

# Verificación de la evolución de la mortalidad a través de los años

Ana Debón Aucejo

Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad.

Edificio I3. Universidad Politécnica de Valencia.

C/ Camino de Vera s/n. 46022 Valencia.

Tf: +34.963877007 ext 74961; Fax: +34.963877499

E-mail: andeau@eio.upv.es

## RESUMEN

Típicos enfoques de análisis y graduación de la mortalidad se basan en la no dinamicidad, y por tanto estabilidad de ésta, para periodos largos de tiempo. Por el contrario, este artículo está enfocado sobre un factor relevante en la evolución de la misma, como es el tiempo cronológico.

Así pues, el objetivo de este trabajo es analizar la influencia que tiene el tiempo cronológico en las probabilidades anuales de muerte de un individuo de edad  $x$ ,  $q_x$ , cuando las probabilidades están tanto graduadas (suavizadas) como sin graduar (sin suavizar).

Para ello, se calculan las estimaciones de dichas probabilidades con datos del INE de la Comunidad Valenciana, referidos estos a diferentes periodos de tiempo.

Los resultados del estudio empírico parecen confirmar la existencia de diferencias entre las experiencias de mortalidad y comportamientos correspondientes a periodos de tiempo cronológico distintos tanto para hombres como para mujeres.

Estas conclusiones ratifican una vez más, la utilidad de las tablas de mortalidad dinámicas en el ámbito de las operaciones actuariales.

**Palabras clave:** Contrastes no paramétricos, Graduación, Mortalidad dinámica, Tablas de mortalidad.

## 1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho reconocido por la literatura actuarial más reciente que la mortalidad evoluciona a lo largo del tiempo. Ratificar este hecho en el ámbito territorial de la Comunidad Valenciana constituye el objetivo fundamental de este trabajo. Pretendemos pues, poner de relieve lo débil que es la metodología clásica de obtención de tablas de mortalidad a partir de modelos paramétricos y no paramétricos basados en la hipótesis de estacionariedad. Y, por tanto, de la perpetuación del comportamiento de la mortalidad para un periodo de tiempo largo.

La estructura del presente trabajo es la siguiente: en la sección 2 revisamos los antecedentes teóricos en la graduación de datos; a continuación, en la sección 3 describimos los tests clásicos para la comparación de mortalidades y los aplicamos a las correspondientes estimaciones brutas de las probabilidades de muerte; en la sección 4, describimos la graduación de las probabilidades; en la sección 5, realizamos la comparación gráfica de las diferencias entre las medidas de mortalidad tanto para las brutas como para las graduadas, poniendo así de relieve la diferente evolución para cada una de las edades; la última sección está dedicada a las conclusiones y futuras líneas de trabajo.

Concretamente, la graduación de datos de mortalidad se efectuará según la metodología del CMI Bureau<sup>1</sup> a través de modelos lineales generalizados y la comparación gráfica se realizará con splines implementado, todo ello en el paquete estadístico S-plus.

Concluimos que las diferencias son significativas y que por tanto la mortalidad es un fenómeno dinámico.

## 2. ANTECEDENTES TEÓRICOS DE LA GRADUACIÓN DE DATOS

El interés por el estudio de la graduación de la mortalidad se ha realizado fundamentalmente al amparo de dos grandes enfoques: el paramétrico y el no paramétrico. Estos enfoques relacionan la probabilidad de muerte de un individuo con la

edad que tiene dicho individuo. Y asumen la hipótesis de que las diferentes probabilidades de fallecimiento asociadas a dos individuos de edades similares (que no iguales) no serán destacables. Esto es, se debe poder observar una función suave, sin picos.

Entre ambos enfoques, la diferencia fundamental radica en que si bien los métodos paramétricos proporcionan una función que expresa la relación entre las probabilidades de muerte y la edad, los no paramétricos obtienen unos nuevos valores en los que sólo se ha realizado un suavizado. Sin embargo, estos últimos carecen de capacidad para realizar extrapolaciones para edades no incluidas en la graduación. Esto es especialmente restrictivo cuando se trata de elaborar tablas dinámicas de mortalidad. Algunas de las limitaciones de ambos enfoques se encuentran analizadas en Villalón (1968).

Por otra parte, Congdon (1993) expone ampliamente las ventajas de los métodos paramétricos, particularmente porque facilitan las comparaciones de los datos a lo largo del tiempo y del espacio, en la línea de las conclusiones principales de este artículo.

El Instituto y Facultad de Actuarios de Londres (CMI Bureau), que tiene su origen en 1924, surge ya con la pretensión de realizar la recolección continua de datos de mortalidad para la construcción de tablas estándar y su posterior uso en la industria de los seguros de vida y muerte de Gran Bretaña. La metodología usada con más frecuencia por el CMI Bureau para producir tales tablas generaliza modelos clásicos como los de B. Gompertz (1825) y W. Makeham (1860) y ha sido descrita especialmente por Forfar et al. (1988). Este trabajo ofrece pues, una adecuada descripción sobre diferentes aspectos referidos a la graduación de datos y sus derivaciones actuariales, concretamente: a) en la aplicación de estos métodos a diferentes datos de colectivos asegurados, b) en el estudio de medidas de la bondad de estos ajustes, y c) en los contrastes no paramétricos para el análisis de las diferencias de mortalidad. Este último aspecto lo analizaremos ampliamente a continuación, pues ha sido desarrollado por diversos autores de nuestro interés que, como expondremos en un

---

<sup>1</sup> Continuous Mortality Investigation Bureau.

apartado posterior, han adaptado esta metodología a modelos lineales generalizados y la han utilizado para el desarrollo de modelos dinámicos.

### 3. CONTRASTES NO PARAMÉTRICOS. REVISIÓN Y APLICACIÓN

Para contrastar si las estimaciones de las probabilidades de muerte varían su comportamiento a lo largo del tiempo cronológico, hemos aplicado los tests descritos en Forfar et al (1988). Aunque originalmente dichos tests se describen para aplicarse sobre las fuerzas de mortalidad, han sido ya utilizados en el trabajo de Felipe y Guillén (1999) para datos de la población española adaptándolos a las estimaciones brutas de sus probabilidades,  $q_x$ . Para profundizar en las operaciones de seguros y en la notación actuarial es recomendable el texto de Villalón (1997). En esta sección nosotros comentamos brevemente los contrastes aplicados para la comparación y la notación seguida.

Supongamos que tenemos dos experiencias de mortalidad I y II, que en nuestro caso corresponden a dos periodos de tiempo, medidas con sus correspondientes probabilidades de muerte de la forma,

$$q_x^I = \frac{D_x^I}{E_x^I}, \quad q_x^{II} = \frac{D_x^{II}}{E_x^{II}}$$

a partir de las cuales podemos construir la experiencia de mortalidad agrupada según la probabilidad de muerte,

$$q_x = \frac{D_x^I + D_x^{II}}{E_x^I + E_x^{II}}.$$

Si las dos experiencias son similares se parecerán ambas a la resultante de su agrupación y podrán, por tanto, representarse según ésta. La hipótesis nula correspondiente es que las medidas de mortalidad son iguales para las dos experiencias.

Los contrastes propuestos por Forfar et al. (1988) suponen, inicialmente, que los fallecidos en cada edad siguen una distribución normal y requieren que el número

esperado de muertes sea mayor que 5 ( $D_x^I + D_x^{II} > 5$ ). En el caso de que no fuera así se agruparían las edades necesarias para conseguirlo.

### Test de los signos

Consiste en aplicar el test de signos a las diferencias  $q_x^I - q_x^{II}$ , puesto que bajo la hipótesis nula de igualdad entre ambas, el número de diferencias positivas se distribuye  $Bi(n, 0.5)$ , con  $n$  número de edades consideradas. Una alternativa es el test de rango de signos de Wilcoxon, que da más peso a los pares que tienen una diferencia de magnitud más elevada.

### Test de rachas

Consiste en aplicar el test de rachas a las diferencias anteriores; si ambas mortalidades son semejantes, los signos positivos y negativos deben aparecer de manera aleatoria.

### Test Chi-cuadrado

Con las desviaciones relativas de cada mortalidad, calculadas a partir de la estimación conjunta de la probabilidad de muerte,

$$z_x^I = \frac{D_x^I - E_x^I q_x}{\sqrt{E_x^I q_x (1 - q_x)}}, \quad z_x^{II} = \frac{D_x^{II} - E_x^{II} q_x}{\sqrt{E_x^{II} q_x (1 - q_x)}},$$

calculamos,

$$\chi^2 = \sum_x (z_x^I)^2 + (z_x^{II})^2,$$

que se distribuye como una  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad. Valores pequeños del estadístico indicarían que ambas mortalidades tienen un comportamiento similar. Para valores altos de  $\chi^2$  no necesariamente llegamos a la conclusión contraria, deberíamos

inspeccionar detenidamente las  $z_x^I$  y  $z_x^{II}$ , observando que las diferencias no se deban a unas pocas edades.

El primer paso en el estudio empírico lo constituye el cálculo de las estimaciones brutas de la medida de mortalidad elegida para diferentes periodos del calendario; tarea para la cual recurrimos a la expresión que habitualmente utiliza el INE<sup>2</sup>

$$q_{xt} = \frac{0.5(D_{xt} + D_{x(t+1)})}{P_{xt} + 0.5D_{xt}},$$

donde  $D_{xt}$  son los fallecidos en el año  $t$  a la edad  $x$ ,  $D_{x(t+1)}$  los fallecidos en el año  $t+1$  a la edad  $x$  y  $P_{xt}$  población que a 31 de diciembre del año  $t$  tiene edad  $x$ .

Las cifras de población que vamos a utilizar son las correspondientes al periodo 1980-2000 en la Comunidad Valenciana. Dado que los censos de población se realizan cada 10 años, son recuentos verdaderos los de los años 1981, 1991 y 2001, siendo el resto de cifras estimaciones intercensales. Estos datos han sido obtenidos de dos publicaciones del INE, "Evolución de la población de España entre los Censos de 1981 y 1991 (INE 1996)" y "Estimaciones intercensales entre los Censos de 1991 y 2001" (cifras provisionales).

Dado que sólo poseemos las defunciones clasificadas por edad, utilizaremos la hipótesis de uniformidad, aspecto este último ampliamente utilizado en la literatura actuarial, aunque de dudosa credibilidad, ya que supone que la distribución equiprobable de las muertes a lo largo del año. En nuestro caso, el análisis año tras año de las diferencias concluyó que no eran significativas, de forma que este análisis no era lo suficientemente determinante para incorporar la influencia del tiempo cronológico en nuestro estudio. Esto puede ser debido a la mencionada hipótesis de uniformidad, ya que la estimación de las probabilidades brutas supone calcular la media entre dos años consecutivos, y por tanto, suavizar de alguna forma las diferencias. Este problema podría resolverse si pudiéramos utilizar la doble clasificación de los fallecimientos según la edad y años de nacimiento como Felipe y Guillén (1999) hacen en su trabajo.

---

<sup>2</sup> Instituto Nacional de Estadística.

Dada pues la limitación de nuestros datos, para tratar de detectar las diferencias, si realmente existen, hemos recurrido a un nuevo análisis que consiste en comparar tres periodos de tiempo a distancia tal que la suavización mencionada no tenga efecto. Los resultados de la comparación gráfica se muestran en la Figura 1, mientras que en las Tablas 1 y 2 se recogen los resultados de tests para hombres y mujeres, respectivamente. No ha sido necesario llevar a cabo ninguna agrupación de edades porque el número esperado de fallecimientos era superior a 5 en todas ellas.

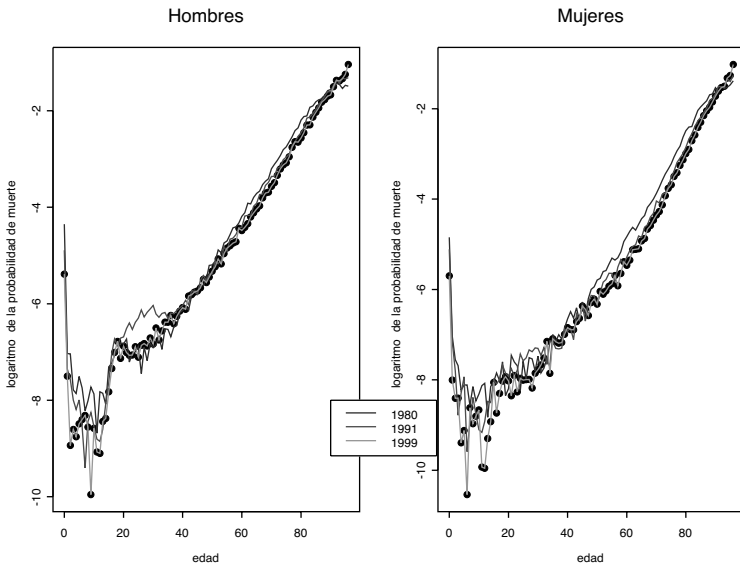


Figura 1: Comparación de las mortalidades

	HOMBRES		
	1980-1991	1991-1999	1980-1999
Pos.	60	85	69
Significación	0.9928	1	0.9999
Test Wilcoxon	2.96	6.75	4.67
Significación	0.0030	1.44e-11	3.06e-06
Test rachas	7	19	17
Significación	0.0312	0.2448	0.0695
Test $\chi^2$	453.35	268.99	789.29
Significación	0	0	0

Tabla 1: Contrastes para los hombres

	MUJERES		
	1980-1991	1991-1999	1980-1999
Pos.	75	76	84
Significación	1	1	1
Test de Wilcoxon	5.61	5.87	6.51
Significación	2.03e-08	4.30e-09	7.20e-11
Test de rachas	19	27	13
Significación	0.08548995	0.26	0.018
Test $\chi^2$	603.54	259.60	1385.58
Significación	0	1.11e-016	0

Tabla 2: Contrastes para las mujeres

De las Tablas 1 y 2 se deduce el distinto comportamiento de los pares de años estudiados. Las diferencias se han calculado restando las probabilidades de muerte del año mayor a las del menor. Como se observa, en la mayoría de los casos, son positivas, lo que pone de manifiesto la disminución de la mortalidad a medida que avanza el calendario. Todos los tests conducen al rechazo de la hipótesis de igualdad, excepto el



test de rachas que la acepta para algunas de las diferencias. Conviene señalar que en el caso del test de la  $\chi^2$  las diferencias relativas para cada año son elevadas para la mayoría de las edades.

#### 4. GRADUACIÓN DE LAS $q_x$ BRUTAS

Como indicábamos anteriormente, para iniciar el proceso de estudio de la significatividad de las diferencias de las probabilidades de muerte graduadas, vamos a describir la metodología que hemos utilizado para tal fin.

Para ajustar una función, que describa su relación con la edad  $x$ , a las probabilidades de muerte  $q_x$ , hay que tener en cuenta la hipótesis de que no hay cambios bruscos de una edad a otra. Podemos, por tanto, ajustar determinadas funciones que cumplan con dicha hipótesis.

En nuestro caso hemos elegido las Gompertz-Makeham ( $GM(r,s)$ ) y sus transformadas *logit* ( $LGM(r,s)$ ), siendo la definición de unas y otras la siguiente:

$$GM(r,s) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x^{i-1} + e^{\sum_{i=1}^s \alpha_j x^{j-1}}$$

y

$$LGM(r,s) = \frac{GM(r,s)}{1 + GM(r,s)}$$

Las funciones originales constan, como puede observarse, de una parte polinómica con  $r$  parámetros y una exponencial con  $s$ , de tal forma que son un total de  $(r+s)$  parámetros los que hay que determinar. Para ello maximizamos la función de verosimilitud, previa elección del modelo probabilístico Binomial.

Una referencia de la utilización de estas funciones es el trabajo de Navarro (1991), el primero en aplicar a datos españoles estas funciones así como los diferentes test que Forfar, et al. (1988) presentan en su trabajo.

Es posible reformular esta metodología del CMI Bureau usando los esquemas de modelos lineales. Si hemos de estimar los parámetros de las funciones Gompertz-Makeham que mejor ajustan los valores brutos, conocidas las correspondientes distribuciones, no podemos recurrir a modelos lineales clásicos por motivos obvios de no linealidad de las funciones presentadas.

La experiencia en graduación usando modelos lineales generalizados ha sido recopilada en la literatura actuarial por Renshaw (1991) y Verrall (1996) que se ocupan de su implementación en S-plus.

En nuestro caso hemos graduado las probabilidades brutas mediante modelos lineales generalizados, con distribución Binomial y link complementario log-log, utilizando un polinomio de grado 10.

La selección del grado del polinomio la hemos realizado a partir de la significatividad de la Deviance y del valor del estadístico  $C_p$ , tal y como se describe en el trabajo de Debón et al. (2002).

Presentamos pues la Tabla 3 con los valores obtenidos, donde la Deviance correspondiente al primer modelo es el valor total, mientras que las restantes corresponden a la diferencia para así ver si resulta significativa. A partir de esta tabla se deduce que, para los hombres y las mujeres en el año 1991 se seleccionaría el polinomio de grado 9, mientras que para 1980 y 1999 el modelo sigue mejorando. En cualquier caso, como lo que queremos es graduar las probabilidades con fórmulas similares para estudiar las diferencias y no queremos tener muchos parámetros, hemos decidido dejar la graduación con el polinomio de grado 10 que proporciona buenos resultados.

<b>HOMBRES</b>									
<b>Gra-</b>	<b>1980</b>			<b>1991</b>			<b>1999</b>		
<b>do</b>	<b>Deviance</b>	<b>Pr(Chi)</b>	<b>Cp</b>	<b>Deviance</b>	<b>Pr(Chi)</b>	<b>Cp</b>	<b>Deviance</b>	<b>Pr(Chi)</b>	<b>Cp</b>
1	3596.834		3602.21	1872.182		1876.26	1061.306		1065.17
2	1380.04	0	2224.86	969.95	0	908.35	1061.306	0	475.51
3	1119.80	0	1107.76	126.50	0	783.89	76.2039	0	401.24
4	149.77	0	960.67	0.06	0.81	785.87	6.5995	0.01	396.57
5	267.06	0	696.30	114.78	0	673.14	71.0696	0	327.44
6	125.81	0	573.17	209.03	0	466.14	60.4546	0	268.92
7	234.84	0	341.02	292.25	0	175.94	68.0326	0	202.82
8	159.45	0	184.26	67.93	0	110.05	77.3659	0	127.39
9	30.44	346-08	156.51	3.99	0.05	108.10	24.9243	0	104.40
10	8.06	0.005	151.14	0.11	0.74	110.02	3.9131	0.05	102.42
<b>MUJERES</b>									
	<b>Deviance</b>	<b>Pr(Chi)</b>	<b>Cp</b>	<b>Deviance</b>	<b>Pr(Chi)</b>	<b>Cp</b>	<b>Deviance</b>	<b>Pr(Chi)</b>	<b>Cp</b>
1	3070.218		3073.82	2289.444		2292.93	1556.448		1558.90
2	1664.84	0	1410.77	1545.14	0	749.54	1167.67	0	392.46
3	725.83	0	686.76	252.87	0	498.41	71.68	0	322.01
4	37.87	001	650.69	0.74	0.39	499.41	0.002	0.96	323.23
5	345.92	0	306.57	248.59	0	252.56	163.27	0	161.19
6	27.41	16e-07	280.97	41.66	0	212.65	34.64	0	127.78
7	66.34	0	216.43	58.91	0	155.49	7.94	0.005	121.07
8	95.29	0	122.94	60.22	0	97.01	35.60	0	86.70
9	18.27	1e-05	106.47	8.76	0.0031	90	9.61	0.002	78.31
10	8.33	0.004	99.94	0.70	0.40	91.07	12.44	0.0004	67.10

Tabla 3: Estadísticos de comparación de diferentes modelos

### 5. COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS DIFERENCIAS DE LAS $q_x$

Para analizar si las diferencias se comportan igual a lo largo de todas las edades, Felipe y Guillén (1999) utilizan un ratio que denominan E75 y que compara las diferentes mortalidades con la del año 1975. En el trabajo citado estas autoras recogen claramente las diferentes alternativas para la comparación de las experiencias de mortalidad a través de los valores brutos de las probabilidades, de sus logaritmos graduados o sin graduar.

El método que hemos utilizado se basa en el análisis gráfico mediante el suavizado splines de las diferencias de las estimaciones brutas de las transformaciones de las probabilidades de muerte. Otros trabajos, Haberman y Renshaw (1999), proponen graduar las diferencias entre los logaritmos de las fuerzas de mortalidad, es decir,

$$Z_x = \log(\mu^I_{x+1/2}) - \log(\mu^{II}_{x+1/2})$$

según splines con ponderaciones,

$$\omega_x = \frac{D_x^I D_x^{II}}{D_x^I + D_x^{II}}.$$

Ahora, tomamos los splines como mejor solución de equilibrio entre la bondad del ajuste y la suavidad para describir las diferencias entre las mortalidades de los diferentes años.

Como nosotros utilizamos las  $q_x$ , estudiemos graduar la transformación  $\log(-\log(1-q_x))$  y elijamos los grados de libertad mediante validación cruzada (Venables y Ripley, 1997). La elección de dicha transformación viene justificada pues, por la relación entre ambas medidas de mortalidad,

$$q_x \cong 1 - \exp(-\mu_{x+1/2})$$

de forma que despejando,

$$\log(1 - q_x) \cong -\mu_{x+1/2}$$

y por tanto,

$$\log(-\log(1 - q_x)) \cong \log(\mu_{x+1/2}).$$

Las gráficas de las diferencias y su correspondiente graduación mediante splines se muestran en la Figura 2 para los hombres y en la Figura 3 para las mujeres.

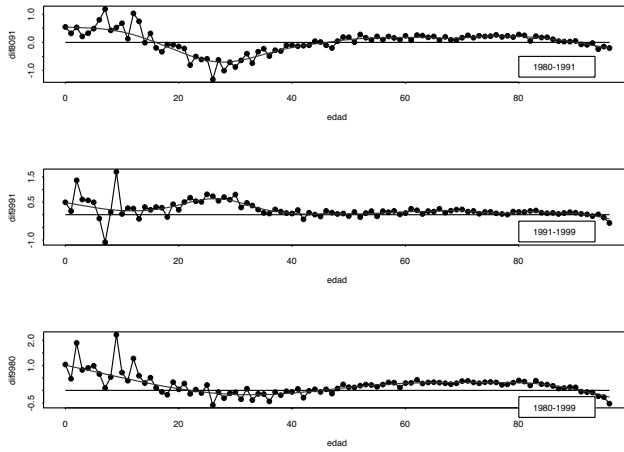


Figura 2: Diferencias de  $\log(-\log(-q_x))$  brutos para los hombres

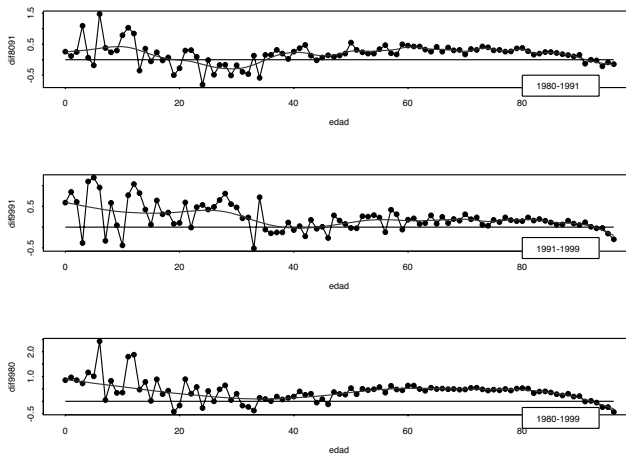


Figura 3: Diferencias de  $\log(-\log(-q_x))$  brutos para las mujeres

Alternativamente pueden graduarse las probabilidades como ya hemos descrito en la sección 4 para después calcular las diferencias.

Esta otra forma tiene la ventaja de no presentar problemas cuando el número de muertes observadas es 0 para una edad determinada.

Después hemos calculado las diferencias entre las predicciones de las transformaciones (complementario log-log ) de las probabilidades de muerte, obteniendo las gráficas de las Figuras 4 y 5 muy similares a las anteriores.

En las gráficas de los hombres, Figuras 2 y 4, puede verse que la mortalidad de 1991 respecto a 1980 ha disminuido, salvo para las edades entre 20 y 40 años. Mientras que la de 1999 respecto a 1991 ha disminuido para el conjunto de edades sobre todo para el intervalo de 20 a 40. En términos globales las probabilidades de muerte de 1991 han disminuido respecto a las de 1980, aunque hay un pequeño aumento para el mismo intervalo de edades.

En el caso de las mujeres, Figuras 3 y 5, la mortalidad ha disminuido en 1991 respecto a 1980, salvo para el rango de edades de entre 20 y 35 años, donde parece aumentar aunque en menor grado que para el sexo masculino. En el siguiente periodo, 1991-1999, parecen existir disminuciones apreciables para edades inferiores a 35, manteniéndose parecida para el resto de edades. En el periodo global 1980-1999, la mortalidad ha disminuido para el total de edades, manteniéndose la igualdad sólo entre 30 y 40.

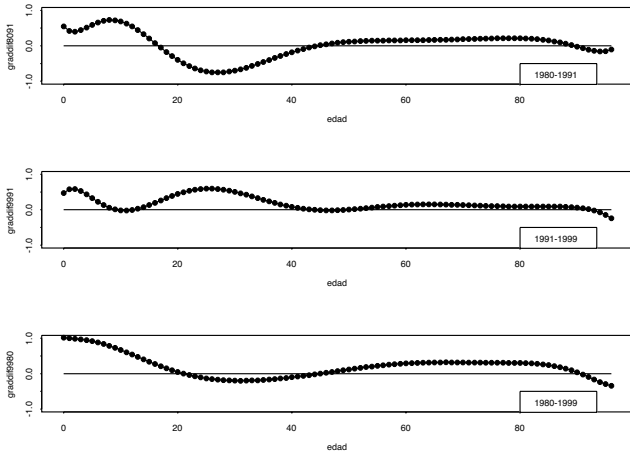


Figura 4: Diferencias de  $\log(-\log(-q_x))$  graduados para los hombres

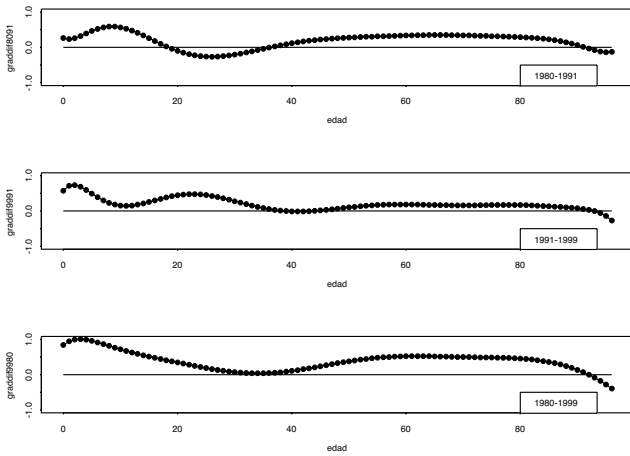


Figura 5: Diferencias de  $\log(-\log(-q_x))$  graduados para las mujeres

## 6. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

Hemos obtenido medidas para verificar las diferencias entre las experiencias de mortalidad correspondientes a periodos cronológicos distintos para cada uno de los sexos. Así mismo, hemos comprobado la existencia de diferencias entre dichas experiencias tanto para los hombres como para las mujeres. La comparación gráfica de las diferencias suavizadas muestra un comportamiento distinto a lo largo del rango de edades consideradas.

Los resultados obtenidos afirman una vez más la validez que tienen las tablas de mortalidad dinámicas para el cálculo de primas y demás operaciones actuariales de los seguros de vida. Por tanto, es consecuente con la publicación de las tablas de mortalidad dinámicas PERM/F 2000 aplicadas al caso español.

Un futuro desarrollo de nuestro trabajo iría en la dirección de introducir y desarrollar metodologías adecuadas para el tratamiento de la dinamicidad de la mortalidad con datos estadísticos más concretos. Esto es, insistiendo en la influencia que tiene el tiempo cronológico en el desarrollo de las tablas de mortalidad, de forma que, nos proporcione una expresión analítica de la relación entre la probabilidad de muerte y la edad y el tiempo cronológico, con la que podríamos obtener predicciones para periodos futuros. Una herramienta estadística adecuada para ello la constituyen los modelos lineales generalizados tal y como pone de manifiesto el trabajo de Renshaw et al. (1996).



## BIBLIOGRAFÍA

- BETZUEN, A., FELIPE, A., GUILLEN, M. (1997). Modelos de tablas de mortalidad en España y situación actual. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera época, núm. 3, 79-104.
- CONGDOM, P. (1993). Statistical graduation in local demographic analysis and projection. *Journal of the Royal Statistical Society*, 156(2), 237-270.
- DEBÓN, A., MONTES, F., SALA, R. (2002). Graduación de datos de mortalidad y modelos lineales generalizados. *X Jornadas ASEPUMA*, Madrid.
- FORFAR, D.O., MCCUTCHEON, J.J., WILKIE, A.D. (1988). On graduation by mathematical formula. *Journal of Institute of Actuaries*, 115, 1-135.
- GOMPERTZ, B. (1825). On the nature of the function of the law of human mortality an on a new mode of determining the value of life contingencies. *Transactions of The Royal Society*, 115, 513-436.
- HABERMAN, S., RENSHAW, A. E. (1999). A simple graphical method for the comparison of two mortality experiences. *Applied Stochastic Models in business and Industry*, 15, 333-352.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (1996). *Evolución de la población de España entre los censos 1981 y 1991*. INE
- FELIPE, M. Y GUILLÉN, M. (1999). *Evolución y Predicción de las Tablas de Mortalidad Dinámicas para la Población Española*. Cuadernos de la Fundación, Fundación Mapfre Estudios.
- MAKEHAM, W. (1860). On the law of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 13, 325-358.
- NAVARRO, E. (1991). *Tablas de mortalidad de la población española 1982. Metodología y fuentes*. Madrid, Mapfre.
- RENSHAW, A.E., HABERMAN, S., HATZOPOULOS, P. (1996). The modelling of recent mortality in united kingdom male assured lives. *British Actuarial Journal*, 2(II), 449-477.
- RENSHAW, A.E (1991). Actuarial graduation practice and generalized linears a non-linear models. *Journal of Institute of actuaries*, 118(II), 295-312.
- VENABLES, W.N., RIPLEY, B.D. (1997). *Modern Applied Statistics with S-plus*. 2ª Edición. Springer-Verlag, New York.

- VERRALL, R.J. (1996). A unified framework for graduation, *Actuarial Research*. Paper No. 91. Department of Actuarial Science and Statistics, City University London, November.
- VILLALÓN, J.G. (1968). Sobre los métodos de graduación clásicos y sus limitaciones. *De Economía*, (99). Madrid.
- VILLALÓN, J.G. (1997). Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas. Pirámide, Madrid.