1,F.w)
q<-sol[1];w<-sol[2];n1<-sol[3];n2<-sol[4];Lw<-sol[5];Lc1<-sol[6];Lc2<-sol[7]
ARL=ARLwYsYL.DS(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,delta,r,mu,sig,dist,skew)
if(ARL[1]==Inf|ARL[4]==Inf|ARL[1]<1|ARL[4]<1){fitn<-0}
else{
  if(fit==1){fitn<-10000-w1*max(ARL0obj-ARL[1],0)-w3*max(ARL[2]-n,0)-w2*(ARL[4]/ARL.ref-1)}
  else{fitn<-10000-w1*((ARL[1]<ARL0obj)*2*abs(ARL[1]-
    ARL0obj)+(ARL[1]>=ARL0obj)*abs(ARL[1]-ARL0obj))-w3*((ARL[2]<n)*(n-
    ARL[2])+2*(ARL[2]>=n)*(ARL[2]-n))-w2*(ARL[4]/ARL.ref-1)}}
return(fitn)}

```

```

fitn.wYsYITMV<-function(string,n2.max,maxim,l,F.Lc1,F.w,fit){
sol<-decode.wYsYITMV(string,n2.max,maxim,l,F.Lc1,F.w)
q<-sol[1];w<-sol[2];n1<-sol[3];n2<-sol[4];Lw<-sol[5];Lc1<-sol[6];Lc2<-sol[7]
ARL=ARLwYsYL.TMV(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,delta,r,mu,sig,dist,skew)
if(ARL[1]==Inf|ARL[4]==Inf|ARL[1]<1|ARL[4]<1){fitn<-0}
else{
  if(fit==1){fitn<-10000-w1*((ARL[1]<ARL0obj)*(ARL0obj-ARL[1]))-w3*(ARL[2]>n)*(ARL[2]-n)-
    w2*(ARL[4]/ARL.ref-1)}
  else{fitn<-10000-w1*((ARL[1]<ARL0obj)*2*abs(ARL[1]-ARL0obj)+(ARL[1]>=ARL0obj)*abs(ARL[1]-
    ARL0obj))-w3*((ARL[2]<n)*(n-ARL[2])+2*(ARL[2]>=n)*(ARL[2]-n))-
    w2*(ARL[4]/ARL.ref-1)} }
return(fitn)}

```

Adaptación de la función *ga*, librería GA, para la optimización basada en algoritmos genéticos de los esquemas *wYsYl-DS/VSS*. UCL₁ y *w* pueden ser prefijados (*F.Lc1*, *F.w*).

```
GA.wYsYITMV<-function(n,delta,r,ARL0obj,n2.max=2*n,mu,sig,dist,skew,maxiter,F.Lc1=NA,F.w=NA,
fit=2){
  t <- proc.time()
  par<-c(n,delta,r,ARL0obj)
  names(par)<-c("n","delta","r","ARL.0 deseado")
  w.min<-(-2);w.max<-1; prec.w<-0.05; q.min<-0.001;q.max<-0.65; prec.q<-0.0001; prec.L<-0.005

  if(delta==0){l1<-9}else{l1<-10}
  if(is.na(F.w)==F){l2<-0}else{ l2<-length(decimal2binary((w.max-w.min)/prec.w +1)) }
  l3<-length(decimal2binary(n-2))
  l4<-length(decimal2binary(n2.max-n-1))#n2
  l5<-length(decimal2binary(1.05/prec.L))#Lw
  if(is.na(F.Lc1)==F){l6<-0}else{l6<-length(decimal2binary(1/prec.L))#LC1}
  l7<-length(decimal2binary(1/prec.L))#LC2
  l<-c(l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7)

  maxim<-0
  for(i in 1:length(l)){ maxim[i]<-binary2decimal(rep(1,l[i]))}

  GA.sol<-ga(type = "binary", nBits = sum(l), fitness = fitn.wYsYITMV,l=l,maxim=maxim,F.Lc1=F.Lc1,
            F.w=F.w,n.max,F.n1,fit=fit, popSize = 500, maxiter = maxiter, run = 300, prossover = 0.95,
            pmutación= 0.20)
  sol<-decode.wYsYITMV(GA.sol@solución[1,],n.max,maxim,l,F.Lc1,F.w,F.n1)
  q<-sol[1];w<-sol[2];n1<-sol[3];n2<-sol[4];Lw<-sol[5];Lc1<-sol[6];Lc2<-sol[7]
  sol.ARL=ARLwYsYl.TMV(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,delta,r,mu,sig,dist,skew)
  salida<-round(c(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,sol.ARL),4)
  t <- proc.time()-t
  print(par)
  print("_____")
  print(paste("Tiempo de ejecución: ", round(t[3],2), " Segundos"))
  names(salida)<-c("n1","n2","Lc1","Lw","Lc2","w","q","ARL0 ","E(n)0","ANOS0","ARL1","ANOS1")
  return(salida)
}
```

```
GA.wYsYIDS<-function(n,delta,r,ARL0obj,n.max=2*n,mu,sig,dist,skew,maxiter,F.Lc1=NA,F.w=NA,
fit=2){
  t <- proc.time()
  par<-c(n,delta,r,ARL0obj)
  names(par)<-c("n","delta","r","ARL.0 deseado")
  w.min<-(-2);w.max<-1.1; prec.w<-0.05; q.min<-0.001;q.max<-0.65; prec.q<-0.0001; prec.L<-0.1

  if(delta==0){l1<-9}else{l1<-10}
  if(is.na(F.w)==F){l2<-0}else{ l2<-length(decimal2binary((w.max-w.min)/prec.w+1))#w}
  l3<-length(decimal2binary(n-1+1))#n1
  l4<-length(decimal2binary(n.max-n+1))#n2
  l5<-length(decimal2binary(min(10*(n-1)+1,101)))
  if(is.na(F.Lc1)==F){l6<-0}else{l6<-length(decimal2binary(min(10*(n-1)+1,101)))#Lw }
  l7<-length(decimal2binary(min(100+1,1/prec.L+1)))#LC2
  l<-c(l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7)

  maxim<-0
  for(i in 1:length(l)){ maxim[i]<-binary2decimal(rep(1,l[i]))}
```

```
GA.sol<-ga(type = "binary", nBits = sum(l), fitness=fitn.wYsYlDS,l=l,maxim=maxim,
  F.Lc1=F.Lc1,F.w=F.w,n.max=F.n1,fit=fit, popSize = 500, maxiter = maxiter, run = 100,
  pcrossover =0.95, pmutación= 0.25)
sol<-decode.wYsYlDS(GA.sol@solución[1,],n.max,maxim,l,F.Lc1,F.w,F.n1)
q<-sol[1];w<-sol[2];n1<-sol[3];n2<-sol[4];Lw<-sol[5];Lc1<-sol[6];Lc2<-sol[7]
sol.ARL=ARLwYsYl.DS(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,delta,r,mu,sig,dist,skew)
salida<-round(c(n1,n2,Lc1,Lw,Lc2,w,q,sol.ARL),5)
t <- proc.time()-t
print(par)
print("_____")
print(paste("Tiempo de ejecución: ", round(t[3],2), " Segundos"))
names(salida)<-
c("n1","n2","Lc1","Lw","Lc2","w","q","ARL0","E(n)0","ANOS0","ARL1","E(n)1","ANOS1")
return(salida)
}
```

Anexo E. Funciones del software R para el cálculo del ARL y la optimización del esquema wY_sY_L -EWMA

Función de cálculo del ARL en el esquema wY_sY_L -VSS para valores fijos de $n, L_z, w, \lambda, q_0, \delta, r$. Distribución normal

```
ARLwYsYL.EWMA<-function(n,Lim,w,lambda,q,delta,r,mu=10,sig=1,dist="norm",skew=0,amp=0.01,
image=F){

if((lambda > 1.0) | (lambda<=0) | (Lim<=0)) {stop("Parametros Inconsistentes")}
Mst=Mlt=Mt=Prob.IC=Prob.OOC=0;p.IC=p.OOC=0;
h=0; Mu<-0;E2<-0
qd=conv(delta,r,q,mu,sig,dist,skew)[1:2]
qs<-qd[1]; ql<-qd[2] ; fact.n<-factorial(n)

for (s in 0:n){
  fact.s<-factorial(s)
  for (l in 0:(n-s)){
    h=h+1; cte<-fact.n/(fact.s*factorial(l)*factorial(n-s-l))
    Mt[h]<-max(w*s+l,s+w*l)
    Prob.IC[h] = cte*(q/2)^(s+l)*((1-q)^(n-s-l));
    Prob.OOC[h] = cte*(qs^s)*(ql^l)*((1-qs-ql)^(n-s-l))
  }}

est<-sort(unique(Mt))
for(k in 1:length(est)){
  p.IC[k]<-sum(Prob.IC[Mt==est[k]])
  Mu<-Mu+est[k]*p.IC[k]; E2<-E2+(est[k]^2)*p.IC[k]
  p.OOC[k]<-sum(Prob.OOC[Mt==est[k]]) }

Min<-round(lambda*(est[1]+((1-lambda)^9)*(est[1]+Mu/lambda)),2); Var<-E2-(Mu^2)
LC<-round(Mu+Lim*sqrt(Var*lambda/(2-lambda)),2)

if(LC<=Min|LC<=Mu){ ARL0.ZS=1; ARL1.ZS=1;ARL0.SS=1; ARL1.SS=1
  salida<-c(ARL0.ZS,ARL1.ZS,ARL0.SS,ARL1.SS); return(salida)}

m=ceiling((LC-Min)/amp); P=Q=matrix(0,ncol=m,nrow=m)
i.prom=floor(1+max((Mu-Min)/amp,0))

for(i in 1:m){
  PMi=Min+(i-0.5)*amp
  for(h1 in 1:length(est)){
    z=lambda*est[h1]+(1-lambda)*PMi
    if(z-LC<(-5e-9)){ j=floor(1+max((z-Min)/amp,0)); P[i,j]=P[i,j]-p.IC[h1] ; Q[i,j]=Q[i,j]-p.OOC[h1]}
  }}

for (i in 1:m){ P[i,i]=1+P[i,i]; Q[i,i]=1+Q[i,i] }
if(image==T){ x11();par(mfrow=c(1,2)); SparseM::image(as.matrix.csr(P))}
if(rcond(P)<2.220446e-16){ ARL0.ZS=10000; ARL1.ZS=10000;ARL0.SS=10000; ARL1.SS=10000}
else{ P<-solve(P); Q=solve(Q)
  if(image==T){SparseM::image(as.matrix.csr(P))}
  if(i.prom>m){ARL0.ZS<-1; ARL1.ZS<-1;ARL0.SS<-1; ARL1.SS<-1}
  else{ARL0.ZS=sum(P[i.prom,]); ARL1.ZS=sum(Q[i.prom,]);
    P.0=P[i.prom,]/ARL0.ZS; ARL0.SS= sum(P.0%*%P); ARL1.SS= sum(P.0%*%Q)}
  salida<-c(ARL0.ZS,ARL1.ZS,ARL0.SS,ARL1.SS)
  return(salida)}
```

Decodificación del cromosoma solución del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA.
Función requerida por el algoritmo genético. w pueden ser prefijado ($F.w$)

```
decode.wYsYIEWMA <- function(string, maxim, l, F.w){#l:longitud de las cadenas,
q <- round(q.min + (q.max-q.min)*binary2decimal(string[1:l[1]])/maxim[1],5)
if(is.na(F.w)==F) {w=F.w} else{
  w<-round(w.min+(w.maxw.min)*binary2decimal(string[(l[1]+1):sum(l[1:2])]) /maxim[2],2) }
Lam<-0.02+floor(binary2decimal((string[(sum(l[1:2])+1):sum(l[1:3])]) *49/maxim[3])*0.02
Lim<-round(0.05+(3.45)*binary2decimal(string[(sum(l[1:3])+1):sum(l[1:4])]) /maxim[4],4)
return(c(q,w,Lam,Lim))
}
```

Función de evaluación de la aptitud (fitness) para el cromosoma solución del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA. Función requerida por el algoritmo genético. w pueden ser prefijado ($F.w$)

```
fitn.wYsYIEWMA<-function(string,maxim,l,F.w,fit,ARL.ref){
  sol<-decode.wYsYIEWMA(string,maxim,l,F.w)
  q<-sol[1];w<-sol[2];Lam<-sol[3];Lim<-sol[4]
  ARL=ARLwYsYIEWMA(n,Lim,w,Lam,q,delta,r,opt,mu,sig,dist,skew)
  if(ARL[3]==Inf|ARL[4]==Inf|ARL[3]<1|ARL[4]<1){fitn<-0}
  else{
    if(fit==1){fitn<-10000-w1*max(ARL0obj-ARL[3],0)-w2*(ARL[4]/ARL.ref-1)}
    else{fitn<-10000-w1*((ARL[3]<ARL0obj)*2*(ARL0obj-ARL[3])+
      (ARL[3]>=ARL0obj)*(ARL[3]-ARL0obj)) -w2*(ARL[4]/ARL.ref-1)} }
  return(fitn)}
```

Adaptación de la función *ga*, librería GA, para la optimización basada en algoritmo genético del esquema $wY_S Y_L$ -EWMA. w puede ser prefijado ($F.w$)

```
GA.wYsYIEWMA<-function(n, delta, r, ARL0obj, mu, sig, dist, skew, maxiter, F.w=NA, fit=2){
  t <- proc.time()
  param<-c(n,delta,r,ARL0obj); names(param)<-c("n","delta","r","ARL.0 deseado")
  w.min<-(-2);w.max<-1; prec.w<-0.05; q.min<-0.001;q.max<-0.65; prec.q<-0.0001; prec.Lim<-0.1;
  prec.Lam<-0.01
  if(delta==0){l1<-10}else{l1<-11}
  if(is.na(F.w)==F){l2<-0}else{l2<-length(decimal2binary((w.max-w.min)/prec.w))}#w
  l3<-length(decimal2binary(49))
  l4<-length(decimal2binary(3.5/prec.Lim))
  l<-c(l1,l2,l3,l4)

  maxim<-0
  for(i in 1:length(l)){maxim[i]<-binary2decimal(rep(1,l[i]))}
  ARL.ref=ARLXS(n,1/ARL0obj,delta,r)

  GA.sol<-ga(type = "binary", nBits = sum(l), fitness = fitn.wYsYIEWMA,l=l, maxim=maxim,
  F.w=F.w,fit=fit,ARL.ref=ARL.ref, popSize = 250, maxiter = maxiter, run = 20, prossover
  =0.95 , pmutación= 0.25,parallel = F)
  sol<-decode.wYsYIEWMA(GA.sol@solución[1,],maxim,l,F.w)
  q<-sol[1];w<-sol[2];Lam<-sol[3];Lim<-sol[4]
  sol.ARL=ARLwYsYIEWMA(n,Lim,w,Lam,q,delta,r,opt,mu,sig,dist,skew)
  salida<-c(n,Lim,w,Lam,q,sol.ARL[3:4])
  t <- proc.time()-t
  print(param); print("_____");
  print(paste("Tiempo de ejecución: ", round(t[3],2), " Segundos"))
  names(salida)<-c("n","Lim","w","Lambda","q","ARL0","ARL1")
  return(salida)}
```