



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



---

# EVALUACIÓN DE UNA MANIOBRA DE DEORBIT CON PROPELENTES VERDES

---

Autor: **Hebrero Cejudo, Oscar**

**Máster en Ingeniería Aeroespacial**  
Trabajo Final de Máster

Curso académico 2018-2019  
Tutor: Dr. Morano Fernández, Jose Antonio  
Cotutor: Ing. Pasini, Angelo  
Valencia, septiembre 2019

## **Abstract**

The historical practice of abandoning spacecraft and launchers parts in orbit at the end of mission life has allowed the gathering of a substantial quantity of space debris in orbits that are noteworthy. The growth of the space debris is uncontrolled, and that increases the probability of collision between a spacecraft in active mission, thus leading to a partially or completely damage to the spacecraft. Aiming to minimize the debris generation that leads to these problems, this thesis will focus on the issues of space debris designing an active DeOrbit manoeuvre of a spacecraft located in an LEO orbit. In addition, the increasing environmental concerns lead to the development of new propellants. With the reduction of space debris, there have been already some efforts to develop high-performance, non-toxic propellants. Because of that, the concept of a “green” propulsion system will be designed to accomplish the manoeuvre of DeOrbit. The propellant must be “green” and the performance of some “green” propellants will be analysed.

## Resumen

La costumbre de abandonar vehículos espaciales en sus órbitas de trabajo al final de su vida operativa, así como etapas finales de lanzadores que no reentran de nuevo en la atmósfera ha originado que se almacene una cantidad notable de basura espacial en orbitas que son de vital importancia para la industria espacial. Por lo dicho, la acumulación de basura espacial crece de manera incontrolada, lo que aumenta la probabilidad de impacto de esta con vehículos activos, pudiendo causar tanto daños parciales como totales. Con la intención de minimizar la basura espacial y evitar así los problemas que esta puede causar, esta tesis se centra en el diseño de una maniobra de *DeOrbit* de un vehículo espacial que se encuentre en una órbita LEO. Ligado al reciclaje de la basura espacial, se están realizando numerosos esfuerzos para desarrollar propelentes no tóxicos de altas prestaciones que no contaminen la atmósfera terrestre tanto para lanzaderas como para maniobras orbitales. Es por esto por lo que se diseñará un sistema de propulsión “verde” para llevar a cabo la maniobra de *DeOrbit*. Dicho propelente deberá ser líquido, por lo que se realizará un estudio sobre las prestaciones de los diferentes propelentes “verdes”.

## Resum

La costum d'abandonar vehicles espacials en les seues òrbites de treball al final de la seua vida operativa, així com etapes finals de llançadors que no reentren de nou en l'atmosfera ha originat que s' enmagatzema una quantitat notable de fem espacial en orbites que son de vital importancia per a la industria espacial. Per tant, l'acumulació de fem espacial creix de manera incontrolada, el que augmenta la probabilitat d'impacte d'aquesta amb vehicles actius, podent causar tant danys parcials com totals. Amb l'intenció de minimitzar el fem espacial i evitar així els problemes que aquesta pot causar, aquesta tesi es centra en el diseny d'una maniobra de *DeOrbit* d'un vehicle espacial que es trove en una òrbita LEO. Lligat al reciclatge del fem espacial, s'están realitzant nombrosos esforços per a desenvolupar propelents no tòxics d'altas prestacions que no contaminen l'atmosfera terrestre tant per a llançaderes com per a maniobres orbitals. Es per això pel que es dissenya un sistema de propulsió "verd" per dur a terme la maniobra de *DeOrbit*. Aquest propelent deurà ser líquid, pel que es realitzarà un estudi sobre les prestacions dels diferents propelents "verds"

# Contenido

Índice de tablas .....	VI
Tabla de acrónimos .....	VII
Tabla de ilustraciones.....	IX
Introducción .....	1
1.1 Estructura del TFM .....	2
2 Estado del Arte.....	3
2.1 Clasificación de la basura espacial .....	3
2.2 Análisis de la órbita LEO .....	6
2.3 Regulación del entorno espacial y agencias reguladoras .....	6
2.3.1 Región protegida LEO.....	8
2.3.2 Región protegida GEO .....	8
3 Metodología.....	9
3.1 Datos iniciales del satélite.....	9
3.2 Cálculo de los vectores de estado $r$ y $v$ en un sistema de referencia geocéntrico ecuatorial .....	10
3.3 Variación de los parámetros orbitales.....	11
3.4 Aceleraciones perturbativas. ....	12
3.4.1 Aceleraciones gravitacionales.....	12
3.4.2 Resistencia aerodinámica.....	15
3.4.3 Radiación Solar .....	19
3.4.4 Atracción lunar.....	21
3.5 Maniobras orbitales .....	21
3.6 Reentrada .....	22
3.7 Importancia de los propelentes verdes .....	23
3.8 Algoritmo del código para el cálculo de las pequeñas perturbaciones.....	24
4 Cálculos realizados .....	26
4.1 Cálculos realizados para un caso general .....	40
5 Presupuesto y especificaciones del proyecto .....	43
5.1 Presupuesto .....	43
5.2 Especificaciones del proyecto .....	44

6	Conclusiones.....	45
	Apéndices .....	47
	Apéndice A: Códigos MATLAB.....	48
	Código para el cálculo preliminar de la caída natural de un satélite.....	48
	Código para el cálculo de las pequeñas perturbaciones del satélite. ....	51
	Apéndice B: Determinación de la presión Solar en función de los parámetros orbitales... 67	
	Cálculo del vector unitario $\mathbf{u}$ y el vector de perturbación en función de los parámetros orbitales .....	67
	Variación de la oblicuidad y la longitud de la eclíptica Solar .....	68
	Determinación de los eclipses del satélite .....	69
	Apéndice C: Tiempo sidéreo y día Juliano .....	71
	Apéndice D: Cálculo de los vectores de posición Tierra-Luna .....	73
	Apéndice E: Modelo de la atmósfera. ....	76
	Bibliografía.....	78

## Índice de tablas

Tabla 1 Distribución de satélites activos en la órbita LEO a fecha del 31 de marzo de 2019. .....	6
Tabla 2 Datos de un satélite en el formato TLE.....	9
Tabla 3 Armónicos zonales de la tierra .....	14
Tabla 4 Polinomios de Legendre .....	14
Tabla 5 Índices de la actividad Solar y geomagnética.....	17
Tabla 6 Características aerodinámicas de algunos satélites. (J. Larson, y otros, 2005)....	19
Tabla 7 Impulsos específicos típicos de algunos propelentes .....	24
Tabla 8 Datos iniciales del caso .....	26
Tabla 9 Datos finales del satélite .....	36
Tabla 10 Datos instante maniobra final.....	37
Tabla 11 Presupuesto del proyecto .....	43
Tabla 12 Coeficientes para el cálculo de la posición lunar (Curtis, 2014) .....	75
Tabla 13 Variación de las características atmosféricas con la altitud útil para la construcción del modelo exponencial de la atmósfera terrestre. (Mengali, y otros, 2013) 77	

## Tabla de acrónimos

<b>IADC</b>	Inter-Agency Space Debris Coordination Committee
<b>ISO</b>	International Organization for Standardization
<b>LEO</b>	Low Earth Orbit
<b>HEO</b>	Highly Eccentric Earth Orbit
<b>MGO</b>	MEO-GEO Crossing Orbits
<b>LMO</b>	LEO-MEO Crossing Orbits
<b>MEO</b>	Medium Earth Orbit
<b>NSO</b>	Navigation Satellites Orbit
<b>GTO</b>	GEO Transfer Orbit
<b>EGO</b>	Extended Geostationary Orbit
<b>GEO</b>	Geostationary Orbit
<b>h</b>	Momento angular
<b>a</b>	Semieje mayor de la órbita
<b>i</b>	Inclinación de la órbita
<b>p</b>	Semilado recto de la órbita
<b>v</b>	Anomalía verdadera de la órbita
<b><math>\Omega</math></b>	Ascensión recta del nodo ascendente de la órbita
<b><math>\omega</math></b>	Argumento del perigeo de la órbita
<b>M</b>	Anomalía media
<b>E</b>	Anomalía excéntrica
<b><math>\mu</math></b>	Parámetro gravitacional de la tierra
<b>e</b>	Excentricidad de la órbita
<b>F<sub>10.7</sub></b>	Actividad Solar onda de longitud de onda 10.7
<b>A<sub>p</sub></b>	Índice geomagnético
<b>B</b>	Coefficiente balístico
<b>D</b>	Fuerza de resistencia aerodinámica
<b>I<sub>sp</sub></b>	Impulso específico del combustible
<b>g<sub>0</sub></b>	Gravedad terrestre
<b>m<sub>0</sub></b>	Masa inicial
<b>m<sub>f</sub></b>	Masa de combustible
<b><math>\Delta v</math></b>	Delta de velocidad
<b>G</b>	Constante de gravitación universal



<b><math>M_e</math></b>	Masa de la tierra
$\lambda$	Longitud
$\delta$	Latitud
<b>HP</b>	Paralaje horizontal
<b><math>J_n</math></b>	Harmónico zonal de a tierra
<b><math>T_0</math></b>	Número de siglos desde J2000
<b>JO</b>	Número del día Juliano a las 0 h UT
<b>JD</b>	Tiempo Juliano
<b>UT</b>	Tiempo universal
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann
<b><math>S_0</math></b>	Intensidad de energía radiada
<b>S</b>	Intensidad de energía radiada en la tierra
$\nu$	Parámetro de visibilidad
<b><math>C_R</math></b>	Coefficiente de presión de radiación
<b><math>C_D</math></b>	Coefficiente de resistencia aerodinámica
<b>T</b>	Periodo de la órbita
<b>P</b>	Aceleración de perturbación

## Tabla de ilustraciones

Ilustración 1 Evolución del entorno espacial. Adaptado de: NASA Orbital Debris Program Office NASA Orbital Debris Program Office (The Orbital Debris Problem, 2016) .....	4
Ilustración 2 Evolución del entorno en todas las órbitas (ESA, 2019).....	5
Ilustración 3 Regiones protegidas del espacio según norma ISO 24133 .....	8
Ilustración 4 Sistema de coordenadas esféricas (Curtis, 2014).....	13
Ilustración 5 Caída natural de un satélite .....	17
Ilustración 6 Caída natural de un satélite para un coeficiente balístico constante. En el eje de las abscisas se encuentra la altura inicial del satélite, y en su ordenada el tiempo que tardaría en caer de forma natural un satélite desde esa altura.....	18
Ilustración 7 Esquema de maniobra orbital. En verde se representa la órbita inicial, y en azul la órbita final. ....	22
Ilustración 8 Diagrama de bloques para el cálculo de los vectores de estado por medio de las ecuaciones de perturbación de Gauss .....	25
Ilustración 9 Aproximación inicial de la caída natural del satélite.....	27
Ilustración 10 Fracción $m_f/m_0$ en función del impulso específico del combustible.....	28
Ilustración 11 Evolución de la altura en la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones .....	29
Ilustración 12 Evolución de la altura de la órbita de transferencia según modelo ideal ...	30
Ilustración 13 Evolución del semieje mayor de la órbita elíptica según modelo de pequeñas perturbaciones .....	31
Ilustración 14 Evolución de la excentricidad de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones.....	31
Ilustración 15 Evolución de la inclinación de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones.....	32
Ilustración 16 Evolución de la ascensión recta del nodo ascendente de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones .....	32
Ilustración 17 Evolución de la anomalía verdadera de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones.....	33
Ilustración 18 Evolución del argumento del perigeo de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones.....	33
Ilustración 19 Traza del satélite a lo largo de la órbita de transferencia. El punto rojo indica la posición final del satélite .....	34

Ilustración 20 Traza del satélite a lo largo de la órbita de transferencia obtenido con el software GMAT .....	34
Ilustración 21 Trayectoria del satélite de los 180 a los 100 km .....	35
Ilustración 22 Posición del satélite a los 100 km .....	36
Ilustración 23 Posición del satélite (punto rojo) y trayectoria en el instante de la maniobra final .....	37
Ilustración 24 Coste de la maniobra final en términos de $\Delta V$ .....	38
Ilustración 25 Transferencia de calor en función del ángulo de la trayectoria.....	39
Ilustración 26 Coste de la primera maniobra del propulsor en términos de $\Delta V$ .....	40
Ilustración 27 Masa de propelente (mf) que requeriría un satélite a una altura de 2000 km para la maniobra inicial en función de su peso inicial ( $m_0$ ). Ambas masas están expresadas en kg.....	41
Ilustración 28 Fracción de masa de combustible frente a $\Delta V$ para los combustibles estudiados.....	41
Ilustración 29 Esquemas determinación de los eclipses de un satélite (Curtis, 2014) .....	69
Ilustración 30 Paraleje horizontal HP. (Curtis, 2014) .....	74

## Introducción

La cantidad de objetos artificiales no controlados que orbitan la tierra denominados como basura espacial está aumentando considerablemente en los últimos años. Con este aumento, el riesgo de colisión con un satélite en activo es cada vez mayor, por lo que la retirada de estos desechos es cada vez más importante. A medida que se suceden los lanzamientos, más y más fragmentos son generados, lo que aumenta la complejidad del sistema de reciclado de los mismos, a la vez que aumenta el riesgo de colisión.

El sistema más efectivo y sencillo para la mitigación de la denominada basura espacial es el *DeOrbit* del satélite al final de su vida útil. Agencias internacionales como el Comité Interinstitucional de Coordinación de Desechos Espaciales (IADC) ya han generado protocolos para que los futuros satélites implementen sistemas de *DeOrbit* (IADC, 2007) y se han creado normas ISO de obligado cumplimiento (ISO, 2018).

Según (ESA, 2019) la mayoría de la basura espacial se encuentra en las orbitas LEO debido a la saturación de las mismas dada su importancia para satélites de teledetección y observación terrestre.

Este trabajo se centrará en el diseño de un sistema de *DeOrbit* para satélites LEO cumpliendo la norma *ISO 24113* que establece que todo satélite ubicado en una órbita LEO hasta los 2000 km de altura deberá de abandonar esa órbita en un plazo de 25 años. Para lo cual, se propone la implementación de un sistema químico activo a base de propelentes verdes para la maniobra inicial y final (en caso de que se necesite una reentrada controlada) y aprovechando al máximo la caída natural del satélite debido a la resistencia aerodinámica.

Para este propósito, se ha desarrollado un código en *MATLAB* que simule el movimiento del satélite a lo largo del tiempo teniendo en cuenta las perturbaciones debidas a la gravedad terrestre, radiación Solar, resistencia aerodinámica y las debidas a otros cuerpos celestes como el Sol y la Luna que tienen efecto sobre los parámetros orbitales del satélite. Finalmente, se analiza una maniobra de reentrada controlada que minimice los riesgos de impacto a personas en tierra.

## 1.1 Estructura del TFM

Tras esta introducción inicial, este trabajo cuenta con un análisis del estado del arte, donde se muestra el estado de la basura espacial hoy en día, así como las normas y organismos que lo regulan.

En el siguiente capítulo se explica cómo se ha desarrollado el código y la metodología empleada, donde se presenta un ejemplo de *DeOrbit* de un satélite teniendo en cuenta sus dimensiones y peso, factores que influyen notoriamente en la trayectoria de los satélites. Posteriormente se dan unos datos generales y una estimación de coste en términos de  $\Delta V$  y relación de masa.

Posteriormente se expone conceptualmente el propulsor diseñado para la realización de la misión, así como las pautas para la reentrada controlada.

Y finalmente se obtendrán unas conclusiones sobre los resultados obtenidos y se valora la viabilidad de la implementación de este método. Concluyendo con los anexos con los modelos matemáticos empleados y las referencias.

## 2 Estado del Arte

En las siguientes secciones se analiza la importancia del reciclado y control de la basura espacial, así como los organismos que lo regulan.

### 2.1 Clasificación de la basura espacial

El entorno espacial ha sido perturbado artificialmente desde el comienzo de la era espacial, con el lanzamiento del Sputnik 1 el 4 de octubre de 1957, dando origen a la creación de la basura espacial.

Podemos entender como basura espacial a cualquier objeto artificial no funcional, incluyendo fragmentos o partes, que orbitan la tierra o reentran en la atmósfera.

Estos objetos pueden dividirse en dos categorías: Los que pueden ser rastreables e identificables como productos de un lanzamiento, y los que no pueden ser identificados. Dentro de los que pueden ser identificables podemos definir las siguientes categorías (ESA, 2019):

- Cargas de pago: aquellos objetos diseñados específicamente para una función excluyendo el lanzamiento. Algunos ejemplos son un satélite o herramientas de calibración.
- Cargas de pago relacionadas con la misión: Objetos que se utilizan para que la carga de pago pueda ser puesta en funcionamiento. Herramientas que usan los astronautas o instrumentos ópticos pueden ser dos ejemplos.
- Desechos de fragmentación de la carga útil: objetos espaciales fragmentados o liberados involuntariamente de una carga útil como desechos espaciales para los cuales su génesis se remonta a un evento único. Esta clase incluye objetos creados cuando una carga útil explota o cuando choca con otro objeto.
- Desechos de carga útil: objetos espaciales fragmentados o liberados involuntariamente de una carga útil como desechos espaciales para cuya génesis no está clara, pero las propiedades orbitales o físicas permiten una correlación con una fuente.
- Cuerpo de cohete, objeto espacial diseñado para realizar funciones relacionadas con el lanzamiento: Esto incluye las diversas etapas orbitales de vehículos de lanzamiento, pero no cargas útiles que liberan cargas útiles más pequeñas.
- Objetos relacionados con la misión de cohetes: objetos espaciales liberados intencionalmente como desechos espaciales que sirvieron para un propósito para la función de un cuerpo de cohete. Ejemplos comunes incluyen cubiertas y motores.
- Desechos de fragmentación de cohetes: objetos espaciales fragmentados o liberados involuntariamente de un cuerpo de cohetes como desechos espaciales para los cuales su génesis se remonta a un evento único. Esta clase incluye objetos creados cuando explota un vehículo de lanzamiento.

- Desechos de cohetes, objetos espaciales fragmentados o liberados involuntariamente de un cuerpo de cohetes como desechos espaciales para los cuales la génesis no está clara pero las propiedades orbitales o físicas permiten una correlación con una fuente.

En la siguiente figura puede observarse la evolución del entorno espacial.

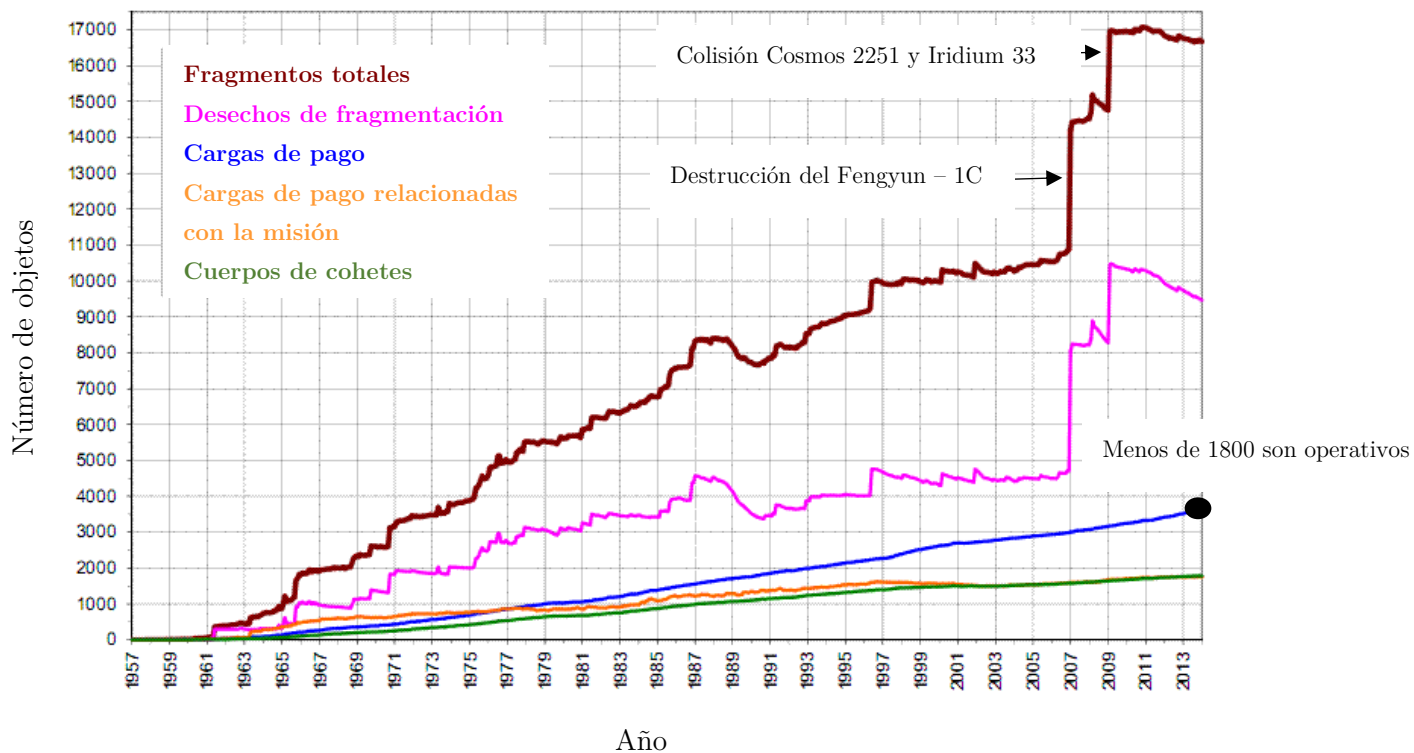


Ilustración 1 Evolución del entorno espacial. Adaptado de: NASA Orbital Debris Program Office/NASA Orbital Debris Program Office (The Orbital Debris Problem, 2016)

Esta tendencia ha aumentado principalmente debido al hecho de que cualquier objeto fabricado por el hombre, lanzado a cualquier órbita terrestre, era abandonado en el espacio al final de su vida. Los objetos grandes como los satélites inactivos y las etapas superiores de los cohetes de lanzamiento son la principal fuente potencial de propagación de escombros, debido a su gran sección transversal que los convierte estadísticamente en los objetos más probables de estar involucrados en un evento de colisión.

En caso de colisión, su masa es tan alta que se pueden generar miles de nuevos desechos, cubriendo un amplio espectro de tamaños. Un ejemplo es la colisión ocurrida entre un satélite de comunicaciones ruso fuera de control, Cosmos 2251, con el satélite Iridium 33 operativo en febrero de 2009, que resultó en casi 2000 nuevos objetos rastreables y, muy probablemente, decenas de miles de fragmentos más pequeños, pero aún muy peligrosos. Otro ejemplo fue la destrucción premeditada del satélite chino Fengyun - 1C el 11 de enero del 2007 que produjo unos 40000 fragmentos de entre 1 y 10 cm.

Cualquier colisión determina un aumento en la densidad de la población de escombros y aumenta la probabilidad de colisiones adicionales posteriores. De hecho, como se muestra en la Ilustración 1 anterior, la gran mayoría de los desechos orbitales catalogados son originarios de los fragmentos de eventos de colisión. Esta es la razón por la cual, para limitar, a corto plazo, el aumento de la población de escombros y disminuirlo, a largo plazo, la medida más efectiva a tomar es la eliminación de cualquier satélite futuro y etapa gastada después de su fin de la vida útil.

El enfoque de este trabajo se centra en la región LEO, dado que, como se observa en la Ilustración 2, es la región de las órbitas terrestres que muestra la mayor densidad de escombros. Las órbitas LEO se consideran convencionalmente como cualquier órbita restringida en el rango de altitud aproximado entre 0 km y 2000 km.

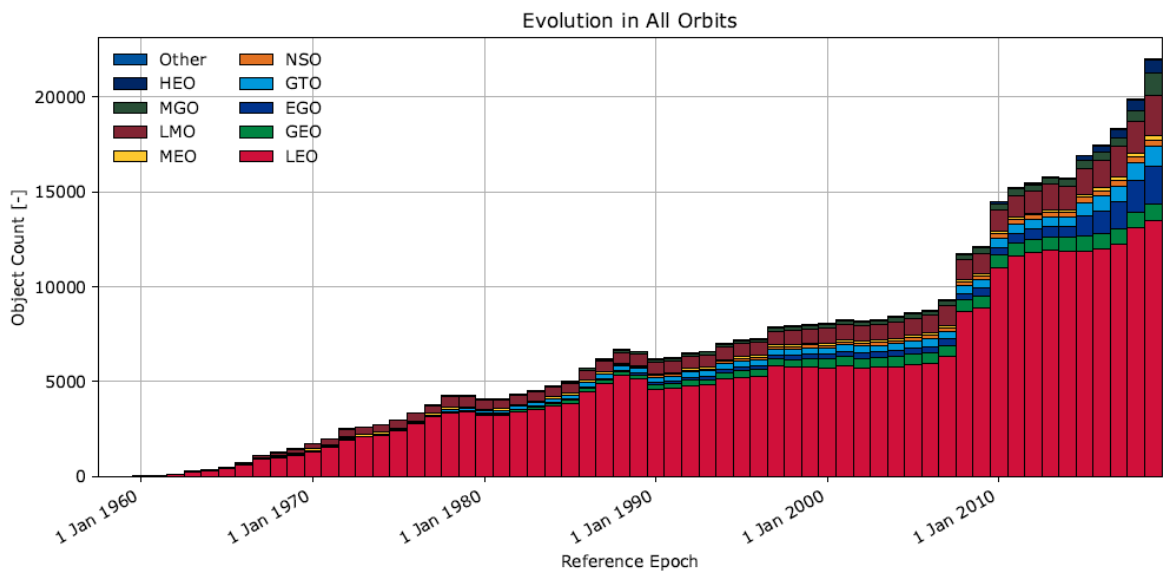


Ilustración 2 Evolución del entorno en todas las órbitas<sup>1</sup> (ESA, 2019)

<sup>1</sup> Las siglas pueden encontrarse en la tabla de acrónimos.



## 2.2 Análisis de la órbita LEO

Dado que el alcance de este TFM se centra en los satélites que se encuentran en la órbita LEO, se cree necesario analizar el estado de la misma. En la sección anterior se ha mostrado que en esta región del espacio es donde más desechos espaciales se encuentran. En los siguientes párrafos analizamos los satélites que se encuentra en activo en la órbita LEO.

En la Tabla 1 se puede observar los satélites en activo que operan en la órbita LEO. En ella puede observarse como la órbita se ha dividido en 4 rangos en los que se indica el número de satélites junto con una media de la inclinación, excentricidad y masa de los mismos. Como puede observarse la mayor concentración de satélites se encuentra en el rango 2.

*Tabla 1 Distribución de satélites activos en la órbita LEO a fecha del 31 de marzo de 2019.*

Rango 1: debajo de los 500 km		Rango 2: entre 501 y 700 km	
Número de satélites	344	Número de satélites	1166
Inclinación media	50,17 °	Inclinación media	65,72 °
Excentricidad media	0,00123	Excentricidad media	0,00181
Masa media	1.802,00 kg	Masa media	1.287,81 kg
Porcentaje sobre el total	17%	Porcentaje sobre el total	58%
Rango 3: entre 701 y 1500 km		Rango 4: entre 1501 y 2000 km	
Número de satélites	449	Número de satélites	47
Inclinación media	56,70 °	Inclinación	70,60 °
Excentricidad media	0,00419	Excentricidad	0,00285
Masa media	2.160,18 kg	Masa media	724,71 kg
Porcentaje sobre el total	22%	Porcentaje sobre el total	2%
<b>TOTAL</b>	<b>2006</b>		

Pese a no parecer un número elevado, éste puede aumentar considerablemente si tienen éxito empresas que tienen como intención lanzar y establecer enormes constelaciones de nanosatélites con la intención de dar cobertura de internet a nivel mundial. Con todo esto, en un futuro próximo el número de satélites en órbitas LEO podría aumentar en varios miles de artefactos, lo que hace vital que todos los nuevos satélites posean de un sistema propio para su correcto reciclaje.

## 2.3 Regulación del entorno espacial y agencias reguladoras

Como se ha explicado en los párrafos anteriores, como consecuencia de las actividades de los vuelos espaciales, el número de objetos artificiales y funcionales (es decir, desechos espaciales) hechos por el hombre en la órbita de la Tierra continúa creciendo. Para minimizar el impacto de las operaciones espaciales en el entorno orbital, reducir el riesgo de colisión en órbita y garantizar la seguridad del público en el suelo durante el reingreso, se deben prever medidas de mitigación y seguridad desde la concepción de un espacio sistema.

La experiencia técnica en desechos espaciales, desde reentradas hasta colisiones en órbita y pruebas de impacto de hipervelocidad, se reunió a nivel de agencia y nacional durante gran parte de los años setenta y ochenta. Sin embargo, la dimensión global del problema requería la transferencia bilateral de conocimiento, que comenzó por iniciativa de la NASA.

Estos intercambios entre los expertos dieron lugar a reuniones multilaterales y condujeron a la creación del Comité Interinstitucional de Coordinación de Desechos Espaciales (IADC) en 1993, fundado por ESA (Europa), NASA (EE. UU.), NASDA (ahora JAXA, Japón) y RSA (ahora Roscosmos, Federación de Rusia). Nueve agencias más se han unido al IADC desde: ASI (Italia), CNES (Francia), CNSA (China), CSA (Canadá), DLR (Alemania), KARI (Corea del Sur), ISRO (India), NSAU (Ucrania), y UKSA (Reino Unido). El IADC se fundó como un foro para el intercambio técnico y la coordinación en materia de desechos espaciales, y hoy puede considerarse como el principal organismo técnico internacional en el campo del espacio los desechos espaciales.

Los desechos espaciales también han sido un tema recurrente en la agenda de la Subcomisión de Asuntos Científicos y Técnicos del Comité de las Naciones Unidas sobre los usos pacíficos del espacio ultraterrestre (UNCOPUOS) desde 1994.

La amenaza de los desechos espaciales para el futuro de los vuelos espaciales combinada con la adopción casi universal de la Convención de Responsabilidad creó la necesidad de un conjunto de medidas de mitigación de desechos espaciales internacionalmente aceptadas. Se dio un paso importante en 2002, cuando el IADC publicó las Directrices de mitigación de desechos espaciales del IADC y las presentó al Subcomité Científico y Técnico de la UNCOPUOS. Desde entonces, este documento ha servido como base para documentos de política no vinculantes, legislación nacional y como punto de partida para la derivación de normas técnicas.

Un conjunto coherente de medidas es primordial para abordar el problema global de los desechos espaciales, pero depende de las naciones individuales, los operadores y los fabricantes para implementarlos, lo que puede conducir a variaciones caso por caso. Como tal, las naciones de todo el mundo han desarrollado estándares de seguridad y pautas específicas basadas en el trabajo del IADC. Sin embargo, la estandarización de las medidas de mitigación es importante para lograr una comprensión común de las tareas requeridas que conducen a procesos transparentes y comparables. Esta es la tarea de los organismos normativos de normalización internacional, como la Organización Internacional de Normalización ISO.

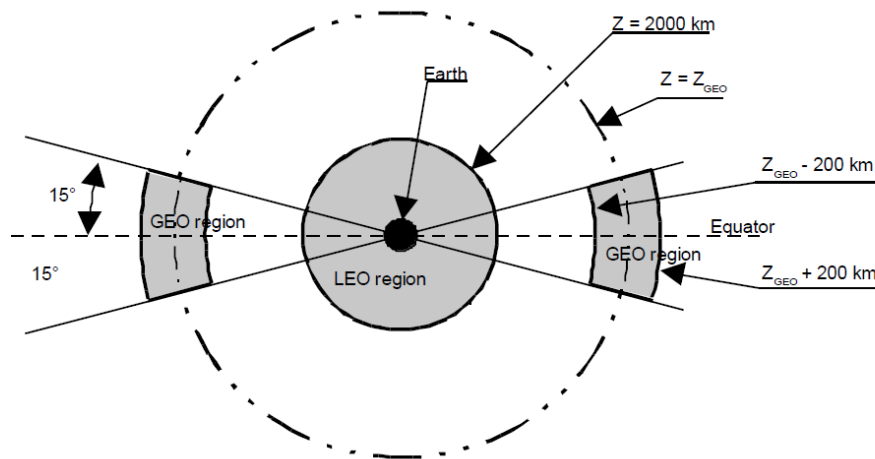
En mayo de 2011, se emitió la segunda edición de ISO 24113 "Space Systems – Space Debris Mitigation Requirements" como la norma internacional que establece los requisitos de diseño y operaciones para minimizar el impacto de las operaciones espaciales en el entorno

orbital. El 10 de febrero de 2012, esta norma fue adoptada por la Coordinación Europea de Normalización del Espacio (ECSS) como la norma ECSS-U-AS-10C.

Los objetivos de la creación de un reglamento único son los siguientes:

- Limitación de los desechos liberados durante las operaciones normales.
- Minimización del potencial de colisiones en órbita.
- Eliminación posterior a la misión.
- Prevención de colisiones en órbita.

En la norma ISO 24133, se definen las secciones del espacio que se encuentran protegidas. Estas son las referentes a las orbitas LEO y GEO y se definirán a continuación.



*Ilustración 3 Regiones protegidas del espacio según norma ISO 24133*

### 2.3.1 Región protegida LEO

La región protegida LEO, de acuerdo con IADC, es aquella que se extiende desde la superficie de la tierra a una altitud de 2000 km. Se supondrá una tierra esférica y con un radio ecuatorial de 6378 km (ver Ilustración 3).

### 2.3.2 Región protegida GEO

La región protegida GEO, de acuerdo con IADC, es un sector circular definido por una cota inferior igual a la altitud geostacionaria menos 200 km, una cota superior igual a la altitud geostacionaria más 200 km y una altitud comprendida entre los -15 grados y +15 grados. (ver Ilustración 3).

### 3 Metodología

En este capítulo se recoge la metodología empleada en el desarrollo del código junto con las hipótesis realizadas, y las explicaciones oportunas sobre cómo resolver las ecuaciones que permiten obtener la trayectoria del satélite en el tiempo con una precisión aceptable.

#### 3.1 Datos iniciales del satélite

En primer lugar, es necesario definir el punto de partida del satélite mediante los elementos orbitales básicos. En este caso, los parámetros orbitales iniciales (para un instante  $t_0$ ) serán los siguientes:

- El semieje mayor de la órbita identificado como  $a$ .
- La excentricidad de la órbita denominada  $e$ .
- La inclinación de la misma  $i$ .
- El argumento sobre el perigeo  $\omega$
- La ascensión recta del nodo ascendente  $\Omega$
- La anomalía media  $M$ .

Con estos datos iniciales pueden calcularse los vectores de estado del satélite en ese instante, así como definir la órbita kepleriana que describe.

Se pueden encontrar estos y otros importantes datos que caracterizan al satélite activo en la base de datos de CELESTRAK en el formato TLE NORAD (CSSI, 2000). A continuación, se muestra un ejemplo de los elementos orbitales en el formato TLE:

Tabla 2 Datos de un satélite en el formato TLE

CHANDRAYAAN 2								
1	4441U	19042A	19230.0	0.00330169	19998-2	00000+0	0	9998
2	44441	21.9130	14.8810	9751339	184.2250	135.4150	0.09137592	246

El significado de los anteriores parámetros es el siguiente:

Empezando por la segunda fila y de izquierda a derecha obtenemos el número del satélite (la letra U hace referencia a la clasificación -U = Unclassified-), el designante internacional, tiempo de la medición en el sistema de día Juliano, coeficiente balístico, segunda derivada del movimiento medio (normalmente este parámetro está vacío), coeficiente de radiación Solar, efeméride y número de elemento y *checksum*. El parámetro más destacable de este grupo es sin duda el tiempo de la medición, ya que permite determinar otros datos importantes, como, por ejemplo, la posición del satélite con respecto al sol.

En la última fila y de nuevo de izquierda a derecha encontramos de nuevo el número del satélite, la inclinación, la ascensión recta del nodo ascendente, la excentricidad<sup>2</sup>, el

---

<sup>2</sup> La excentricidad esta expresada en forma de decimal, en este caso sería 0.9751339.

argumento del perigeo, la anomalía media, el movimiento medio en rev/día y el número de revoluciones en la determinada época del año.

Cabe decir que los ángulos están expresados en grados y el movimiento medio en revoluciones por día.

### 3.2 Cálculo de los vectores de estado $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ en un sistema de referencia geocéntrico ecuatorial

Una vez definidos los parámetros iniciales, que son las condiciones iniciales de nuestro problema, se pueden calcular los vectores de estado del satélite.

El primer paso es calcular el vector de estado en un sistema de referencia perifocal:

$$\vec{r}_L = \frac{p}{1 + e \cos(v)} \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{v}_L = \frac{\mu}{p} \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ e + \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Donde:

- $p$  es el semilado recto de la órbita<sup>3</sup>.
- $v$  es la anomalía verdadera.
- $\mu$  es el parámetro gravitacional de la tierra.

La anomalía verdadera del satélite puede ser calculada de la siguiente forma con la ecuación de Kepler (Curtis, 2014):

1. Calcular con un método numérico la anomalía excéntrica  $E$ :

$$M = E - e \sin(E) \quad (3)$$

Donde  $M$  es la anomalía media en radianes.

2. Calcular la anomalía verdadera de la siguiente manera:

$$v = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \left( \frac{E}{2} \right) \right) \quad (4)$$

---

<sup>3</sup> Notar que  $p = a(1-e^2)$ ;  $p = h^2/\mu$

Llegados a este punto, es necesario expresar los vectores de estado en un sistema de referencia geocéntrico ecuatorial. Para ello es necesario calcular una matriz de transformación mediante los siguientes giros:

1. El primer paso es realizar un giro alrededor del eje z un ángulo  $\Omega$ .
2. La segunda rotación corresponde al giro sobre el eje x un ángulo  $i$ .
3. Y, por último, otro giro alrededor del eje z un ángulo  $\omega$ .

Los vectores de estado en un sistema de referencia geocéntrico ecuatorial pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\vec{r}_G = R_z(\omega) R_x(i) R_z(\Omega) \vec{r}_L \quad (5)$$

$$\vec{v}_G = R_z(\omega) R_x(i) R_z(\Omega) \vec{v}_L \quad (6)$$

### 3.3 Variación de los parámetros orbitales

El movimiento de un satélite alrededor de un cuerpo está gobernado por la ley de gravitación de Newton. Si se tiene dos cuerpos en un entorno ideal en el que no haya ninguna perturbación que afecte al satélite, la ecuación de movimiento puede expresarse de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Esta ecuación puede resolverse numéricamente tomando como condiciones iniciales los seis parámetros orbitales definidos anteriormente.

Sin embargo, en un escenario real aparecen fuerzas perturbativas que causan variaciones en los parámetros orbitales. En este caso, se puede definir la ecuación del movimiento como sigue:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{P} \quad (8)$$

Esta ecuación también puede resolverse numéricamente mediante el método de variación de parámetros, teniendo en cuenta que en este caso los parámetros orbitales son funciones.

La variación de los parámetros orbitales puede calcularse mediante las ecuaciones de variación de Gauss, que determinan cada parámetro orbital para un instante de tiempo dado por la acción de aceleraciones perturbativas. Calculando los parámetros orbitales para cada instante, se pueden volver a calcular los vectores de estado, lo que determinará la posición del satélite a lo largo del tiempo. Esto es importante, dado que, si el satélite se

encuentra en una órbita baja, las perturbaciones atmosféricas podrían afectar significativamente al satélite y originar su reentrada en la atmósfera.

Las ecuaciones de variación de Gauss son las siguientes (Curtis, 2014):

$$\frac{dh}{dt} = rp_t \quad (9)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{h}{\mu} \sin(v) p_r + \frac{1}{\mu h} [(h^2 + \mu r) \cos(v) + \mu e r] p_t \quad (10)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{1}{eh} \left[ \frac{h^2}{\mu} \cos(v) p_r - \left( r + \frac{h^2}{\mu} \right) \sin(v) p_t \right] \quad (11)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{h \sin(i)} \sin(\omega + v) p_n \quad (12)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{h} \cos(\omega + v) p_n \quad (13)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{eh} \left[ \frac{h^2}{\mu} \cos(v) p_r - \left( r + \frac{h^2}{\mu} \right) \sin(v) p_t \right] - \frac{r \sin(\omega + v)}{h \tan(i)} p_n \quad (14)$$

Donde  $r = h^2 / [\mu (1 + e \cos(v))]$  y  $h$  es el momento angular.

Dados los seis parámetros orbitales iniciales y el tiempo inicial, junto con los componentes de las aceleraciones perturbativas  $p_r$ ,  $p_t$ ,  $p_n$ , (aceleración radial, tangencial y normal respectivamente) las seis ecuaciones pueden ser integradas numéricamente para, como se ha dicho, obtener vectores de estado a lo largo del tiempo.

### 3.4 Aceleraciones perturbativas.

A continuación, se definirán las aceleraciones perturbativas que se tendrán en cuenta en el modelo, así como el método para calcularlas.

#### 3.4.1 Aceleraciones gravitacionales

La tierra y otros cuerpos celestes giratorios no son esferas perfectas. Muchos se parecen a esferoides achatados. Para tal planeta, el eje de rotación es el eje de simetría rotacional de su campo gravitacional. Debido a la protuberancia ecuatorial causada por los efectos centrífugos, el campo gravitacional varía con la latitud y el radio. Este potencial gravitacional más complejo está dominado por la familiar contribución de masa puntual dada por la ecuación (15) sobre la cual se superpone la perturbación debido al achatamiento.

$$V = -\frac{\mu}{r} \quad (15)$$

Donde  $\mu = GM$  siendo<sup>4</sup> G la constante de gravitación universal, M la masa de la esfera y r es la distancia desde el centro de la esfera a un punto fuera de ella.

Las superficies equipotenciales (aquellas en las que V es constante) son esferas concéntricas. La fuerza sobre una unidad de masa colocada en r es la aceleración de la gravedad, que viene dado por  $\mathbf{a} = -\nabla V$  donde  $\nabla$  es el gradiente.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \quad (16)$$

Por lo tanto, la aceleración resulta:

$$\mathbf{a} = -\nabla \left( \frac{\mu}{r} \right) = -\frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (17)$$

Es conveniente utilizar el sistema de coordenadas esféricas. El origen O está en el centro de masa del planeta, y el eje z del sistema de coordenadas cartesianas asociado es el eje de simetría rotacional. (La simetría rotacional significa que nuestra discusión es independiente de la elección del marco de coordenadas cartesianas siempre que cada uno comparta un eje z común.) R es la distancia de un punto P desde O,  $\phi$  es el ángulo polar medido desde el z positivo -eje al radial, y  $\theta$  es el ángulo de acimut medido desde el eje x positivo hasta la proyección del radial sobre el plano xy.

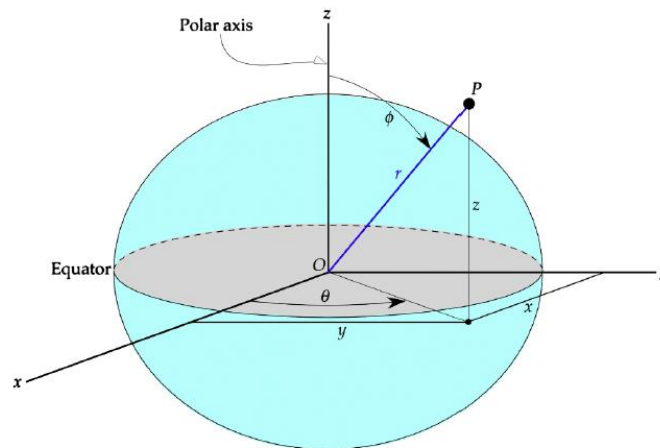


Ilustración 4 Sistema de coordenadas esféricas (Curtis, 2014)

<sup>4</sup>  $M = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .  $G = 6.674 \times 10^{-17} \text{ N km}^2/\text{kg}^2$



Dado que el campo gravitacional es rotacionalmente simétrico, no depende del ángulo de acimut  $\theta$ . Por lo tanto, el potencial gravitacional puede escribirse como:

$$V(r, \phi) = \frac{\mu}{r} + \Phi(r, \phi) \quad (18)$$

Siendo:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (19)$$

Y  $\Phi$  la perturbación del potencial gravitatorio debido al achatamiento del planeta.

La perturbación rotacional simétrica viene determinada por:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k \cos \phi \quad (20)$$

Donde  $R$  es el radio ecuatorial del planeta,  $J_k$  son los armónicos zonales y  $P_k$  son los polinomios de Legendre.

Los 6 primeros armónicos zonales de la tierra son los siguientes:

*Tabla 3 Armónicos zonales de la tierra*

$J_2 = 0.00108263$	$J_3 = -2,33936 * 10^{-3} J_2$
$J_4 = -1,49601 * 10^{-3} J_2$	$J_5 = -0,20995 * 10^{-3} J_2$
$J_6 = 0,49941 * 10^{-3} J_2$	$J_7 = 0,32547 * 10^{-3} J_2$

Mientras que los 6 primeros polinomios de Legendre son:

*Tabla 4 Polinomios de Legendre*

$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$	$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$	$P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$
$P_6(x) = \frac{1}{16} (231x^6 - 31x^4 + 105x^2 - 5)$	$P_7(x) = \frac{1}{16} (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

Dado que el armónico que más contribuye es el  $J_2$  por ser considerablemente mayor que los demás, por simplicidad estos no serán tenidos en cuenta. En este caso, la perturbación rotacional simétrica puede reducirse a:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu J_2}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) \quad (21)$$

Por tanto, la aceleración perturbativa será:

$$\mathbf{P} = -\nabla\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) \quad (22)$$

Realizando las operaciones oportunas, la aceleración perturbativa gravitacional puede expresarse como:

$$\mathbf{P} = \frac{3J_2\mu R^2}{2r^4} \left[ \frac{x}{r} \left( 5\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{r} \left( 5\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{r} \left( 5\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \quad (23)$$

Para un satélite determinado, puede demostrarse que las componentes de la aceleración gravitatoria tan solo dependen de los parámetros orbitales y de la posición de este. De esta manera, las componentes de la aceleración gravitacional son:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{3J_2\mu R^2}{2r^4} [1 - 3\sin^2 i * \sin^2(\omega + \nu)] \\ p_t &= \frac{3J_2\mu R^2}{2r^4} \sin^2 i * \sin(2 * (\omega + \nu)) \\ p_n &= \frac{3J_2\mu R^2}{2r^4} \sin 2i * \sin(\omega + \nu) \end{aligned} \quad (24)$$

### 3.4.2 Resistencia aerodinámica

Para la tierra, la altitud comúnmente aceptada en la que el espacio "comienza" es de 100 km. Aunque más del 99,9999% de la atmósfera terrestre se encuentra por debajo de los 100 km, la densidad del aire a esa altitud es suficiente como para ejercer resistencia y provocar un calentamiento aerodinámico en los objetos que se mueven a velocidades orbitales. Se puede considerar que un vehículo espacial comenzará la reentrada en la atmósfera a una altura comprendida entre los 120 y los 180 km.

Existen varios modelos que describen la variación de las propiedades atmosféricas con la altitud. Uno de ellos es USSA76, la atmósfera estándar de EE.UU.

Según USSA76, la atmósfera es una capa gaseosa esféricamente simétrica de 1000 km de espesor que rodea la tierra. Sus propiedades en todo momento son estables y son consistentes con un período de actividad Solar moderada. La variación hipotética de las propiedades con altitud representa aproximadamente las condiciones durante todo el año en las latitudes medias promediadas durante muchos años. El modelo proporciona valores realistas de densidad atmosférica que, sin embargo, pueden no coincidir con los valores reales en un lugar o tiempo dado.

La resistencia atmosférica puede ocasionar que un satélite disminuya tanto su órbita que este se precipite hacia la tierra. La órbita casi circular de la Estación Espacial Internacional está a unos 400 km sobre la tierra. A esa altura, el arrastre provoca la descomposición orbital que requiere de impulsos frecuentes que aumenten su órbita, generalmente proporcionadas por los sistemas de propulsión de los vehículos de suministro que la visitan.

Si la velocidad de inercia de una nave espacial es  $\mathbf{v}$  y la de la atmósfera en ese punto es  $\mathbf{v}_{atm}$ , entonces la velocidad de la nave espacial relativa a la atmósfera es:

$$\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{atm} \quad (25)$$

Si la atmósfera rota con la tierra, cuya velocidad angular es  $\omega_E$ , en un sistema geocéntrico ecuatorial la velocidad relativa resulta:

$$\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{v} - \omega_E \times \mathbf{r} \quad (26)$$

Donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición del satélite.

Si la resistencia aerodinámica es una fuerza que se opone a la dirección del vector de la velocidad relativa del satélite, se deducir que:

$$\mathbf{D} = -D\widehat{\mathbf{v}}_{rel} \quad (27)$$

Siendo  $\widehat{\mathbf{v}}_{rel}$  el vector unitario en la dirección relativo a la velocidad del satélite.

Aplicando la definición de fuerza de resistencia, se obtiene:

$$D = \frac{1}{2}\rho v_{rel}^2 C_D A \quad (28)$$

Donde  $\rho$  es la densidad atmosférica, A es el área frontal de la nave espacial (el área normal al vector de velocidad relativa) y  $C_D$  es el coeficiente de arrastre adimensional. Si la masa de la nave espacial es m, entonces la aceleración perturbadora debido a la fuerza de arrastre es  $\mathbf{P} = \mathbf{D}/m$ , entonces:

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2}\rho v_{rel} \left( \frac{C_D A}{m} \right) \widehat{\mathbf{v}}_{rel} \quad (29)$$

Los efectos de la resistencia aerodinámica en el espacio son notablemente influyentes a altitudes por debajo de los 500-600 km. Un satélite situado donde la resistencia

aerodinámica es influyente decaerá antes o después en función de su coeficiente balístico, que puede definirse como:

$$B = \frac{C_D A}{m} \quad (30)$$

En la siguiente gráfica se puede observar el tiempo que supondría a un satélite situado a una altitud inicial de 500 km caer de forma natural en función de su coeficiente balístico.

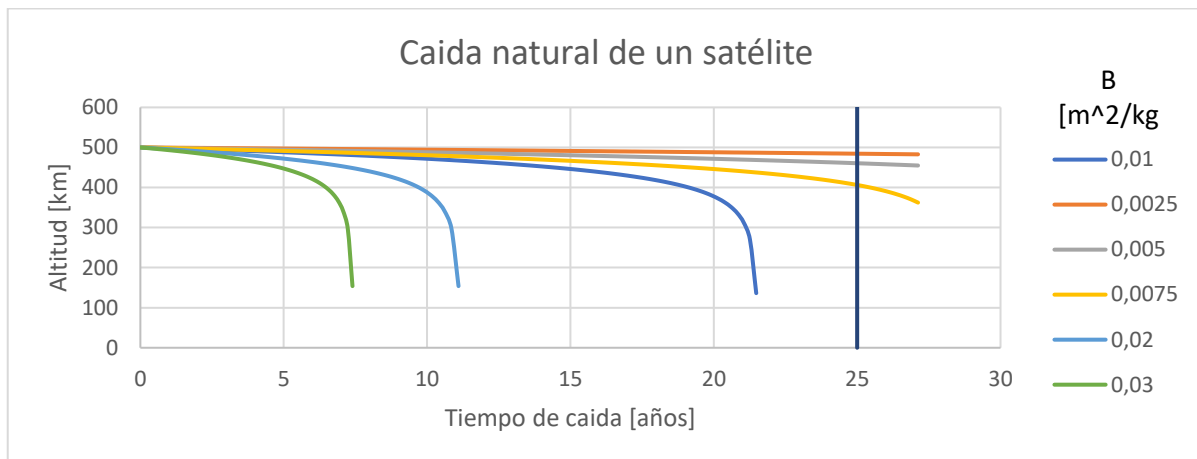


Ilustración 5 Caída natural de un satélite

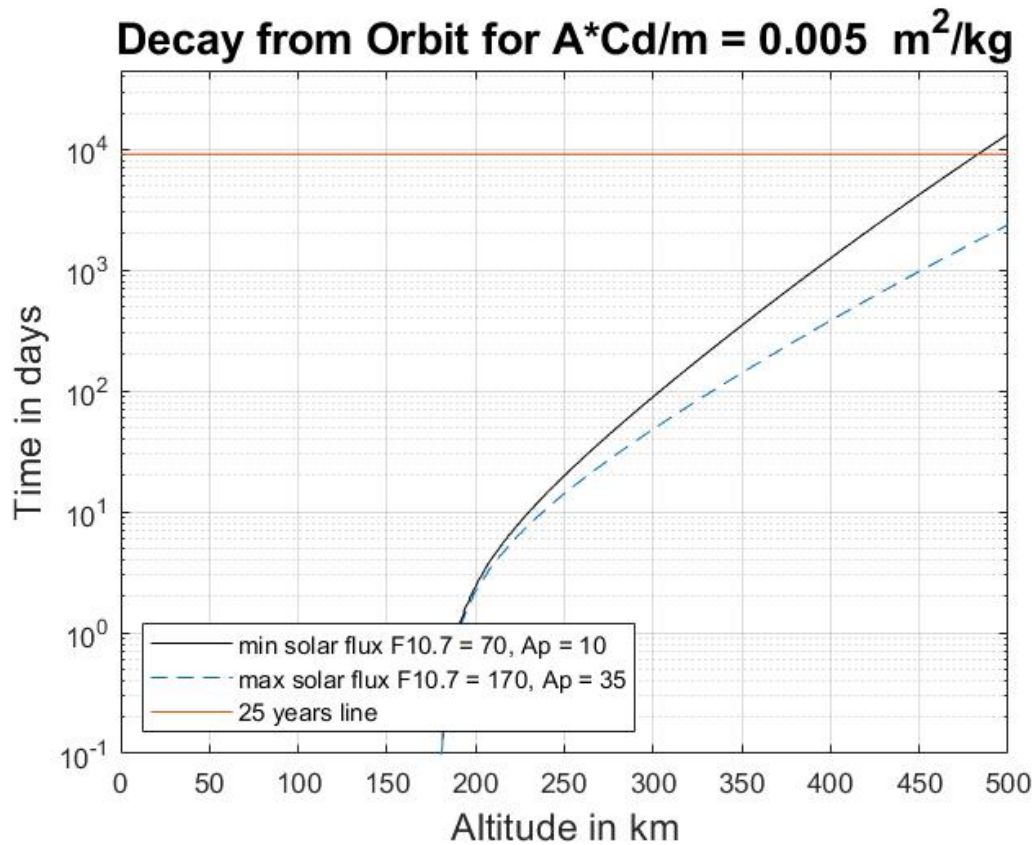
Para la creación de la anterior gráfica, se ha tenido en cuenta una atmosfera que sigue un modelo exponencial, así como una actividad Solar y geomagnética baja. Como puede observarse, los satélites con el coeficiente balístico más bajo tardarían más de 25 años que caer, por lo que necesitan incluir algún sistema de *DeOrbit* para cumplir con la norma de decaer en un plazo máximo de 25 años al final de su vida operativa.

En este modelo atmosférico es necesario tener en cuenta tanto el coeficiente balístico como la actividad Solar. En la siguiente tabla se recogen los parámetros más influyentes a la hora de tener en cuenta la actividad Solar:

Tabla 5 Índices de la actividad Solar y geomagnética

Actividad Solar $F_{10.7}$		Actividad Geomagnética $A_p$	
Baja	$F_{10.7} < 75$	Tranquila	$A_p < 10$
Moderada	$75 < F_{10.7} < 150$	Moderada	$10 < A_p < 50$
Elevada	$150 < F_{10.7} < 190$	Activa	$50 < A_p$
Alta	$190 < F_{10.7}$		

Para visualizar el efecto de la actividad tanto Solar como geomagnética, se ha representado la Ilustración 6, donde se puede observar la caída de un satélite en función de su altura inicial para un coeficiente balístico constante.



*Ilustración 6 Caída natural de un satélite para un coeficiente balístico constante. En el eje de las abscisas se encuentra la altura inicial del satélite, y en su ordenada el tiempo que tardaría en caer de forma natural un satélite desde esa altura.*

Cada satélite posee un coeficiente balístico propio que depende de su masa y superficie. En la Tabla 6 se recogen algunos ejemplos de satélites reales con sus coeficientes balísticos, y serán estos los que se empleen en la aproximación realizada en este trabajo.

Cabe decir que estas gráficas tan solo sirven para un análisis preliminar, dado que no se tienen en cuenta los eclipses del satélite y se utiliza una radiación Solar media para intervalos largos de tiempo. En el siguiente apartado se representará otro modelo más preciso para representar la influencia de la radiación Solar.

Tabla 6 Características aerodinámicas de algunos satélites. (J. Larson, y otros, 2005)

Satélite	Masa (kg)	Máx. A (m <sup>2</sup> )	Mín. A (m <sup>2</sup> )	CD		BC (kg/m <sup>2</sup> )	
				Máx. A	Mín. A	Máx.	Mín.
Oscar-1	5	0,075	0,0584	4	2	42,8	16,7
Intercosmos-16	550	2,7	3,16	2,67	2,1	82,9	76,3
Viking	277	2,25	0,833	4	2,6	128	30,8
Explorer-11	37	0,18	0,07	2,83	2,6	203	72,6
Explorer-17	188,2	0,621	0,621	2	2	152	152
Space Telescope	11000	112	14,3	3,33	4	192	29,5
OSO-7	634	1,05	0,5	3,67	2,9	437	165
OSO-8	1063	5,99	1,81	3,76	4	147	47,2
Pegasus-3	10500	264	14,5	3,3	4	181	12,1
Landsat-1	891	10,4	1,81	3,4	4	123	25,2
ERS-1	2160	45,1	4	4	4	135	12
LDEF-1	9695	39	14,3	2,67	4	169	93,1
HEAO-2	3150	13,9	4,52	2,83	4	174	80,1
Vanguard-2	9,39	0,2	0,2	2	2	23,5	23,5
SkyLab	76136	462	46,4	3,5	4	410	47,1
Echo-1	75,3	731	731	2	2	0,515	0,515

### 3.4.3 Radiación Solar

Según la física cuántica, la radiación Solar comprende fotones, que son partículas elementales sin masa que viajan a la velocidad de la luz. Aunque la masa de un fotón es cero, su energía y momento no lo son. La energía de un fotón es  $hf$ , donde  $f$  es la frecuencia de su onda electromagnética (en hercios) y  $h$  es la constante de Planck. El impulso de un fotón es  $hf/c$ , su energía se dividida por la velocidad de la luz.

La superficie visible del Sol es la fotosfera, que actúa como un cuerpo negro que emite radiación que abarca la mayor parte del espectro electromagnético, desde las ondas de radio de baja energía en el espectro visible y más allá hasta la luz ultravioleta de alta energía y los rayos X. Según la ley de Stefan-Boltzmann, la intensidad de la potencia radiada es  $\sigma T^4$ , donde  $T$  es la temperatura absoluta del cuerpo negro y  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann,

$$\sigma = 5,670 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$$

La temperatura efectiva de la fotosfera es de 5777 K, de modo que en su superficie la intensidad de energía radiada es:

$$S_0 = 5,670 \times 10^{-8} (5777)^4 = 63,15 \times 10^6 W/m^2$$

La radiación electromagnética sigue la ley del cuadrado inverso. Es decir, si  $R_0$  es el radio de la fotosfera, entonces la intensidad de radiación  $S$  a una distancia  $R$  del centro del Sol es:

$$S = S_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2$$

El radio de la fotosfera es de 696000 km y la distancia media de la Tierra al Sol es de 149610600 km. De ello se deduce que, en la órbita de la Tierra, la intensidad de radiación  $S$ , conocida como la constante Solar, es:

$$S = 63,15 \times 10^6 \left( \frac{696000}{149,6 \times 10^6} \right)^2 = 1367 \text{ W/m}^2 \quad (31)$$

Este es el flujo de energía (la energía por unidad de tiempo por unidad de área) transportada por fotones a través de una superficie normal a la dirección de la radiación. Como se mencionó anteriormente, debemos dividir  $S$  entre la velocidad de la luz para encontrar el flujo de impulso, que es la presión de radiación Solar PSR,

En aras de la simplicidad, se adoptará el modelo de bala de cañón para la radiación Solar, que supone que el satélite es una esfera de radio  $R$ . Luego, la fuerza perturbadora  $F$  en el satélite debido a la presión de radiación  $S/c$  es:

$$\mathbf{F} = -v \frac{S}{c} C_R A_s \hat{\mathbf{u}} \quad (32)$$

Donde  $\hat{\mathbf{u}}$  es el vector unitario que apunta desde el satélite hacia el Sol. El signo negativo muestra que la fuerza de radiación Solar se aleja del Sol.  $A_s$  es el área de absorción del satélite, que es  $\pi r^2$  para el modelo de bala de cañón.  $v$  es la función de sombra, que tiene el valor 0 si el satélite está en la sombra de la Tierra, de lo contrario  $v = 1$ , y  $C_R$  es el coeficiente de la presión de radiación.

Debido a que el Sol está tan lejos de la tierra, el ángulo entre la línea de tierra a Sol y la línea de satélite a Sol es inferior a 0,2 grados, incluso para los satélites GEO. Por lo tanto, será mucho más simple y suficientemente preciso para nuestros propósitos dejar que  $\hat{\mathbf{u}}$  en la ecuación (32) sea el vector unitario que apunta hacia el Sol desde la tierra en lugar del satélite. En este caso  $\hat{\mathbf{u}}$  sigue el movimiento relativo del Sol alrededor de la Tierra y no incluye el movimiento del satélite alrededor de la Tierra.

Si  $m$  es la masa del satélite, entonces la perturbadora aceleración  $\mathbf{p}$  debido a la radiación Solar es  $\mathbf{F}/m$ , o:

$$\mathbf{P} = -v \frac{S C_R A_s}{c m} \hat{\mathbf{u}} \quad (33)$$

La magnitud de la perturbación de la presión de la radiación Solar depende claramente de la relación área-masa del satélite  $A_s/m$ . Las naves espaciales muy grandes con una masa muy baja (como las velas Solares) son las más afectadas por la presión de radiación Solar.

En el Apéndice B puede encontrarse la expresión de la perturbación en función de los parámetros orbitales.

#### 3.4.4 Atracción lunar

Del análisis del problema de los 3 cuerpos, se puede deducir que la perturbación originada por la Luna sobre el satélite es:

$$\mathbf{P} = \mu_m \left( \frac{\mathbf{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} - \frac{\mathbf{r}_m}{r_m^3} \right) \quad (34)$$

Donde  $\mathbf{r}_m$  es la posición de la luna relativa a la tierra,  $\mathbf{r}_{m/s}$  la posición de la luna relativa al satélite y  $\mu_m$  el parámetro gravitacional de la luna.

El problema aquí reside en calcular los vectores de posición, cuyo método de resolución se encuentra en el Apéndice D.

Operando de igual forma, se podría calcular la perturbación originada por cualquier astro celeste.

### 3.5 Maniobras orbitales

Una maniobra orbital significa la definición de la estrategia para modificar algunos parámetros de una órbita de referencia mediante la aplicación de una o más acciones propulsoras. Una parte fundamental del análisis de una maniobra orbital consiste en determinar la variación de velocidad general  $\Delta v$  asociada a ella.

De acuerdo con la ecuación de Tsiolkovsky (35) (Curtis, 2014), cuanto mayor es la  $\Delta v$  necesaria para llevar a cabo la maniobra, mayor es la cantidad de propelente requerido. En este sentido, el cálculo de la  $\Delta v$  es una indicación precisa del costo de la dicha maniobra.

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) \quad (35)$$

La maniobra que se empleará para reducir la órbita del satélite a una cota donde la resistencia aerodinámica sea lo suficiente como para aprovechar la caída natural, será una maniobra bi-impulsiva, y la órbita de transferencia será una elipse de Hohmann.



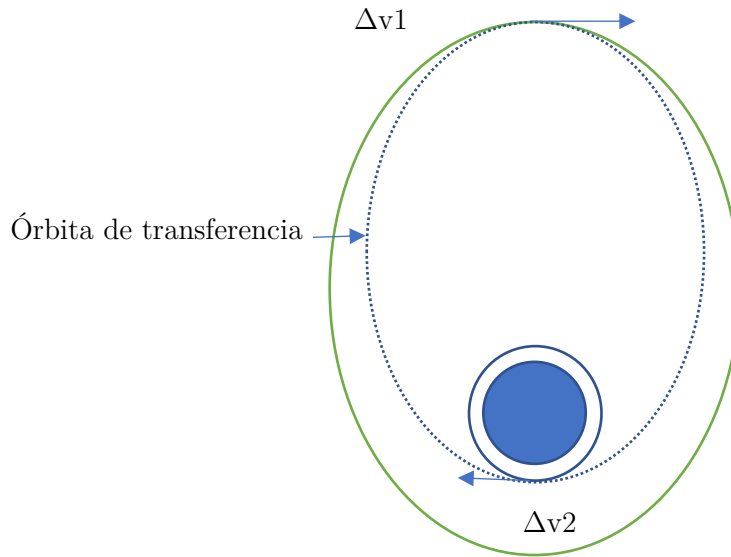


Ilustración 7 Esquema de maniobra orbital. En verde se representa la órbita inicial, y en azul la órbita final.

Una vez alcanzada la órbita de estacionamiento, no serán necesarios más impulsos hasta la fase final de reentrada, si es que es necesaria una reentrada controlada.

### 3.6 Reentrada

Una forma de acelerar la descomposición orbital es reducir la altitud del perigeo para que la resistencia atmosférica haga que la nave espacial ingrese a la atmósfera de la Tierra más rápidamente. Sin embargo, en tales casos, no se puede garantizar que la huella de impacto de los escombros sobrevivientes evite las masas de tierra habitadas. La entrada controlada normalmente se logra realizando un impulso orbital para hacer que la nave espacial ingrese a la atmósfera en un ángulo de trayectoria de vuelo más pronunciado. Finalmente, el vehículo ingresará a la atmósfera a una latitud y longitud más precisas, y la huella de escombros se puede colocar sobre una región deshabitada, generalmente ubicada en el océano.

Tanto las naves espaciales en caída natural, como los de reentrada controlada generalmente se rompen en altitudes entre 84-72 km debido a las fuerzas aerodinámicas que hacen que se excedan las cargas estructurales permitidas. La altitud de ruptura nominal para las naves espaciales se considera 78 km. Los satélites grandes, robustos y densos generalmente se rompen en altitudes más bajas. Las matrices Solares con frecuencia rompen el cuerpo principal de la nave espacial alrededor de 90-95 km debido a las fuerzas aerodinámicas que hacen que se exceda el momento de flexión permitido en el punto de unión de la matriz-nave espacial.

Para calcular una configuración óptima para la reentrada es necesario conocer la composición del satélite para poder determinar si este se desintegrará por completo en función de la temperatura que alcance debida a la resistencia aerodinámica. No obstante, el ratio de calor que experimentará la aeronave en la reentrada es función de la velocidad

de la misma y del ángulo de su trayectoria, alcanzándose mayores ratios a velocidades y ángulos más elevados.

### 3.7 Importancia de los propelentes verdes

Los propulsores utilizados en los programas espaciales plantean tres preocupaciones ambientales:

- Impactos en el suelo: Contaminación del agua subterránea, explosiones debido a un mal funcionamiento o manipulación del propelente...
- Impactos atmosféricos: generalmente causados por la interacción del escape del propulsor con la atmósfera.
- Impactos biológicos: generados por la corrosividad y toxicidad de los propelentes.

La utilización perpetuada de propulsores altamente tóxicos que engendran contaminantes ambientales mantiene altos los costos del programa, pero el costo de evolucionar y ser reemplazos por propelentes verdes adecuados también tiende a ser alto. Esto habitualmente se ha ralentizado incluso cuando un propulsor verde proporciona beneficios de rendimiento latentes. Además, el término "Propelente Verde" a menudo se malinterpreta como totalmente amigable con el medio ambiente.

Todos los propulsores afectan el medio ambiente de una forma u otra. Por ejemplo, todos los vehículos de lanzamiento producen un sistema de escape que incluye dióxido de carbono, hollín, vapor de agua, sulfatos, óxidos de nitrógeno y cloro inorgánico. Todos estos compuestos tienen un impacto ambiental de una forma u otra. Teniendo en cuenta estos hechos, un propulsor verde se considera más aceptablemente como uno que busca minimizar o eliminar un impacto ambiental agudo en una o más de las tres áreas.

Pese a las dificultades que contempla sintetizar un propelente verde funcional que tenga unas prestaciones óptimas para la propulsión espacial, se está invirtiendo mucho esfuerzo y dinero en su desarrollo.

El factor más importante para un propelente, desde el punto de vista de la propulsión espacial, es su impulso específico ( $I_{sp}$ ), ya que es el parámetro que nos determinará el peso total de combustible que se necesitará para realizar la maniobra.

Tabla 7 Impulsos específicos típicos de algunos propelentes

Propelente	$I_{sp}$ (s)
Gas frío	50
Peróxido de hidrógeno	162
Hidracina	230
Peróxido de altas prestaciones	265
Propelente Sólido	290
Ácido nítrico/Monometilhidracina	310
Oxígeno líquido/Hidrógeno líquido	455

### 3.8 Algoritmo del código para el cálculo de las pequeñas perturbaciones

A continuación, se describirá el algoritmo empleado para la resolución de las ecuaciones de perturbación de Gauss (9).

1. En el instante  $t = t_0$ , se calculan los seis elementos orbitales clásicos.
2. Se calcula la aceleración de perturbación causada por todas las fuerzas perturbativas en cada una de sus componentes ( $p_r, p_t, p_n$ ) para el instante  $t_0$ .
3. Se calculan las 6 derivadas temporales de los elementos orbitales (ecuaciones (9)).
4. Se integran las ecuaciones del punto 3 con un paso temporal  $\Delta t$  suficientemente pequeño.
5. Se suman las variaciones obtenidas en el punto 4 a los correspondientes valores iniciales del punto 1.
6. Con los nuevos valores de los elementos orbitales se calculan los vectores de estado  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$ .
7. Se vuelve al punto 2 y se repite el proceso hasta alcanzar el tiempo final de propagación  $t = t_f$ .

El código para la resolución de las ecuaciones se ha realizado con el *Software* MATLAB, que puede encontrarse en el apéndice A.

A continuación, se muestra el esquema, en diagrama de bloques, del código desarrollado.

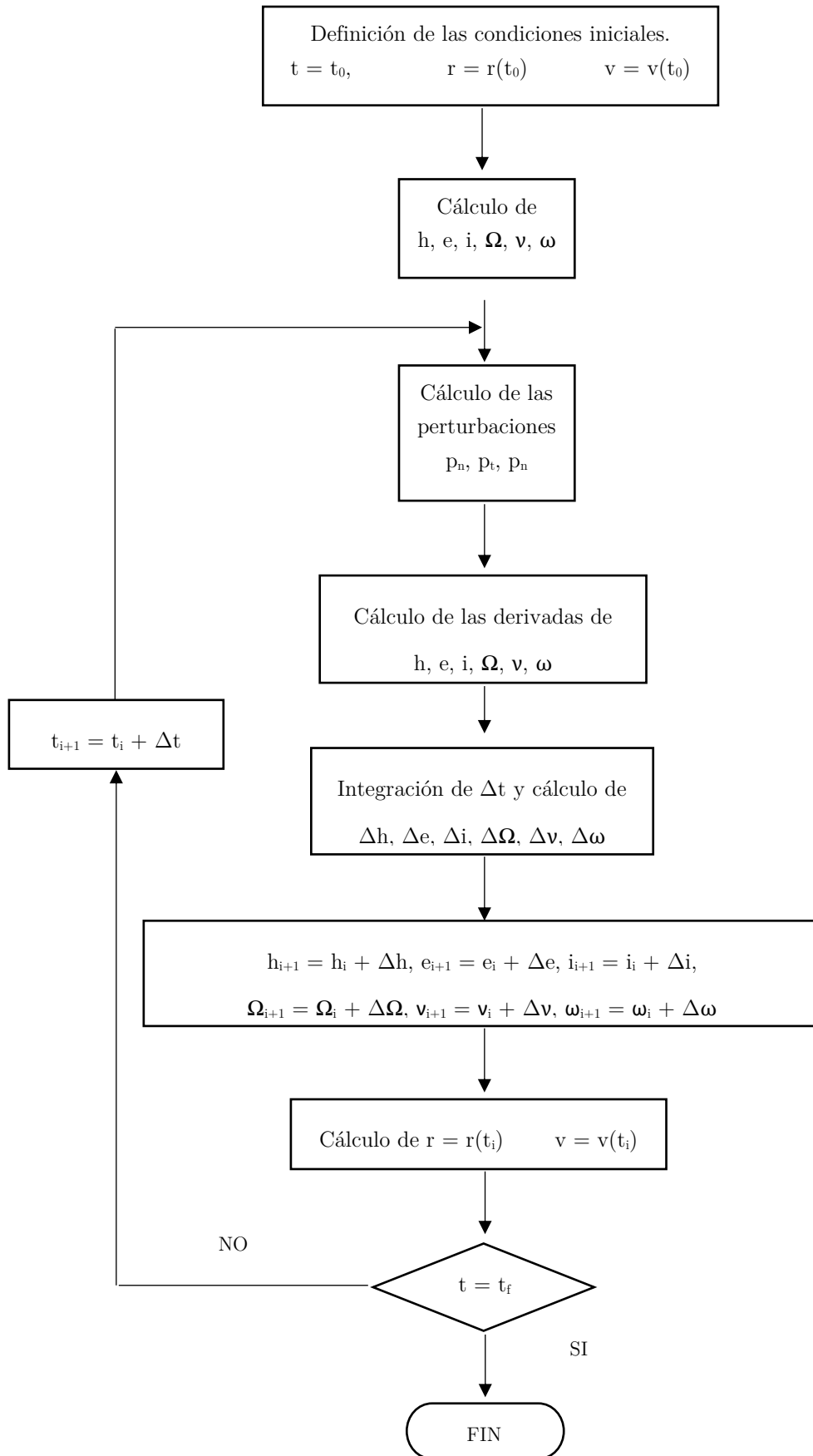


Ilustración 8 Diagrama de bloques para el cálculo de los vectores de estado por medio de las ecuaciones de perturbación de Gauss

## 4 Cálculos realizados

Como se ha comentado con anterioridad, para que el propulsor de *DeOrbit* sea lo más pequeño y económico posible se aprovechará al máximo la caída natural del satélite. Es por esto por lo que la primera maniobra a realizar será desde la altura de la órbita de trabajo del satélite a una en la que decaiga de forma natural antes de 25 años como marca la norma. El primer caso que se analizará será un satélite ubicado en el rango 2 de la Tabla 1, cuyos datos iniciales son los siguientes:

Tabla 8 Datos iniciales del caso

Datos iniciales Caso		
Fecha inicio propagación	27/7/2019 00:00:00.000 UTC	-
Excentricidad	0,00181	-
Distancia Apogeo	7480	km
Distancia Perigeo	7452,97132	km
Semieje mayor	7466,48566	km
Semilado Recto	7466,4612	km
Coefficiente balístico	0,0117	m <sup>2</sup> /kg
Inclinación	65,72	°
Anomalía verdadera	180	°
Periodo	6420,74725	s

El resto de los parámetros han sido obviados debido a que su papel no es de vital importancia en el cálculo inicial.

El primer paso es comprobar si dicho satélite, situado a una altura donde la resistencia aerodinámica predomina sobre las demás perturbaciones, decaería de forma natural. Para ello se calculará el efecto que tendrá la resistencia aerodinámica en el periodo de la órbita.

Se puede usar esta fuerza de arrastre en la segunda ley de Newton junto con consideraciones de energía de una órbita circular para derivar una expresión para el cambio en el radio orbital y el período del satélite con el tiempo (THE AUSTRALIAN SPACE WEATHER AGENCY, 1999).

Para una órbita kepleriana se obtiene la siguiente relación entre el período  $T$  y el semieje mayor  $a$ :

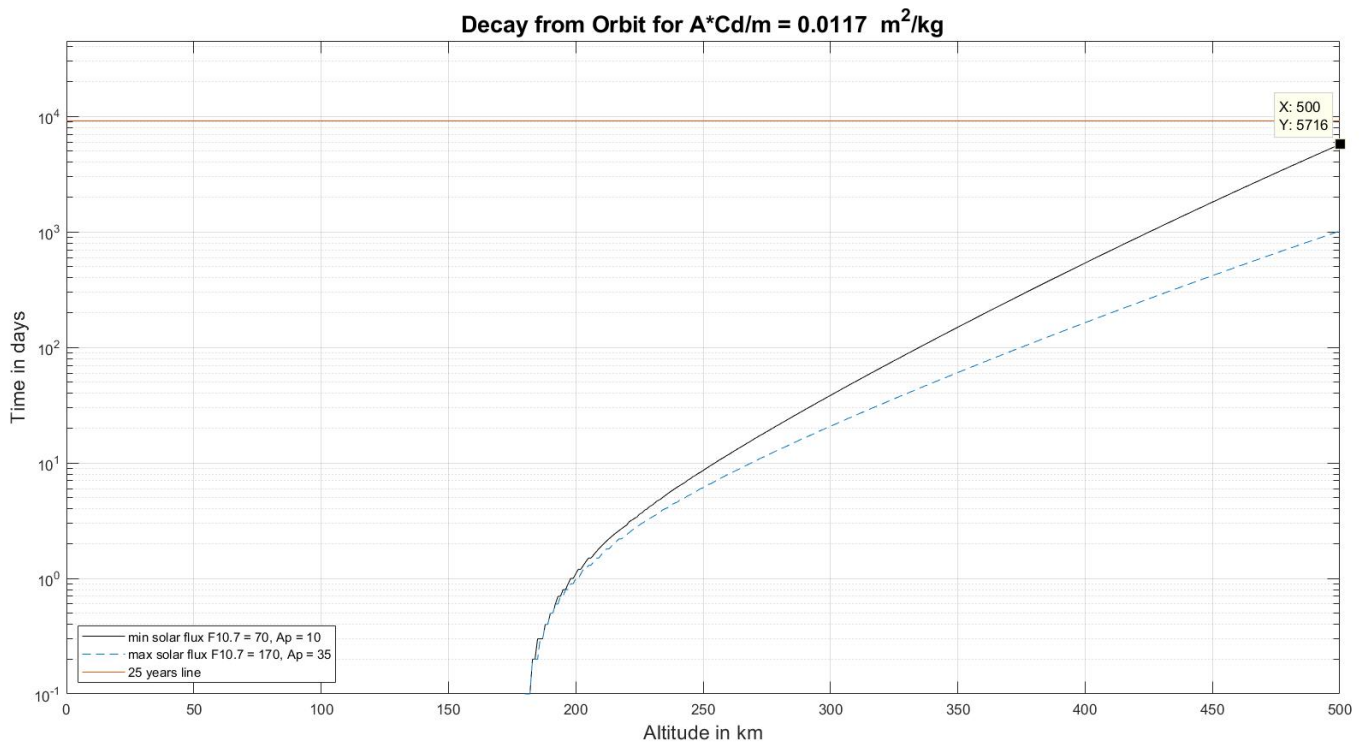
$$T^2 \mu = 4\pi^2 a^3 \quad (36)$$

La reducción en el período debido al arrastre atmosférico viene dada por:

$$\frac{dT}{dt} = -3\pi\alpha\rho BC \quad (37)$$

Las dos últimas ecuaciones, junto con las ecuaciones que modelan la densidad atmosférica, pueden iterarse a partir de la altitud y el tiempo de inicio del satélite. En otras palabras, el satélite vuela alrededor de su órbita utilizando valores pasados o pronósticos apropiados para las variables de entorno espacial (F10.7 y Ap). Se supone que la reentrada ocurre cuando el satélite ha descendido a una altitud de 180 km. En todos los satélites, excepto los más pesados (aquellos con una relación masa/área que supera los 100 kilogramos por metro cuadrado), la vida útil real desde una altitud de menos de 180 km es de Solo unas pocas horas (THE AUSTRALIAN SPACE WEATHER AGENCY, 1999).

En la siguiente gráfica se observa el tiempo que tardaría en caer el satélite con las características descritas en función de la altura a la que se sitúe con la primera maniobra.



*Ilustración 9 Aproximación inicial de la caída natural del satélite.*

Como puede observarse, este satélite situado en una órbita de 500 km, y en unas condiciones de radiación Solar mínimas (el peor caso posible) tardaría en caer entre unos 15 y 16 años (5716 días = 15,66 años), menos de lo que dicta la norma, por lo que la primera maniobra será el paso de una órbita de 700 km a una órbita circular a 500 km.

La maniobra se llevará acabo como se representa en la Ilustración 7, dado que la velocidad orbital es menor en el apogeo, se elegirá este punto para realizar el primer impulso y situar

al satélite en una órbita de transferencia de Hohmann para reducir la altura del satélite. Llegados al perigeo de la órbita de transferencia se aplicará otro impulso para situar al satélite en una órbita circular. Las ecuaciones que calculan la  $\Delta v$  para la maniobra son las siguiente:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{rp} - \frac{\mu}{a}} - \sqrt{\frac{2\mu}{raH} - \frac{\mu}{aH}} \quad (38)$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{rpH} - \frac{\mu}{aH}} - \sqrt{\frac{\mu}{rpH}} \quad (39)$$

$$\Delta v = \Delta v_2 + \Delta v_1 = 0,0475 + 0,0540 = 0,1015 \quad (40)$$

Donde  $rp$  es la altura del perigeo de la órbita inicial,  $a$  es el semilado mayor de la órbita inicial y  $raH$ ,  $rpH$  y  $aH$  son la altura del apogeo, altura del perigeo y semilado mayor de la órbita de transferencia de Hohmann respectivamente que se calculan con las cotas inicial y final.

La  $\Delta v$  necesaria para la maniobra bi-impulsiva será de 0,1015 km/s para este caso, lo que se puede traducir a kilos de combustible gracias a la ecuación de Tsiolkousky (35). El peso total de combustible ( $m_f$ ) necesario dependerá del tipo de propelente que se emplee y de su impulso específico ( $I_{SP}$ ), así como del peso total del satélite ( $m_0$ ). A continuación, se muestra una gráfica que representa la fracción de combustible  $m_f/m_0$  en función del impulso específico.

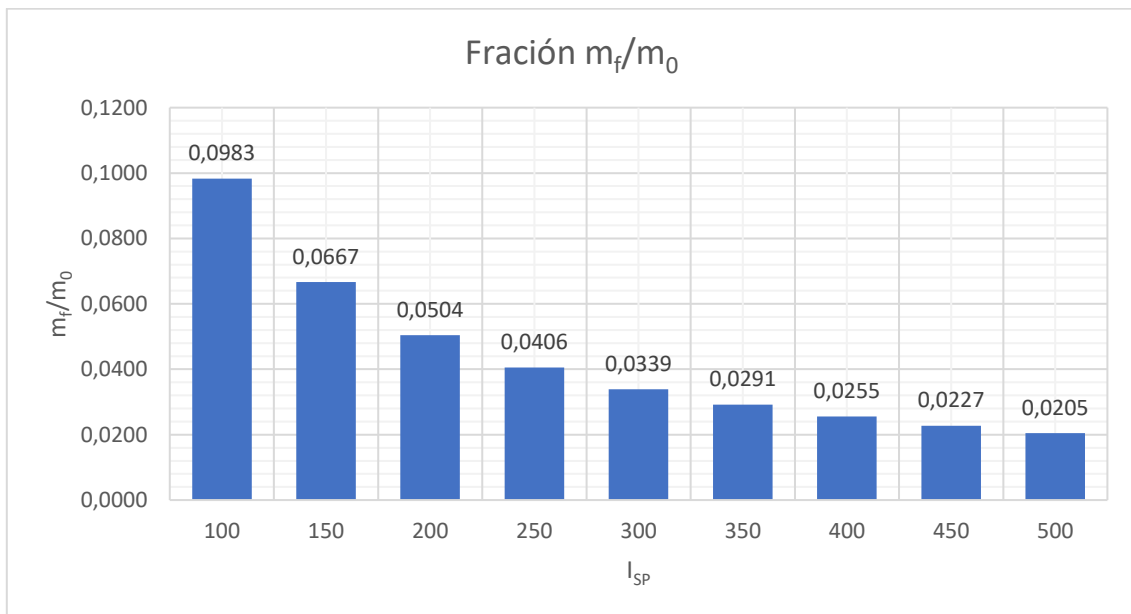


Ilustración 10 Fracción  $m_f/m_0$  en función del impulso específico del combustible.

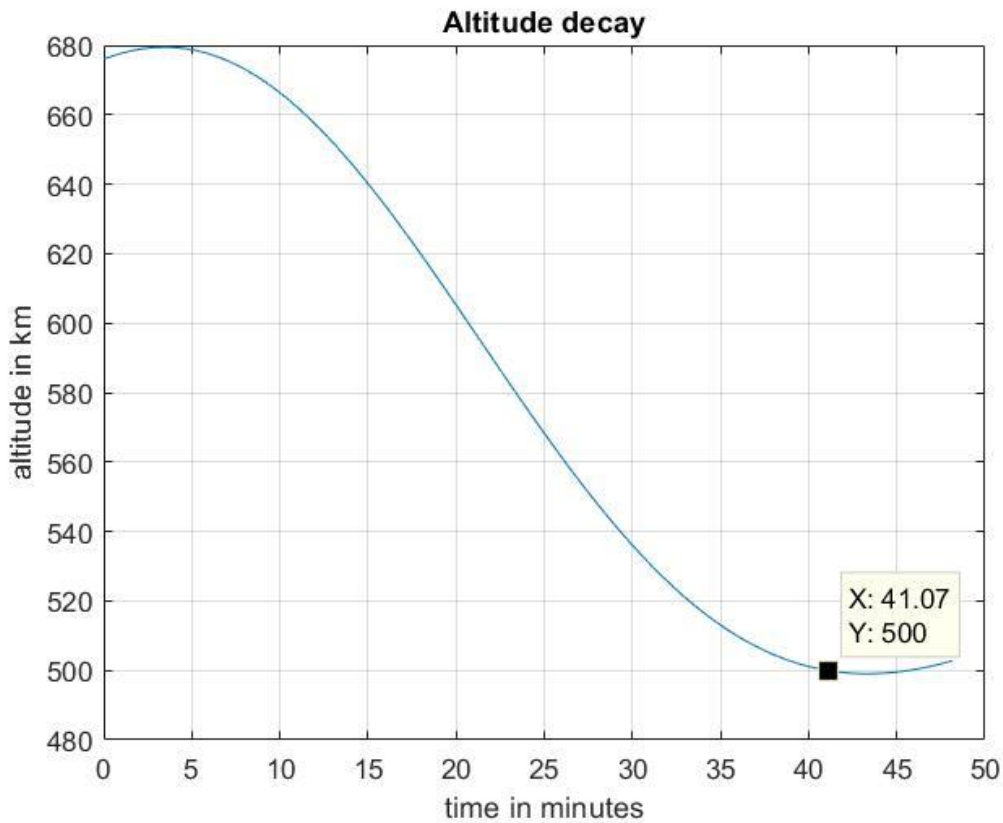
Se supondrá que la maniobra es impulsiva, por lo que la propulsión será instantánea.

La órbita de transferencia sufrirá pequeñas perturbaciones. Estas pueden ser medidas gracias al código desarrollado, para así conocer el momento exacto en el que efectuar el segundo impulso para circularizar la órbita.

Sin contar las perturbaciones, el tiempo de vuelo de la órbita de transferencia sería:

$$T_{vuelo} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2889.30 \text{ s} \sim 48.15 \text{ min}$$

A continuación, se muestran las perturbaciones sufridas en la órbita de transferencia en los parámetros orbitales fundamentales, su cambio de altitud y la traza sobre el plano terrestre.

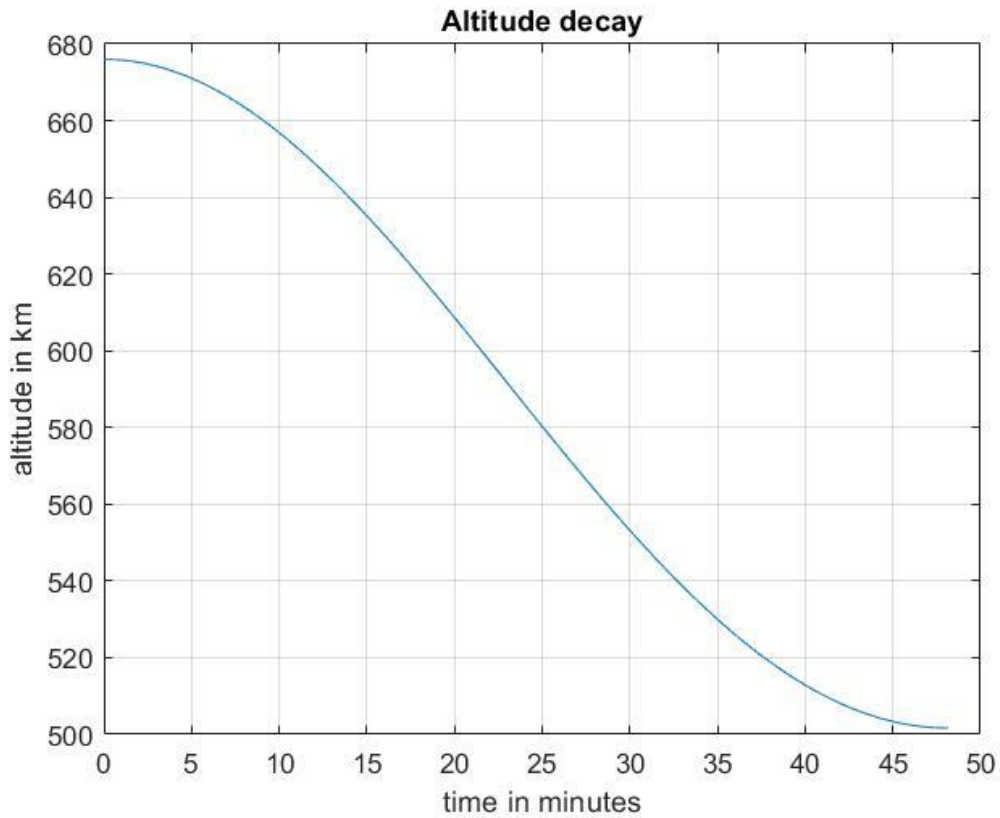


*Ilustración 11 Evolución de la altura en la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones*

Como puede observarse en Ilustración 11 según el modelo de pequeñas perturbaciones, el satélite alcanza la cota de 500 km antes de lo previsto, por lo que la segunda maniobra deberá realizarse pasados 41 minutos desde la primera maniobra.

En la Ilustración 12 se muestra la trayectoria de la órbita de transferencia si se suprimen las perturbaciones, donde se observa que el satélite alcanzará la cota de 500 km en el tiempo estimado.





*Ilustración 12 Evolución de la altura de la órbita de transferencia según modelo ideal*

A continuación, se muestra cómo afectan las perturbaciones a los parámetros orbitales de la órbita de transferencia. Sin tener en cuenta las perturbaciones, los parámetros orbitales deberían de mostrarse constantes en las gráficas sucesivas (salvo la anomalía verdadera que es un ángulo que determina la posición del satélite comprendido entre 0 y 360 grados, aunque también está afectado por las perturbaciones). No obstante, el modelo de pequeñas perturbaciones desarrollado permite observar la variación de estos parámetros a lo largo del tiempo, así como la posición del satélite sobre la superficie terrestre en coordenadas de latitud y longitud, Ilustración 19.

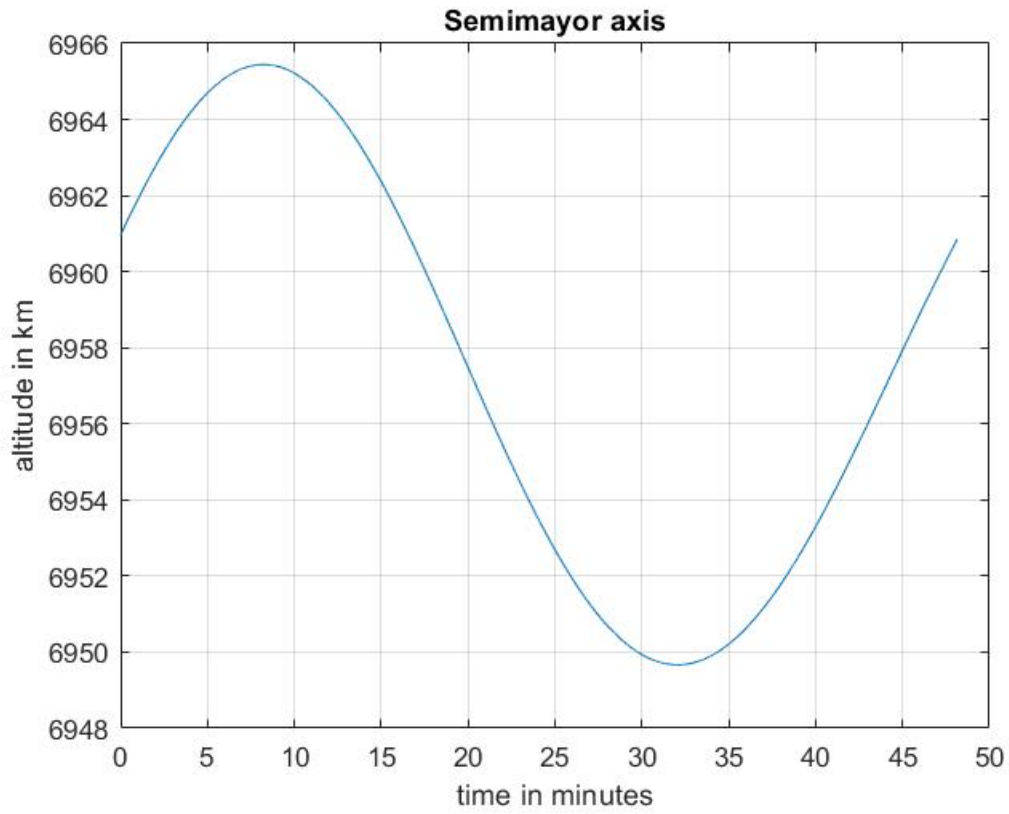


Ilustración 13 Evolución del semieje mayor de la órbita elíptica según modelo de pequeñas perturbaciones

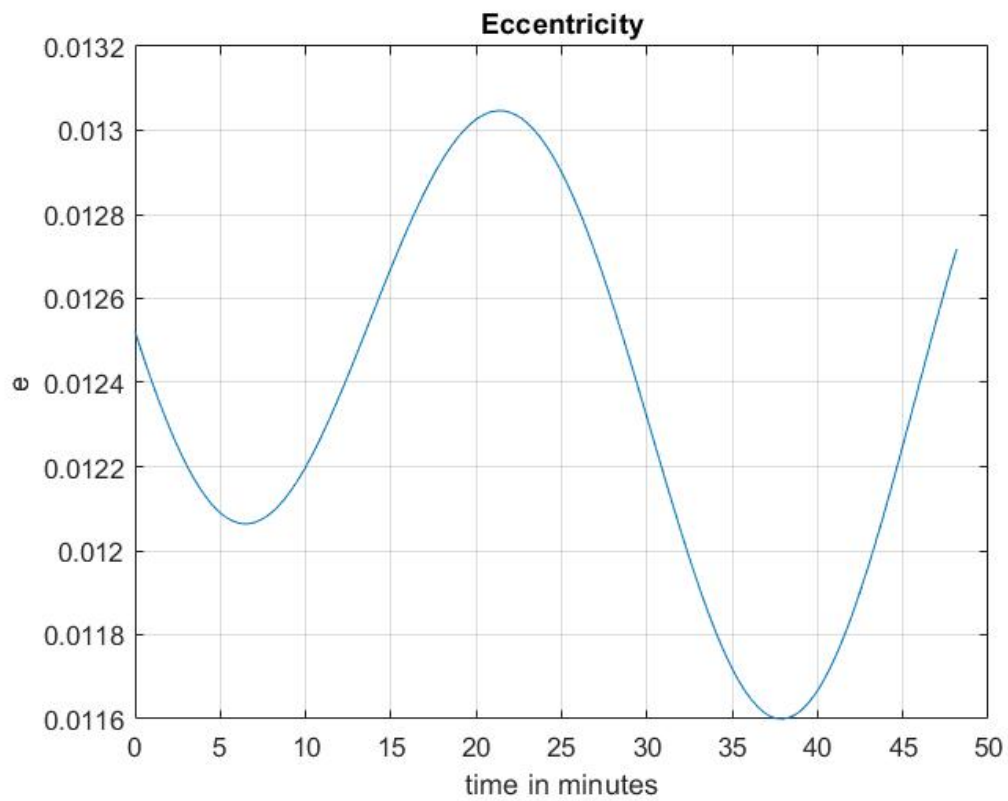
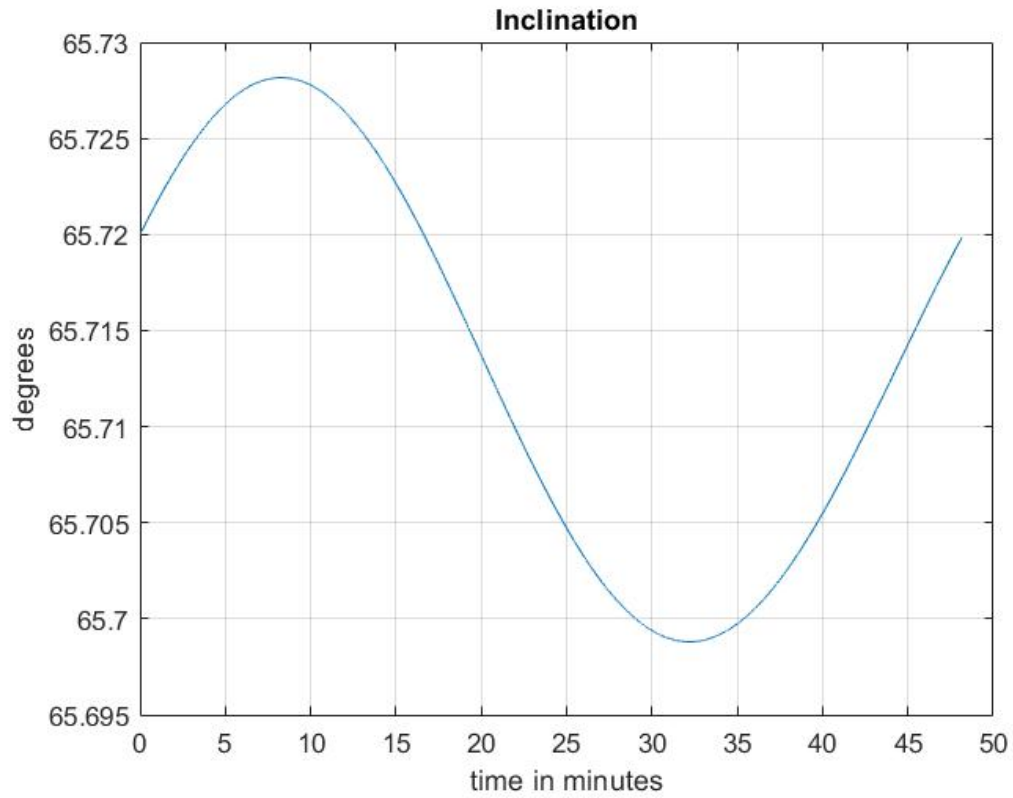
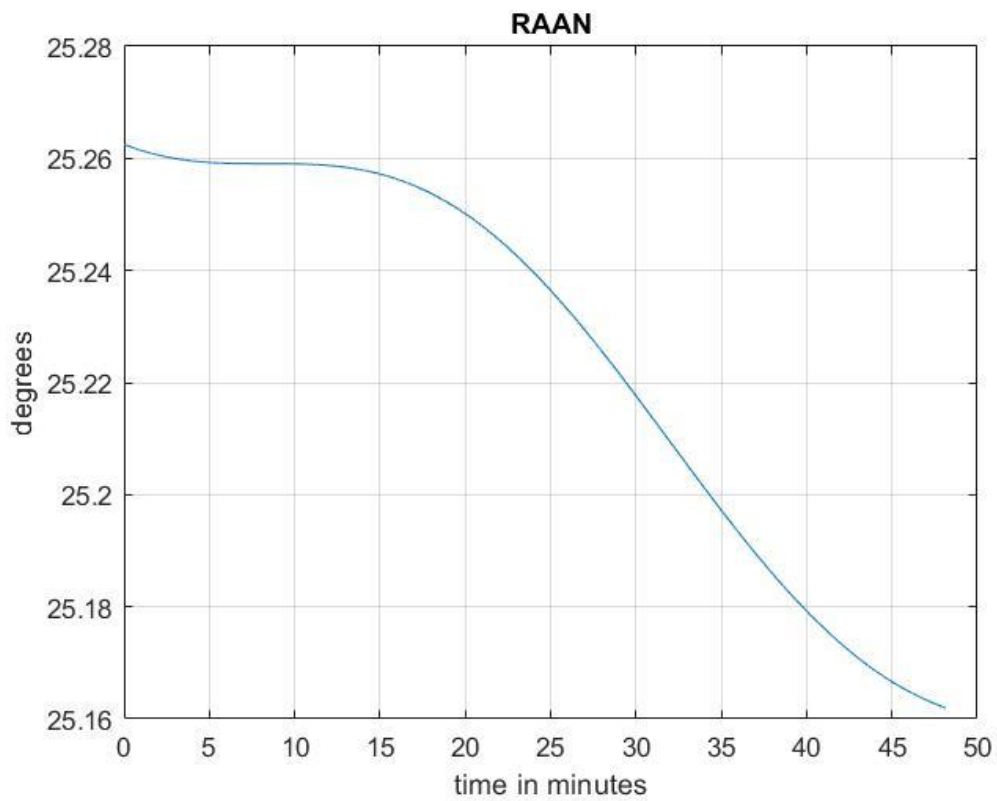


Ilustración 14 Evolución de la excentricidad de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones



*Ilustración 15 Evolución de la inclinación de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones*



*Ilustración 16 Evolución de la ascensión recta del nodo ascendente de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones*

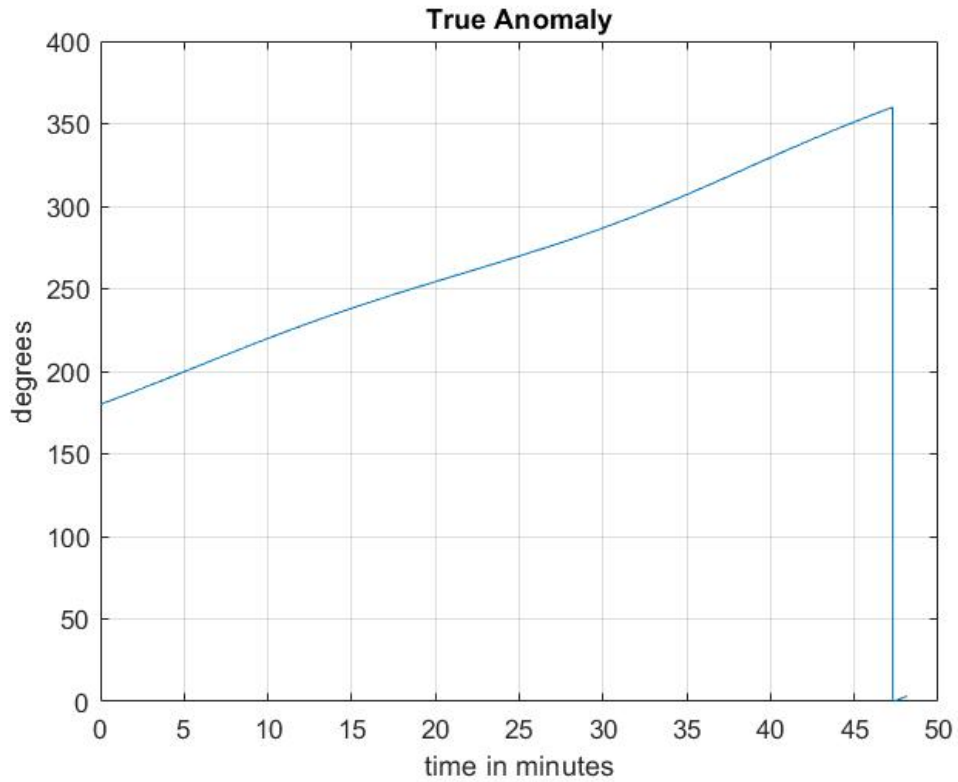


Ilustración 17 Evolución de la anomalía verdadera de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones

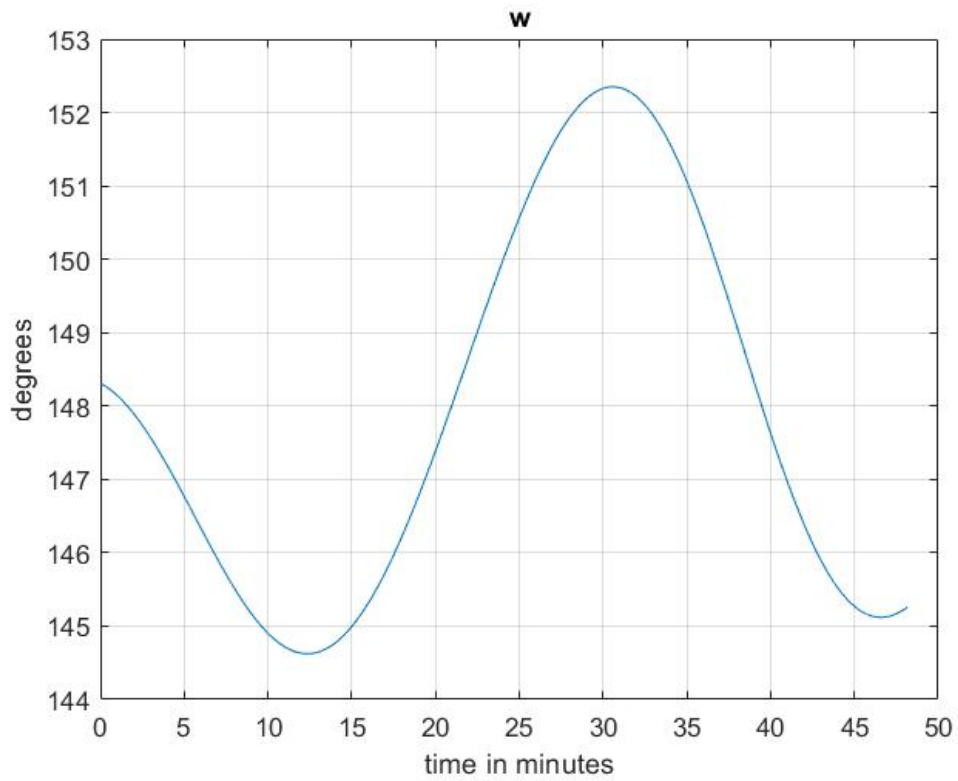


Ilustración 18 Evolución del argumento del perigeo de la órbita de transferencia según modelo de pequeñas perturbaciones

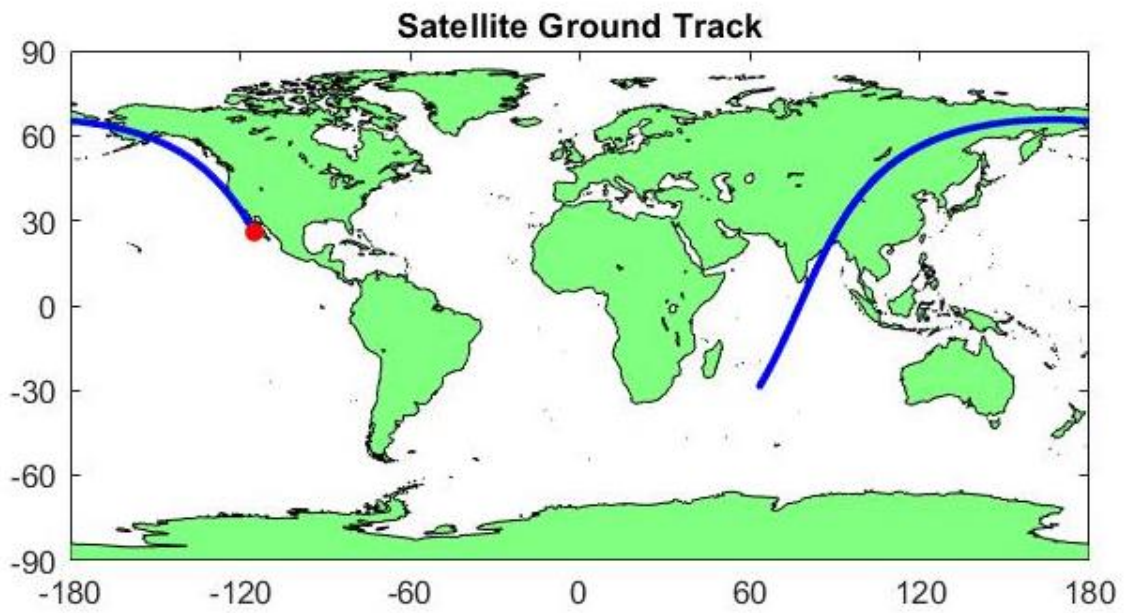


Ilustración 19 Traza del satélite a lo largo de la órbita de transferencia. El punto rojo indica la posición final del satélite

La anterior simulación se ha realizado el día 27 de julio de 2019 a las 00:00:00.000 UTC, y a continuación se muestran los datos obtenidos con el *Software* GMAT desarrollado por la NASA para simular este tipo de misiones:

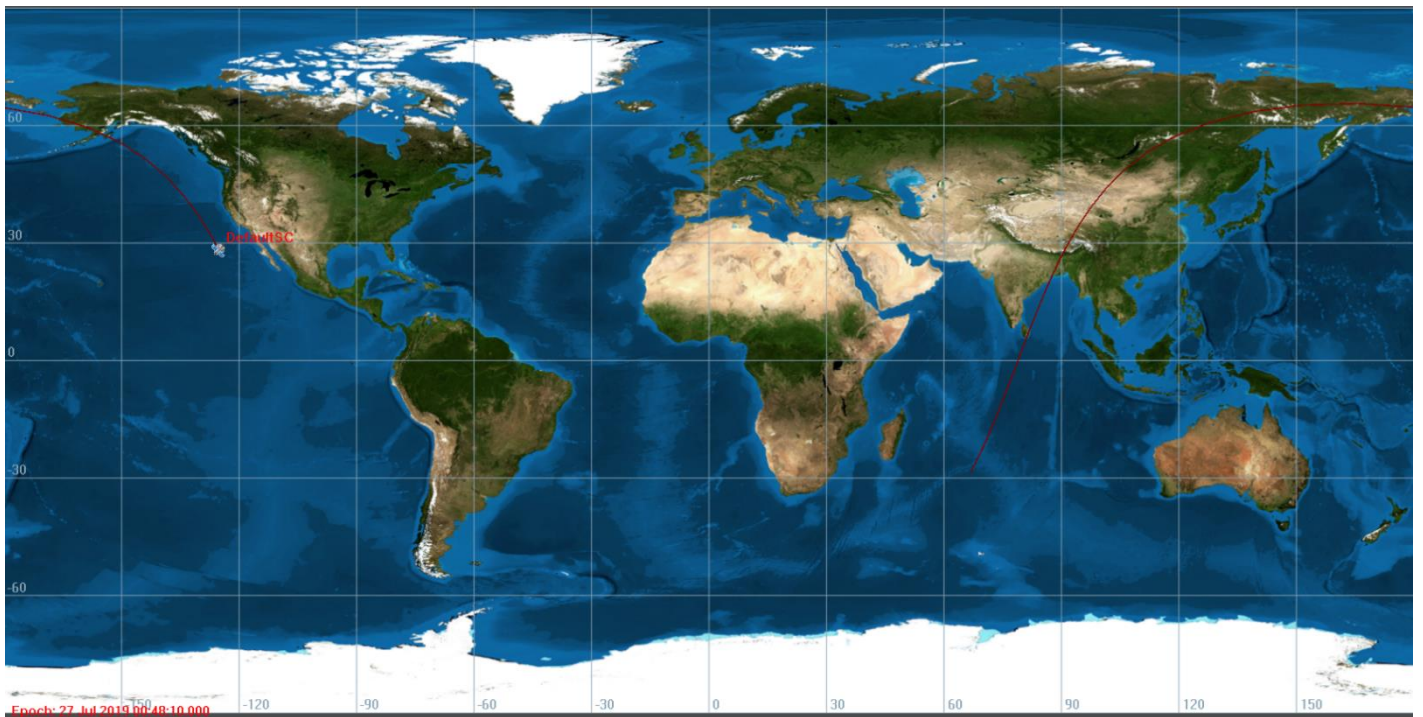


Ilustración 20 Traza del satélite a lo largo de la órbita de transferencia obtenido con el software GMAT

Llegados a este punto, el satélite estará situado en una órbita en la que decaerá de forma natural en un plazo inferior a 25 años.

Cabe decir que el código desarrollado es capaz de simular intervalos grandes de tiempo, pero como ocurre con otros *Softwares* de propagación, este cada vez será menos preciso debido a los errores acumulativos, y a que las condiciones atmosféricas y Solares cambian con regularidad. Es por esto por lo que todos los satélites están siendo controlados periódicamente. Algunos satélites, debido al tipo órbita en la que se encuentran, no experimentarán grandes variaciones en sus órbitas por lo que son controlados diariamente o cada varios días, mientras que otros, como por ejemplo la estación espacial internacional (ISS) es controlada constantemente.

En el peor de los casos de la Ilustración 9, se observa que alrededor de los 15 años y medio el satélite se encontrará a una cota de 180 km, altura a la que se estima la reentrada.

Para la maniobra de reentrada se iniciará la simulación a una cota de 180 km, y se propagará hasta que el satélite alcance los 100 km de altura, momento en el que el satélite empieza a desintegrarse. En este caso, se estaría analizando una reentrada no controlada.

Según la simulación, la caída desde los 180 metros tendrá una duración de 3,1 días.

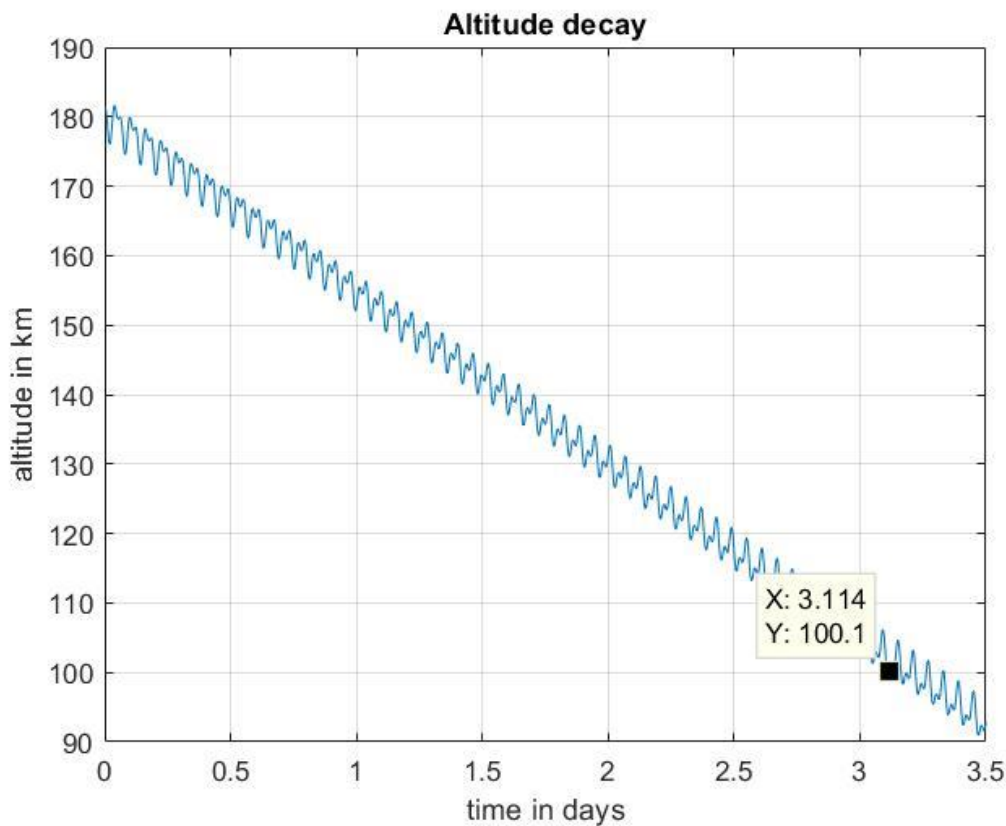


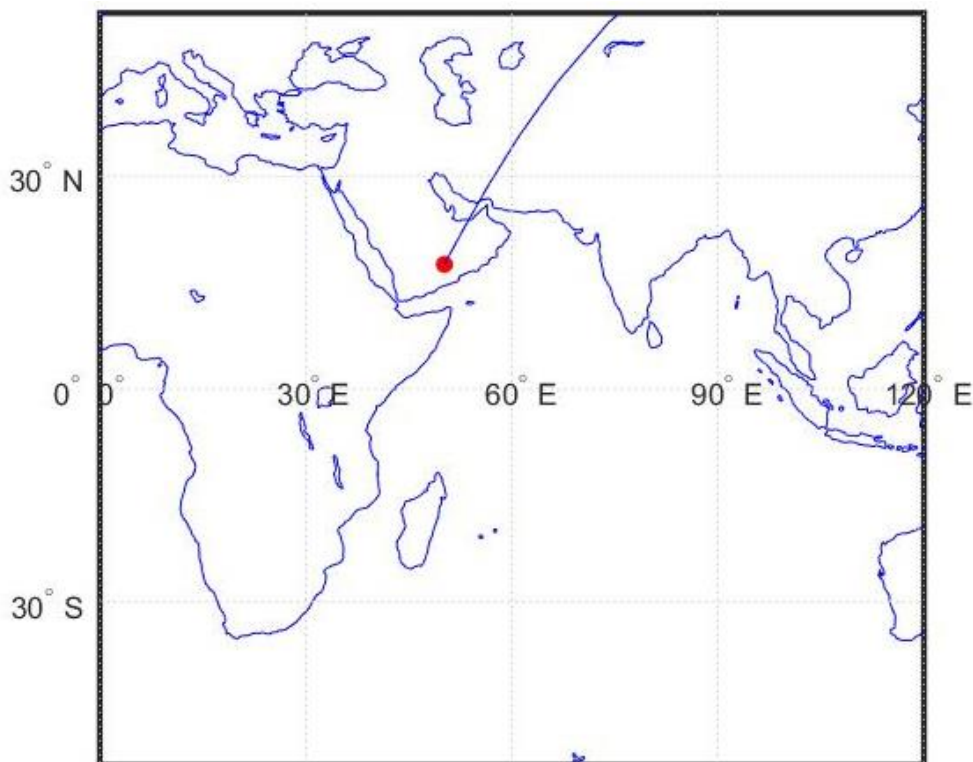
Ilustración 21 Trayectoria del satélite de los 180 a los 100 km

De la simulación se obtienen los datos que definen la órbita del satélite a los 100 km. Estos son representados en la siguiente tabla:

*Tabla 9 Datos finales del satélite*

Datos finales		
Fecha	30/12/2034	-
	02:44:9.6 UTC	-
Altitud	100	km
Excentricidad	0.0013	-
Anomalía verdadera	168,82	°
RAAN	13,43	°
Argumento del perigeo	83,76	°
Semieje mayor	6463	km
Inclinación	65,69	°

Ilustración 22, se muestra la posición en la que se encuentra el satélite:



*Ilustración 22 Posición del satélite a los 100 km*

Al tratarse de una reentrada no controlada, es preciso que ninguna de las partes del satélite pueda sobrevivir a la reentrada, y si alguna lo consiguiera, esta sería lo suficientemente pequeña como para no dañar a ninguna persona en tierra.

A continuación, se analizará el caso de una reentrada controlada. En este caso se elegirá el lugar de impacto aproximado, por lo que se realizará un último impulso en el que se variará

el ángulo de trayectoria del satélite, situándolo en una órbita que corte directamente la Tierra.

En este caso se comenzará la simulación a 180 km de altura, y se calculará el tiempo que ha de suceder para situar el satélite sobre el pacífico sur. Según la simulación, pasadas 7,32 horas el satélite se encontrará en una buena posición para la maniobra final. La posición del satélite en ese instante se encuentra en Ilustración 23, y los datos orbitales son los expuestos en la Tabla 10:

Tabla 10 Datos instante maniobra final

Datos maniobra final		
Fecha	27/12/2034	-
	07:19:22.24 UTC	-
Altitud	173.9	km
Excentricidad	$6,0952 \times 10^{-5}$	-
Anomalía verdadera	253,18	°
RAAN	54,85	°
Argumento del perigeo	51,46	°
Semieje mayor	6546	km
Inclinación	65,71	°
Ángulo de trayectoria <sup>5</sup>	0,0035	°

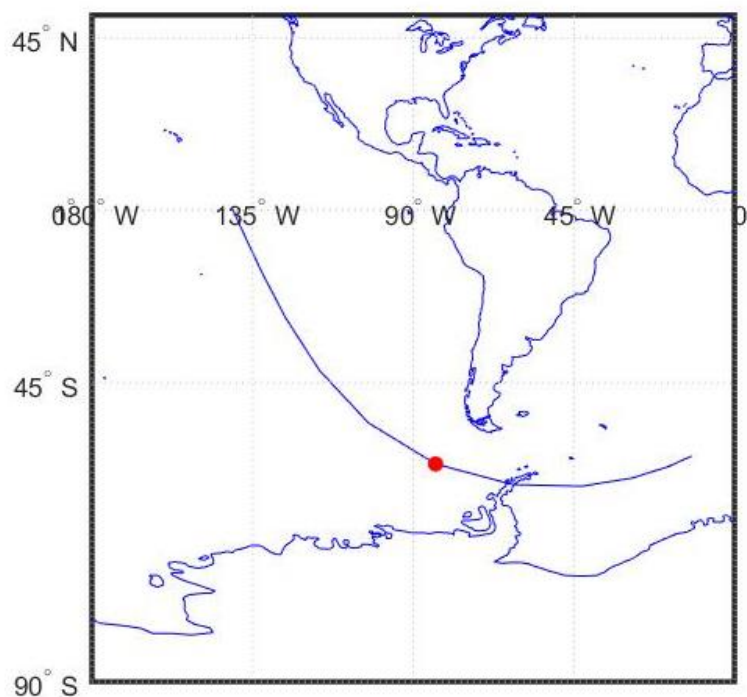


Ilustración 23 Posición del satélite (punto rojo) y trayectoria en el instante de la maniobra final

<sup>5</sup> El ángulo de la trayectoria se define como  $\gamma = \arctan\left(\frac{e \sin v}{1 + e \cos v}\right)$



La última maniobra consistirá en realizar un impulso que cambie las características de la órbita, buscando maximizar el ángulo de la trayectoria para aumentar la deceleración y el maximizar el calor generado, lo que aumentará la probabilidad de que no llegue ningún fragmento a tierra.

A continuación, se muestra la Ilustración 24 del coste (reflejado en  $\Delta V$  del impulso) que supondría variar la órbita y el ángulo de la trayectoria:

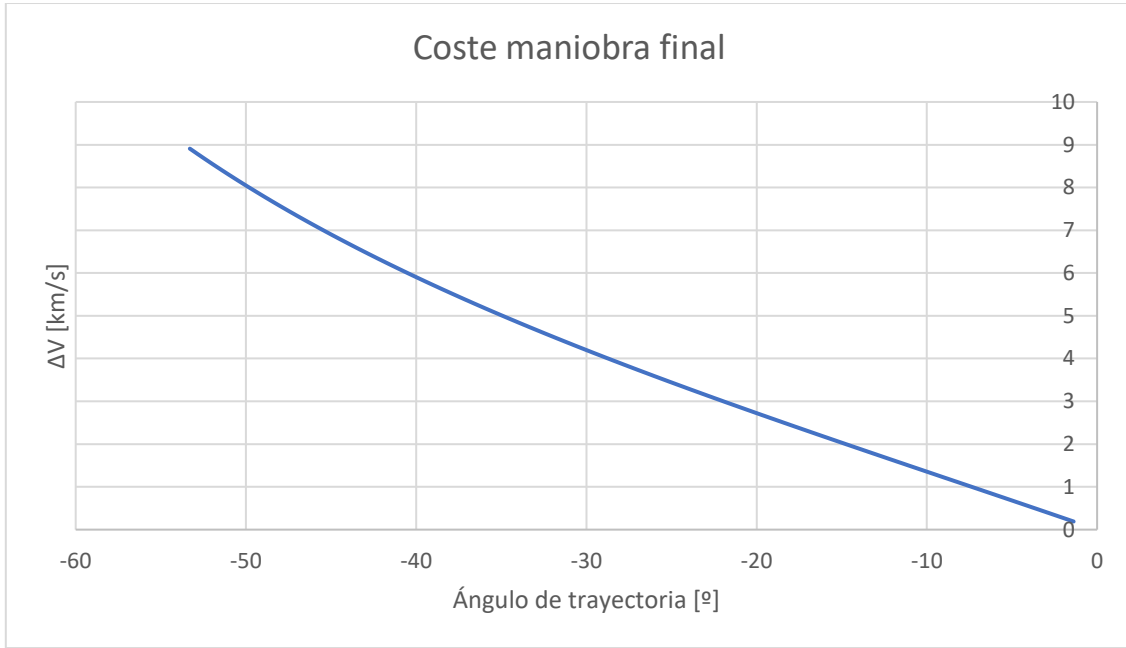


Ilustración 24 Coste de la maniobra final en términos de  $\Delta V$

Como puede observarse en la Ilustración 24, a mayor incremento del ángulo de la trayectoria, mayor coste en términos de  $\Delta V$ .

El  $\Delta V$  se ha calculado aplicando la siguiente ecuación (Curtis, 2014):

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \Delta\gamma} \quad (41)$$

Donde  $V_1$  es la velocidad del satélite en el punto 1 de la órbita inicial,  $V_2$  es la velocidad del satélite en el punto 1 de la órbita final y  $\Delta\gamma$  es la diferencia de los ángulos de trayectoria de ambas órbitas en el punto 1 ( $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ ).

El problema reside en determinar cuál sería el ángulo de trayectoria necesario para la completa destrucción del satélite. Para ello es necesario conocer los materiales de los que se compone el satélite, así como realizar una estimación de en cuantos fragmentos se podrá dividir y de que tamaño.

La destrucción del satélite en la atmósfera viene dada por la presión que ésta ejerce sobre las diferentes partes del satélite y el calor que se genera. Si el calor generado supera el calor de ablación del material, éste se descompondrá en la atmósfera.

La determinación del calor aerodinámico no es trivial, y depende del modelo atmosférico que se utilice. La mayoría de los modelos provienen de datos empíricos, de los que se puede deducir que los fragmentos más peligrosos son los que sobreviven pasados los 75-80 km (ESA, 2002).

La determinación del calor aerodinámico se escapa al alcance de este trabajo, por lo que se ha partido del análisis expuesto en (FAA), donde se recoge la Ilustración 25.

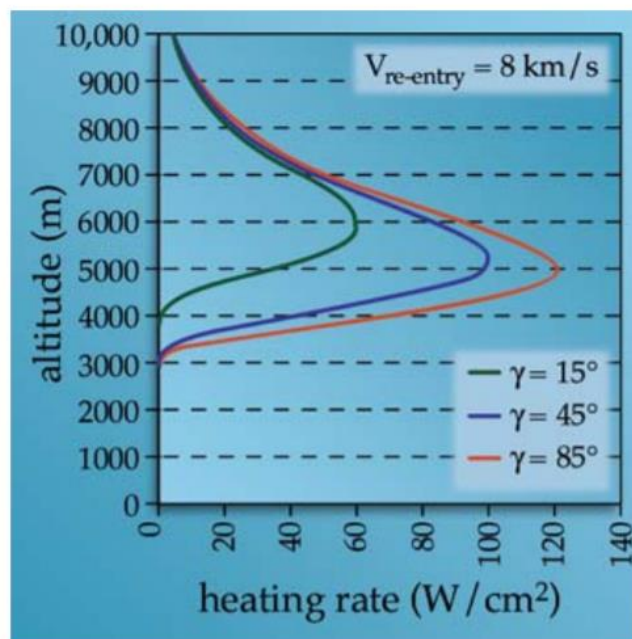


Ilustración 25 Transferencia de calor en función del ángulo de la trayectoria

De la Ilustración 25 se pueden sacar dos conclusiones:

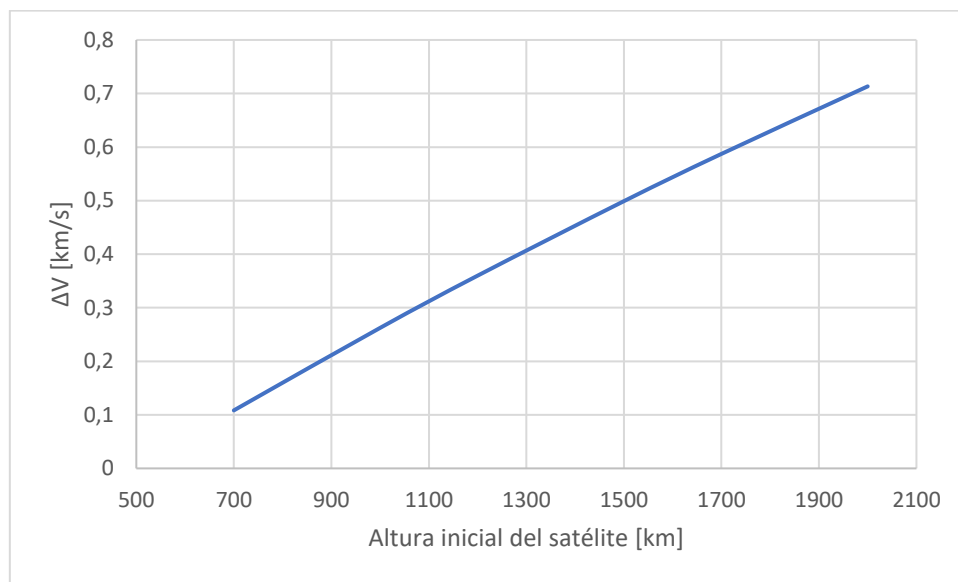
- Los ángulos de reentrada pronunciados causan altas tasas de calentamiento máximas, pero por un corto periodo de tiempo.
- El reingreso suave provoca bajas tasas de calentamiento máximas, pero durante mucho tiempo.

Una reentrada abrupta provoca una velocidad de calentamiento muy alta pero un tiempo breve, por lo que el efecto general en el vehículo puede ser pequeño. Por otro lado, las reentradas poco profundas conducen a tasas de calentamiento mucho más bajas. Sin embargo, debido a que el calentamiento continúa por más tiempo, es más probable que el vehículo "absorba" el calor y se deteriore. Para encontrar un ángulo de trayectoria óptimo es preciso determinar el calor atmosférico generado, y relacionarlo con la temperatura de ablación de los materiales que componen el satélite.

## 4.1 Cálculos realizados para un caso general

En el apartado anterior se ha analizado un caso de un satélite para mostrar el funcionamiento del código desarrollado. A continuación, se mostrarán unos cálculos generales para definir, de forma preliminar, el coste en términos de  $\Delta V$  y masa del propulsor.

Dado que la órbita protegida LEO esta acotada hasta los 2000 km, se ha realizado un cálculo del coste, en términos de  $\Delta V$ , de lo que supondría descender un satélite desde una altura inicial, a una en la que las perturbaciones son lo suficientemente altas como para que el satélite decaiga de forma natural cumpliendo la norma de 25 años como se ha explicado anteriormente (500 km). Dicha estimación del coste se encuentra en Ilustración 26



*Ilustración 26 Coste de la primera maniobra del propulsor en términos de  $\Delta V$*

En lo que se refiere a la masa del combustible necesario, este depende del tipo de propelente y de su impulso específico ( $I_{sp}$ ). A continuación, (Ilustración 27) se muestra la masa de combustible que se requeriría para la maniobra inicial un satélite cuya altitud inicial es 2000 km en función de 3 propelentes calificados como “verdes”.

Los propelentes verdes analizados en este ejemplo son la Dinitramina de Amonio (ADN), que tiene un impulso específico de 235 segundos, el Peróxido de Hidrógeno de altas prestaciones, con un impulso específico de 270 segundos, y el Oxígeno/Hidrógeno líquido, con un impulso específico de alrededor de 400 segundos.

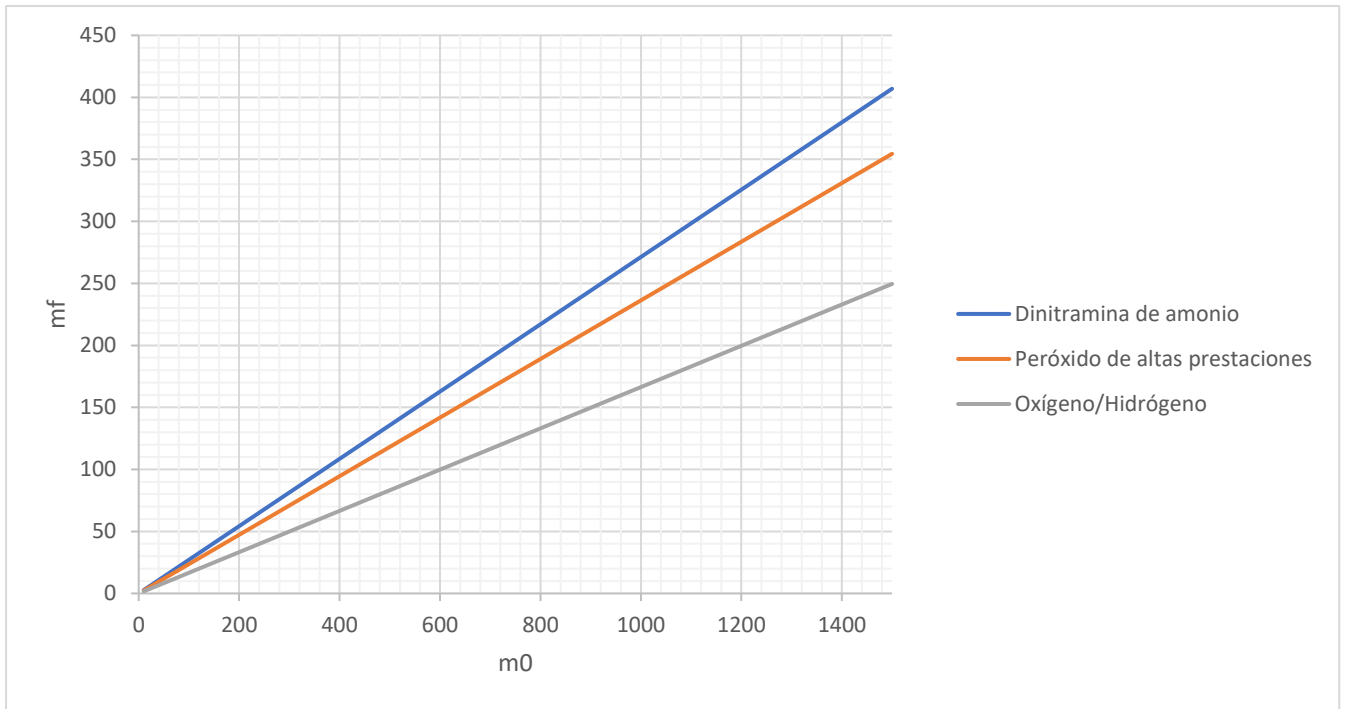


Ilustración 27 Masa de propelente ( $m_f$ ) que requeriría un satélite a una altura de 2000 km para la maniobra inicial en función de su peso inicial ( $m_0$ ). Ambas masas están expresadas en kg.

Finalmente, se representa la fracción de masa del combustible con respecto a  $\Delta V$  de los combustibles estudiados.

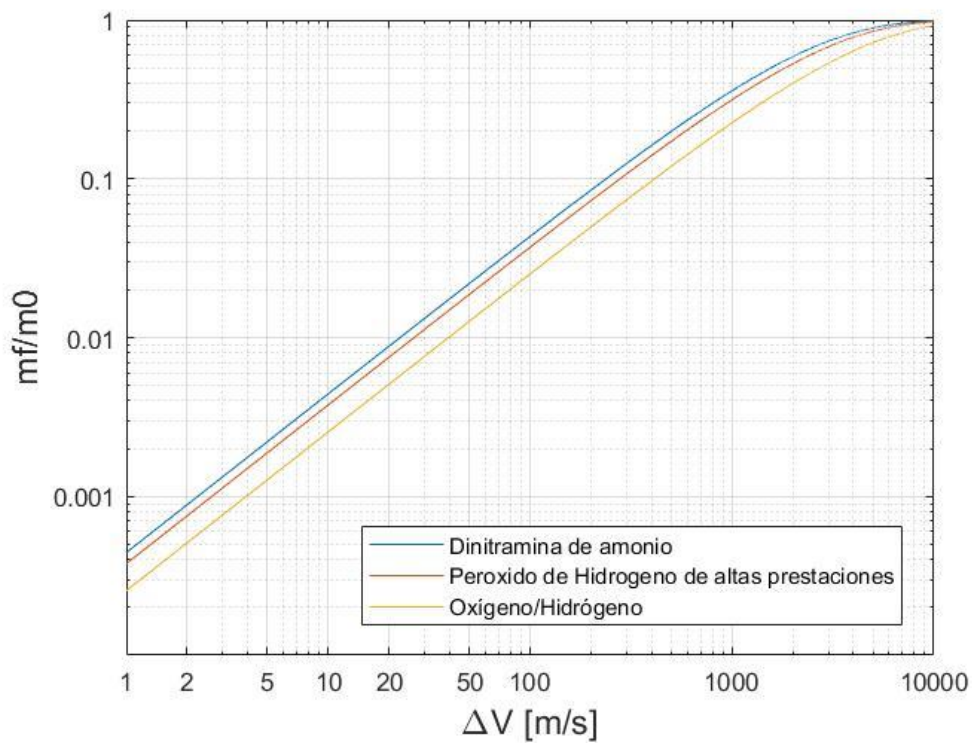


Ilustración 28 Fracción de masa de combustible frente a  $\Delta V$  para los combustibles estudiados

Cabe decir que si en vez de aprovechar la caída natural del satélite debido a las perturbaciones, se realizara un *DeOrbit* directo, el coste, en términos de masa de combustible, sería de entre 1,6 y 1,7 mayor para cada uno de los impulsos específicos anteriores calculados.

## 5 Presupuesto y especificaciones del proyecto

### 5.1 Presupuesto

A continuación, se trata el coste de tiempo estimado en este proyecto, así como los recursos dedicados y especificaciones. Dado que este proyecto corresponde a un estudio preliminar, la mayoría del gasto se resume en horas de simulación y optimización del código, análisis de los datos obtenidos, escritura de la memoria y creación de la presentación. Esto, junto con las licencias de los programas utilizados se recoge en la Tabla 11, donde se resumen los costes totales.

Tabla 11 Presupuesto del proyecto

	Horas	Coste de cada hora (€/h)	Coste total
Ingeniero recién graduado	350	15	5250
Ordenador	340	0.17	57,8
Licencia de Matlab	300	0.41	123
Licencia de Microsoft office	40	0.15	6
Impresión	-	-	30
<b>TOTAL</b>			
<b>TOTAL + SOBRECOSTE</b>			<b>5466,8</b>

Coste total del proyecto junto con un 21% de costes añadidos:

**Cinco mil cuatrocientos sesenta y seis Euros con ocho céntimos**

La estimación del coste de cada hora de ordenador, licencia de Matlab y licencia de Microsoft office se ha estimado dividiendo el coste de la licencia/precio ordenador anual entre las horas de trabajo anuales (1944 horas).

## 5.2 Especificaciones del proyecto

Las condiciones en las que se debe realizar el proyecto se deben de tener en cuenta si se busca maximizar la productividad y reducir los riesgos a la salud.

En este proyecto la mayor parte del trabajo ha sido realizado con la ayuda de un ordenador, por lo que las siguientes consideraciones se han de tener en cuenta.

- Para prevenir futuras lesiones musculares se ha de mantener una postura corporal idónea en una silla confortable y ergonómica.
- Se ha de ajustar la iluminación de la sala en la que se esté trabajando para reducir lo máximo posible la fatiga causada por la pantalla del ordenador.
- Las conexiones eléctricas deben de realizarse de forma segura para evitar accidentes que puedan dañar tanto los aparatos electrónicos como al trabajador.
- Se debe realizar un control de la carga de trabajo, regulando las horas máximas de trabajo diario, así como las pausas.

Aparte de estas medidas, la estancia en la que se decida trabajar debe de proporcionar al ingeniero una concentración y motivación suficiente para realizar el trabajo requerido.

En lo que se refiere a los aspectos técnicos del proyecto, se presentan el *Hardware* y el *Software* con los que se ha trabajado:

Con respecto al *Hardware*, se ha empleado un ordenador ASUS GL553V con un procesador integrado Intel® Core™ i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz 2.81 GHz con una RAM instalada de 12 GB, una tarjeta gráfica NVidia GeForce y un sistema operativo Windows 10 de 64-bit.

En lo que se refiere al *Software*, se han empleado los siguientes programas:

- **Matlab vR2018a** para el desarrollo del código y representación de la trayectoria orbital.
- Paquete de **Microsoft Office** versión 2018 para la redacción de la memoria, creación de la presentación y análisis de datos.

## 6 Conclusiones

Con este trabajo se ha querido resaltar el verdadero problema de la basura espacial y lo importante que es retirar los satélites en órbita al final de su vida útil debido al notable aumento en el número de satélites en orbitas LEO.

La creación de nuevas constelaciones de satélites de comunicaciones puede llegar a saturar las órbitas de baja altura, lo que obliga a la retirada de estos cuando dejan de ser funcionales para evitar colisiones.

Para colaborar con la retirada de estos desechos, se han definido los primeros pasos para el diseño de un sistema de *DeOrbit* mediante un propulsor con combustibles verdes. Para lo cual, se ha pretendido aprovechar al máximo la caída natural del satélite con la intención de obtener el propulsor más económico posible.

Gracias al código desarrollado, se puede calcular la trayectoria del satélite bajo la influencia de perturbaciones tanto aerodinámicas como gravitacionales, dando una aproximación más exacta a la que se obtendría si tan solo se emplearan las ecuaciones de trayectoria ideales.

Con el método propuesto de aprovechar la caída natural del satélite se ahorra hasta un 170% de combustible, lo que se traduce en un ahorro significativo de dinero y de emisiones contaminantes por parte del combustible.

Este método tan solo pretende dar una solución general, dado que lo ideal sería diseñar un sistema de *DeOrbit* específico para cada satélite. No obstante, se ha dado el primer paso para el diseño conceptual de un propulsor para *DeOrbit* estándar que pueda ser implementado en un satélite que carezca de un sistema propio antes del lanzamiento, o acoplado a uno que ya se encuentre en órbita.

Se resalta que las perturbaciones más importantes en el caso estudiado son las debidas a la resistencia aerodinámica, por lo que los resultados son muy dependientes del modelo de la atmósfera que se utilice. En este caso se ha empleado un modelo de atmósfera exponencial USSA76, pero existen otros modelos, más complejos, que reportan resultados más precisos como el modelo MSIS o el Jacchia Bowman. Una medida de mejorar el código desarrollado podría ser implementando una función con alguno de estos dos modelos.

Es importante reseñar la complejidad de una reentrada controlada. No desde el punto de vista de la maniobra orbital, si no sobre la determinación de la supervivencia de posibles fragmentos a la misma. Los cálculos estadísticos que se requieren para la determinación de los fragmentos supervivientes se exceden de las intenciones de este trabajo. No obstante, existen códigos específicos para el cálculo de reentradas de satélites como por ejemplo el *Software* SCARAB (HYPERSCALL TECHNOLOGIE GÖTTINGEN GMBH).



En lo que se refiere al tipo de propelente, se ha de buscar una relación entre la estabilidad del propelente y consumo específico, dado que deberá de ser almacenado durante grandes periodos de tiempo en un entorno altamente hostil, donde existen grandes gradientes térmicos, radiaciones extremas y la posibilidad de recibir algún impacto de algún fragmento.

# Apéndices

## Apéndice A: Códigos MATLAB

### Código para el cálculo preliminar de la caída natural de un satélite.

```
%*****
%
%   Orbital Decay Calculator
%
%   That model is valid for altitudes between 180 and 500 km
%   Solar and Geomagnetic Indices are used in the model
%   The atmosphere density is calculated with an exponential model
%   For a fixed exospheric temperature T, H is made to vary with
%   altitude h through the use of an effective atmospheric molecular
%   mass m. This m includes both the actual variation in molecular mass
%   with height and a compensation term for the variation in
%   temperature over the considered range from 180 to 500 km.
%   The variation in density due to the space environment is introduced
%   through T which is specified as a function of the Solar radio flux
%   F10.7 and the geomagnetic index Ap.
%
%   Last Update 08/05/2019
%
%   Author: Oscar Hebrero Cejudo
%*****
% Define A*Cd/m          Balistic coeficient [m2/kg]          [AM]
% Define F10.7           Solar flux at wavelenght of 10.7 cm  [SF]
% Define Ap              Geomagnetic A index                  [Ap]
%-----
%   F10.7 Solar activity      ||      Ap Geomagnetic Activity
%-----||-----
%   Low          F10.7 < 75          Quiet          Ap < 10
%   Moderate     75 < F10.7 < 150    Moderate     10 < Ap < 50
%   Elevated     150 < F10.7 < 190    Active       50 < Ap
%   High         190 < F10.7
%-----
% Simulation 1
AM = 0.0117;
SF1 = 70;
SF = SF1;
Ap1 = 10;
Ap = Ap1;
% Function call
[Time, altitudes] = OrbitalDecayFunction(AM, SF, Ap);
Time1 = Time;
altitudes1 = altitudes;
Data1 = table(Time1,altitudes1);
% Simulation 2
AM = 0.0117;
SF2 = 170;
SF = SF2;
Ap2 = 35;
Ap = Ap2;
```

```

% Function call
[Time, altitudes] = OrbitalDecayFunction(AM, SF, Ap);
Time2 = Time;
altitudes2 = altitudes;
Data2 = table(Time2,altitudes2);
%-----
figure
semilogy(altitudes1,Time1,'k', altitudes2,Time2,'--')
title(['Decay from Orbit for A*Cd/m = ', num2str(AM), ' m^2/kg'], 'FontSize',
16);
ylabel('Time in days','FontSize',14);
xlabel('Altitude in km','FontSize',14);
hold on
x = [0, 500];
y = [9125, 9125];
plot(x,y)
axis([0 500, 0 45000])
legend(['min Solar flux F10.7 = ',num2str(SF1), ', Ap = ' num2str(Ap1)],
['max Solar flux F10.7 = ',num2str(SF2), ', Ap = ' num2str(Ap2)], '25 years
line'), 'Location','southwest');
grid on
% Function
function [Time, altitudes] = OrbitalDecayFunction(AM, SF, Ap)
% Constant Values
    Re = 6378000;           % Earth radius [m]
    Me = 5.98E+24;         % Earth Mass [kg]
    G = 6.67E-11;         % Universal constant of gravitation
    [km^3/s^2]
% Definition of initial parameters
    T = 0;                 % Initial Time [s]
    DeltaT = 0.1;         % Time increment in days
    DeltaH = 1;           % Height increment [m]
    D9 = DeltaT*3600*24;  % Time increment in seconds
    Time = zeros();       % Time vector initial definition
    altitudes = zeros(); % Altitudes vector initial definition
    h1 = 180;             % Initial altitude [km]
    h2 = 500;             % Final altitude [km]
    H = h1;
    R = Re + h1*1000;     % Orbital radius [m]
    P = 2*pi*sqrt(R^3/(Me*G)); % Period in seconds
    i=1;
% Calculation of decay
    while h2>=h1
        while H>=180
            SH = (900 + 2.5 * (SF - 70) + 1.5 * Ap) / (27 - .012 * (H - 200));
            DN = 6E-10 * exp(-(H - 175) / SH); % Density [kg/m^3]
            dp = 3*pi*AM*R*DN*D9;           % Decrement in orbital period
            Pm = P / 60;
            MM = 1440 / Pm;
            nMM = 1440 / ((P - dp)*60);
            Dec = dp*MM/(DeltaT*P);
            P = P-dp;
            T = T + DeltaT;
            R = (G*Me*P^2/(4*pi^2))^0.333333;
            H = (R-Re)/1000;
        end
    end
end

```

```

end
Time(i,1) = (T);           % Time result vector
altitudes(i,1) = (h1);    % Altitudes result vector
% Re-definition of parameters
i = i + 1;
h1 = h1 + DeltaH;
H = h1;
T = 0;
R = Re + h1*1000;
P = 2*pi*sqrt(R^3/(Me*G));
end
end

```

## Código para el cálculo de las pequeñas perturbaciones del satélite.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%{
    Decay calculator.
    This code calculates the trajectory of a specific satellite taking
    into account the perturbative accelerations caused by:
        - Earth gravity
        - Atmospheric drag
        - Solar radiation
        - Lunar gravity
        - Solar gravity

    The input of the code are:
        - The propagation initial date (year, month, day and hour)
        -Satellite initial orbit parameters
            * Inclination (i0)
            * Right ascension of the ascending node (RAAN0)
            * Argument of Periapsis (w)
            * Mean Anomaly (MM)
            * Eccentricity (e)
            * Mean motion (n)

    The propagation time can be change in perturbations subfunction
    (tf)

    Subfunctions:
        - perturbations
        - J0
        - lunar_position
        - Solar_position
        - Sshadow
        - Geodetic
        - altitude

    Last Update: 05/09/2019

    Created by: Oscar Hebrero Cejudo
%}
syms x;
global ME RE GE Mi r0 v0 BC ms t0 nh
format long
%... Definition of initial conditions
% Propagation initial date
year = 2019;
month = 12;
day = 30;
hourUTC = [2 44 9.6];
JD0 = j0(year,month,day);    % Julian day calculation function
% Constants
ME = 5.972*10^24;           % Mass of Earth [kg]
RE = 6372.137;             % Earth equatorial Radius [km]
GE = 6.673*10^-20;        % Gravitational Constant [km^3/(kg s)]
Mi = ME * GE;             % Earth's gravitational parameter [km^3/s^2]
```

```

% Satellite initial conditions
i0 = 65.7118*pi/180;           % Inclination [rad]
RAAN0 = 56*pi/180;           % Right ascension of the ascending node [rad]
w = 148*pi/180;             % Argument of Periapsis [rad]
MM = 276.72*pi/180;         % Mean Anomaly [rad]
e = 0.0019;                 % Eccentricity [-]
n = 13.56118725704440 * (2*pi)/(24*3600); % Mean motion (rad/s)
% calculation of the orbit parameters
E = solve(MM == x - e*sin(x), x); % Eccentric anomaly [rad]
E = vpa(E,10);
Tanomaly = vpa(2*atan(sqrt((1+e)/(1-e))*tan(E/2)),10);
if Tanomaly < 0
    Tanomaly = vpa(Tanomaly + 2*pi,10);
end
a = (Mi/n^2)^(1/3);          % Semimajor axis [km]
p = a*(1 - e^2);           % Semilatus rectum [km]
h = sqrt(p*Mi);           % Specific angular momentum
ra = a*(1+e);              % Distance of apogee
rp = a*(1-e);             % Distance of perigee
T = 2*pi*sqrt(a^3/Mi);     % Period

% States vectors in perifocal coordinates
r0P = (h^2/Mi)*(1/(1+e*cos(Tanomaly)))*[cos(Tanomaly) sin(Tanomaly) 0]; %
[km]
v0P = (Mi/h)*[-sin(Tanomaly) e+cos(Tanomaly) 0]; %
[km/s]

% Reference trasformation matrix (from Perifocal frame to Geocentric
Ecuatorial)
Rz = [cos(w)   sin(w)   0; ...
      -sin(w)  cos(w)   0; ...
       0       0       1];
Rx = [1   0   0; ...
      0 cos(i0) sin(i0); ...
      0 -sin(i0) cos(i0)];

Rz1 = [cos(RAAN0) sin(RAAN0) 0; ...
       -sin(RAAN0) cos(RAAN0) 0; ...
        0          0          1];

TPG = transpose((Rz * Rx) * Rz1);

% State Vectors in Geocentric Equatorial reference frame
r0 = vpa(TPG * transpose(r0P),10); % [km]
v0 = vpa(TPG * transpose(v0P),10); % [km/s]
%... Satellite specifications
A = 7.62; % Cross section area [m^2]
CD = 2; % Drag coeficient [-]
ms = 1300; % Satellite mass [kg]
BC = 0.0117; % Ballistic coeficiente [m^2/kg]
CR = 2; % Radiation pressure coeficient

```

```

%... Calculation of decay

[hsol, esol, RAsol, isol, wsol, TAsol, tsol] = perturbations (a, e, i0,...
                    RAAN0, w, T, Tanomaly,...
                    BC, year, month, day, CR,...
                    ms, A, JD0);

%... Post-Process
psol = hsol.^2/Mi;           % New vector of semilatus rectum
asol = psol./(1-esol.^2);   % New vector of semimajor axis

Newrp = zeros();           % New r vector in perifocal coordinates
for i = 1:length(asol)
    Newrp(1,i) = (psol(i)/(1+esol(i).*cos(TAsol(i))))*cos(TAsol(i));
    Newrp(2,i) = (psol(i)/(1+esol(i).*cos(TAsol(i))))*sin(TAsol(i));
    Newrp(3,i) = 0;
end

Finalr = zeros();
for i = 1:length(asol)
    Finalr(1,i) = sqrt( Newrp(1,i)^2 + Newrp(2,i)^2 + Newrp(3,i)^2);
end

Newr = zeros(size(Newrp)); % new r vector y geocentric coordinates
for i = 1:length(asol)
    Newr(:,i) = vpa(TPG * Newrp(:,i),10);
end

Finalr = zeros();
for i = 1:length(asol)
    Finalr(1,i) = sqrt( Newr(1,i)^2 + Newr(2,i)^2 + Newr(3,i)^2);
end
FinalH = Finalr - RE;      %Final height

%...Radians to degrees converter
for j = 1:length(TAsol)
    for i = 1:length(TAsol)
        if TAsol(i) < 0
            TAsol(i) = 2*pi - TAsol(i);

            end
        if TAsol(i) > 2*pi
            TAsol(i) = TAsol(i) - (2*pi);
            end
    end
end
FinalTanomaly = TAsol.*(180/pi);

for j = 1:length(isol)

    for i = 1:length(isol)
        if isol(i) > 2*pi
            isol(i) = isol(i) - (2*pi);
        end
    end
end

```



```

    end
end
Finali = isol.*(180/pi);

for j = 1:length(RAsol)

    for i = 1:length(RAsol)
        if RAsol(i) > 2*pi
            RAsol(i) = RAsol(i) - (2*pi);
        end
    end
end
FinalRAAN = RAsol.*(180/pi);

for j = 1:(wsol(length(wsol)) / (2*pi))+1)

    for i = 1:length(wsol)
        if wsol(i) > 2*pi
            wsol(i) = wsol(i) - (2*pi);
        end
    end
end
Finalw = wsol.*(180/pi);

%... Calculation of the ground track of the satellite
[lon, lat, h] = Geodetic(Newr);           % Lat and Lon calculation function
lond = lon*180/pi;
latd = lat*180/pi;
theta = (hourUTC(1) + hourUTC(2)/60 + hourUTC(3)/3600)*pi/12;
thetad = theta*180/pi;
lond = lond + 52.5+thetad;                % UTC 00:00 + hourUTC ajustment
long = lond - ((360/(24*3600))*tsol)';   % Movemete of the Earth
for j = 1:length(long)
    for i = 1:length(long)
        if long(i) < -180
            long(i) = long(i) + 360;
        end
        if long(i) > 180
            long(i) = long(i) - 360;
        end
    end
end
end

figure(3)
geoshow('landareas.shp', 'FaceColor', [0.5 1 0.5]);
axis equal                               % set axis units to be the same size
box on                                    % display bounding box
ax = gca;                                 % get current axis
ax.XLim = [-180 180];                     % set x limits
ax.YLim = [-90 90];                       % set y limits
ax.XTick = [-180 -120 -60 0 60 120 180]; % define x ticks
ax.YTick = [-90 -60 -30 0 30 60 90];     % define y ticks
title('Satellite Ground Track')
hold on
plot(long, latd, 'b.')

```

```

scatter(long(length(long)),latd(length(latd)),'filled','r')

gamma = atand(esol.*sin(TAsol)./(1+esol.*cos(TAsol))); % Trayectory angle
Table = [transpose(FinalH) asol esol Finali FinalTanomaly ...
         FinalRAAN Finalw gamma];
%... Results
Tsol =tsol;
tsol = tsol/(24*3600); % Time in Days
figure(4)
plot(tsol,asol)
grid on
title('Semimayor axis')
xlabel('time in days')
ylabel('altitude in km')

figure(5)
plot(tsol,esol)
grid on
title('Eccentricity')
xlabel('time in days')
ylabel('e')

figure(6)
plot(tsol,FinalTanomaly)
grid on
title('True Anomaly')
xlabel('time in days')
ylabel('degrees')

figure(7)
plot(tsol,Finali)
grid on
title('Inclination')
ylabel('degrees')
xlabel('time in days')

figure(8)
plot(tsol,FinalRAAN)
grid on
title('RAAN')
xlabel('time in days')
ylabel('degrees')

figure(9)
plot(tsol,Finalw)
grid on
title('w')
xlabel('time in days')
ylabel('degrees')

figure(10)
plot(tsol,FinalH)
grid on
title('Altitude decay')
xlabel('time in days')

```

```

ylabel('altitude in km')

figure(11)
title('Final position')
worldmap([-90 50],[0 180])
load geoid
load coastlines
geoshow(coastlat,coastlon)
scatterm(latd(5000),long(5000),'filled','r')
geoshow(latd(4900:5000),long(4900:5000))

%... Functions
% -----
function [hsol, esol, RAsol, isol, wsol, TAsol, tsol] = perturbations(a,...
    e, i0, RAAN0, w,...
    T, Tanomaly, BC,...
    year, month,...
    day, CR, ms, A,...
    JD0)

% -----
%{
    This function solves using MATLAB's ode45 to numerically integrate the
    Gauss planetary equations to determine the perturbations of the
    orbital elements.

    Optional input:
        - tf determines the propagation time (1 day by default)

    Subfunction
        - rates
%}
% -----
%...Preliminaries:
a = double(a);
e = double(e);
i0 = double(i0);
RAAN0 = double(RAAN0);
w = double(w);
Tanomaly = double(Tanomaly);

%...Conversion factors:
hours = 3600; %Hours to seconds
days = 24*hours; %Days to seconds
deg = pi/180; %Degrees to radians

%...Constants:
mu = 398600; %Gravitational parameter (km^3/s^2)
RE = 6372.137; %Earth's radius (km)
J2 = 1082.63e-6; %Earth's J2

%...Initial orbital parameters (given):
a = a;
p = a*(1-e^2);
r = p/(1+e*cos(Tanomaly));
v = [sqrt(mu/p)*e*sin(Tanomaly) sqrt(mu/p)*(1+e*cos(Tanomaly)) 0];

```

```

h = sqrt(mu*p);
u = w + Tanomaly;           %Apogee radius (km)
RA0 = RAAN0;                %Right ascension of the node (radians)
i0 = i0;
w0 = w;                     %Argument of perigee (radians)
TA0 = Tanomaly;             %True anomaly (radians)

%...Initial orbital parameters:
e0 = e;
h0 = h;                     % Angular momentum (km^2/s)
a0 = a;                     % Semimajor axis (km)
T0 = T;                     % Period (s)

%...Store initial orbital elements (from above) in the vector coe0:
coe0 = [h0 e0 RA0 i0 w0 TA0];

%...Use ODE45 to integrate the Gauss variational equations
t0 = 0;
tf = 1*days;
nout = 5000; %Number of solution points to output for plotting purposes
tspan = linspace(t0, tf, nout);
options = odeset(...
'reltol', 1.e-8, ...
'abstol', 1.e-8, ...
'initialstep', T0/1000);
y0 = coe0';

[t,y] = ode45(@rates, tspan, y0, options);

%...Assign the time histories mnemonic variable names:
h = y(:,1);
e = y(:,2);
RA = y(:,3);
i = y(:,4);
w = y(:,5);
TA = y(:,6);

hsol = h;
esol = e;
RAsol = RA;
isol = i;
wsol = w;
TAsol = TA;
tsol = t;
%...Plot the time histories of the osculating elements:
figure(2)
subplot(5,1,1)
plot(t/3600, (RA - RA0)/deg)
title('Right Ascension (degrees)')
xlabel('hours')
ylabel('RAi - RA0')
grid on
grid minor
axis tight

```

```

subplot(5,1,2)
plot(t/3600,(w - w0)/deg)
title('Argument of Perigee (degrees)')
xlabel('hours')
ylabel('wi - w0')
grid on
grid minor
axis tight

subplot(5,1,3)
plot(t/3600,h - h0)
title('Angular Momentum (km^2/s)')
xlabel('hours')
ylabel('hi - h0')
grid on
grid minor
axis tight

subplot(5,1,4)
plot(t/3600,e - e0)
title('Eccentricity')
xlabel('hours')
ylabel('ei - e0')
grid on
grid minor
axis tight

subplot(5,1,5)
plot(t/3600,(i - i0)/deg)
title('Inclination (degrees)')
xlabel('hours')
ylabel('ii - i0')
grid on
grid minor
axis tight

%...Subfunction:
%-----
function dfdt = rates(t,f)
%-----
%
% This function calculates the time rates of the orbital elements
% from Gauss's variational equations
%-----

%...The orbital elements at time t:
h = f(1);
e = f(2);
RA = f(3);
i = f(4);
w = f(5);
TA = f(6);

% ...Rest of orbital parameters
r = h^2/mu/(1 + e*cos(TA));           % The radius
u = w + TA;                          % Argument of latitude

```

```

Rl = p/(1+e*cos(TA))*[cos(TA) sin(TA) 0]; % Distance state vector in peri
Vl = (mu/h)*[-sin(TA) e+cos(TA) 0]; % Velocity state vector in peri
% Reference transformation matrix (from Perifocal frame to Geocentric
% Ecuatorial)
Rz = [cos(w) sin(w) 0; ...
      -sin(w) cos(w) 0; ...
      0 0 1];
Rx = [1 0 0; ...
      0 cos(i) sin(i); ...
      0 -sin(i) cos(i)];

Rz1 = [cos(RA) sin(RA) 0; ...
      -sin(RA) cos(RA) 0; ...
      0 0 1];
TPG = transpose((Rz * Rx) * Rz1);
Rge = TPG*Rl'; % state vector in geocentric equatorial
Vge = TPG*Vl';
%...Gravitational perturbation:
gr = -3/2*J2*mu*RE^2/r^4*(1-3*sin(i)^2*sin(u)^2);
gt = -3/2*J2*mu*RE^2/r^4*sin(i)^2*sin(2*u);
gn = -3/2*J2*mu*RE^2/r^4*sin(2*i)*sin(u);

%...Atmospheric drag perturbation:
rd = norm(Rl) - RE; % altitude of the satellite
rho = altitude(rd); % density at altitude rd
we = [0 0 7.2921159e-5]; % Earth's angular velocity (rad/s)
Vrel = v - cross(we,Rge); % Velocity relative to the atmosphere (km/s)
vrel = norm(Vrel); % Speed relative to the atmosphere (km/s)
uv = Vrel/vrel; % Relative velocity unit vector
ad = -0.5*rho*vrel^2*BC*uv; % perturbative acceleration of atmospheric
drag (km/s^2)
adr = ad(1);
adt = ad(2);
adn = ad(3);

% ...Solar Radiation perturbation:
% Constants
c = 2.998e8; % Speed of light (m/s)
S = 1367; % Solar constant (W/m^2)
Psr = S/c; % Solar oressure (Pa)

% Update the Julian date at time t:
JD = JD0 + t/days;
% apparent position vector of the sun:
[lamda, eps, rS] = Solar_position(JD);
lamda = lamda*deg;
eps = eps*deg;
% shadow function
nu = Sshadow(Rge,rS);
pSR = nu*(S/c)*CR*A/(ms*1000);

sl = sin(lamda); cl = cos(lamda);
se = sin(eps); ce = cos(eps);
sW = sin(RA); cW = cos(RA);
si = sin(i); ci = cos(i);

```

```

su = sin(u); cu = cos(u);
sT = sin(TA); cT = cos(TA);

% Earth-Sun unit vector components:
ur = sl*ce*cW*ci*su + sl*ce*sW*cu - cl*sW*ci*su ...
+ cl*cW*cu + sl*se*si*su;
us = sl*ce*cW*ci*cu - sl*ce*sW*su - cl*sW*ci*cu ...
- cl*cW*su + sl*se*si*cu;
uw = - sl*ce*cW*si + cl*sW*si + sl*se*ci;

SRr = -pSR*ur;
SRt = -pSR*us;
SRn = -pSR*uw;

%...Moon perturbation
% Constants:
mu_moon = 4903;          % Moon's gravitational parameter (km^3/s^2)

% Unit vectors of the rsw system:
rm = norm(Rge);
urm = Rge/rm;          % Radial
Hm = cross(Rge,Vge);
uhm = Hm/norm(Hm);    % Normal
sm = cross(uhm,urm);
usm = sm/norm(sm);    % Transverse

% Update the Julian date at time t:
JD = JD0 + t/days;

% Normlaize the position vector of the moon:
R_m = lunar_position(JD);
r_m = norm(R_m);

R_rel = R_m - Rge';    % Position vector of moon with respect to satellite
r_rel = norm(R_rel);

% Difference Between Nearly Equal Numbers (because Rge << R_m):
q = dot(Rge', (2*R_m - Rge'))/r_m^2;
F = q*(q^2 - 3*q + 3)/(1 + (1-q)^1.5);

% gravitational pertubation of the moon:
Mp = mu_moon/r_rel^3*(F*R_m - Rge');
Mpr = dot(Mp,urm');
Mpt = dot(Mp,usm');
Mpn = dot(Mp,uhm');

%...Sun perturbation
% Constants:
mu_Sun = 132.712e9;    % Sun's gravitational parameter (km^3/s^2)

% Unit vectors of the rsw system:
rs = norm(Rge);
urs = Rge/rs;        % Radial
Hs = cross(Rge,Vge);
uhs = Hs/norm(Hs);   % Normal

```

```

ss = cross(uhs,urs);
uss = ss/norm(ss);           % Transverse

% Normlaize the position vector of the sun:
[lamda eps rS] = Solar_position(JD);
r_s = norm(rS);

R_rels = rS - Rge';         % Position vector of sun with respect to satellite
r_rels = norm(R_rels);

% Difference Between Nearly Equal Numbers (because Rge << R_m):
q = dot(Rge', (2*rS - Rge'))/r_s^2;
F = q*(q^2 - 3*q + 3)/(1 + (1-q)^1.5);

% gravitational pertubation of the sun:
Sp = mu_Sun/r_rels^3*(F*rS - Rge');
Spr = dot(Sp,urs');
Spt = dot(Sp,uss');
Spn = dot(Sp,uhs');

%...Total perturbation
%{
    g      - gravitational acceleration
    ad     - atmospheric drag acceleration
    SR     - Solar radiation acceleration
    Mp     - Moon gravity perturbative acceleration
    Sp     - Sun gravity perturvative acceleration
%}
apr = gr + adr + SRr + Mpr + Spr;
apt = gt + adt + SRt + Mpt + Spt;
apn = gn + adn + SRn + Mpn + Spn;
at = sqrt(apr^2 + apt^2 + apn^2);

%...Orbital element rates at time t
hdot = r*apt;

edot = (h/mu)*sin(TA)*apr + (1/(mu*h))*((h^2 + mu*r)*cos(TA) + mu*e*r)*apt;

TAdot = h/r^2 + (1/(e*h))*((h^2/mu)*cos(TA)*apr - (r + h^2/mu)*sin(TA)*apt);

RADot = (r/(h*sin(i)))*sin(u)*apn;

idot = (r/h)*cos(u)*apn;

wdot = -(1/(e*h))*((h^2/mu)*cos(TA)*apr - (r + h^2/mu)*sin(TA)*apt) ...
        -(r*sin(u))/(h*tan(i))*apn;

%...Pass these rates back to ODE45 in the array dfdt:
dfdt = [hdot edot RADot idot wdot TAdot]';

end %rates
% -----
end %Perturbations

% -----

```



```

% Calculation of Julian day number at 0 hr UT
%-----
function J0 = j0(year, month, day)
%-----
%{
    This function computes the Julian day number at 0 UT for any year
    between 1900 and 2100.

    j0      - Julian day at 0 hr UT
    year    - range 1901 - 2099
    month   - range 1 - 12
    day     - range 1 - 31
%}
%-----

J0 = 367*year - fix(7*(year + fix((month + 9)/12))/4) + fix(275*month/9)...
    + day + 1721013.5;
end %j0
%-----

% -----
% U.S Standar Atmosphere 1976
% -----
function density = altitude(rd)
% -----
%{
    ALTITUDE calculates density for altitudes from sea level though 1000 km
    using exponential interpolation.
%}

% Geometric altitudes (km):
h = ...
[ 0 25 30 40 50 60 70 ...
80 90 100 110 120 130 140 ...
150 180 200 250 300 350 400 ...
450 500 600 700 800 900 1000];

% Corresponding densities (kg/m^3) from USSA76:
r = ...
[1.225 4.008e-2 1.841e-2 3.996e-3 1.027e-3 3.097e-4 8.283e-5 ...
1.846e-5 3.416e-6 5.606e-7 9.708e-8 2.222e-8 8.152e-9 3.831e-9 ...
2.076e-9 5.194e-10 2.541e-10 6.073e-11 1.916e-11 7.014e-12 2.803e-12 ...
1.184e-12 5.215e-13 1.137e-13 3.070e-14 1.136e-14 5.759e-15 3.561e-15];

% Scale heights (km):
H = ...
[ 7.310 6.427 6.546 7.360 8.342 7.583 6.661 ...
5.927 5.533 5.703 6.782 9.973 13.243 16.322 ...
21.652 27.974 34.934 43.342 49.755 54.513 58.019 ...
60.980 65.654 76.377 100.587 147.203 208.020];

% Range of altitudes:
if rd > 1000
    rd = 1000;
elseif rd < 0

```

```

    rd = 0;
end

% Interpolation interval:
for j = 1:27
    if rd >= h(j) && rd < h(j + 1)
        i = j;
    end
end
if rd == 1000
    i = 27;
end

% Exponential interpolation
density = r(i)*exp(-(rd - h(i))/H(i));

end %altitude
%-----

%-----
% Algorithm for calculate the geocentric position of the moon at a
% given epoch
%-----
function rmoon = lunar_position(jd)
%-----
%{
    This function calculates the geocentric equatorial position vector of
    the moon given the Julian day.

    jd      - function input: Julian day
%}
%-----
% Earth's radius (km)
RE = 6372.137;

% Time in centuries since J2000:
T = (jd - 2451545)/36525;

% Ecliptic longitude (deg):
e_long = 218.32 + 481267.881*T ...
    + 6.29*sind(135.0 + 477198.87*T) - 1.27*sind(259.3 - 413335.36*T) ...
    + 0.66*sind(235.7 + 890534.22*T) + 0.21*sind(269.9 + 954397.74*T) ...
    - 0.19*sind(357.5 + 35999.05*T) - 0.11*sind(186.5 + 966404.03*T);
e_long = mod(e_long,360);

% Ecliptic latitude (deg):
e_lat = 5.13*sind( 93.3 + 483202.02*T) + 0.28*sind(228.2 + 960400.89*T) ...
    - 0.28*sind(318.3 + 6003.15*T) - 0.17*sind(217.6 - 407332.21*T);
e_lat = mod(e_lat,360);

% Horizontal parallax (deg):
h_par = 0.9508 ...
    + 0.0518*cosd(135.0 + 477198.87*T) + 0.0095*cosd(259.3 - 413335.36*T) ...
    + 0.0078*cosd(235.7 + 890534.22*T) + 0.0028*cosd(269.9 + 954397.74*T);
h_par = mod(h_par,360);

```

```

% Angle between Earth's orbit and its equator (deg):
obliquity = 23.439291 - 0.0130042*T;

% Direction cosines of the moon's geocentric equatorial position vector:
l = cosd(e_lat) * cosd(e_long);
m = cosd(obliquity)*cosd(e_lat)*sind(e_long) - sind(obliquity)*sind(e_lat);
n = sind(obliquity)*cosd(e_lat)*sind(e_long) + cosd(obliquity)*sind(e_lat);

% Earth-Moon distance (km):
dist = RE/sind(h_par);

% Moon's geocentric equatorial position vector (km):
rmoon = dist*[l m n];

end %lunar_position
%-----

%-----
% Algorithm for calculate the geocentric position of the sun at a
% given epoch
%-----
function [lamda, eps, rS] = Solar_position(jd)
%-----
%{
    This function calculates the geocentric equatorial position vector of
    the sun given the Julian date.
%}
%-----
% Astronomical unit (km):
AU = 149597870.691;

% Julian days since J2000:
n = jd - 2451545;

% Julian centuries since J2000:
cy = n/36525;

% Mean anomaly (deg):
M = 357.528 + 0.98564736*n;
M = mod(M, 360); % mod(a,b) finds the modulus after division.

% Mean longitude (deg):
L = 280.460 + 0.98564736*n;
L = mod(L, 360);

% Apparent ecliptic longitude (deg):
lamda = L + 1.915*sind(M) + 0.020*sind(2*M);
lamda = mod(lamda, 360);

% Obliquity of the ecliptic (deg):
eps = 23.439 - 3.56*(10^-7)*n;

% Unit vector from Earth to Sun:
u = [cosd(lamda) sind(lamda)*cosd(eps) sind(lamda)*sind(eps)];

```

```

% Distance from Earth to Sun (km):
rs = (1.00014 - 0.01671*cosd(M) - 0.000140*cosd(2*M))*AU;

% Geocentric position vector (km):
rS = rs*u; % units in km
end % Solar_position
%-----

%-----
% Algorithm for determine wheather or not a satellite is in Earth's shadow
%-----
function light_switch = Sshadow(Rge, rS)
%-----
%{
    This function uses the position vectors of the satellite and the sun
    to determine if the Earth is in the line of sight between the two.
%}
%-----
RE = 6372.137; % Earth radius (km)
rsat = norm(Rge);
rsun = norm(rS);

% Angle between sun and satellite position vectors:
theta = acosd(dot(Rge,rS)/(rsat*rsun));

% Angle between the satellite position vector and the radial to the point
% of tangency with the Earth of line from the satellite:
theta_sat = acosd(RE/rsat);

% Angle between the sun position vector and the radial to the point of
% tangency with the Earth of a line from the sun:
theta_sun = acosd(RE/rsun);

% Determine if a line from the sun to the satellite intersects the Earth:
if theta_sat + theta_sun <= theta
    light_switch = 0; % yes (in shadow)
else
    light_switch = 1; % no
end

end %Sshadow
%-----

% Latitude and Longitude calculation
%-----
function [lon, lat, h] = Geodetic(Newr)
%-----
%{
    This function calculates the latitude and longitude of a specific point

    Input:
        Newr vector with the coordinates of the state vector

```

```

Outputs:
    lon: longitude of the point
    lat: latitude of the point
    h: the current altitude
%}
%-----
R_equ = 6378.137e3;           % Earth radius
f      = 1/298.257223563;
epsRequ = eps*R_equ;        % Convergence criterion
e2      = f*(2-f);          % Square of eccentricity
X = Newr(1,:) * 1e3;        % Cartesian coordinates
Y = Newr(2,:) * 1e3;
Z = Newr(3,:) * 1e3;
rho2 = X.*X + Y.*Y;        % Square of distance from z-axis

% Check validity of input data
if (norm(Newr)==0)
    disp ( ' invalid input in Geodetic constructor\n' );
    lon = zeros();
    lat = zeros();
    h   = -R_equ;
    return
end

% Iteration
dZ = e2*Z;
while(1)
    ZdZ = Z + dZ;
    Nh = sqrt ( rho2 + ZdZ.*ZdZ );
    SinPhi = ZdZ / Nh; % Sine of geodetic latitude
    N = R_equ / sqrt(1-e2*SinPhi*SinPhi);
    dZ_new = N*e2*SinPhi;
    if (abs(dZ-dZ_new) < epsRequ)
        break
    end
    dZ = dZ_new;
end

% Longitude, latitude, altitude
lon = atan2(Y, X);
lat = atan2(ZdZ, sqrt(rho2));
h = Nh - N;
end
%-----

```

## Apéndice B: Determinación de la presión Solar en función de los parámetros orbitales.

### Cálculo del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ y el vector de perturbación en función de los parámetros orbitales

Se recuerda que el ángulo entre el plano ecuatorial de la tierra y su eclíptica es la oblicuidad de la eclíptica  $\varepsilon$ . La oblicuidad varia lentamente con el tiempo actualmente es de  $23,44^\circ$ .

Por lo tanto, el plano de la órbita aparente del Sol alrededor de la Tierra está inclinado  $23,44^\circ$  con respecto al ecuador de la Tierra. En un sistema de referencia de la eclíptica geocéntrica, el eje Z es normal a la eclíptica y el eje X se encuentra a lo largo de la dirección del equinoccio vernal. En este marco, el vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}$  a lo largo de la línea tierra-Sol es proporcionado por la longitud eclíptica Solar  $\lambda$ , que es el ángulo entre el equinoccio vernal y la línea tierra-Sol.

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\lambda \hat{\mathbf{I}} + \sin\lambda \hat{\mathbf{J}} \quad (42)$$

El marco ecuatorial geocéntrico (XYZ) y el marco eclíptico geocéntrico (X'Y'Z') comparten la línea del equinoccio vernal como su eje X común. Por lo tanto, la transformación de un cuadro a otro es simplemente una rotación a través de la oblicuidad  $\varepsilon$  alrededor del eje X positivo.

$$\{\hat{\mathbf{u}}\}_{XYZ} = [\mathbf{R}_1(-\varepsilon)]\{\hat{\mathbf{u}}\}_{X'Y'Z'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \cos \varepsilon \sin \lambda \\ \sin \varepsilon \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (43)$$

Definiendo la ecuación (33):

$$\{\mathbf{P}\}_{XYZ} = -psr \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \cos \varepsilon \sin \lambda \\ \sin \varepsilon \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (44)$$

Donde  $psr$  es:

$$psr = v \frac{S C_R A_S}{c m}$$

Para utilizar las ecuaciones planetarias de Gauss (ecuaciones (9)) para determinar los efectos de la presión de radiación Solar sobre la variación de los elementos orbitales, debemos encontrar los componentes de la perturbación  $\mathbf{p}$  en el mismo sistema de referencia. La transformación es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_s \\ p_w \end{pmatrix} = -psr \begin{bmatrix} -\sin \Omega \cos i \sin u + \cos \Omega \cos u & \cos \Omega \cos i \sin u + \sin \Omega \cos u & \sin i \sin u \\ -\sin \Omega \cos i \cos u - \cos \Omega \sin u & \cos \Omega \cos i \cos u - \sin \Omega \sin u & \sin i \cos u \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \cos \varepsilon \sin \lambda \\ \sin \varepsilon \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (45)$$

## Variación de la oblicuidad y la longitud de la eclíptica Solar

Integrar numéricamente las ecuaciones de perturbación de Gauss requiere que se conozca la variación en el tiempo de la oblicuidad  $\varepsilon$  y la longitud de la eclíptica Solar  $\lambda$ . También se necesita el historial de tiempo de la distancia de la Tierra al Sol  $r_s$  para calcular el vector de posición ecuatorial geocéntrico del Sol, que junto con el vector de posición geocéntrica del satélite permite determinar cuándo el satélite está en la sombra de la tierra.

De acuerdo con *The Astronomical Almanac* (National Almanac Office, 2013), la longitud de la eclíptica Solar puede definirse con la siguiente formula:

$$\lambda = L + 1,915^\circ \sin M + 0,0200^\circ \sin 2M \quad (0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ) \quad (46)$$

Donde L y M son la longitud media y anomalía media del son en grados.

$$L = 280,459^\circ + 0,98564736^\circ n \quad (0^\circ \leq L \leq 360^\circ) \quad (47)$$

$$M = 357,529^\circ + 0,98560023^\circ n \quad (0^\circ \leq M \leq 360^\circ) \quad (48)$$

Siendo n el numero de días desde J2000<sup>6</sup>.

La oblicuidad, en términos de n será:

$$\varepsilon = 23,439^\circ - 3,56(10^{-7})n \quad (49)$$

Finalmente, el almanaque proporciona la distancia  $r_s$  desde la tierra al Sol en términos de la anomalía media:

$$r_s = (1,00014 - 0,01671 \cos M - 0,000140 \cos 2M)AU \quad (50)$$

Donde AU es la unidad astronómica (1 AU = 149.597.870,691 km).

---

<sup>6</sup> Los conceptos del día juliano se encuentran explicados en el apéndice correspondiente

## Determinación de los eclipses del satélite

Para determinar si el satélite se encuentra en eclipse o no se puede proceder de la siguiente manera.

Considérese dos naves espaciales A y B que orbitan un cuerpo central de radio R. Los dos vectores de posición  $r_A$  y  $r_B$  definen un plano, que es el plano de la Ilustración 29. Ese plano contiene el perfil circular C del cuerpo central. El ángulo  $\theta$  entre los dos vectores de posición se puede encontrar a partir de la operación del producto escalar.

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_A r_B} \right) \quad (51)$$

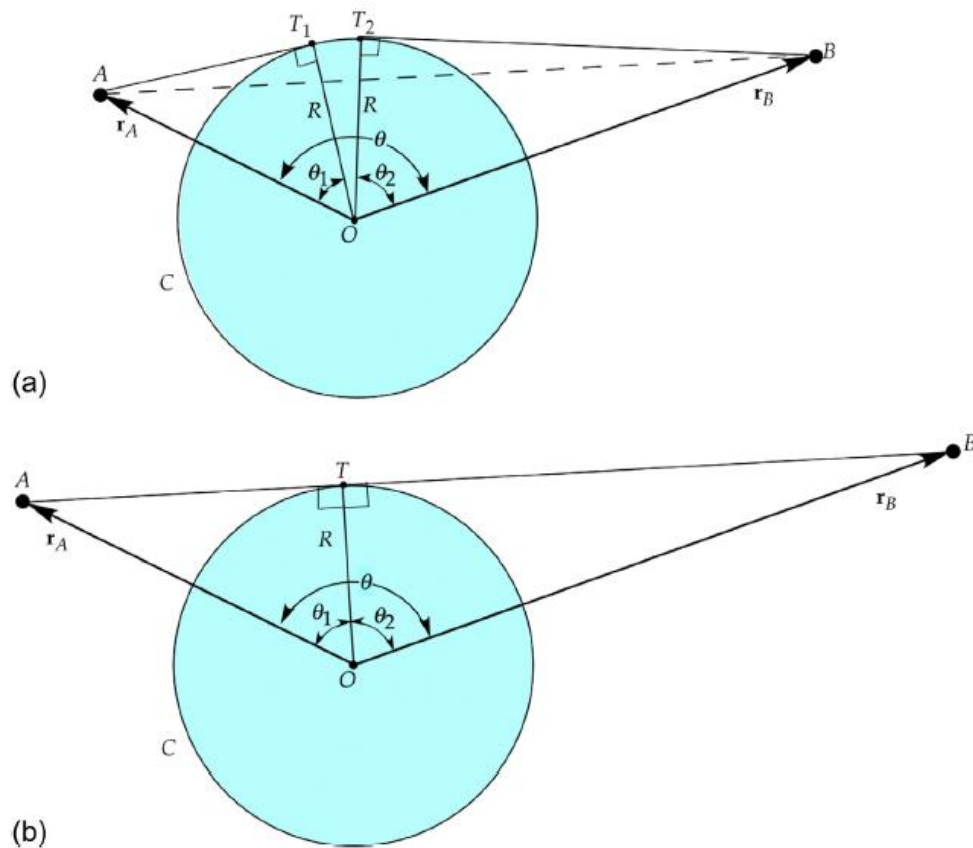


Ilustración 29 Esquemas determinación de los eclipses de un satélite (Curtis, 2014)

En la figura Ilustración 29 (a),  $T_1$  y  $T_2$  son puntos de tangencia a C de líneas dibujadas desde A y B, respectivamente. Los radios  $OT_1$  y  $OT_2$  junto con las líneas tangentes  $AT_1$  y  $BT_2$  y los vectores de posición  $r_A$  y  $r_B$  comprenden los dos triángulos rectángulos  $OAT_1$  y  $OBT_2$ . Los ángulos en el vértice O de estos dos triángulos se obtienen de:



$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{R}{r_A} \qquad \theta_2 = \cos^{-1} \frac{R}{r_B} \qquad (52)$$

Si, como en la figura Ilustración 29 (a), la línea AB se cruza con el cuerpo central, lo que significa que no hay línea de visión, entonces  $\theta_1 + \theta_2 < \theta$ . Si AB es tangente a C (Ilustración 29 (b)) o se encuentra fuera de él, entonces  $\theta_1 + \theta_2 \geq \theta$  y hay una línea de visión.

## Apéndice C: Tiempo sidéreo y día Juliano

Para deducir la órbita de un satélite o cuerpo celeste a partir de las observaciones se requiere, entre otras cosas, registrar el tiempo de cada observación. El tiempo que se usa en la vida cotidiana es el tiempo Solar. Se calcula por el movimiento del Sol a través del cielo. Un día Solar es el tiempo requerido para que el Sol regrese a la misma posición de arriba, es decir, para situarse en el mismo meridiano.

Un día Solar desde mediodía hasta mediodía comprende 24 h. El tiempo universal (UT) está determinado por el paso del Sol a través del meridiano de Greenwich, que es cero grados de longitud terrestre. Al mediodía UT, el Sol se encuentra en el meridiano de Greenwich. La hora estándar local, o la hora civil, se obtiene de la UT agregando 1 h para cada zona horaria entre Greenwich y el sitio, medida hacia el oeste. El tiempo sidereal se mide por la rotación de la tierra en relación con las estrellas fijas. El tiempo que le toma a una estrella distante volver a su misma posición sobre la cabeza, es decir, para recostarse en el mismo meridiano, es un día sidereal (24 horas siderales). La órbita de la tierra alrededor del Sol hace que el día sidereal sea un poco más corto que el día Solar. Un día sidereal es de 23 horas y 56 minutos. Expresándolo de otro modo, la tierra gira  $360^\circ$  en un día sidereal, mientras que gira  $360,986^\circ$  en un día Solar.

El tiempo sidereal local  $\theta$  de un sitio es el tiempo transcurrido desde que el meridiano local del sitio pasó a través del equinoccio vernal. El número de grados (medidos hacia el este) entre el equinoccio vernal y el meridiano local es el tiempo sidereal multiplicado por 15. Para conocer la ubicación de un punto en la tierra en cualquier instante en relación con el marco ecuatorial geocéntrico se requiere conocer su tiempo sidereal local. El tiempo sidereal local de un sitio se determina determinando primero el tiempo sidereal de Greenwich  $\theta_G$  (el tiempo sidereal del meridiano de Greenwich) y luego sumando la longitud Este (o restando la longitud Oeste) del sitio. Los algoritmos para determinar el tiempo sidereal se basan en la noción de día juliano.

El número de día juliano es el número de días desde el mediodía UT del 1 de enero de 4713 a. C. El origen de esta escala de tiempo se coloca en la antigüedad de modo que, a excepción de los eventos prehistóricos, no se tiene que lidiar con fechas positivas y negativas. El recuento de días julianos es uniforme y continuo y no implica años bisiestos o diferentes números de días en diferentes meses. El número de días entre dos eventos se encuentra simplemente restando el día juliano de uno del otro. El JD comienza al mediodía en lugar de a la medianoche para que los astrónomos que observan los cielos por la noche no tengan que lidiar con un cambio de fecha durante su vigilancia.

El sistema de numeración del día juliano no debe confundirse con el calendario juliano, que el emperador romano Julio César introdujo en el 46 a. C. El calendario gregoriano, introducido en 1583, ha suplantado en gran medida al calendario juliano y hoy en día es de uso civil común en gran parte del mundo.

$J_0$  es el símbolo para el número del día juliano a las 0 h UT (que está a medio camino del día juliano). En cualquier otra UT, el día juliano está dado por:

$$JD = J_0 + \frac{UT}{24} \quad (53)$$

Existen algoritmos y tablas para obtener  $J_0$  del año ordinario ( $y$ ), mes ( $m$ ) y día ( $d$ ) en la literatura y en la World Wide Web. Una de las fórmulas más simples se encuentra en Boulet (1991).

$$J_0 = 367y - INT \left\{ \frac{7 \left[ y + INT \left( \frac{m+9}{12} \right) \right]}{4} \right\} + INT \left( \frac{275m}{9} \right) + d + 1.721.013,5 \quad (54)$$

Donde  $y$ ,  $m$  y  $d$  se encuentran dentro de los siguientes rangos:

$$1901 \leq y \leq 2099$$

$$1 \leq m \leq 12$$

$$1 \leq d \leq 31$$

INT ( $x$ ) significa retener Solo la parte entera de  $x$ , sin redondear (o, en otras palabras, redondear hacia cero), es decir, INT (-3.9) = -3 o INT (3.9) = 3.

## Apéndice D: Cálculo de los vectores de posición Tierra-Luna

Para calcular los vectores de posición entre la tierra y la luna, que determinan las perturbaciones originadas por la luna en un satélite, se puede proceder de la siguiente forma:

El vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}$  que une el centro de la tierra y de la luna en un sistema de referencia geocéntrico se puede calcular de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos \delta \cos \lambda \hat{\mathbf{I}}' + \cos \delta \sin \lambda \hat{\mathbf{J}}' + \sin \delta \hat{\mathbf{K}}' \quad (55)$$

En donde  $\lambda$  es la longitud de la eclíptica lunar y  $\delta$  su latitud. Nótese que si  $\delta = 0$ , esta expresión se reduce a la del Sol.

Las componentes de  $\hat{\mathbf{u}}$  en un sistema de referencia geocéntrico ecuatorial son:

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{u}}\}_{XYZ} &= [\mathbf{R}_1(-\varepsilon)]\{\hat{\mathbf{u}}\}_{X'Y'Z'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \lambda \\ \sin \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \lambda \\ \cos \varepsilon \cos \delta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \delta \\ \sin \varepsilon \cos \delta \sin \lambda + \cos \varepsilon \sin \delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

La posición geocéntrica ecuatorial de la luna es  $\mathbf{r}_m = r_m \hat{\mathbf{u}}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_m &= r_m \cos \delta \cos \lambda \hat{\mathbf{I}} + r_m (\cos \varepsilon \cos \delta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \delta) \hat{\mathbf{J}} \\ &\quad + r_m (\sin \varepsilon \cos \delta \sin \lambda + \cos \varepsilon \sin \delta) \hat{\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (57)$$

La distancia entre la tierra y la luna puede obtenerse de:

$$r_m = \frac{R_E}{\sin HP} \quad (58)$$

Siendo  $R_E$  el radio ecuatorial de la tierra y HP la paralaje horizontal (Ilustración 30).

Las fórmulas para calcular la variación de la longitud eclíptica lunar  $\lambda$ , la latitud de la misma  $\delta$ , y la paralaje horizontal HP según *The Astronomical Almanac* (National Almanac Office, 2013) son las siguientes:

$$\lambda = b_0 + c_0 T_0 + \sum_{i=1}^6 a_i \sin(b_i + c_i T_0) \quad (0^\circ \leq \lambda < 360^\circ) \quad (59)$$

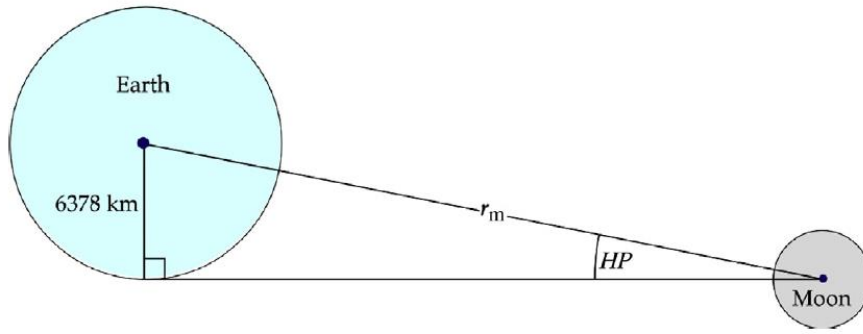


Ilustración 30 Paraleje horizontal HP. (Curtis, 2014)

$$\delta = \sum_{i=1}^4 d_i \sin(e_i + f_i T_0) \quad (0^\circ \leq \lambda < 360^\circ) \quad (60)$$

$$HP = g_0 + \sum_{i=1}^4 g_i \cos(h_i + k_i T_0) \quad (0^\circ \leq \lambda < 180^\circ) \quad (61)$$

Donde  $T_0$  es el número de siglos Julianos desde J2000 del actual día Juliano JD.

$$T_0 = \frac{JD - 2.451.545,0}{36.525} \quad (62)$$

Recuerde de la sección anterior que para el movimiento aparente del Sol alrededor de la Tierra, el Almanaque usa  $n$ , el número de días desde J2000, para la variable de tiempo en lugar del número de siglos  $T_0$  que se emplea para el movimiento de la luna. La relación entre  $n$  y  $T_0$  es:

$$n = 36.525 T_0 \quad (63)$$

En términos de  $T_0$ , la oblicuidad de la eclíptica es:

$$\varepsilon = 23,439^\circ - 0,0130042 T_0 \quad (64)$$

Los coeficientes de las fórmulas anteriores se encuentran en la siguiente tabla:

Tabla 12 Coeficientes para el cálculo de la posición lunar (Curtis, 2014)

<b>i</b>	<b>Longitud <math>\lambda</math></b>			<b>Latitud <math>\delta</math></b>			<b>Paralaje Horizontal HP</b>		
	<b><math>a_i</math></b>	<b><math>b_i</math></b>	<b><math>c_i</math></b>	<b><math>d_i</math></b>	<b><math>e_i</math></b>	<b><math>f_i</math></b>	<b><math>g_i</math></b>	<b><math>h_i</math></b>	<b><math>k_i</math></b>
0	-	218,32	481.267,881	-	-	-	0,9508	-	-
1	6,29	135,0	477.198,87	5,13	93,3	483.202,03	0,0518	135,0	477.198,87
2	-1,27	259,3	-413.335,36	0,28	220,2	960.400,89	0,0095	259,3	-413.335,38
3	0,66	235,7	890.534,22	-0,28	318,3	6.003,15	0,0078	253,7	890.534,22
4	0,21	269,9	954.397,74	-0,17	217,6	-407.332,21	0,0028	269,9	954.397,70
5	-0,19	357,5	35.999,05	-	-	-	-	-	-
6	-0,11	106,5	966.404,03	-	-	-	-	-	-

## Apéndice E: Modelo de la atmósfera.

A continuación, se describe el modelo atmosférico empleado en este trabajo.

Por simplicidad, el modelo empleado, como se ha mencionado anteriormente, es el modelo exponencial USSA76, la *US estándar Atmosphere 1976*.

El modelo consiste en aproximar la variación de la densidad  $\rho$  según la ley:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h - h_0}{H}\right) \quad (65)$$

Donde  $h$  es la altura del satélite,  $h_0$  es una altura de referencia y  $H$  un factor de escala.

Los valores anteriores se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 13 Variación de las características atmosféricas con la altitud útil para la construcción del modelo exponencial de la atmósfera terrestre. (Mengali, y otros, 2013)

<b>h</b>	<b>h<sub>0</sub></b>	<b>ρ<sub>0</sub></b>	<b>H</b>	<b>h</b>	<b>h<sub>0</sub></b>	<b>ρ<sub>0</sub></b>	<b>H</b>
[km]	[km]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[km]	[km]	[km]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[km]
0-25	0	1,225	7,249	150-200	150	2,070x10-9	23,523
25-30	25	3,899x10-2	3,349	180-200	180	5,464x10-10	29,740
30-40	30	1,774x10-2	6,682	200-250	200	2,789x10-10	37,105
40-50	4	3,972x10-3	7,554	250-300	250	7,248x10-11	45,546
50-60	50	1,057x10-3	8,382	300-350	300	2,418x10-11	53,628
60-70	60	3,206x10-4	7,714	350-400	350	9,158x10-12	53,298
70-80	70	8,770x10-5	6,549	400-450	400	3,725x10-12	58,515
80-90	80	1,905x10-5	5,779	450-500	450	1,585x10-12	60,828
90-100	90	3,396x10-6	5,382	500-600	500	6,967x10-13	63,822
100-110	100	5,297x10-7	5,877	600-700	600	1,454x10-13	71,835
110-120	110	9,661x10-8	7,263	700-800	700	3,614x10-14	88,667
120-130	120	2,438x10-8	9,473	800-900	800	1,170x10-14	125,64
130-140	130	8,484x10-9	12,636	900-1000	900	5,245x10-15	181,05
140-150	140	3,845x10-9	16,149	1000→	1000	3,019x10-15	268,00



## Bibliografía

**CSSI. 2000.** NORAD Two-Line Element Sets. [En línea] 16 de 12 de 2000. [Citado el: 03 de 09 de 2019.] <https://www.celestrak.com/NORAD/elements/>.

**Curtis, Howard D. 2014.** *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Waltham : Elsevier, 2014.

**ESA. 2015.** *ESA Space Debris Mitigation Compliance Verification Guidelines*. Noordwijk : ESA, 2015. ESA Space Debris Mitigation WG.

—. **2019.** *ESA's Annual Space Environment Report*. Darmstadt : ESA, 2019. ESA Space Debris Office.

—. **2002.** *Update of the ESA Space Debris Mitigation Handbook*. 2002. Executive Summary.

**FAA.** Advanced Aerospace Medicine. Vol. 3, 4.

**HYPERSCHALL TECHNOLOGIE GÖTTINGEN GMBH.** [En línea] <https://www.htg-gmbh.com/en/home/>.

**IADC. 2007.** *IADC Space Debris Mitigation Guidelines*. 2007.

**ISO. 2018.** *ISO 24113*. 2018. International Standard.

**J. Larson, Wiley y R. Wertz, James. 2005.** *Space Mission Analysis and Design*. El segundo : The Space Technology Library, 2005.

**Mengali, Giovanni y A. Quarta, Alessandro. 2013.** *Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale*. Pisa : Pisa University Press srl, 2013.

**THE AUSTRALIAN SPACE WEATHER AGENCY. 1999.** *Satellite Orbital Decay Calculations*. Sydney : Australian Government Bureau of Meteorology, 1999. IPS RADIO AND SPACE SERVICES.

*The Orbital Debris Problem*. **J.-C. Liou, PhD NASA Chief Scientist for Orbital Debris. 2016.** Pasadena, California : NASA, 2016. Space Tech Conference. pág. 21.