Viscoelasticidad. Modelo básico de Maxwell.

Apellido, nombre	Balart Gimeno, Rafael Antonio (rbalart@mcm.upv.es) Montañés Muñoz, Néstor (nesmonmu@upvnet.upv.es) Quiles-Carrillo, Luís Jesús (luiquic1@epsa.upv.es) Torres-Giner, Sergio (storresginer@iata.csic.es) Lascano Aimacaña, Diego (dielas@epsa.upv.es) Rojas Lema, Sandra (sanrole@epsa.upv.es) Ivorra Martínez, Juan (juaivmar@epsa.upv.es)
Departamento	Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales (DIMM)
Centro	Escuela Politécnica Superior de Alcoy (EPSA) Universitat Politècnica de València (UPV)

1 Resumen de las ideas clave.

En este artículo vamos a trabajar con los **modelos matemáticos** que se emplean para explicar los fenómenos **viscoelásticos** en materiales. Considerando que la **viscoelasticidad** define el comportamiento **híbrido** de **sólidos elásticos** y **líquidos viscosos** y que los elementos físicos que representan el comportamiento básico elástico y viscoso son un **muelle** y un **émbolo**, respectivamente, este artículo se centra en el modelo básico de viscoelasticidad de **Maxwell** que considera el acoplamiento en **serie** de estos elementos físicos.

2 Introducción.

Los materiales plásticos y, en particular, los **polímeros termoplásticos** presentan una **naturaleza dual** [1]. Por un lado, presentan un comportamiento de **sólido elástico** que permite su uso como materiales de ingeniería en aplicaciones que van desde baja responsabilidad hasta aplicaciones altamente tecnológicas. No obstante, además de este comportamiento elástico, debido a su estructura, en forma de ovillo, estos materiales también presentan un cierto comportamiento de "**líquido viscoso**". Las características principales de estos dos comportamientos, se deducen de la observación de la **Figura 1**.

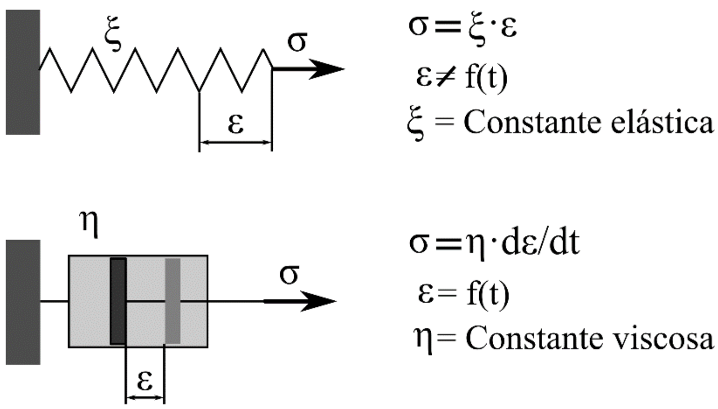


Figura 1. Representación esquemática del comportamiento de sólidos elásticos puros (arriba) y líquidos viscosos puros (abajo).

Como podrás deducir, el **comportamiento elástico** puro se representa por el modelo físico de un **muelle** o **resorte** y la relación entre la tensión aplicada (σ) y la elongación (ε) es proporcional a la constante elástica del muelle (ξ), según la **Ley de Hooke**. En esta expresión **no** aparece la variable **tiempo**, con lo cual, es razonable pensar que la **respuesta elástica** es **inmediata** y no varía con el paso del tiempo [2,3].

En relación al **comportamiento** puramente **viscoso**, cuya modelización queda plasmada con un **émbolo** o **pistón** con un determinado fluido en su interior, la relación entre la tensión aplicada (σ) y la elongación (ε) es la que define la **Ley de Newton**. Esta establece que la tensión aplicada (σ) es proporcional a la variación de la elongación con el tiempo ($d\varepsilon/dt$) y la constante de proporcionalidad es la constante viscosa del émbolo o pistón (η), o **viscosidad**. Como en la expresión aparece la derivada de la elongación con respecto del tiempo (dε/dt), es lógico pensar que la respuesta que ofrecen los **líquidos viscosos depende** de la **variable tiempo** [4,5].

Como se ha descrito previamente, los materiales **poliméricos** presentan un comportamiento **híbrido** entre el puramente elástico y puramente viscoso, de ahí que tengan un comportamiento "**viscoelástico**". Para estudiar el comportamiento viscoelástico, cualquier **modelo físico** debe contener al menos un **émbolo** y un **resorte**. Cuando el émbolo y el resorte se acoplan en **serie**, el modelo resultante es el modelo de viscoelasticidad de **Maxwell**, que representa una base sólida para llevar a cabo el análisis de los fenómenos ligados a la viscoelasticidad: **fluencia** y **relajación** [6].

3 Objetivos.

El objetivo de este artículo docente es que puedas **deducir** la **expresión** general que rige el comportamiento viscoelástico según el **modelo de Maxwell**. A partir de esta expresión general, el artículo te guiará en el estudio de los fenómenos de **fluencia y relajación**, definiendo su **validez** y sus **limitaciones** como modelo viscoelástico.

4 Desarrollo.

El modelo de Maxwell contempla el acoplamiento de un muelle y un émbolo en serie tal y como se muestra en la **Figura 2**. Se trata de un modelo de **dos parámetros** que se corresponden con la **constante elástica** del muelle (ξ) y la **constante viscosa** del fluido en el émbolo (η).

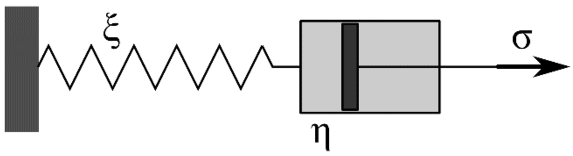


Figura 2. Representación esquemática del modelo viscoelástico de Maxwell con acoplamiento en serie de un resorte y un émbolo.

Si aíslas cada uno de los elementos del modelo de Maxwell y consideras la tensión y la elongación correspondientes a cada elemento (**1**=resorte; **2**=émbolo) (**Figura 3**), podrás llevar a cabo un análisis para la deducción de la expresión general del modelo de Maxwell. *Simplemente observando la **Figura 3**, ¿podrías decir cómo será la elongación resultante? Y en relación a la tensión, ¿qué opinas sobre la tensión en cada uno de los elementos?*

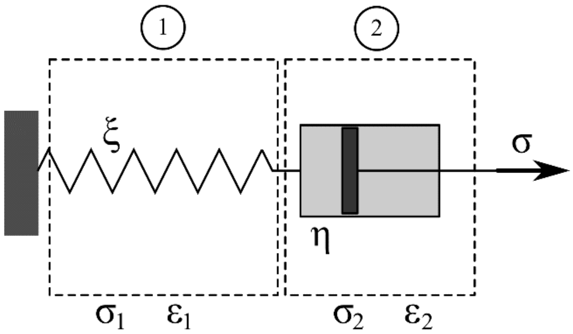


Figura 3. Representación esquemática del modelo de Maxwell con las tensiones y elongaciones en cada uno de los componentes.

Según la **Figura 3**, puedes hacer las siguientes consideraciones:

Elemento puramente elástico [resorte]

σ_1 tensión soportada por el resorte
ε_1 elongación producida en el resorte al aplicar la tensión σ_1
ξ constante elástica del resorte

Elemento puramente viscoso [émbolo]

σ_2 tensión soportada por el pistón
ε_2 elongación producida en el émbolo al aplicar la tensión σ_2
η constante viscosa del fluido en el émbolo

De la observación del modelo gráfico (**Figura 3**) podrás deducir claramente que la elongación total (ε) se corresponderá con la suma de las elongaciones (**Expresión 1**) en cada uno de los elementos (que se pueden estimar según la Ley de Hooke para el resorte y según la Ley de Newton para el émbolo). En cuanto a las tensiones, la tensión total (σ), no se reparte entre los componentes; es idéntica en el resorte y en el émbolo. Es lo que denominados el principio de igualdad de tensiones tal y como se muestra en la **Expresión 1**.

$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ [Principio igualdad de tensiones]
$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ [Adición de deformaciones] **Expresión 1**

Ahora intenta llevar a cabo el análisis parcial en cada uno de los elementos. Para obtener la expresión general del modelo de Maxwell, basta con aplicar la hipótesis de adición de elongaciones. Para ello, debes intentar ***evaluar la elongación*** *en cada uno de los modelos según la expresión correspondiente. ¡Inténtalo antes de continuar con la lectura del artículo!*

La ecuación básica que rige el comportamiento elástico del resorte es la Ley de Hooke, que establece la proporcionalidad entre la tensión aplicada y la elongación producida (**Expresión 2**).

$\sigma_1 = \xi \cdot \varepsilon_1$ **Expresión 2**

Si en la **Expresión 2**, despejas la elongación y aplicas derivadas con respecto al tiempo, obtienes la variación de la elongación en el resorte con el tiempo (**Expresión 3**).

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\xi} \quad \Rightarrow \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt}$$ **Expresión 3**

Venga, ahora que ya sabes cómo se ha aplicado la deducción en el elemento elástico, *¡intenta avanzar en la deducción con el* ***componente viscoso****!* Como bien sabes, la ecuación básica que rige el comportamiento del émbolo es la Ley de Newton, que establece la proporcionalidad entre la tensión aplicada y la velocidad de deformación (**Expresión 4**)

$$\sigma_2 = \eta \cdot \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$ **Expresión 4**

En la **Expresión 4**, puedes despejar la variación de la elongación en el émbolo con el tiempo, obteniendo la **Expresión 5**.

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma_2$$ **Expresión 5**

Teniendo en cuenta la adición de las deformaciones (**Expresión 1**), se puede llevar a cabo la derivada con respecto del tiempo tal y como se muestra en la **Expresión 6** y substituir los valores de las derivadas de las elongaciones con respecto al tiempo ($d\varepsilon_1/dt$ y $d\varepsilon_2/dt$) tal y como se ha deducido en la **Expresión 3 y 5**:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{1}{\eta} \cdot \sigma_2$$ **Expresión 6**

Además, en relación a las tensiones, es aplicable el principio de isotensión: $\boldsymbol{\sigma = \sigma_1 = \sigma_2}$**,** de tal manera que la ecuación general de viscoelasticidad según el modelo de Maxwell queda tal y como se muestra en la **Expresión 7**.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \cdot \sigma$$ **Expresión 7**

A partir de esta expresión general o básica del modelo de Maxwell, vamos a deducir las expresiones que rigen el comportamiento reológico a **fluencia**, **relajación** y recuperación de materiales plásticos con comportamiento viscoelástico y evaluar sus ventajas y limitaciones.

4.1 Fluencia según el modelo de Maxwell.

Como ya sabes, la **fluencia** consiste en la **elongación** creciente con el paso del tiempo, bajo la acción de una **tensión constante**. Así pues, la condición básica de fluencia es $\boldsymbol{\sigma}$ = cte, de tal manera que $\frac{d\sigma}{dt} = 0$. Substituyendo en la ecuación general del modelo de Maxwell (**Expresión 7**), se deriva la siguiente expresión.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\eta}\cdot\sigma \quad \Rightarrow d\varepsilon = \frac{1}{\eta}\cdot\sigma\cdot dt$$ **Expresión 8**

Si integras la ecuación diferencial de la **Expresión 8**, obtienes la variación de la elongación en función del tiempo, o fluencia (**Expresión 9**).

$$\varepsilon\,(t)=\frac{1}{\eta}\cdot\sigma\cdot t+Cte$$ **Expresión 9**

*Teniendo en cuenta la naturaleza de la respuesta elástica y de la respuesta viscosa ¿Cuál crees que será el valor de la **constante de integración**?* La constante hace referencia al alargamiento inicial (ε_0) que soporta el muelle o resorte en el instante inicial (t=0), de tal manera que la constante de integración tiene un valor de $\frac{\sigma_0}{\xi}$, tal y como establece la Ley de Hooke en el resorte. Esta expresión indica que la fluencia según el modelo de Maxwell se produce de forma lineal con el tiempo. Para un determinado nivel de tensiones σ_0, la expresión quedaría tal y como se muestra en la **Expresión 10**.

$$\varepsilon\,(t)=\varepsilon_0+\frac{\sigma_0}{\eta}\cdot t=\frac{\sigma_0}{\xi}+\frac{\sigma_0}{\eta}\cdot t=\sigma_0\cdot\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta}\cdot t\right)$$ **Expresión 10**

*A partir de la información que muestra la **Expresión 10** sobre la fluencia, ¿podrías indicar el valor de la elongación para t=0 y para $t\rightarrow\infty$?* En la **Figura 4**, tienes una representación gráfica de la fluencia según el modelo de Maxwell.

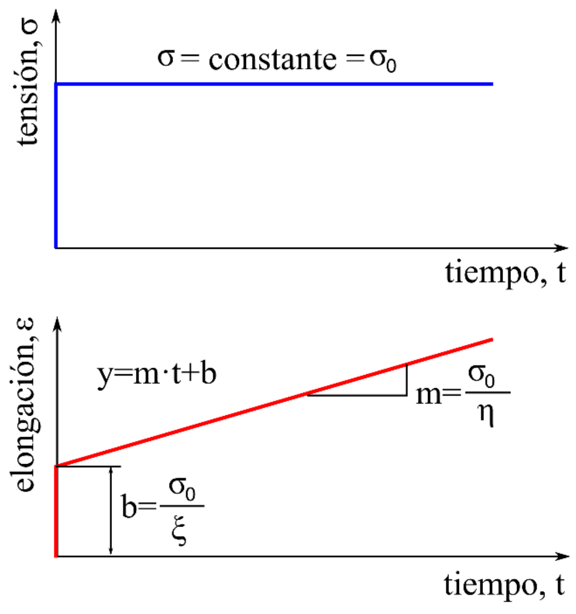


Figura 4. Representación esquemática del fenómeno de fluencia según el modelo viscoelástico de Maxwell.

Como habrás podido intuir, la elongación inicial tiene un valor de $\frac{\sigma_0}{\xi}$, y se corresponde con la elongación inicial del resorte. Este hecho es bastante real ya que para tiempos muy bajos ($t \rightarrow 0$), el componente que actúa es el resorte. El modelo de Maxwell explica muy bien la elongación inicial en un proceso de fluencia. Sin embargo, tal y como sugiere la expresión lineal creciente, para $t \rightarrow \infty$, la elongación continua creciendo hasta ∞. Esta situación que predice el modelo de Maxwell no se adapta a la realidad ya que, en general, la fluencia alcanza valores asintóticos con el tiempo. Por otro lado, el crecimiento que predice el modelo de Maxwell es de tipo lineal y los datos reales indican que la fluencia se produce según una ley exponencial. Así pues, el modelo de Maxwell acierta en algunos aspectos ligados a la fluencia, pero muestra ciertas debilidades con relación a otros aspectos de la fluencia.

Además de conocer la evolución de la elongación con el tiempo, el modelo de Maxwell permite estimar el valor del módulo del material con el paso del tiempo, módulo de fluencia o de plastodeformación. Esto se puede conseguir a través de una analogía con la expresión general de la Ley de Hooke $\varepsilon = \sigma \cdot \frac{1}{E}$. *Teniendo en cuenta esta expresión, ¿podrías determinar la variación del módulo con el tiempo?* Como habrás deducido, se pueden identificar términos ($\varepsilon(t) = \sigma \cdot \frac{1}{E(t)}$) y obtener la expresión del módulo de fluencia o plastodeformación, tal y como se muestra en la **Expresión 11**.

$$E_{plast}(t) = \frac{1}{\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \cdot t} = \frac{\xi \cdot \eta}{\eta + \xi \cdot t}$$

Expresión 11

4.2. Relajación de tensiones según el modelo de Maxwell.

Cuando una pieza o componente trabaja en condiciones de elongación constante, se produce una **liberación** o **relajación de tensiones** ya que el material tiene tendencia a fluir como consecuencia del desenrollamiento de la estructura de ovillo. No obstante, al restringir la elongación, el material reorganiza la estructura interna y cada vez necesita menos tensión para mantener la elongación estipulada.

Así pues, si el material se somete a una elongación constante, $\varepsilon = \varepsilon_0 = cte$, su variación con el tiempo es nula; es decir $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$. Si substituyes este término en la ecuación general del modelo de Maxwell (**Expresión 7**), obtienes la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \cdot \sigma$$

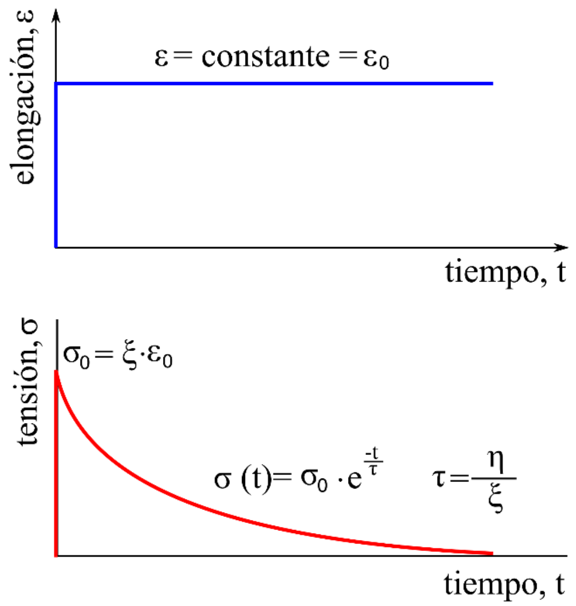
Expresión 12

Esta es una ecuación diferencial lineal del tipo $\sigma' + P(t) \cdot \sigma = Q(t)$. La resolución de esta ecuación diferencial con las condiciones iniciales $\sigma = \sigma_0$ para $t = t_0$ conduce a la expresión:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{-\left[\frac{\xi}{\eta}\right] \cdot t} \quad \text{donde} \quad \frac{\eta}{\varepsilon} = \text{Constante de tiempo}$$

Expresión 12

Esta expresión indica que la liberación de tensiones o relajación en el material, según el modelo de Maxwell, se produce según una exponencial decreciente desde el valor de tensión inicial (σ_0) necesario para alcanzar el nivel de elongación $\varepsilon=\varepsilon_0=$cte, tal y como se muestra en la **Figura 5**.



El análisis de la **Expresión 12** es bastante útil para conocer el valor de la tensión inicial (σ_0) y el nivel de liberación de tensiones para tiempos muy altos. *Intenta razonar el valor de la constante σ_0 (para t=0) y el nivel de liberación de tensiones para $t\rightarrow\infty$.*

Con relación a la tensión inicial (σ_0) necesaria para para conseguir un determinado nivel de elongación, basta con substituir t=0 en la **Expresión 12**. En estas condiciones, el resorte es el único componente que trabaja, de tal manera que el valor de la tensión inicial, se puede estimar según la Ley de Hooke como $\sigma_0 = \xi \cdot \varepsilon_0$. En cuanto a la liberación de tensión para $t\rightarrow\infty$, basta con substituir el tiempo en la **Expresión 12** cuando $t\rightarrow\infty$ y se obtiene que la tensión para este tiempo es 0. Es decir, el material libera totalmente la tensión inicial.

Según los valores anteriores y la expresión de relajación derivada del modelo de Maxwell, se puede afirmar que se trata de un modelo bastante sólido en tanto en cuanto estima la tensión inicial (σ_0) de forma adecuada y la liberación de tensiones cuadra con los fenómenos observados en la realidad. No obstante, el modelo de Maxwell presenta una limitación importante; la realidad indica que la liberación de tensiones no es absoluta o completa, sino que alcanza un valor asintótico con el paso del tiempo. Como has visto previamente, el modelo de Maxwell predice que la liberación de tensiones es total, hecho que no está corroborado por los resultados experimentales. De nuevo, puedes observar que le modelo de Maxwell acierta en ciertos aspectos ligados a la relajación, pero falla en otros.

5. Conclusiones

El estudio de materiales con comportamiento **elástico** queda perfectamente definido a través de la **Ley de Hooke**. Con relación a los materiales **viscosos**, su comportamiento se rige según la **Ley de Newton**. No obstante, los materiales poliméricos presentan un comportamiento **viscoelástico** que engloba una respuesta elástica (inmediata y definida por la Ley de Hooke) y una respuesta viscosa (dependiente del tiempo y definida por la Ley de Newton). Considerando que los elementos físicos representativos del comportamiento elástico y viscoso son un **resorte** y un **émbolo** con un fluido, respectivamente, los modelos viscoelásticos deben considerar la **combinación** de, al menos, un elemento elástico (resorte) y un elemento viscoso (émbolo con fluido). Con ello es posible definir diversos **modelos físicos** que pueden acercar al estudio del comportamiento viscoelástico.

El modelo de **Maxwell** es uno de los modelos más sencillos que aborda la viscoelasticidad y, para ello, considera el **acoplamiento** de un resorte y un émbolo **en serie**. En el modelo de Maxwell los elementos elástico y viscoso trabajan en condiciones de **isotensión** y **adición de elongaciones**, de tal manera que es posible deducir la expresión básica del modelo. A partir de esta expresión básica, se puede llevar a cabo el estudio de diversos fenómenos ligados a la viscoelasticidad.

En cuanto a la **fluencia** o elongación creciente con el tiempo bajo la acción de tensión constante, merece la pena destacar que el modelo de Maxwell predice una fluencia de tipo lineal creciente, con un valor inicial ligado a la elongación del componente elástico (resorte) y una pendiente ligada al componente viscoso (émbolo). Si bien el modelo de Maxwell explica adecuadamente la elongación inicial, los datos experimentales indican que la fluencia no se produce de forma lineal, sino según un proceso exponencial.

Con relación a la **relajación** o liberación de tensiones bajo la acción de una elongación constante, el modelo de Maxwell considera una tensión inicial ligada al componente elástico y una liberación de tensiones de tipo exponencial decreciente hasta valores de tensión nulos. Si bien el modelo exponencial decreciente es bastante cercano a la realidad, los datos experimentales de relajación en materiales indican que no se libera toda la tensión.

A pesar de las carencias o limitaciones de este modelo, es importante destacar su utilidad para llevar a cabo un análisis de los **fenómenos viscoelásticos** de forma sistemática y comprender los fenómenos asociados a la viscoelasticidad.

6. Referencias

[1] Phan-Thien, Nhan "Understanding viscoelasticity", Ed. Springer (2002).

[2] Ferry, John D. "Viscoelasticity properties of polymers". John Wiley & Sons (1980).

[3] Aklonis, John J. "Introduction to polymer viscoelasticity". John Wiley & Sons (1983).

[4] Valiente Camacho, A, "Curso de comportamiento mecánico de materiales, elasticidad y viscoelasticidad.". García-Maroto Editores (2014).

[5] Lin, Y.-H., "Polymer viscoelasticity: basis, molecular theories, experiments and simulations", Ed. World Scientific, (2011).

[6] Ward, I.M., Sweeney, J. "An introduction to the mechanical properties of solid polymers". John Wiley & Sons (2004).