



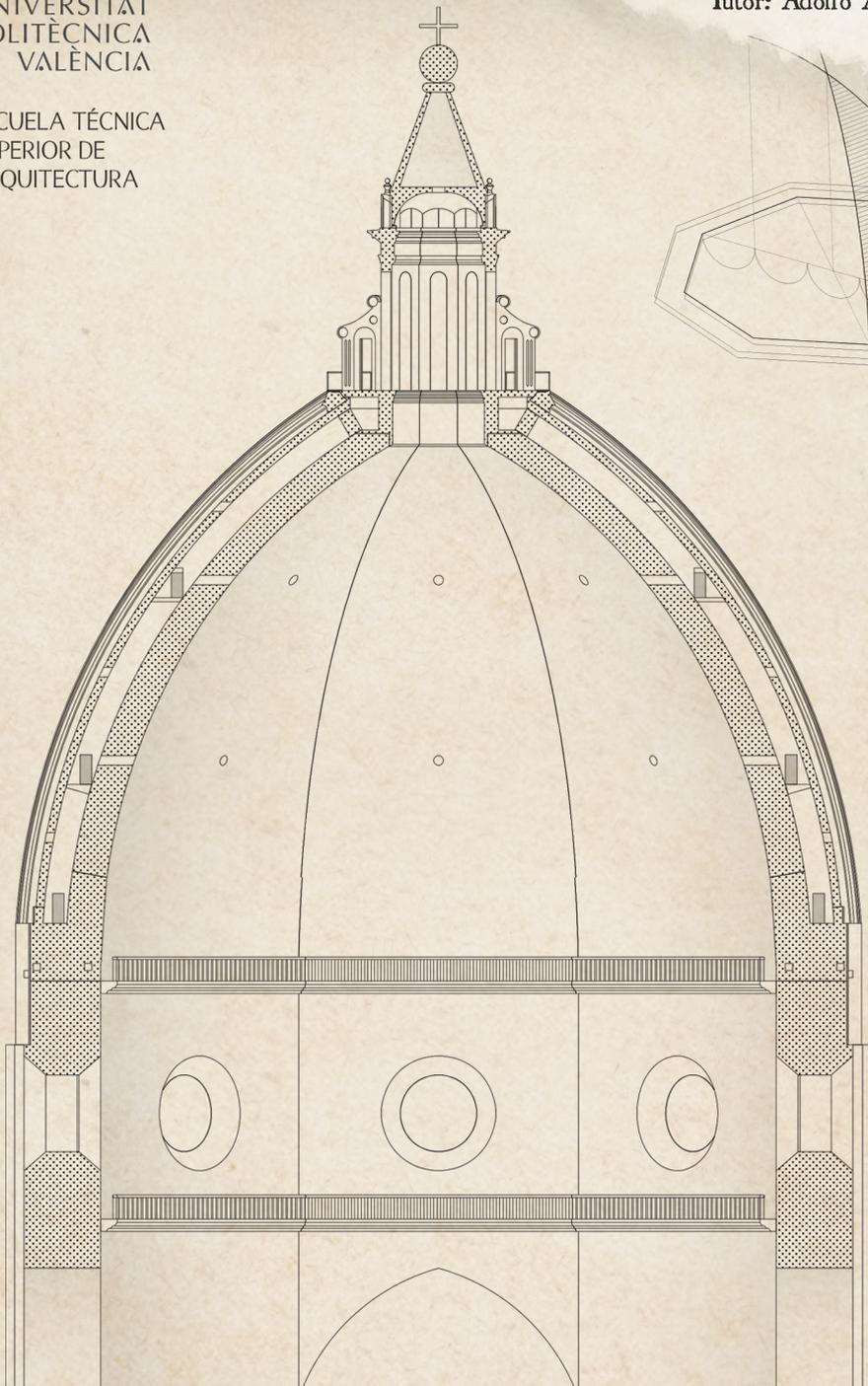
UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ESCUELA TÉCNICA
SUPERIOR DE
ARQUITECTURA

Autor: Alejandro Tarrazona Perla

Tutor: Adolfo Alonso Durá



TRABAJO FINAL DE GRADO 2018-2019

HISTORIA, CONSTRUCCIÓN Y ESTRUCTURA DE LA CÚPULA DE SANTA MARÍA DEL FIORE

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA
GRADO EN FUNDAMENTOS DE LA ARQUITECTURA



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ESCUELA TÉCNICA
SUPERIOR DE
ARQUITECTURA

TRABAJO FIN DE GRADO:
**HISTORIA, CONSTRUCCIÓN Y ESTRUCTURA DE LA CÚPULA
DE SANTA MARÍA DEL FIORE**

Autor: Alejandro Damián Tarrazona Perla

Tutor: Adolfo Alonso Durá

Universidad Politécnica de Valencia
Escuela Técnica Superior de Arquitectura

Grado en Fundamentos en la Arquitectura. Curso 2018-2019

ÍNDICE

TEMA	7
01_ OBJETIVOS.....	11
02_ METODOLOGÍA	13
03_ INTRODUCCIÓN.....	15
04_ HISTORIA	17
4.1 Los inicios de la catedral.....	17
4.2 Filippo Brunellesco	18
4.3 El concurso de la nueva cúpula	19
4.4 Construcción	21
4.5 El último concurso.....	23
4.6 El grande e ingenioso Filippo Brunelleschi	24
05_ GEOMETRÍA Y CONSTRUCCIÓN.....	27
5.1 La geometría básica de la cúpula	27
5.2 Ilustraciones de detalle	33
5.3 Modelado de la cúpula	39
5.4 Construcción de la gran estructura	46
06_ ANÁLISIS ESTRUCTURAL	57
6.1 Metodología	57
6.2 Materiales	57
6.3 Mallado sólidos	58
6.4 Cálculo lineal	59
6.5 Cálculo no lineal.....	66
07_ ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	77
6.1 Estudio fisurativo	77
6.2 Comparación resultados.....	80
08_ CONCLUSIONES.....	83
10_ BIBLIOGRAFÍA	85

TEMA

La cúpula de Santa María del Fiore es uno de los grandes hitos de la historia de la arquitectura, con ella se cierra el Gótico y empieza el Renacimiento italiano. Su construcción sigue dejando hoy en día muchas dudas pendientes de resolver.

Resumen

A través de un estudio de su historia y de posteriores teorías, se pretende entender cómo fue posible que en el siglo XIV se llevase a cabo una obra de tal envergadura. Se lleva a cabo un modelo tridimensional de la cúpula tal y como fue proyectada para posteriormente analizarlo.

El primer análisis es el constructivo, mediante las teorías más recientes estudiaremos cómo se llevó a cabo la construcción de la cúpula, además de los sistemas que Brunelleschi diseñó para hacerlo posible.

El segundo análisis es el estructural, compuesto por dos fases, el cálculo lineal y el no lineal. Con el segundo, se obtienen resultados más precisos con los que somos capaces de determinar tanto el estado actual, como el caso hipotético de carga máxima con el que la estructura alcanzaría el colapso.

Para finalizar, compararemos los resultados arrojados por el análisis estructural con el cuadro de fisuración actual.

Resum

La cúpula de Santa María del Fiore es un de les grans fites de la història de l'arquitectura, amb ella es tanca el Gòtic i comença el Renaixement italià. La seua construcció continua deixant hui dia molts dubtes pendents de resoldre.

A través d'un estudi de la seua història i de posteriors teories, es pretén entendre com va ser possible que en el segle XIV es duiguera a terme un obra de tal envergadura. Es realitza un model tridimensional de la cúpula tal i com va ser projectada per a posteriorment analitzar-lo.

E l primer anàlisis és el constructiu, mitjançant les teories més recents estudiarem com es va dur a terme la construcció de la cúpula, a més dels sistemes que Brunelleschi va dissenyar per a fer-ho possible.

El segon anàlisis es el estructural, compost per dues fases, el càlcul lineal i el no lineal. Amb el segon, s'obtenen resultats més precisos amb els quals som capaços de determinar tant l'estat actual, com el cas hipotètic de càrrega màxima amb el qual l'estructura arribaria al col·lapse.

Per finalitzar, comparem els resultats obtinguts per l'anàlisi estructural amb el quadre de fissuració actual.

Abstract

The dome of Santa María del Fiore is one of the greatest milestones in the history of architecture. With it the Gothic ends and starts the Italian Renaissance. This construction still leaves today many doubts unsolved.

Through a study of its history and subsequent theories, we are going to try to understand how was it possible that in the XIV century a work of such magnitude could be built. A three-dimensional model of the dome is carried out as it was projected, for a further analysis.

The first analysis is the constructive, through the most recent theories we are going to study how the construction of the dome was carried out, in addition to the systems that Brunelleschi designed to make it possible.

The second analysis is the structural, composed of two phases, the linear calculation and the non-linear. With the last one, we can obtain more accurate results, in order to determine the current status, as the hypothetical case of maximum load in which the structure would collapse.

Finally, we will compare the results of the structural analysis with the current cracking table.

01_ OBJETIVOS

Mediante el TFG se pretende poner en práctica lo aprendido durante el grado en el ámbito de las estructuras así como ampliar los conocimientos hacia un campo diferente al habitual, mediante el análisis de estructuras históricas realizadas con fábricas.

Tomaremos como objeto de estudio la cúpula de Santa María del Fiore, de Florencia. Por la complejidad de la obra realizaremos un estudio histórico y constructivo que nos ayude a entender esta estructura y poder obtener un modelo tridimensional a partir del cual analizaremos la cúpula frente a las cargas gravitatorias de su propio peso.

Debido a su carácter, Brunelleschi no dejó planos debido a que no quería que sus técnicas fueran descubiertas por otros, "...hacer trampas, despistar, confundir las ideas fue un rastro típico de la personalidad de Brunelleschi" así ha llegado a definir Ricci a Brunelleschi. Consultaremos diversas bibliografías en las cuales se plantean distintas teorías, tanto geométricas, constructivas como estructurales, para así poder contrastarlas entre ellas.

Además, tendremos en cuenta que al tratarse de una estructura con carácter no lineal, deberemos emplear diferentes métodos a los aprendidos durante el grado para poder estudiar con mayor acierto la cúpula. Por consiguiente, realizaremos dos estudios, uno por el método lineal y otro por el método no lineal; los resultados obtenidos serán posteriormente comparados entre sí y, para esclarecer dudas, serán también comparados con el catálogo de lesiones realizado sobre la catedral en los últimos años. De este modo se podrán validar los resultados de los cálculos al superponer las fisuras con los diagramas de daños obtenidos por el cálculo.

Por lo tanto, el principal objetivo es la puesta en práctica de dos métodos de cálculo diferentes aplicados a estructuras clásicas y así poder justificar cual de ellos es válido para esta tipología de estructuras y el porqué.

02_ METODOLOGÍA

Para llevar a cabo un correcto análisis de la cúpula, tenemos que tener en cuenta que nos encontramos ante una de las grandes obras de la historia, dada su complejidad y misterios aún por resolver, por lo que deberemos realizar una toma de datos contrastada y lo más precisa posible.

Empezaremos estudiando tanto la historia de la catedral como la de Brunelleschi, para terminar analizando la de la cúpula en sí.

Para el análisis constructivo, nos apoyaremos en las teorías más recientes como es la de Massimo Ricci, respaldada por cálculos matemáticos y una maqueta que la avalan.

También estudiaremos los dibujos y planos que han llegado hasta la actualidad por parte de diferentes artistas y arquitectos, con todo lo cual poder realizar el modelado de la cúpula así como los elementos más cercanos y relevantes, como pueden ser el tambor y la linterna.

Para el análisis estructural partiremos del modelo 3D en el programa AutoCAD, para posteriormente exportarlo a GID. Se mallará mediante tetraedros y, una vez terminado, se exportará de nuevo a ANGLE, donde se procederá a calcular la estructura mediante los métodos lineal y no lineal, para poder compararlos.

Una vez obtenidos estos resultados, analizaremos el estado fisurativo actual de la cúpula mediante el catálogo realizado por la soprintendenza per i Beni Ambientali e Architettonici y compararemos las fisuras con los resultados del cálculo estructural.

03_ INTRODUCCIÓN

La cúpula de Santa María del Fiore es el icono de Florencia y asoma en su skyline de una forma sorprendentemente majestuosa y perfecta, dominando la ciudad desde las alturas. Con ella se abre una nueva etapa en el mundo del arte, el Renacimiento Italiano.

En los siglos XV y XVI se produce una serie de cambios culturales muy importantes en Europa y a la cabeza de este movimiento estaba Italia donde, cómo no, Florencia era una de las principales sedes del Renacimiento.

Se desata un creciente interés por la cultura clásica que llevará a grandes artistas como Filippo Brunelleschi a buscar en las grandes y antiguas estructuras romanas su inspiración para la construcción de las nuevas obras. Así, por ejemplo, para la cúpula de Santa María del Fiore, Brunelleschi obtuvo su mayor inspiración en el panteón de Agripa, de Roma.

“Brunelleschi fue un adelantado del Humanismo y mentor del Clasicismo Renacentista en estado puro”

“elarquitectoimpenitente.blogspot.com”

Esta obra sorprende por sus grandes dimensiones, las cuales hacen que esta estructura sea uno de los mayores retos jamás construidos, especialmente si tenemos en cuenta la época en que se edificó. Con la tecnología disponible en la Florencia del siglo XV, parece difícil creer que haya sido posible la construcción de esta gran cúpula.

Brunelleschi fue el único arquitecto capaz de poner fin a uno de los mayores debates de la época, culminando su trabajo con esa gran estructura. Por lo tanto y debido a la gran importancia que tiene, hemos querido continuar los estudios realizados hasta el momento de esta obra para conocer mejor los problemas y soluciones que Filippo se encontró y realizar un análisis estructural completo y acorde a las nuevas tecnologías.



3.1_

Vista de Santa María del Fiore desde la plaza de Miguel Angel, Florencia.

(Elaboración propia)

04_ HISTORIA

La catedral de Santa María del Fiore ha sido la culminación de diversas empresas que han trabajado en ella desde finales del siglo XIII.

Fue levantada sobre la antigua iglesia Santa Reparata, la cual tenía unas dimensiones mucho menores que la actual y data del siglo III según lo que apuntan los estudios arqueológicos. Medía unos 60 metros de longitud por 25 de anchura, alrededor de una tercera parte que la actual Santa María del Fiore.

Santa Reparata no fue demolida para la construcción de la nueva catedral, sino que ésta se fue construyendo cercado la iglesia primitiva.

Los conflictos entre ciudades italianas como Pisa o Siena, hizo que Florencia quisiera aumentar su poder construyendo la catedral más grande que se hubiera visto antes, con una gran cúpula.

Así pues, en 1294 se decretó la construcción de la nueva catedral dedicada a Santa María del Fiore sobre la antigua iglesia dedicada a Santa Reparata.

El 8 de septiembre de 1296 se realizó la ceremonia de bendición de la primera piedra de la catedral, aunque según otras fuentes el evento ocurrió en el año 1298. Arnolfo di Cambio fue el arquitecto que debía llevar a cabo la obra, pero falleció algunos años más tarde.

En el año 1321 se asignan las obras a cinco de los siete grandes Gremios "las llamadas Artes" de la ciudad, los cuales se iban turnando anualmente hasta que diez años después se confía al gremio de la Lana, lanzando un sistema de financiamiento de la nueva catedral.

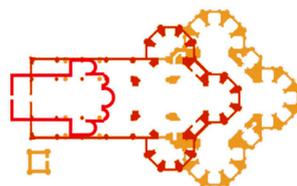
Tras la muerte de Arnolfo di Cambio, el nuevo arquitecto fue Giotto quien, además, diseñó el campanario pero, para desgracia de los florentinos, tres años después del nombramiento murió. Fue enterrado en el Duomo.

Andrea Pisano fue el maestro constructor de la Opera. Centró sus trabajos en el campanario que ya Giotto había empezado años atrás, pero pocos años después sería expulsado de Florencia junto con el duque de Atenas. Según algunas fuentes, fue nombrado de nuevo años más tarde.

En 1350 Francesco Talenti fue nombrado maestro de obras de la catedral. Propuso un modelo nuevo que ampliaba el diseñado por Arnolfo di Cambio. En el año 1366 se unirá a él Giovanni Ghini.

4.1

Los inicios de la catedral



4.1_

Plano de Santa Reparata y de las versiones de Arnolfo di Cambio y por último la de Francesco Talenti (Planta actual)
wikiwand.com

La bóveda de la nave quedó finalizada en 1378, continuando los trabajos de carpintería y cristalerías, al igual que los de las esculturas con artistas como Lamberti, Donatello, Nanni di Banco y Bernardo Ciuffagni.

De esta manera, cien años después de haberse empezado las obras, la catedral se elevaba en el cielo florentino dejando un gran espacio a cielo abierto en el lugar donde se debería construir la mayor cúpula jamás construida.

4.2 Filippo Brunellesco

Filippo Brunellesco Lapi, conocido como Filippo Brunelleschi, nació en el 1377 en Florencia. Era hijo de un notario aunque nunca se sintió atraído por dicha profesión, pues ya desde joven estuvo interesado en las artes y además tenía un gran nivel en matemáticas.

A pesar de la voluntad de su padre de que su hijo fuese también notario, Filippo consiguió su primer puesto de trabajo en el taller del maese Lapo, un orfebre respetado que servía a familias como los Medici y los Albizzi.

Brunelleschi fue coetáneo con artistas como Lorenzo Ghiberti y Donatello y solían reunirse para charlar. Con el paso del tiempo fueron cogiendo nombre y empezaron a ser reconocidos en la ciudad. Siempre estaban hablando de sus ansias por visitar Roma para conocer mejor las construcciones antiguas, ya que sentían un gran interés por lo clásico.

Un verano, la peste asoló de nuevo la ciudad de Florencia y la muerte llamaba puerta por puerta; llegaba cada diez años y siempre en las mismas fechas. El maese Lapo cayó enfermo y Filippo, ante esta nueva situación, decidió marcharse a Roma. Su sueño estaba a punto de lograrse.

Quizás fueron las enormes expectativas sobre Roma las que hicieron que, al llegar allí, le pareciese que la ciudad estaba en ruinas. Poco tiempo después de llegar consiguió trabajo en el taller de Niccolao y en esa época Filippo aprovechaba su tiempo libre fuera del taller estudiando las grandes construcciones clásicas de la ciudad.

Un año más tarde se convocaba en Florencia un concurso para recubrir las puertas del Baptisterio y, ya con la peste finalizada, Brunelleschi decidió volver para participar en dicho concurso.

Florencia era como el ave fénix que resurgía de sus cenizas, pues la ciudad estaba de nuevo en un ambiente estimulante, queriendo reponerse de la herida sufrida. Se cuentan hasta un total de 12.000 muertos en ese año.

Para el concurso se presentaron numerosos artistas, entre ellos los amigos de Brunelleschi, Donatello y Ghiberti, con lo que pasaban a convertirse en contrincantes.

En poco tiempo, el concurso de las puertas fue el tema de conversación principal en la ciudad, hasta el punto de llegar a haber ciertas disputas entre los mismos ciudadanos.

Existen dos relatos contradictorios sobre el veredicto del jurado. Por una parte, se cuenta cómo el ganador fue Ghiberti; esto se dice en ciertos textos, entre ellos su autobiografía "Commentarii" en la que además dice que ganó sin ninguna duda por parte del jurado. Por otra parte, se cuenta que la disputa fue bastante más reñida, hasta el punto de que el tribunal decidió conceder el premio a Lorenzo Ghiberti y a Brunelleschi a la vez, de manera que los dos tendrían que trabajar juntos, pero Filippo se negó rotundamente y renunció.

Fue esta derrota (en cierta parte justa) por parte de Brunelleschi la que hizo que éste se decantase más por la arquitectura en el futuro, dejó de esculpir y nunca más volvería a trabajar el bronce. A continuación abandonó Florencia y se marchó a Roma junto a Donatello.

Entre los dos formaban una buena pareja aunque pasaron una época viviendo en la calle, prácticamente como vagabundos. Dedicaban buena parte de su tiempo a estudiar las ruinas romanas mientras Filippo tomaba anotaciones en su cuaderno. Parecía que estaba buscando algo pero no se sabía qué; anotaba las alturas y proporciones de las construcciones a sabiendas de que en Florencia había proyectada una cúpula que todavía nadie sabía construir. Tal vez se sintiera más interesado por las técnicas de construcción de las antiguas bóvedas debido a esto.

El 19 de agosto de 1418 se anuncia el concurso de la cúpula de Santa María del Fiore. Tras más de un siglo desde el inicio de las obras de construcción, se terminaba el tambor y debía llevarse a cabo el remate de todo el trabajo realizado. El premio consistía en 200 florines, lo cual era una cantidad de dinero muy grande pues era el equivalente al trabajo de hasta dos años.

La obra de la cúpula era un tema que preocupaba a todos, pues no sabían cómo serían capaces de llenar el gran vacío que quedaba en el cielo. No era para menos, debido a que se trata de la cúpula de mayor diámetro jamás construida.

4.3 El concurso de la nueva cúpula



4.2_

Hallado el boceto de Brunelleschi.

“Localizan bajo tierra y junto a la catedral de Santa María del Fiore, en Florencia, los restos de la ‘cupulina’ que el genio renacentista usó para erigir su cúpula.”

15 Diciembre 2012. ElPais.com

Hasta ese momento, la mayor cúpula era la del panteón de Agripa, uno de los edificios de la antigua Roma que Filippo tanto había estudiado en su vida.

Los mandatarios de la Opera asignaron cuatro albañiles a los participantes para ayudar en las tareas de la maqueta. En el caso de Lorenzo trabajaron con él cuatro días cada uno, no fue así con Brunelleschi ya que él les hizo trabajar 90 días en su cúpula, que fue levantada en el patio de la Opera.

Finalmente, la propuesta de Filippo fue recogida con cierta ingenuidad y no recibió el apoyo del jurado. Esto se debe a que su idea fue la más revolucionaria de todas, proponiendo eliminar la cimbra que tantos problemas causaba y construirla sin una subestructura de madera para sustentarla. Filippo, además, se mostraba reacio a contar el sistema que emplearía, lo que hizo que sospechasen aún más si cabe.

Las otras propuestas eran más convencionales: complejas cimbras se deberían levantar para llevar a cabo el proyecto, e incluso se propusieron ideas como la de mezclar tierra con monedas y llenar la catedral de esta mezcla para construir la cúpula a nivel del suelo y que después los florentinos se sintieran dispuestos a ayudar a su retirada.

Tal era la desconfianza que sentían hacia Filippo que se cuenta cómo fue expulsado de malas maneras de una reunión tras una discusión. Tiempo después el proyecto convenció a los mandatarios, no se sabe cómo aunque está claro que el ingenio de Brunelleschi ayudó.

Vasari cuenta la curiosa historia del huevo que pudo influir en la decisión. Esta anécdota cuenta que en una reunión Filippo retó al jurado a dejar un huevo de pie en la mesa, pero tras varios intentos todos fracasaron y finalmente éste desveló el secreto, cogió el huevo rodeándolo con sus manos mientras lo apretaba y, con un golpe en la mesa, rompió un poco la punta de la cáscara, con lo que el huevo se mantuvo en pie. Esto llevó a que los jueces dijeran que ellos también lo podrían haber hecho si lo hubiesen sabido, a lo que les contestó Filippo que de igual manera pasaría con la cúpula, ellos también sabrían hacerla si vieran sus planos.

Esta anécdota sorprendió mucho a los ingenieros y científicos por el mero hecho de que el huevo no se rompió al dar el golpe. Pero de nuevo parecía que la historia se repetía pues al igual que en el concurso de las puertas del Baptisterio, en la que puede entenderse justa la victoria.

de Ghiberti, esta vez volvían a encontrarse los dos como finalistas en el concurso de la cúpula.

Esto fue algo que Brunelleschi no entendía, el cómo era posible que Lorenzo, sin apenas experiencia como arquitecto, pudiera llegar a competir contra él.

Los siguientes meses fueron más tranquilos y el premio no fue concedido finalmente a nadie. Mientras, Filippo recibió encargos en Florencia, así como algunas capillas y el Hospital de los Inocentes.

En la catedral se destituyó de su puesto de capomaestri a Giovanni d'Ambrogio por su avanzada edad y se nombró a Battista d'Antonio, el cual era un albañil que ya había trabajado anteriormente en la catedral. Aun así, no contaba con las capacidades de un arquitecto, por lo que se nombraron a dos capomaestri más, a Filippo y a Lorenzo.

Desde ese momento los dos rivales deberían trabajar juntos, aunque a Filippo no le hacía ninguna gracia y llegó incluso a plantearse dejar el trabajo, pero con todo el tiempo que había dedicado a la cúpula no podía marcharse por las disputas que había entre ellos dos.

Tres meses después de los nombramientos de los nuevos cargos de la empresa, se tomó la decisión más importante en relación con la cúpula, que se construiría tal y como especificó Filippo, siguiendo sus planos y sin ningún tipo de cimbras. El premio de los 200 florines no le fue otorgado, pero aun así, el mero hecho de poder llevar a cabo su proyecto, debió haberle sido suficiente.

El 7 de agosto de 1420 se realizó una celebración en la parte superior de la catedral festejando que, después de muchos años de demora, por fin las obras de la cúpula estaban a punto de empezar.

Los trabajos fueron muy pesados ya que éstos conllevaban muchas horas de trabajo y mal pagadas, además los albañiles no tenían derecho a bajar para descansar en todo el día. A cambio, Brunelleschi pidió que se instalara una cocina en la cúpula para poder darles de comer al mediodía. A pesar de todas las dificultades se emplearon unas medidas de seguridad que lograron que "solo" falleciesen tres personas.

Debido a que se trataba de un proyecto sin precedentes, tenían por seguro que la construcción iba a ser a base de prueba y error, y que deberían ir solucionando los problemas a medida que se los fuesen encontrando.

4.4 Construcción

Filippo era un maestro muy estricto por lo que parece. Los albañiles debían de apuntar su nombre al llegar y sus horas eran contadas con un reloj de arena.

El ejemplo más claro es que Filippo tuvo que diseñar una máquina que permitiese elevar los materiales pesados de la construcción hasta la cúpula. Cada sillar de arenisca podía pesar unas 1.700 kg. El nuevo montacargas sería una de las máquinas más importantes del Renacimiento, teniendo en cuenta que, a diferencia del anterior, este sería tirado por un buey y no por personas, que solían ser esclavos. A esto se le sumaron numerosos mecanismos ideados por él mismo para facilitar la construcción.

Lo que estaba claro es que el que siempre sacaba las castañas del fuego era Brunelleschi y no Lorenzo Ghiberti. Esto acabó cansando a Filippo ya que estaban teniendo la misma consideración, el mismo sueldo y no sólo eso, sino que además se dudaba de cada cosa que él decía y le ponían mil obstáculos para avanzar.

Llegó el punto en el que a Filippo se le ocurrió un plan para quedarse como único arquitecto de la obra, desacreditando a Ghiberti y demostrando a todos que sólo él era capaz de llevar a cabo la construcción. Así pues, repentinamente se quedó en la cama gravemente enfermo mediante una teatral exhibición.

La obra quedó a cargo de Lorenzo, quien no sabía cómo continuar y, dado que Brunelleschi pasó varias semanas sin salir de casa, se llegaron a paralizar los trabajos durante varios días. A pesar de ello Lorenzo no quería delatar su ignorancia y, pese a no saber construir ciertas cosas, se esforzó todo lo que pudo.

El día que Brunelleschi se recuperó "milagrosamente", volvió a supervisar los trabajos y lo primero que hizo fue poner en duda los realizados por Lorenzo, debiendo desmontar la cadena de madera por considerar que estaba mal atada. Se tuvo que hacer finalmente bajo su supervisión, lo que demostró quién debía ser el arquitecto de la obra. Desde ese momento a Brunelleschi le triplicaron el sueldo y Lorenzo fue despedido.

En ocasiones se ha considerado a Brunelleschi el primer arquitecto tal y como conocemos a la figura hoy en día, ya que fue el primero que protestó y luchó por el reconocimiento que tenía merecido. Era el único que sabía construir la cúpula, no podía tener el mismo prestigio que el resto.

Según iba creciendo la cúpula, los problemas iban en aumento, por una parte se hizo una reunión cuando los ladrillos llegaron a un ángulo de 30° para ver si deberían poner cimbra. Esta opción fue descartada por Filippo.

Si ya antes hemos señalado la dureza de Brunelleschi y la exigencia que pedía a sus albañiles, quedará claro cuando un día, debido al despido de parte de los albañiles por no ser necesarios tantos (a más altura menos diámetro, y a menos diámetro menos ladrillos que colocar), el resto se puso en huelga para pedir un aumento salarial, cosa que hoy en día sería lógico ante el trabajo tan duro que debían realizar y las muchas horas que pasaban por una miseria. Aun así, esto iba en contra de las ideas del momento por lo que, para solucionar el problema de una manera eficaz, Brunelleschi despidió a todos. Cuando éstos se vieron sin trabajo le suplicaron que los readmitiese en las obras de la cúpula, a lo cual accedió, pero con una bajada de sueldo.

Otro de los grandes problemas fue el encarcelamiento que sufrió Brunelleschi por impagos al gremio. A pesar de ser cierto, parece que en realidad se trató de una estrategia política porque Filippo había sido un personaje muy activo políticamente y era leal a la familia de los Medici por lo que parece que, bajo el mandato temporal de los Albizzi, su encarcelamiento no había sido una casualidad.

A pesar de todas las trabas, la cúpula llegó a su fin y el 30 de agosto de 1435 hubo una fiesta en Florencia festejando que se había cerrado por fin. Filippo fue el gran héroe del día, concluyendo una obra de ingeniería sin precedentes. Incluso hoy en día sigue siendo la cúpula más grande construida en fábrica. Lo había conseguido. Filippo Brunelleschi había superado las majestuosas obras de los romanos que tanto había admirado.

Después de los trabajos tan satisfactorios por parte de Brunelleschi con la cúpula, lo lógico habría sido que el proyecto del remate de la catedral, la linterna, se otorgara directamente a él. Sin embargo, esto no fue así y, una vez más, se volvió a anunciar otro concurso.

Esto fue algo que seguro que Brunelleschi no pudo entender. Si lo comparamos con el caso de las puertas del Baptisterio, cuando Ghiberti fue el ganador, tiempo después se le asignaron también las otras puertas, ¿por qué ahora no podía de ser así?

El ganador, finalmente, no pudo ser otro que Brunelleschi, a pesar de lo cual tuvo que aceptar que se hicieran una serie de modificaciones por parte de Antonio di Ciacheri Manetti, que trabajó con Filippo en su maqueta, pero le traicionó.

4.5 El último concurso

Cada vez que hacía modificaciones, le salía un proyecto más parecido al de Filippo, con lo que éste dijo “Fategliene fare un altro e fara el mio”, “Hacedle hacer otro y hará el mío”. Con esto tendría una victoria sólo temporal ya que posteriormente nombraron a Antonio como capomaestri de Santa María del Fiore.

Aun así, Filippo siguió diseñando nuevas máquinas que permitirían la construcción de la linterna a cambio de pagos de 100 florines.

Desgraciadamente, un mes después de empezadas las obras de la linterna, el 15 de abril de 1446 fallece Brunelleschi a los 69 años, habiendo trabajado en la catedral casi toda su vida.

4.6 El grande e ingenioso Filippo Brunelleschi

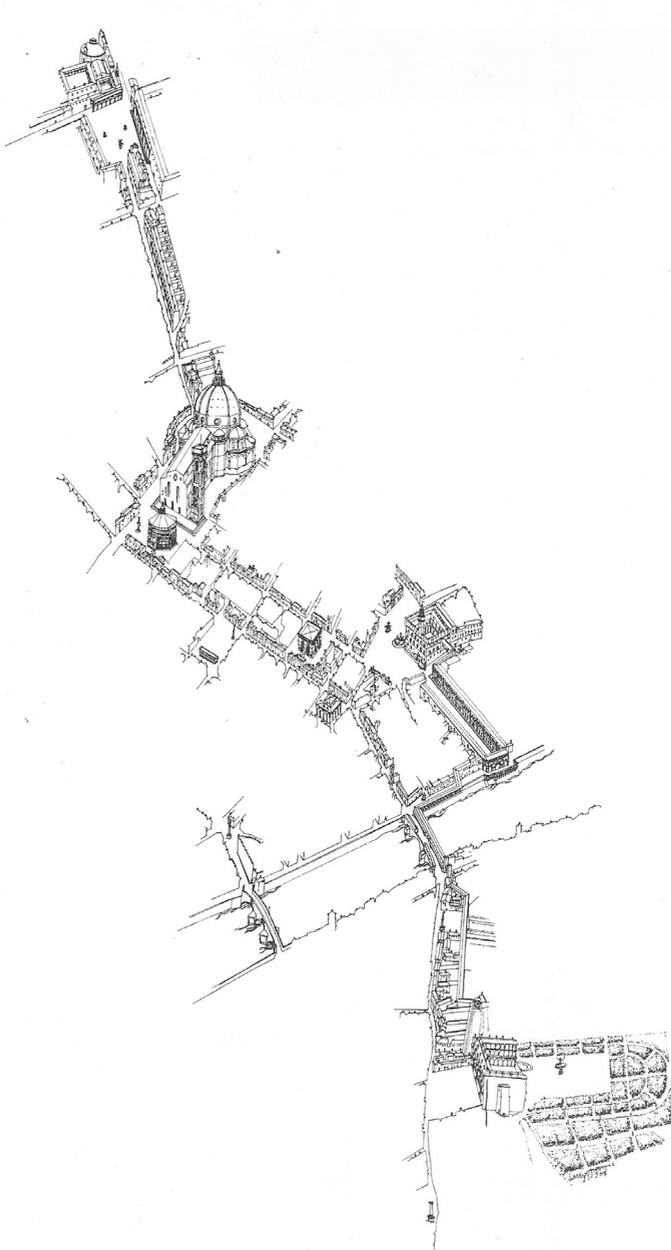
Después de su muerte, Filippo Brunelleschi fue enterrado en la capilla sur de Santa María del Fiore, aunque sin grandes homenajes. De hecho, hasta las excavaciones arqueológicas realizadas a finales del siglo XX no se descubrió su cuerpo. A pesar de esto, es todo un privilegio el haber sido enterrado en el edificio que remata su gran obra. En la lápida de mármol queda escrito:

CORPUS MAGNI INGENII VIRI PHILIPPI BRUNELLESCHI
FIORENTINI

“Aquí yace el cuerpo del grande e ingenioso hombre
Filippo Brunelleschi de Florencia”

Con él quedó claro que el hombre del Renacimiento era tan bueno como los de la Antigüedad, en los cuales se inspiraba para igualarlos e incluso, como hizo Brunelleschi, superarlos.

5.1
La geometría básica de
la cúpula



5.1_
La cúpula en el sistema urbano
florentino de arquitecturas y
espacios monumentales.

(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)

Santa María del Fiore se encuentra en la Piazza del Duomo, levantada sobre la antigua iglesia de Santa Reparata. Forma un conjunto histórico de gran valor junto al Baptisterio, lugar donde se bautizaban los florentinos hasta el S. XIX y el campanario de la catedral, el Campanile de Giotto.

La catedral queda rodeada por una plaza que, pese a tener un tamaño considerable, la grandeza de la catedral hace que la percepción del espacio sea más pequeño.

5.2_

Emplazamiento de Santa María del fiore. Obtenida de los estudios de Giovan Battista Nelli.

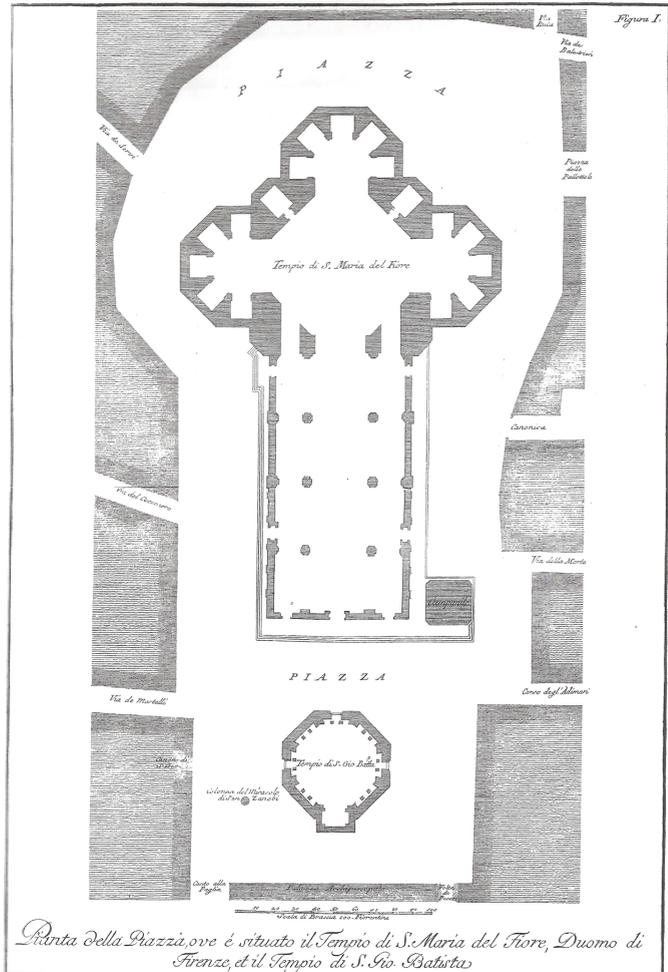
(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)

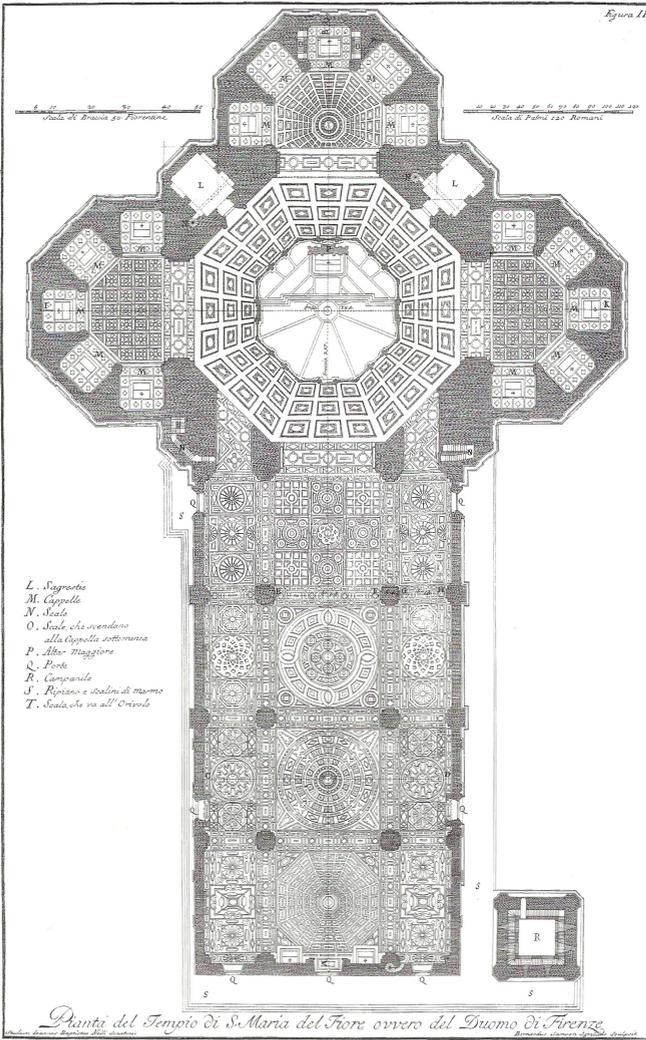


5.3_

Vista de la cúpula desde la Piazza del Duomo, Florencia.

(Elaboración propia)





5.4_ Planta de Santa María del Fiore. Obtenida de los estudios de Giovan Battista Nelli.

(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)

La planta tiene con unas dimensiones de 148 metros de largo por 93 metros de ancho. Cuenta con una nave central y dos laterales completamente abiertas. En el transepto y en el ábside se sitúan capillas radiales.

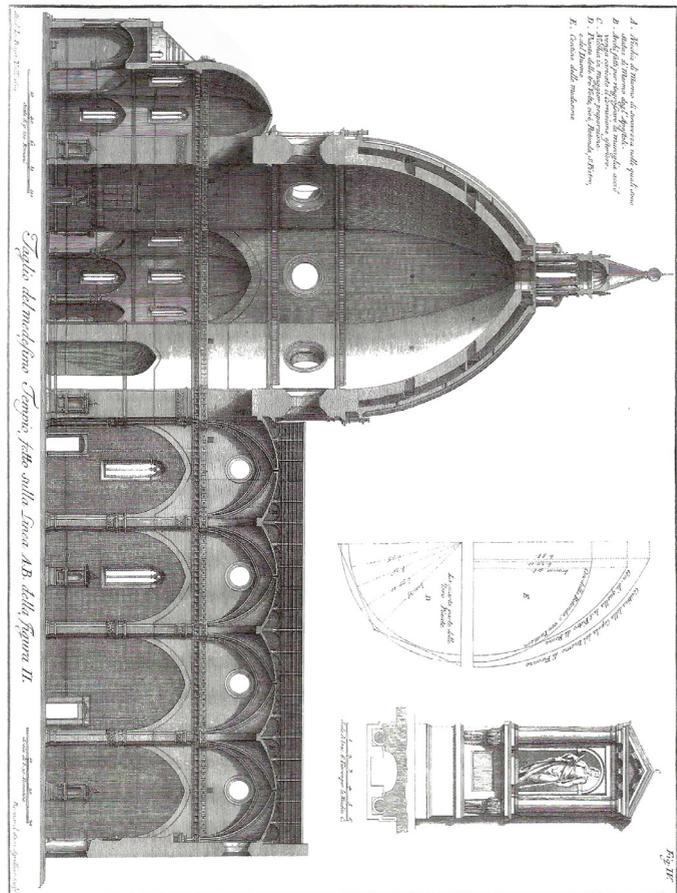
Debido a la fuerte carga de la cúpula, los muros de la parte absidal son de gran portento a fin de poder soportar tanto la fuerza gravitatoria como para los empujes laterales.

La cúpula nace desde el tambor de base octogonal, que cuenta con unas dimensiones de 16'956 m de media. Suponiendo una geometría ideal, el círculo circunscrito al polígono cuenta con un diámetro de 44'308 m.

5.5_

Sección longitudinal de Santa María del Fiore. Obtenida de los estudios de Giovan Battista Nelli.

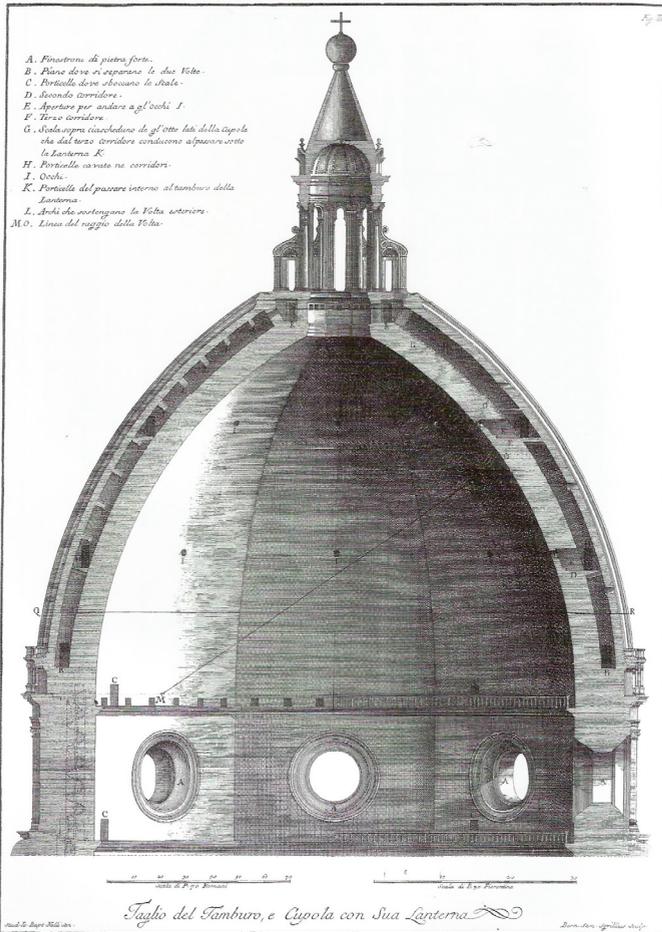
(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)



La altura total de la catedral es de 112'78 metros desde la superficie del pavimento de la cota cero hasta el punto más alto de la linterna.

Los pilares terminan a una cota de 29'18 metros y a partir de este punto nace el tambor, con una altura de 24'67, a partir de donde empieza la cúpula.

A una cota de 53'85 metros desde la cota cero se alza la cúpula hasta alcanzar en la base de la linterna una altura de 89'60 metros. Obtenemos así su altura total de 35'75 m.



5.6_ Sección de la cúpula. Obtenida de los estudios de Giovan Battista Nelli.

(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)

La solución adoptada por Brunelleschi se basa en realizar, en vez de una única cúpula maciza, dos, por lo que cuenta con dos casquetes, uno interior que realiza la función estructural y otro exterior que protege de los agentes atmosféricos. De esta manera se crea un vacío entre ambos permitiendo la disposición de las circulaciones en él.

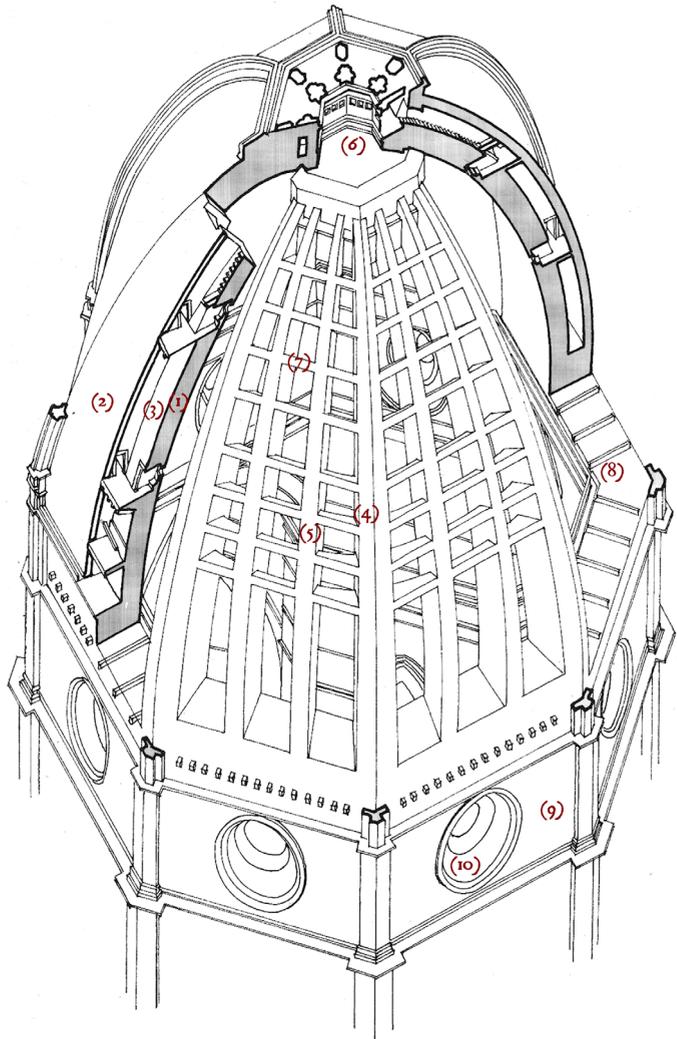
Esto ayuda de manera considerable a la estabilidad de la cúpula, ya que el peso total se reduce notablemente; lo que debía conseguir Brunelleschi era asegurarse de que estuvieran bien conectados entre sí.

Lamentablemente no se conservan los planos originales de Brunelleschi ya que, por su carácter tan orgulloso no quiso desvelar las técnicas empleadas, con lo que a día de hoy la cúpula sigue guardando secretos que sólo Filippo conoce.

5.7_

Axonometría de la cúpula.

(Bartoli, L)



Elementos:

1. Casquete interior
2. Casquete exterior
3. Pasillos interiores
4. Estribos angulares
5. Estribos medianos
6. Clave
7. Arcos horizontales
8. Cadena de piedra
9. Tambor
10. Óculo

Los casquetes se unen mediante 8 estribos angulares y 16 estribos medianos. Los espesores son variables y se reducen según aumenta la altura. Además de esto, para asegurar el casquete interior frente a posibles empujes, se disponen 144 arcos horizontales que se disponen en 9 niveles.

En el ápice se encuentra el Seraglio (la clave), sigue la forma octogonal de la cúpula, cerrándola y asegurando su estabilidad.

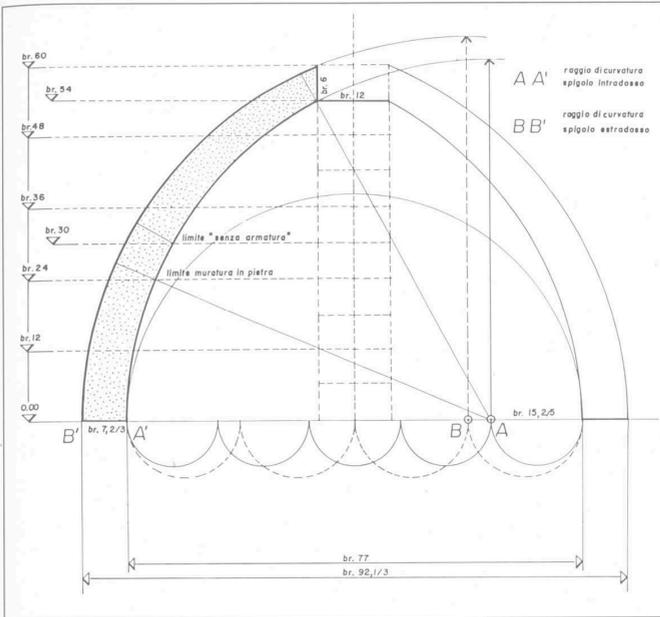
Los muros de la cúpula cuentan con cadenas de piedra situadas en 4 niveles, la primera de ellas es visible desde el exterior. Del resto de cadenas sólo se tiene constancia de la segunda mientras que de las otras dos no hay pruebas concluyentes sobre si se llegaron a construir.

5.2 Ilustraciones de detalle

5.8_

Esquema de los radios de curvatura del intradós del casquete interior y el trasdós del casquete exterior. Debido a ser arcos de circunferencia, se pueden obtener los casquetes mediante cilindros.

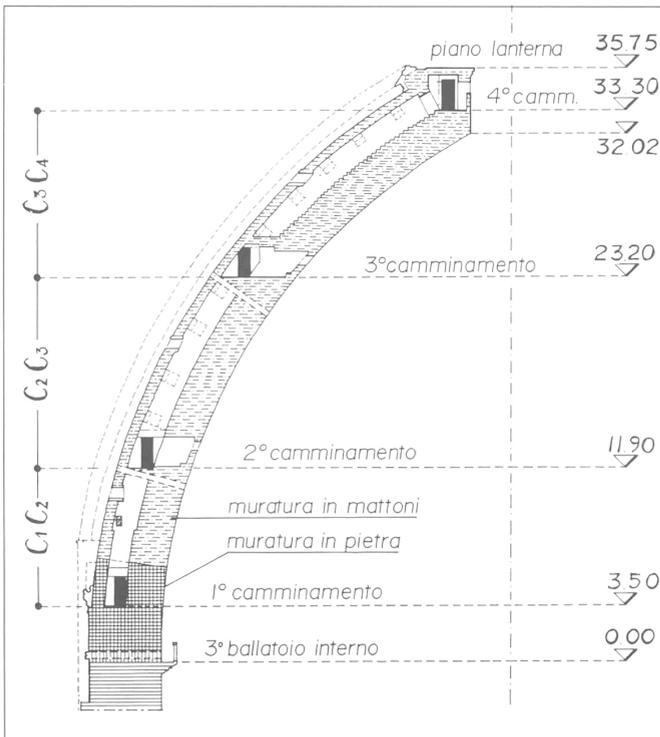
(Ippolito, L. Peroni, C)



5.9_

Sección de la cúpula con las cotas de los pasillos interiores además de la diferenciación de los materiales.

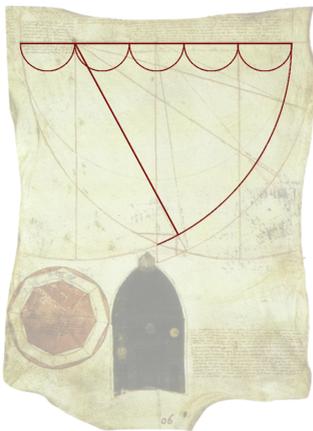
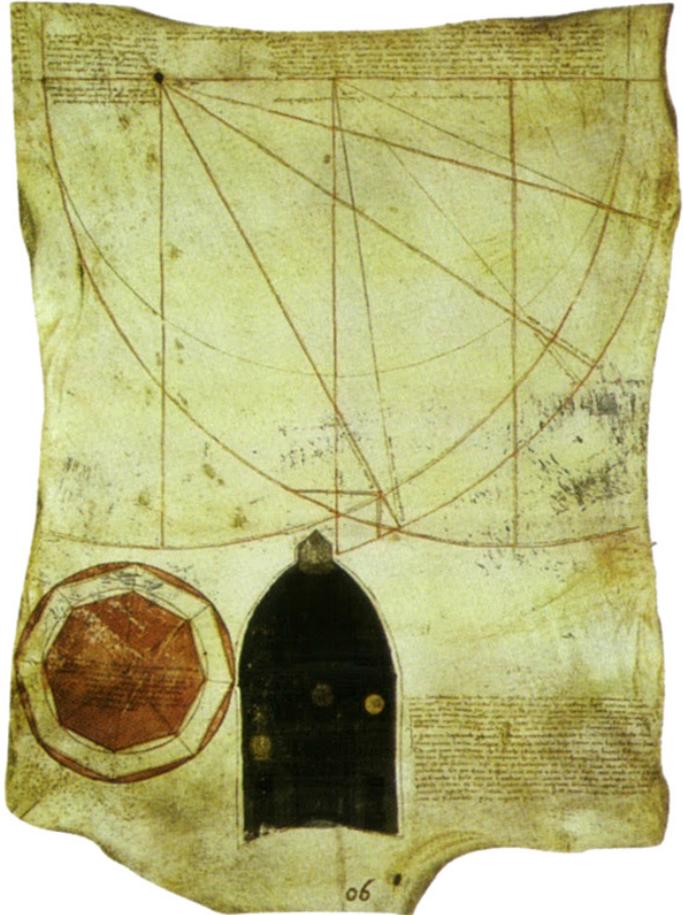
(Ippolito, L. Peroni, C)



5.10_

Pergamino de Giovanni di Gherardo da Prato del trazado de la cúpula. Realizado en el año 1426.

(<http://algargos2.rssing.com>)



5.11_

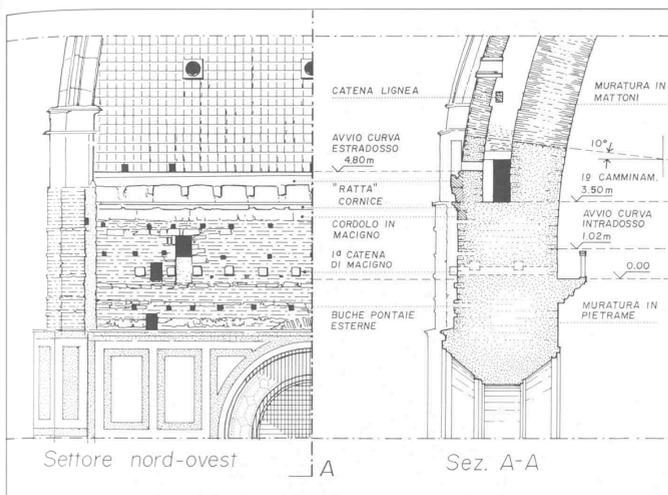
Esquema aplicación trazado quinto agudo.

(Elaboración propia)

Giovanni di Gherardo da Prato participó en la empresa de la cúpula y fue opositor a Filippo Brunelleschi, sin embargo, gracias a él conservamos ilustraciones que nos ayudan a entender la cúpula.

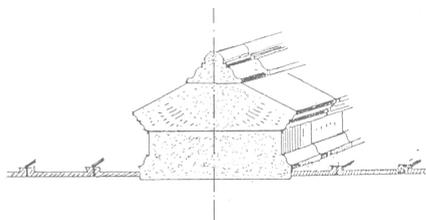
Este pergamino se encuentra en los Archivos Estatales de Florencia, y junto a él hay diversos dibujos y escritos en los que critica las medidas adoptadas por Filippo para intentar crear desconfianza en la construcción.

Mediante este dibujo se confirma la teoría anteriormente mostrada de los radios de curvatura de los casquetes de la cúpula. Giovanni divide la diagonal en 5 partes y a una distancia de $\frac{4}{5}$ toma el centro para realizar el arco que define el intradós del casquete interior. A este trazado se le llama el "quinto agudo"



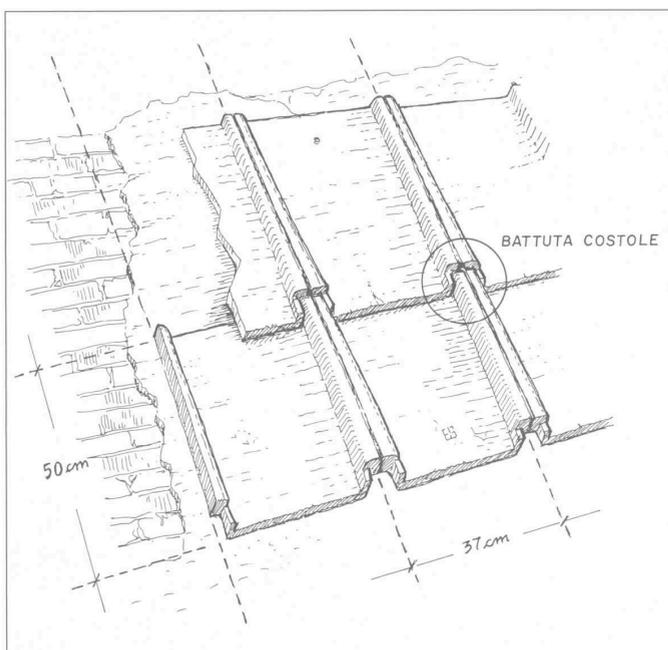
5.12_
Detalle del arranque de la cúpula. Destacamos el dato de la cota de arranque de la curva del intradós, a una cota de 1,02m.

(Ippolito, L. Peroni, C)



5.13_
Detalle de las costillas de piedra situadas en los encuentros de los casquetes exteriores.

(Bartoli, L)



5.14_
Detalle de la disposición de la cobertura de tejas.

(Ippolito, L. Peroni, C)



5.15_
Vista de la cubierta desde la linterna de Santa María del Fiore, Florencia.

(Elaboración propia)

5.16_

Sección detallada de la linterna con retícula y proporciones. Autor del esquema H. von Geymüller y C. von Stergmann.

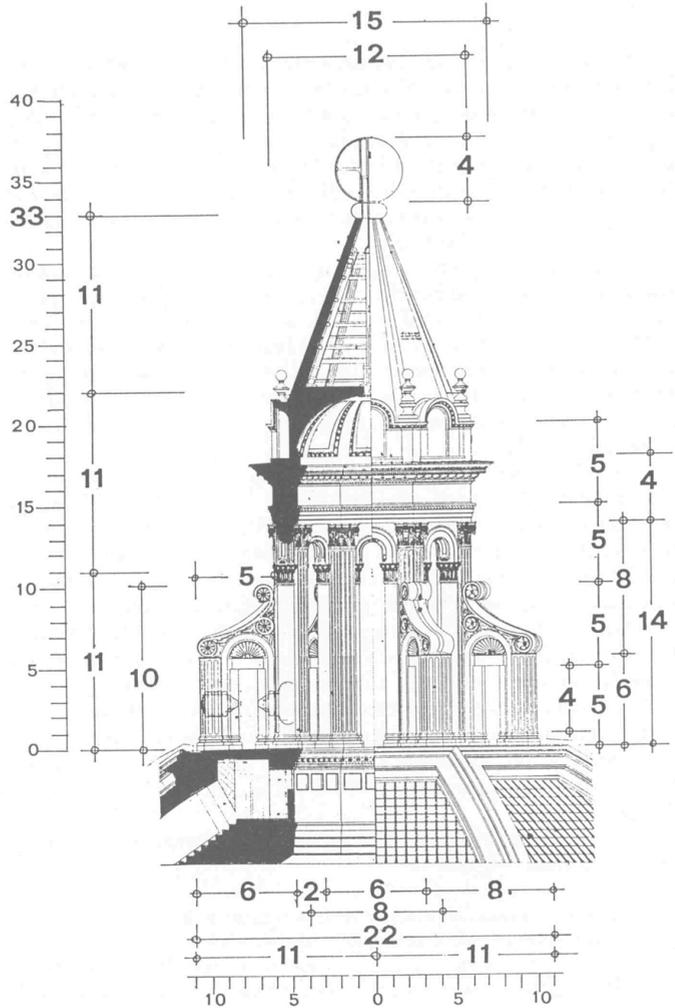
(Bartoli, L)

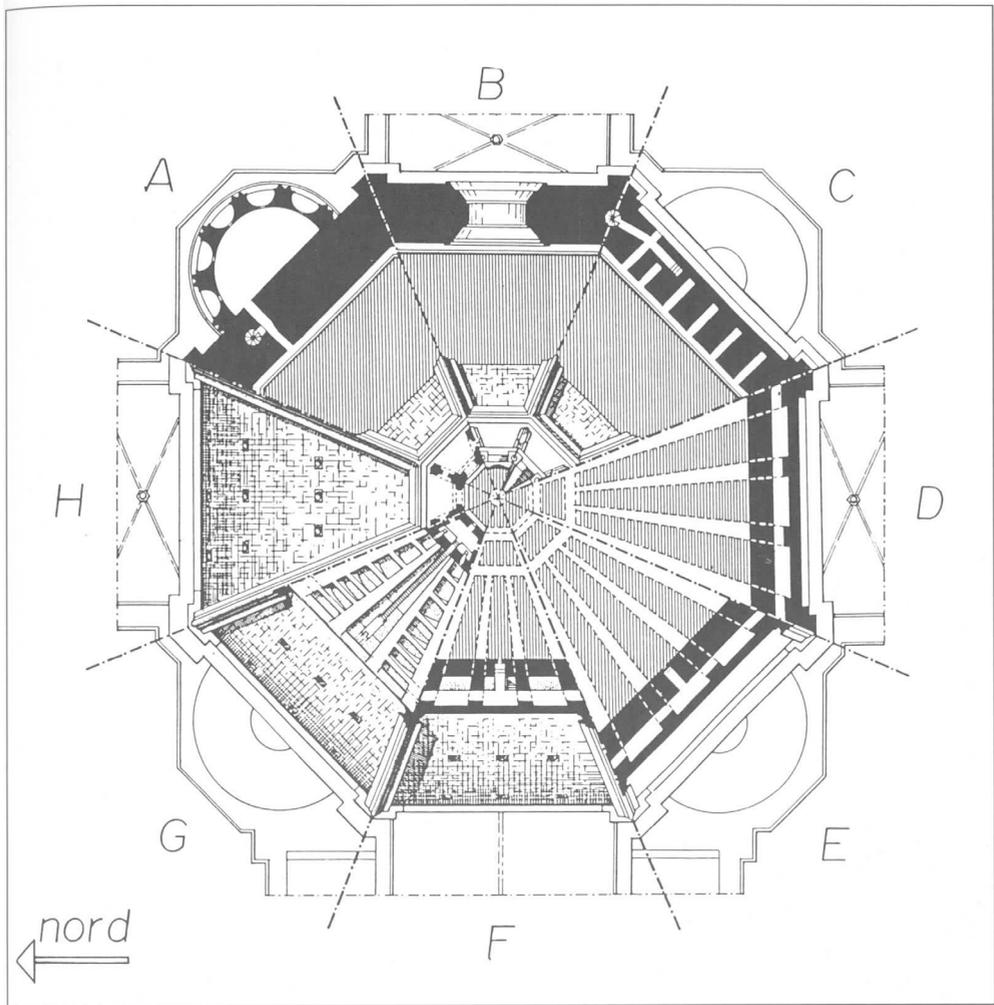


5.17_

Vista de la linterna desde el campanille, Florencia.

(Elaboración propia)





5.18
 Planta de la cúpula por
 diversas secciones horizontales.

(Ippolito, L. Peroni, C)

Espina de pez

Desvelado el secreto de la cúpula de florencia

“El arquitecto italiano Massimo Ricci descubre la técnica que utilizó Filippo Brunelleschi.”

10 Nov. 2011. ElPais.com

“Brunelleschi encontraba divertido el hecho de que nadie pudiera dar con su secreto”. Un secreto bien guardado bajo la piel de la cúpula de ladrillos rojos y costillas de mármol. Desde que empezaron las obras, en 1425, el misterio fue custodiado con un truco: los obreros dispusieron los ladrillos vistos de una forma distinta a los de la bóveda interna, la que de verdad aguanta el peso de la construcción, para despistar a todos los que, solo mirando desde fuera la cúpula, pensaban tener frente a sus ojos la técnica adoptada. Los ladrillos internos “están colocados en diagonal, como la espina de un pescado”, explicó Ricci, “sin utilizar material metálico alguno, como sostuvieron algunos estudiosos en el pasado, sino solo gracias a un sistema de cuerdas que permitía calcular la posición y el ángulo exactos en los que poner cada ladrillo”. Para confundir aún más las ideas a eventuales imitadores, Brunelleschi ordenó “marcar el costado de los ladrillos que quedaban en superficie con un surco, para dejar creer que habían sido dispuestos en longitud en lugar de hacerlo de lado. Un sistema único y nunca más repetido en la historia”.

5.19_

Aparejo espina de pez.

(Elaboración propia)



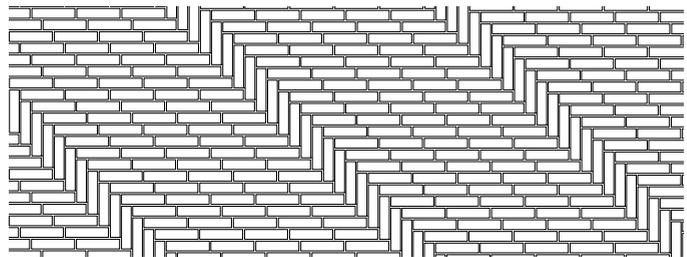
5.20_

Fotografía aparejo espina de pez
(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)

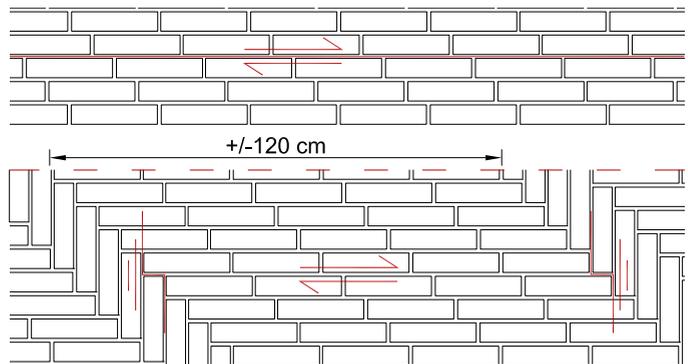
5.21_

Esquema resistencia según aparejo empleado.

(Elaboración propia)



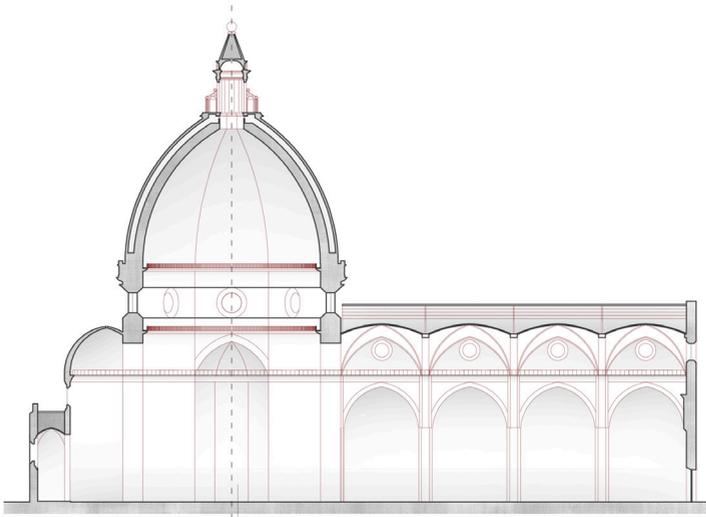
Mediante este sistema Brunelleschi consigue que los empujes laterales no hagan que los ladrillos se desestabilicen y deslicen sobre las demás hiladas debido a que la misma disposición de los ladrillos hace de tope frente a los empujes. Este efecto empieza a tener importancia cuando la inclinación del paño respecto a la horizontal alcanza los 20° . Desarrolla funciones vitales en la estabilidad de la cúpula.



5.3 Modelado de la cúpula

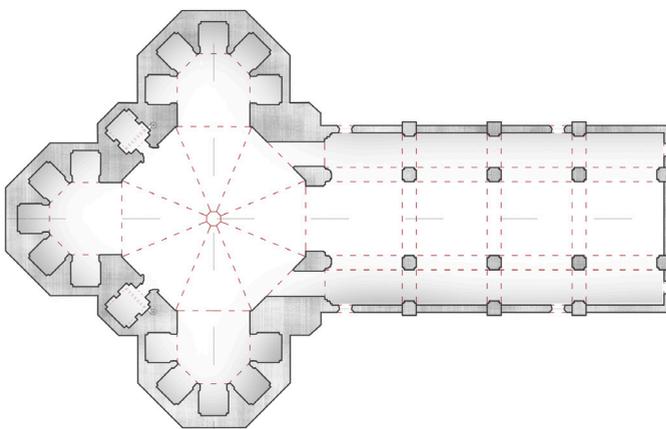
Para empezar a modelar la cúpula realizamos los planos generales en 2d en el programa AutoCAD de la catedral de Santa María del Fiore.

Nos basamos en los planos anteriormente nombrados y en las ilustraciones de detalle para tener, de una manera más detallada, las dimensiones y proporciones tanto de la cúpula como de la linterna.



5.22_
Planta de Santa María del Fiore.

(Elaboración propia)



5.23_
Planta de Santa María del Fiore.

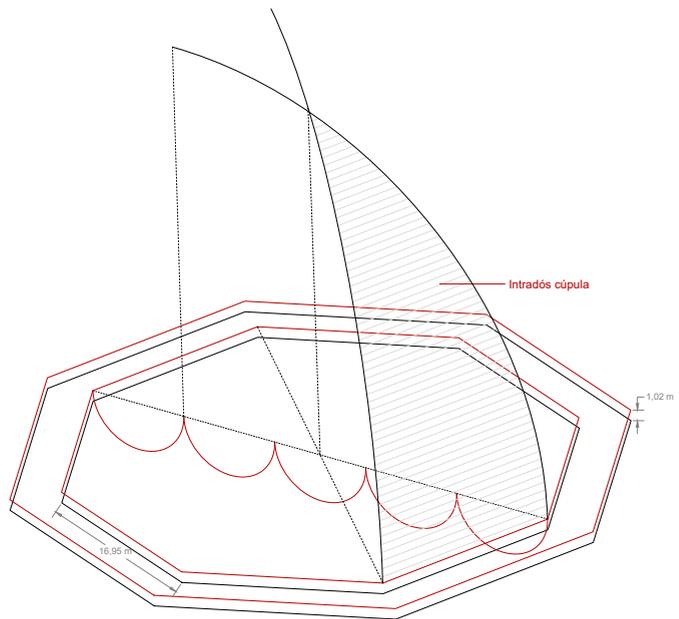
(Elaboración propia)

0 10 20 30 metros
0 10 20 30 40 50 braccia fiorentina

5.24_

Modelización de la cúpula.
Construcción en 3d de la geometría que nos permite sacar el intradós de la cúpula.

(Elaboración propia)



Para la construcción de la cúpula empezaremos por la modelización de las caras interiores (trasdós) del casquete interior.

Partimos de la base de que cada lado mide $16'956$ m y de que el radio de curvatura empieza a una altura de $1'02$ m. Tomando como radio de curvatura $4/5$ partes del diámetro de la circunferencia inscrita en el octógono podemos realizar los arcos que nos definan el casquete interior.

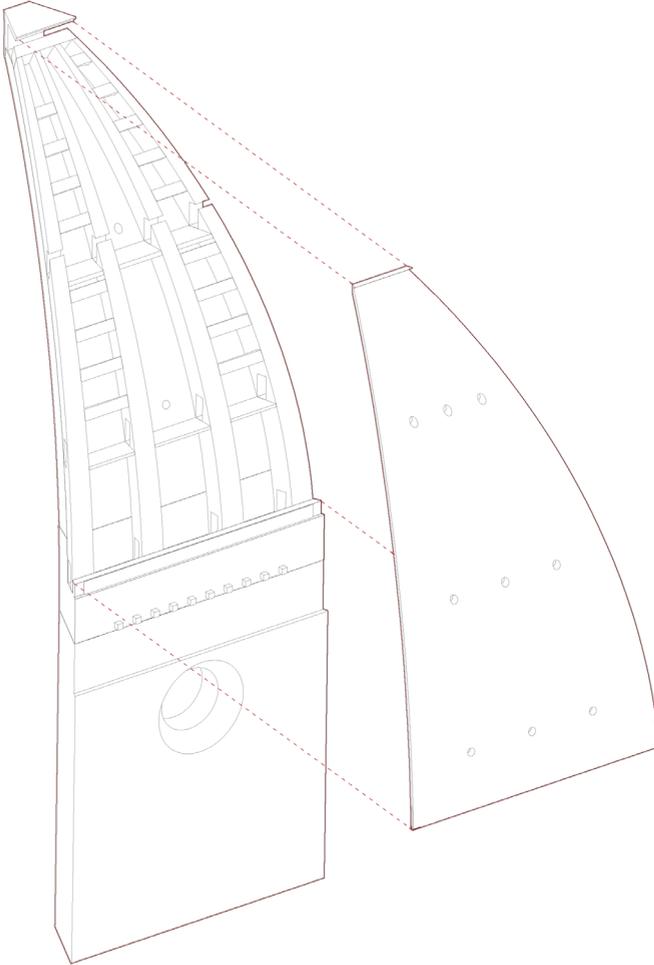
A partir de esta superficie podemos definir el resto de superficies ideales gracias a las ilustraciones de los levantamientos realizados a lo largo de los años. Dibujamos la sección teniendo en cuenta la materialidad para posteriormente poder diferenciar los sólidos por materiales en el cálculo estructural. Dibujada la sección, extruiremos los sólidos para poder modelar la cúpula.

Al tratarse de una cúpula con 8 paños exactamente iguales, modelaremos uno de ellos y por simetrías obtendremos el resto. También debemos diferenciar los elementos de detalle, ya que éstos alargarían innecesariamente el cálculo y no son necesarios, por lo que los eliminaremos a la hora del análisis estructural.

5.25_

Axonometría de un paño de la cúpula con elementos de detalle.

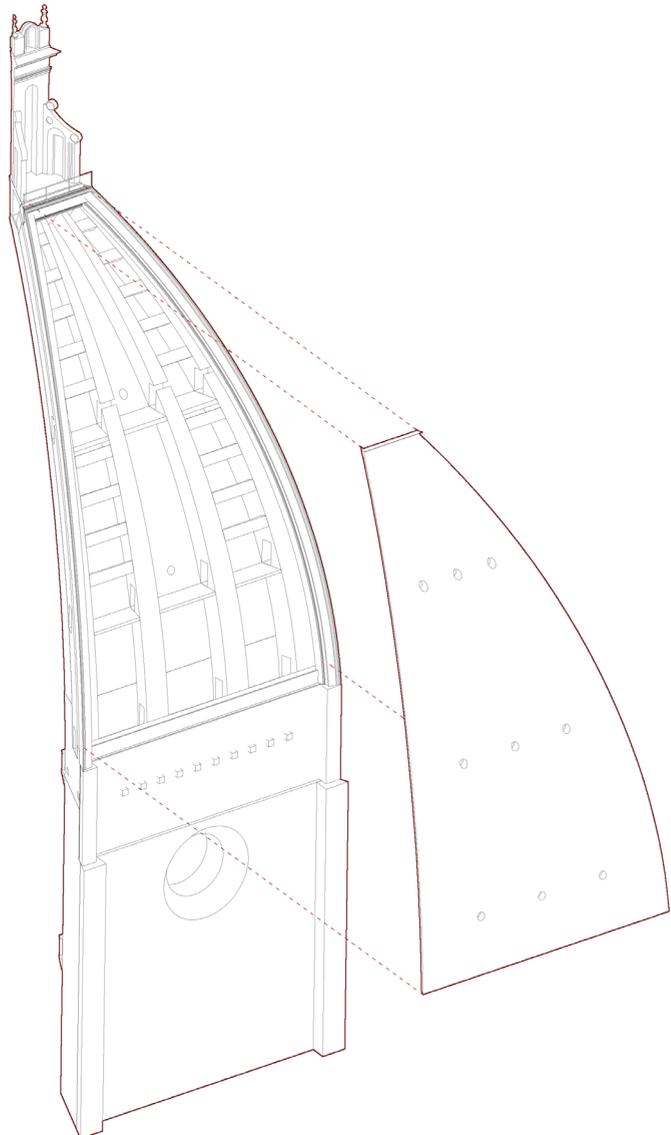
(Elaboración propia)



5.26_

Axonometría de un paño de la cúpula con elementos de detalle.

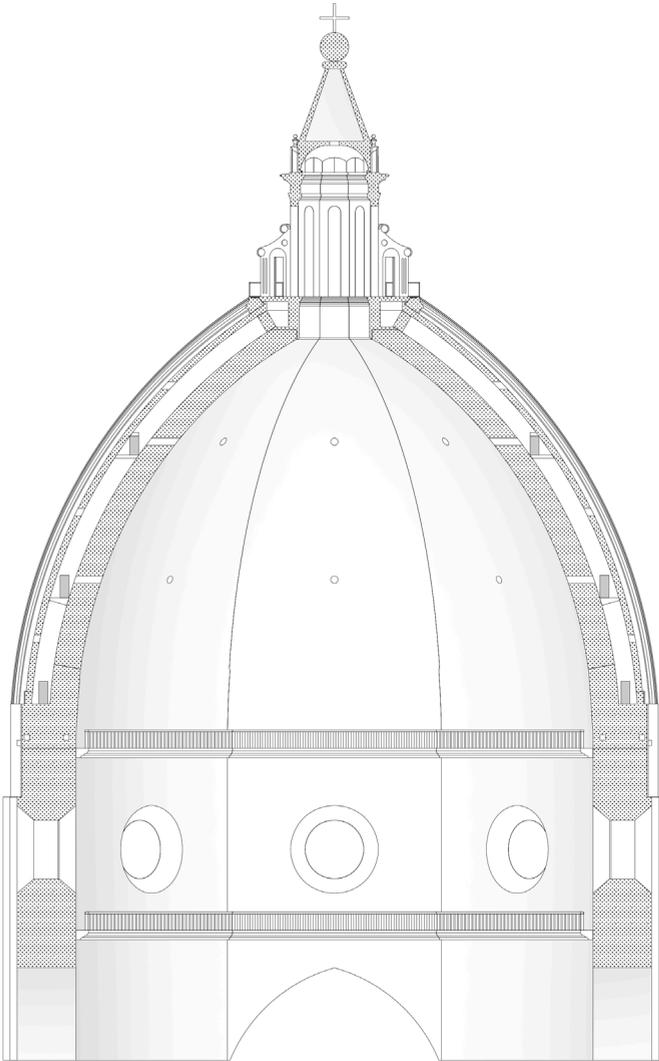
(Elaboración propia)



5.27_

Sección de la cúpula.
Obtenida del modelo realizado
en 3D.

(Elaboración propia)



5.28_

Axonometría despiezada de la cúpula.

(Elaboración propia)

1_Linterna de remate.

Material_Piedra forte.

2_Clave. Remate de la cúpula para cerrar el anillo superior.

Material_Piedra forte.

3_Estribo mediano, conecta los casquetes. Un total de 16. Consta con un espesor de 1'75 m y se reduce hasta 0'40 m.

Material_Fábrica ladrillo.

4_Casquete interior. Principal elemento portante de la cúpula, espesor variable de unos 2 m.

Material_Fábrica ladrillo.

5_Estribo angular, su función es conectar los casquetes. Un total de 8. Consta con un espesor de 3'5 m y se reduce hasta los 0'80 m.

Material_Fábrica ladrillo.

6_Arcos horizontales, sirven como refuerzo al casquete exterior. Se encuentran en los dos tercios superiores distribuidos en 9 niveles.

Material_Fábrica ladrillo.

7_Casquete exterior, sin carácter autoportante. Protege la cúpula.

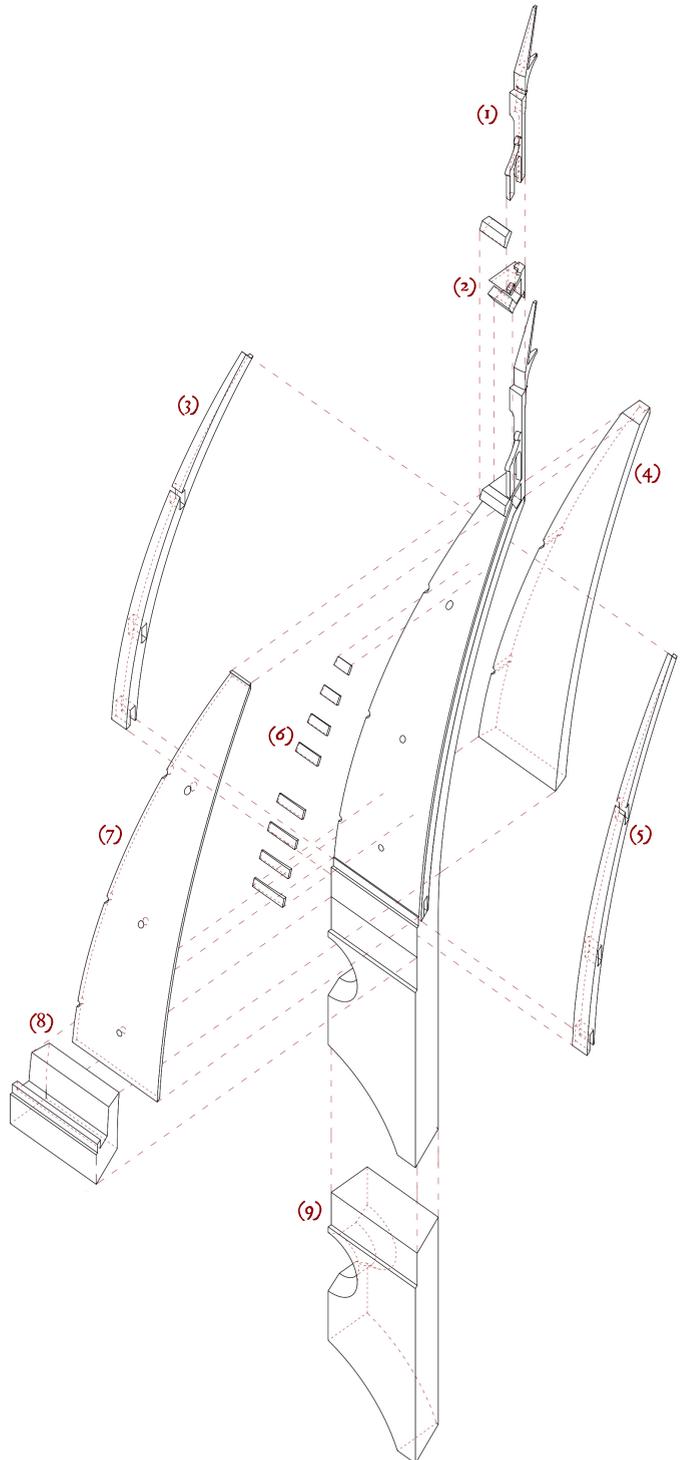
Material_Fábrica ladrillo.

8_Arranque cúpula, cuenta con el primer pasillo y en ella se apoyan los casquetes.

Material_Piedra forte.

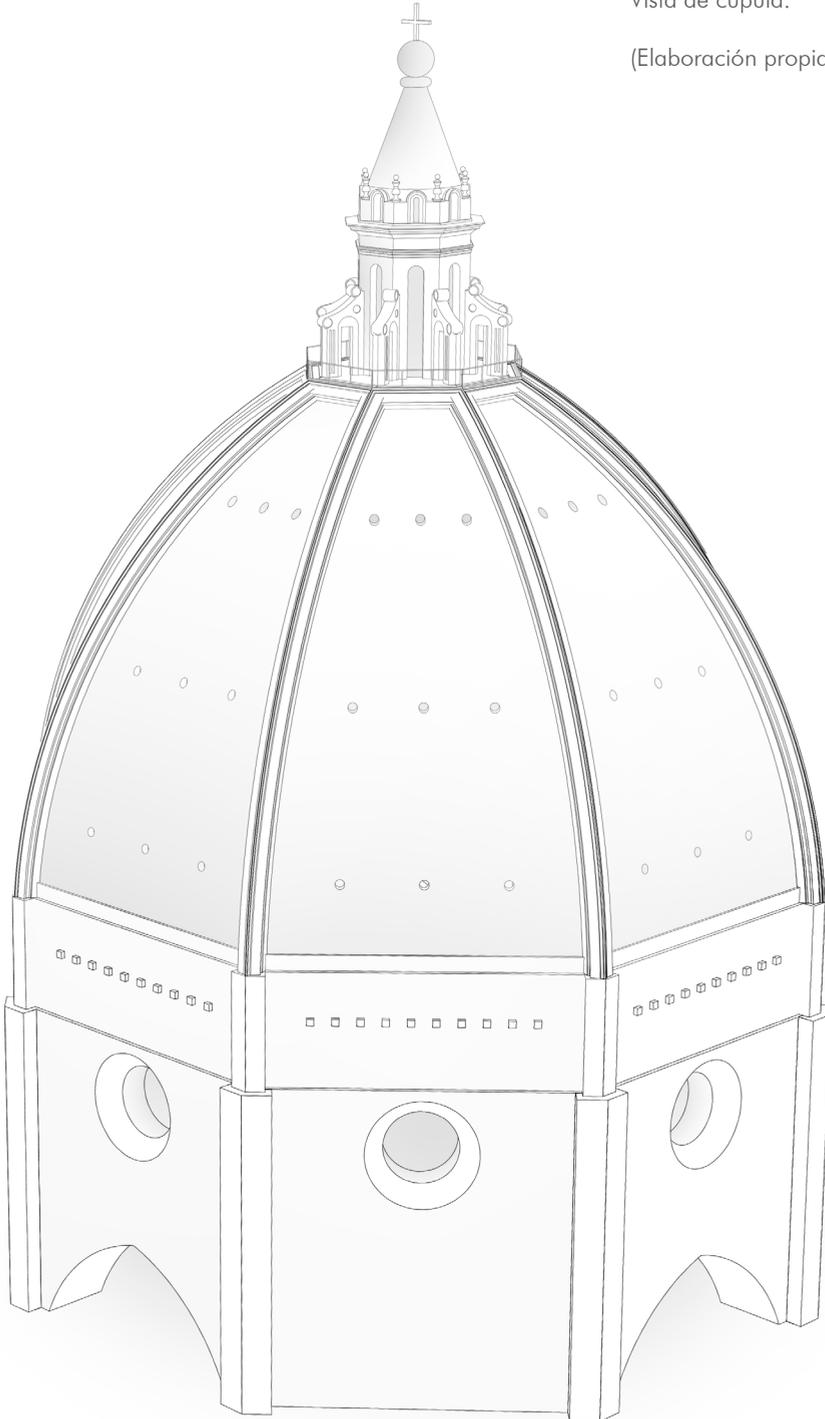
9_Tambor, zona comprendida entre la cima de los pilares y el arranque de la cúpula. Tiene un espesor de 4'65 m y una altura de 24'5 m.

Material_Piedra forte.



5.29_
Vista de cúpula.

(Elaboración propia)



5.4

Construcción de la gran estructura

En el siglo XV, como hemos visto, construir la cúpula sin cimbras parecía imposible, ¿Pero cómo fue capaz de hacerla realidad Brunelleschi? Para su realización, Filippo diseñó diferentes mecanismos que permitían el transporte de los materiales desde el lugar de origen hasta Florencia y posteriormente su elevación y colocación en la cúpula.

Para traer el mármol de Carrara se usaban barcos en los cuales el transporte dependía, en ocasiones, de una pareja de bueyes y grandes cuerdas para vencer la corriente; esto hacía que fuera muy costoso y Filippo diseñó un barco llamado Il Bdalone que, mediante unas aspas, era impulsado por el viento. Fue el primer barco que aprovechaba esta energía, reduciendo a la mitad el coste y el tiempo.

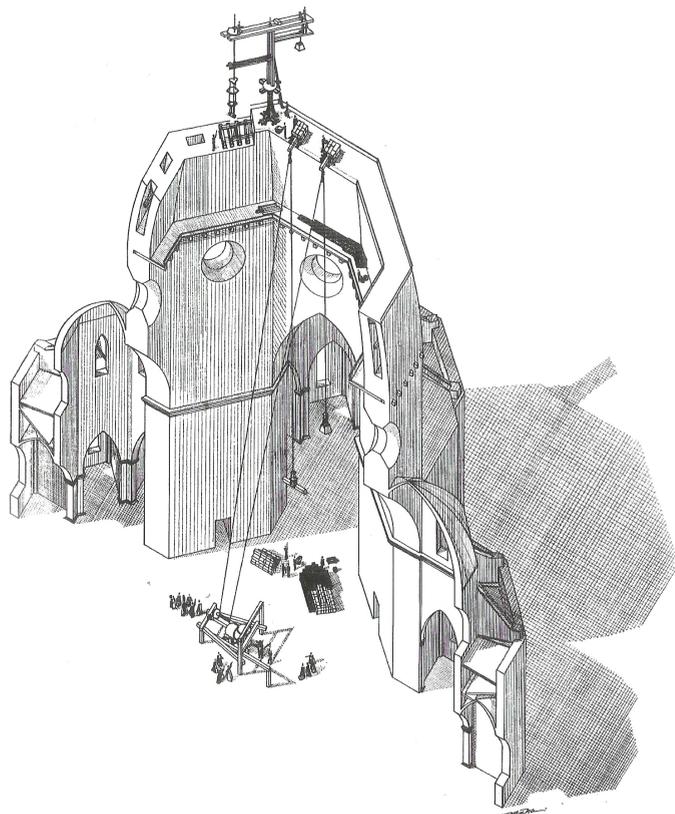
Debido al peso y a la gran cantidad de piedra y ladrillo que debía ser elevada, Brunelleschi tuvo que diseñar un sistema que facilitase esta tarea. Por ello, la elevación del material hasta la parte superior constaba de dos mecanismos: por una parte, en la zona inferior se encontraba el gran cabestrante reversible y arriba una grúa.

(Massimo Ricci, asociación "Filippo di ser Brunellesco")

5.30_

Reconstrucción del sistema de elevación de las cargas en la obra de la cúpula.

(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)



“La colla principal es una máquina compleja que permite por medio de tracción animal, (dos bueyes o dos caballos) trasladar a tres velocidades las cargas, bien al subir o bien al bajarlas desde el suelo de la Catedral hasta la cota del entramado de madera de la obra, sobre el tambor de la cúpula.

Esta máquina está compuesta de tres partes: una de movimiento, una de inversión y una de transmisión... Este tipo de sistema hacía que el cambio de movimiento sólo ocurriera mediante una acción mecánica que no incidía de ningún modo en la tracción de los animales, que iban siempre en la misma dirección, sin interrumpir la acción que de otro modo habría comportado la suspensión de la carga en el vacío.” “Massimo Ricci, asociación “Filippo di ser Brunellesco””

“La grúa giratoria fue inventada por Brunelleschi en la fase final de la realización de la cúpula, cuando la obra llegó a la “Chierica”, o sea, al anillo que cierra el monumento.

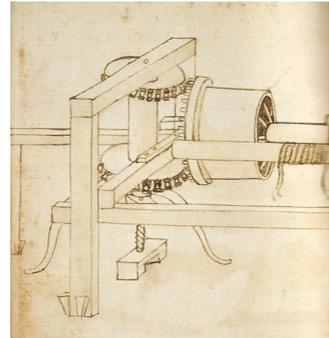
Esta máquina fue realizada para poder hacer pequeños movimientos circulares verticales y horizontales con los bloques de marmol, movimientos necesarios para hacerlos “brandeggiare” (rotación horizontal) y “calettarli” (ensamblar) en la “sede de pose”. (Lugar de colocación).

Siendo los bloques de mármol muy pesados (podían alcanzar los 600-1300 kg), acoplarlos con precisión era fundamental porque una vez ensamblados en su posición era imposible modificar manualmente su colocación.

La grúa estaba compuesta por una base que giraba sobre 4 ruedas. En su cima se encontraban dos sistemas movidos por tornillos sin fin, que permitían desplazamientos mínimos sobre los tres ejes espaciales durante su rotación.”“Massimo Ricci, asociación “Filippo di ser Brunellesco””

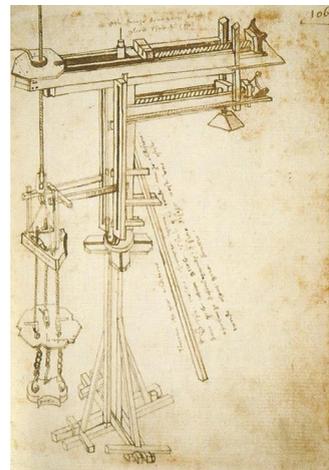
“La grúa con burbera fue la última máquina construida por Brunelleschi para la obra de la cúpula. Es una grúa simple, de dimensiones reducidas capaces de permitir una gran precisión en el posicionamiento de los bloques de mármol, estudiado a propósito para realizar el “pérgamo” de la linterna.” “Massimo Ricci, asociación “Filippo di ser Brunellesco””

En este caso merece la pena recordar que la construcción de la linterna, aunque se basase en el diseño de Filippo, no fue construida por él.



5.31_ Representación colla principal.

(Massimo Ricci, asociación “Filippo di ser Brunellesco”)



5.32_ Representación grúa giratoria.

(Massimo Ricci, asociación “Filippo di ser Brunellesco”)

El trazado de la cúpula

El trazado de la cúpula es un tema que ha preocupado a muchos y que a día de hoy sigue siendo un enigma (o tal vez ya no, como veremos después). No se sabe a ciencia cierta el sistema que empleó Brunelleschi en su día, por lo que muchos estudiosos han investigado en los últimos siglos posibles trazados con diferentes sistemas de cuerdas que pudiesen justificar cómo se levantó de modo que los casquetes formasen una curvatura cilíndrica.

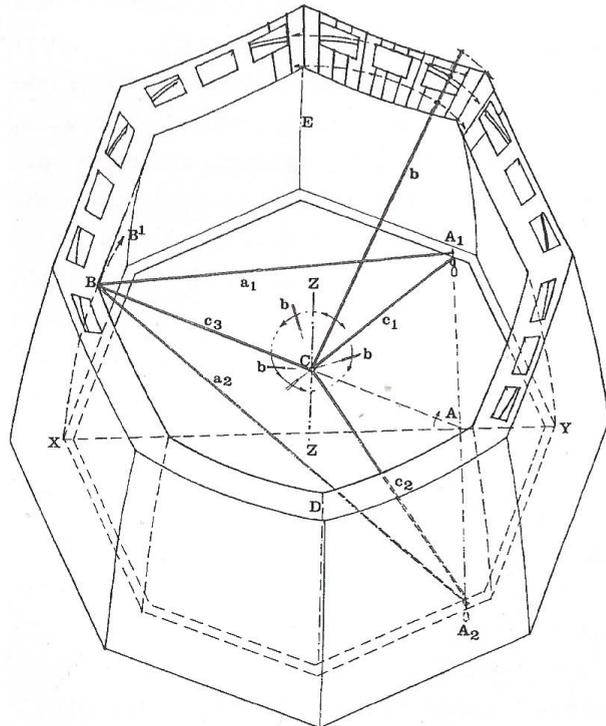
“Se sabe con certeza que para dirigir la curvatura de las ocho aristas se empleaban ocho cimbras de madera (revestidas de hierro para evitar el desgaste) construidas en 1420 y renovadas periódicamente. Estas cimbras medían alrededor de 2,65 m de longitud y un brazo de espesor.”
“Giovanni Fanelli y Michele Fanelli”

Uno de los métodos de trazado fue el ideado por Mainstone en el año 1977, llamado “gualandrino”. El método consiste en realizar un triángulo equilátero y, fijando la base, ir elevando el otro vértice, el cual definiría la arista de intersección entre los dos casquetes.

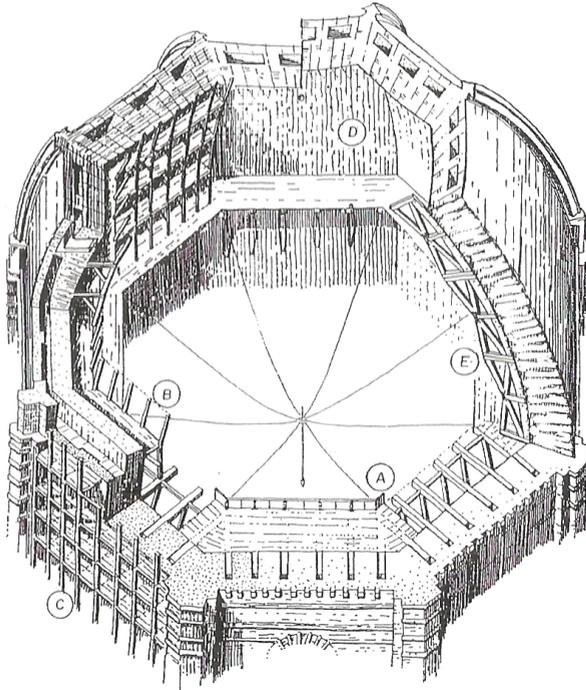
5.33_

Método trazado gualandrino, por Mainstone.

(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)



Ippolito-Peroni realizaría en 1997 otro posible método, en lugar de explicar el sistema de trazado el cual no muestra en exceso, especifica el andamiaje que utilizó Brunelleschi. En este dibujo se pueden observar las cimbras de madera anteriormente nombradas y que se iban elevando al mismo tiempo que lo hacía la cúpula.



5.34_ Método trazado por Ippolito-Peroni.

(Giovanni Fanelli y Michele Fanelli)

Pese a los múltiples intentos, no se ha tenido certeza de la veracidad de ninguno de ellos hasta que, recientemente, el arquitecto Massimo Ricci consiguió dar con lo que parece ser el sistema de trazado real.

Massimoo Ricci es un arquitecto y profesor florentino el cual ha dedicado gran parte de su vida a estudiar la cúpula de Santa María del Fiore en busca del secreto de Brunelleschi.

Massimo Ricci

Como ya hemos visto anteriormente, Ricci se dio cuenta gracias a una grieta aparecida en la pared la técnica de espina de pez usada por Filippo, a lo que se le debe sumar el descubrimiento de lo que parece ser el trazado de la cúpula.

Los estudios de Ricci abarcan desde los mecanismos necesarios, cálculos matemáticos que avalan la teoría e incluso hasta una maqueta a escala 1:5 construida en un parque de Florencia.

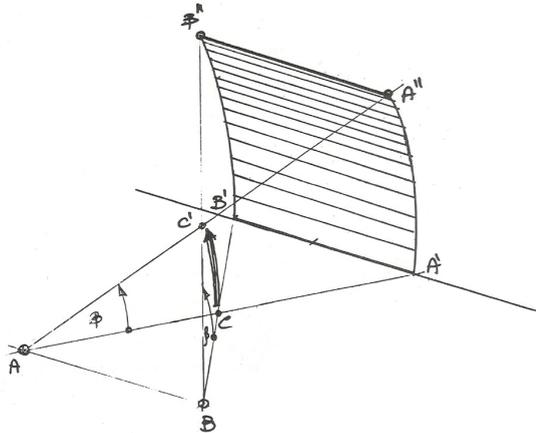
Empezaremos contando como se realiza el trazado básico. Sabemos ya como se traza la curvatura del intradós, mediante el sistema del quinto agudo, ¿Pero como hizo Filippo para que la superficie se mantuviese cilíndrica y no abombase?

Ricci explica mediante los próximos dibujos que si entre las curvaturas realizadas mediante el quinto agudo, las cuales son con un radio fijo, las uniesemos obtendríamos una recta. Pero si unimos los centros de las circunferencias (puntos del quinto agudo) y sobre esa recta vamos desplazando la cuerda, en el lado opuesto (intradós de la cúpula) obtendríamos un arco, por lo que la figura del cilindro se perdería.

5.35_

"Rotando la recta con un radio fijo... Obtengo una superficie cilíndrica."

(Massimo Ricci)

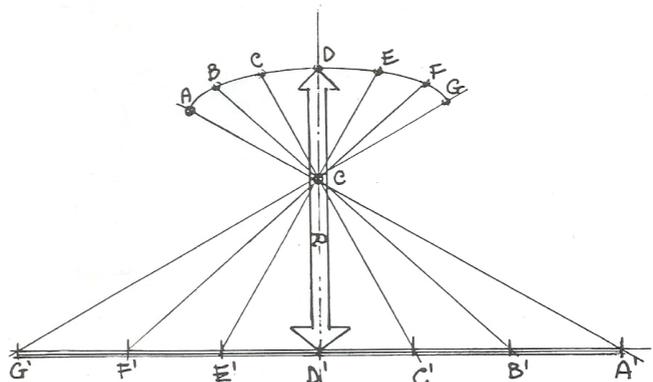


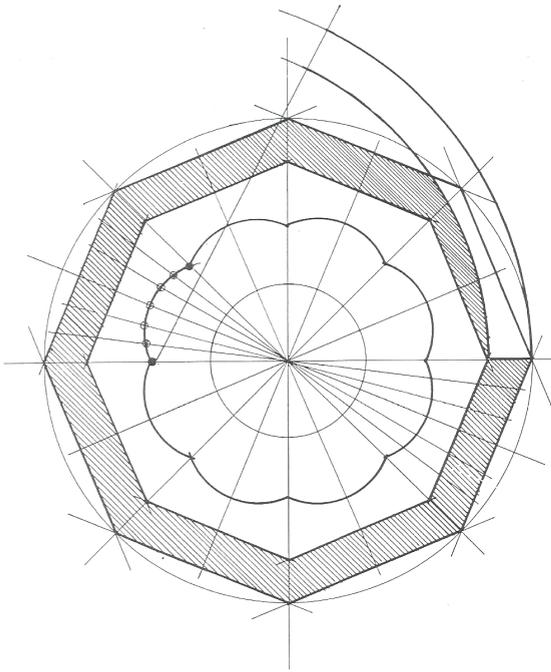
Ricci usa la lógica inversa y si de una recta obtenemos un arco, del arco obtenemos una recta, con la cual la superficie cilíndrica no se perdería. Por este motivo en la base de la cúpula los centros de las circunferencias que definen las aristas intersección entre los paños, debemos unir estos puntos con forma de roseta en planta, en vez de con unas rectas que darían un octógono pero que los paños se contruirían deformados.

5.36_

"Si de la recta se obtiene una flor, de la flor se obtiene una recta!!"

(Massimo Ricci)



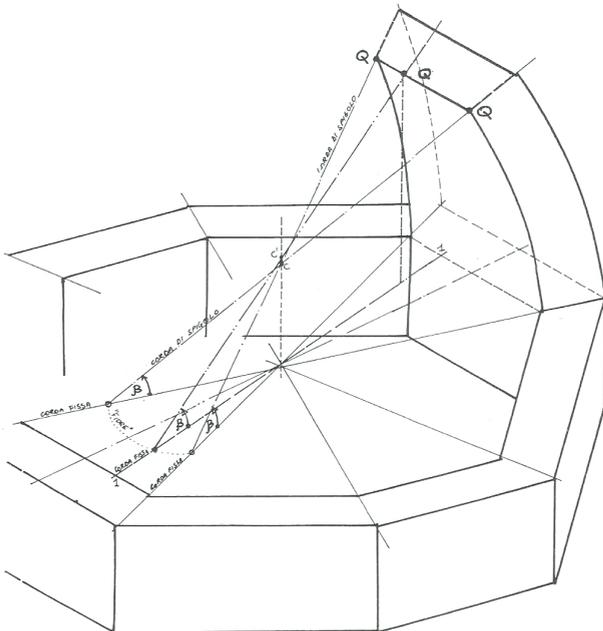


5.37_

Dibujo en planta de la resultante de los arcos para el trazado de los paños de la cúpula.

(Massimo Ricci)

Ahora que sabemos el planteamiento inicial vamos a ver dibujos de Ricci en los cuales mediante axonometrías explica este método para entender mejor el sistema de cuerdas.



5.38_

Axonometría del trazado con ángulo β constante.

(Massimo Ricci)

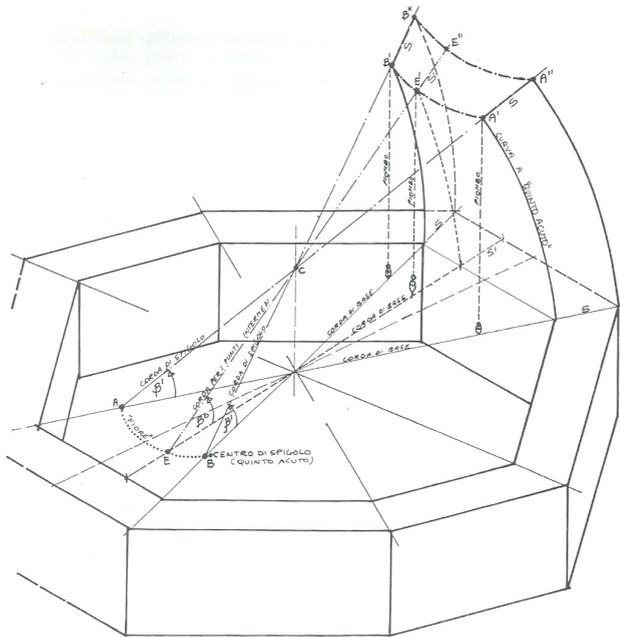
En esta axonometría Ricci traza el intradós mediante el arco en planta llamado “fiore”, pero tiene una peculiaridad este dibujo (5.38) y es que desde todos los puntos de este arco lanza la proyección con el mismo ángulo β sobre la horizontal. Con esto se obtiene diferentes vértices en el centro de la cúpula, llamados c y c' en el dibujo. Por consecuencia, en el trasdós la línea resultante es una recta horizontal la cual no corresponde al fenómeno de la “cuerda blanda” en el cual las intersecciones de los paños avanzan más rápido respecto al centro, también se puede ver este efecto en dibujos.

Para realizar la cuerda blanda en vez de mantener el ángulo β constante hay que fijar el punto c , por lo cual el β variara. La resultante de este efecto si que es muy similar al trazado real de la cúpula, por no decir idéntico. (5.39)

5.39_

Axonometría del trazado con punto c constante.

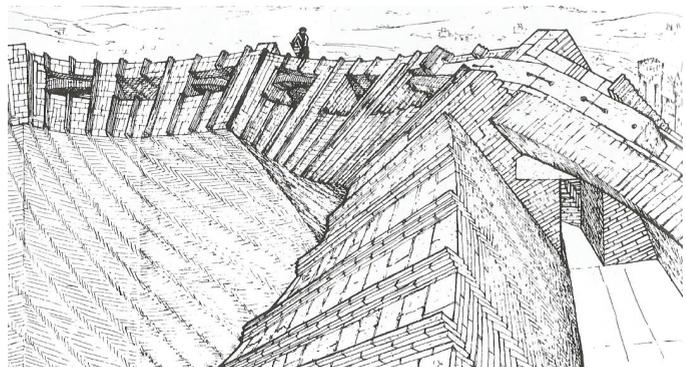
(Massimo Ricci)

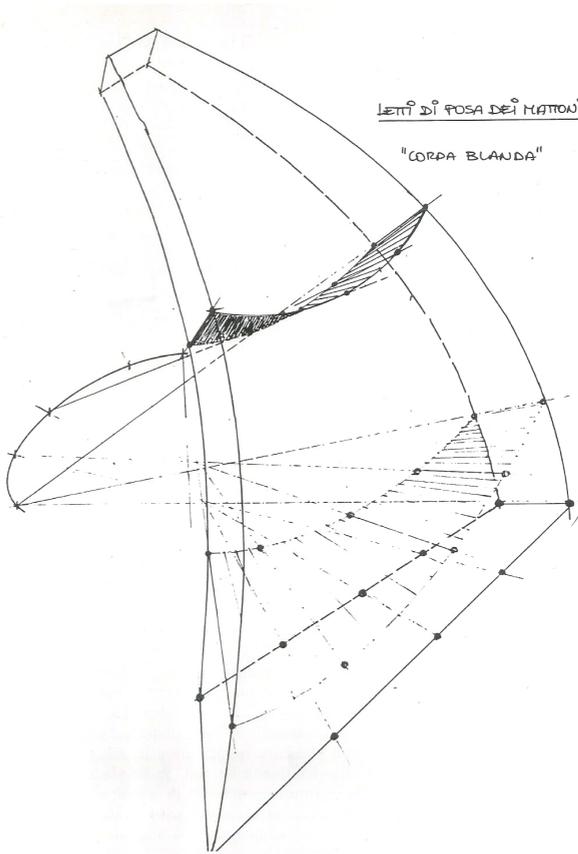


5.40_

Dibujo de la construcción de la cúpula. Se puede observar la curvatura debida a la cuerda blanda.

(Rossi)





5.41_
Axonometría del trazado de
corda blanda.

(Massimo Ricci)

Para profundizar en su investigación, Ricci empieza a construir en 1989 con la ayuda de sus estudiantes de arquitectura una réplica de la cúpula a escala 1:5 en un parque de Florencia. Mediante el sistema de cuerdas anteriormente descrito se definía la posición de cada ladrillo y cuando la construcción se iba complicando por su altura Ricci contrato a albañiles expertos en vez de a los estudiantes para seguir con su proyecto.



5.42_
Fotografía de la construcción
de la maqueta.

(<https://blog.rve.es/>)

5.43_

Fotografía de la maqueta de Massimo Ricci.

(<https://blog.rtve.es/>)



Comprobación corda blanda según trazado Ricci

Dado que tenemos un modelo tridimensional realizado con el trazado del quinto agudo, vamos a poner en práctica la teoría de Ricci sobre este. Para ello dado que se trata de unas curvas de mayor complejidad para modelar vamos a exportar nuestro modelo a Rhinoceros y mediante este software y Grasshopper vamos a hacer pruebas con diferentes opciones de "fiore".

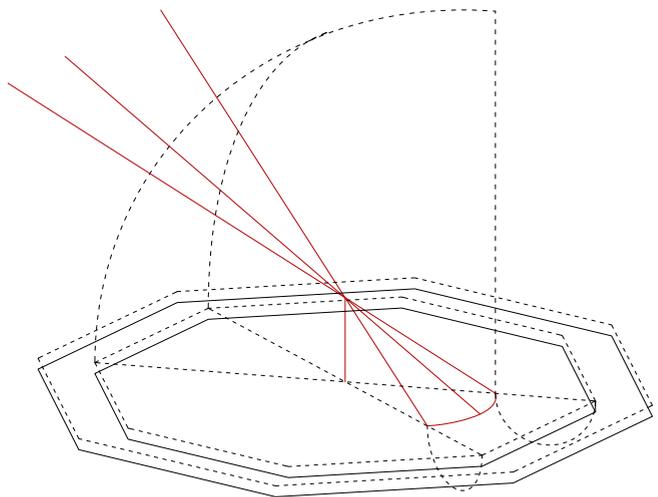
El modelo a exportar a Rhinoceros serán simplemente las líneas del trazado y geometrías básicas de la cúpula para a partir de ellas realizar las superficies oportunas.

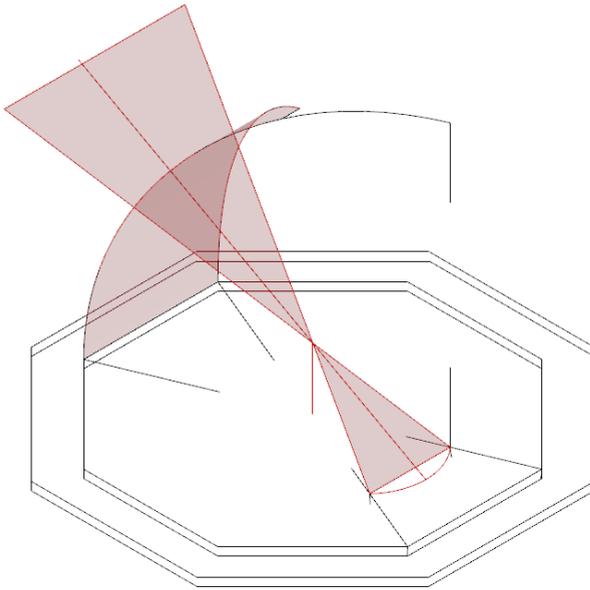
Hemos tomado como referencia un punto "c" aleatorio y este definirá la curva del intradós que le corresponda por su cota.

5.44_

Modelo exportado a Rhinoceros.

(Elaboración propia)

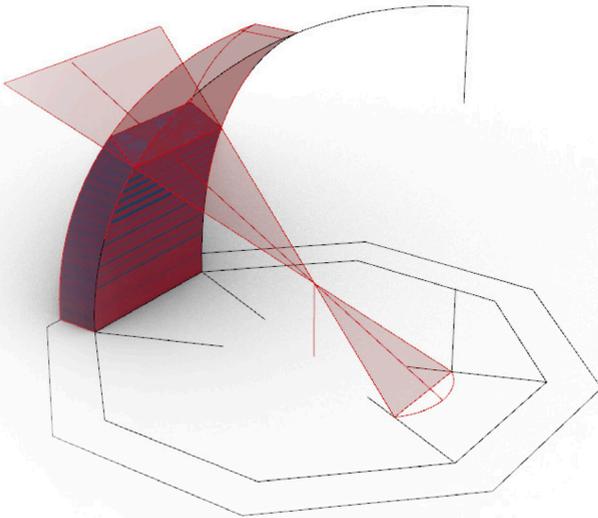




5.45_

Superficies de trasdós y sistema de cuerdas sin realizar el fiore, es decir, unimos los centros de curvatura con una línea recta.

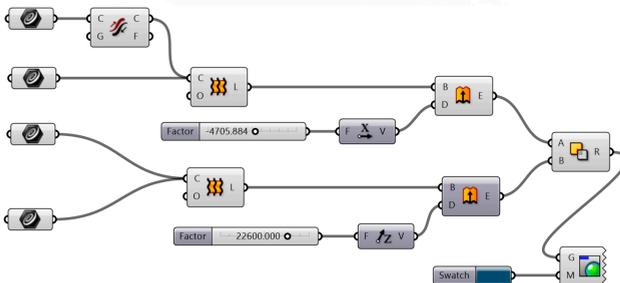
(Elaboración propia)



5.46_

Corte de la geometría de la cúpula. En este caso al trazar una línea recta en la base en el intradós también aparece de esta forma, sin el efecto de corda blanda lo que es un error. Cabe destacar que además de esto, la cuerda siempre debe tener la misma longitud y en el punto central midiendo la distancia esta es menor, por lo que como hemos dicho antes la cúpula se abombaria y no quedaría una superficie cilíndrica.

(Elaboración propia)



5.47_

Fórmula de Grasshopper utilizada para la realización de los cortes.

(Elaboración propia)

06_ ANÁLISIS ESTRUCTURAL

A partir del modelo realizado con la mayor precisión posible para la obtención de resultados fiables, realizaremos mediante el software ANGLE* el análisis estructural.

Dadas las posibilidades que nos ofrece dicho programa, realizaremos dos tipos de cálculo, siendo el primero un análisis estático lineal utilizado en los cálculos de estructuras modernas basadas en elementos lineales. En segundo lugar, realizaremos el cálculo mediante el cálculo no lineal.

El objetivo de realizar los dos cálculos es compararlos entre sí para poder comprobar la fiabilidad que ofrecen.

Nos centraremos en dichos análisis en el comportamiento frente a acciones gravitatorias actuando desde el tambor hasta la linterna y diferenciando los materiales en los dos básicos, fábrica de ladrillo y piedra fuerte.

Fábrica de ladrillo

Con unas dimensiones frecuentes de 17x5 y de 22x44x4. Dispuestos en forma de espina de pez, método usado por Brunelleschi. Cuenta con las siguientes características:

Módulo de deformación: 7.000 MPa

Densidad: 2.000 kg/m³

Resistencia a compresión: 2MPa

Resistencia a tracción: 0.2 MPa

Mampostería de piedra

La piedra con la que se construyó la cúpula es de arenisca unida con una fina capa de mortero. Se emplea en el tambor y en el arranque de la cúpula, así como en la clave y la linterna. Cuenta con las siguientes características:

Módulo de deformación: 14.000 MPa

Densidad: 2.600 kg/m³

Resistencia a compresión: 6MPa

Resistencia a tracción: 0.5 MPa

6.1 Metodología

ANGLE*

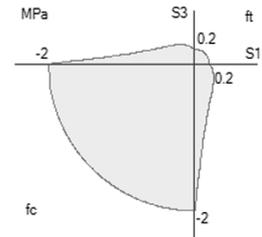
Programa desarrollado por el profesor Adolfo Alonso Durá.

(Alonso, 2003)

6.2 Materiales

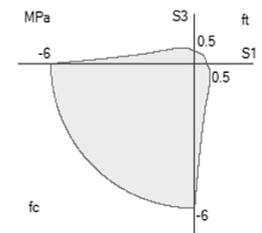
6.1_ Superficie fluencia ladrillo.

(ANGLE)



6.2_ Superficie fluencia piedra.

(ANGLE)



6.3

Mallado sólidos

El modelo está realizado por sólidos en vez de por elementos lineales, por lo que para el cálculo es necesario hacer un mallado, lo cual consiste en dividir el sólido completo en tetraedros más pequeños en los que el software analiza las tensiones en cada uno de los puntos.

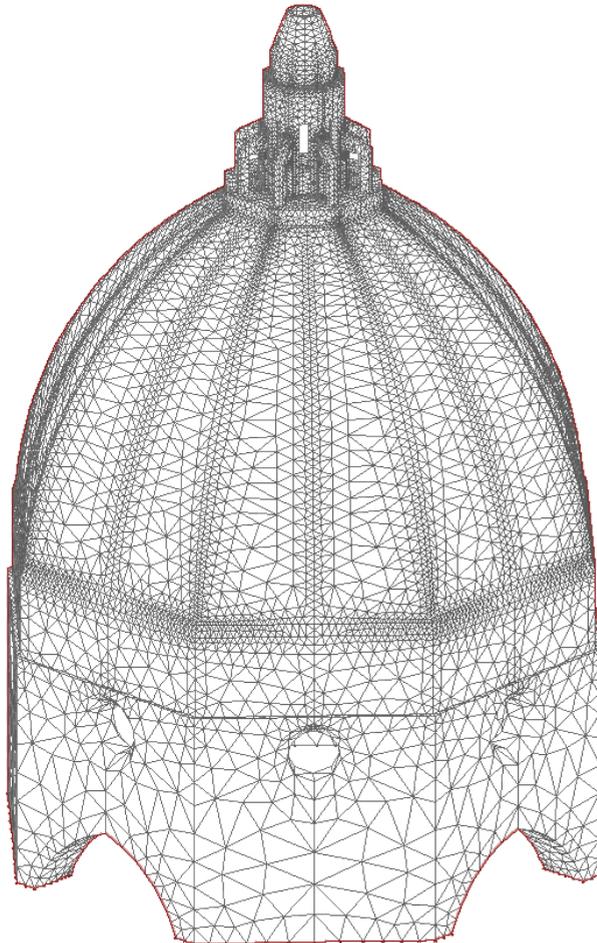
Para el mallado se ha importado el sólido a GiD. Se ha descompuesto el sólido en tetraedros con unas aristas que alcanzan desde el milímetro hasta los 2 metros de longitud, haciendo un total de 269.590 tetraedros. Se ha comprobado que en los puntos de unión entre los diferentes elementos se hayan unido correctamente las esquinas.

Para conseguir esto se han unido todos los sólidos del mismo material y en las uniones entre ladrillo y piedra la sección de contacto debe estar delimitada perfectamente y ser coincidente en ambas partes.

6.3_

Mallado realizado en el programa GiD.

(Elaboración propio)



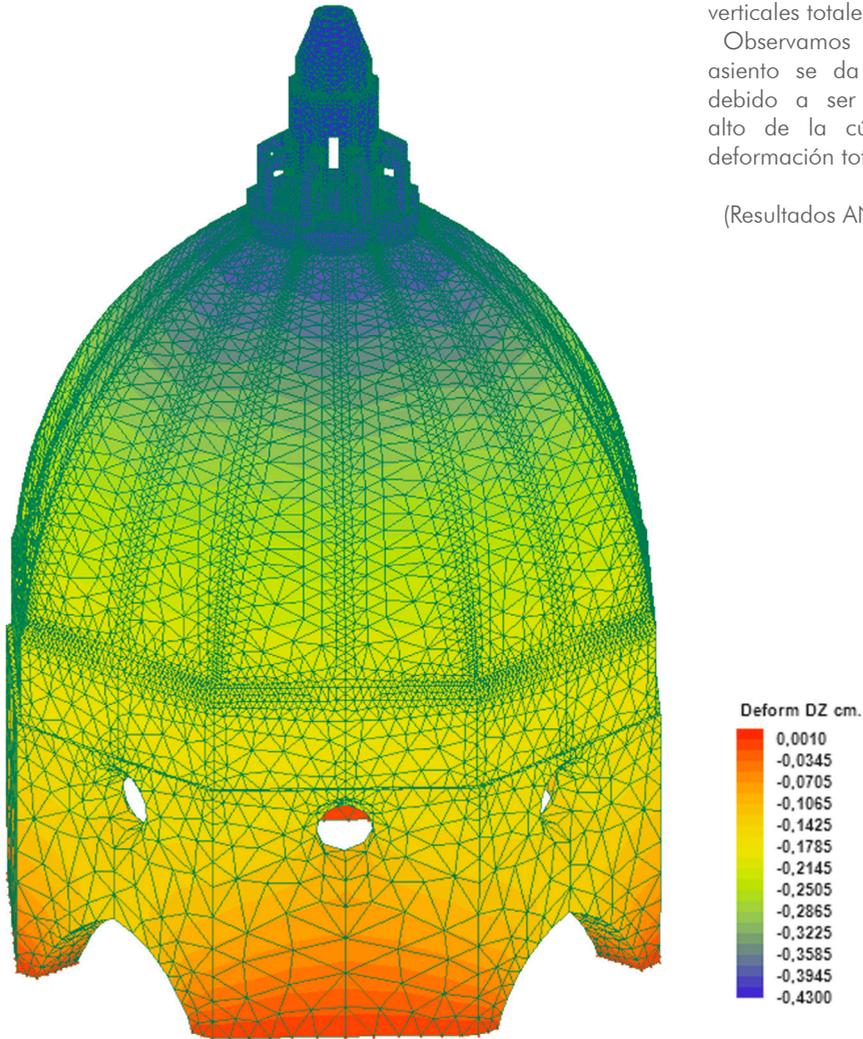
6.4 Cálculo lineal

6.4_

Diagrama deformaciones verticales totales.

Observamos que el mayor asiento se da en la linterna debido a ser el punto más alto de la cúpula con una deformación total de -0'43 cm.

(Resultados ANGLE)



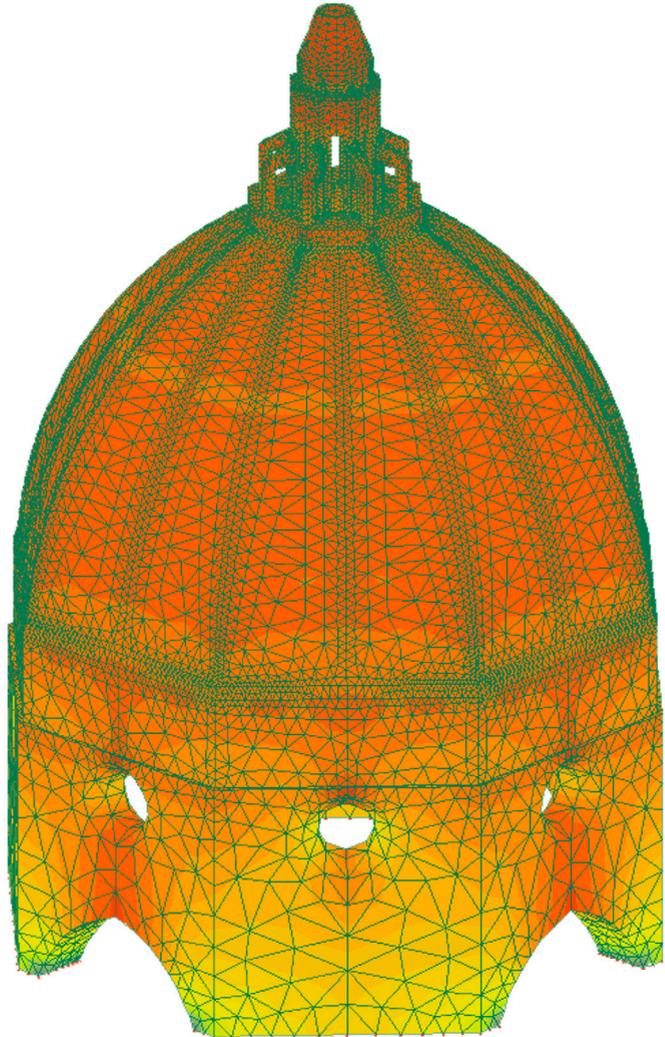
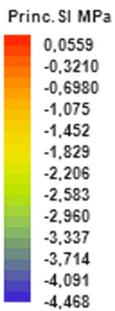
Tensiones principales I

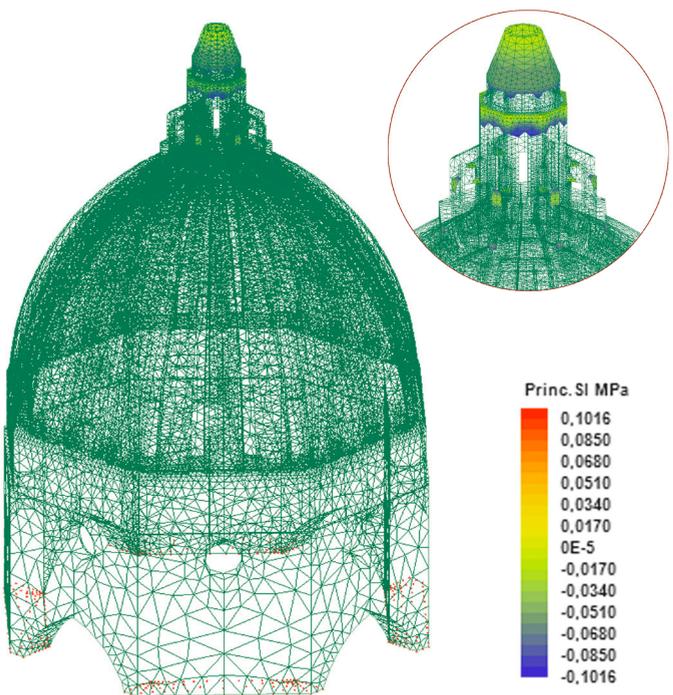
6.5

Diagrama de las tensiones principales I.

Las mayores tensiones de tracción son de 0'0559 MPa, por debajo de los 0'2 MPa máximos que soporta la fábrica de ladrillo empleada.

(Resultados ANGLE)





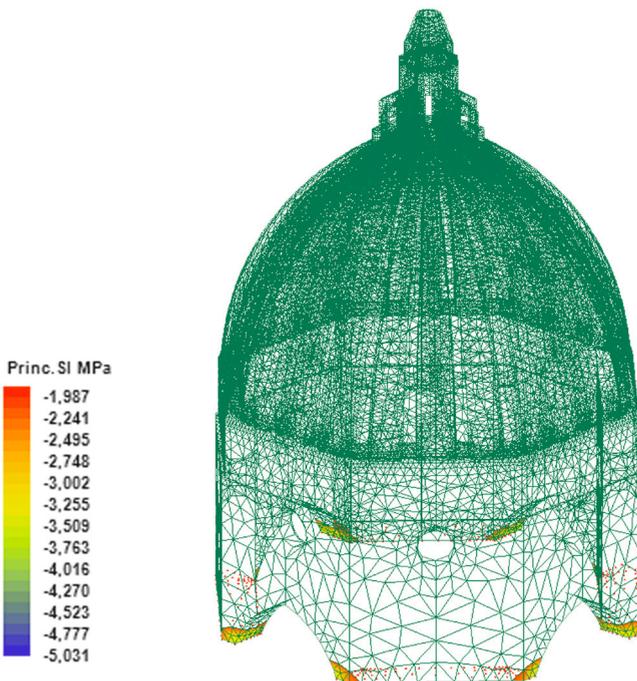
6.6_

Diagrama de las tensiones principales I.

Tramo 0'1- -0'1 MPA.

Las tensiones de tracción son prácticamente nulas.

(Resultados ANGLE)



6.7_

Diagrama de las tensiones principales I.

Tramo -2- -5 MPA.

Con este diagrama observamos que las mayores tensiones de compresión se obtienen de manera puntual en la parte inferior del tambor junto a los arcos debido a la mayor concentración de fuerzas, no siendo generalizados estos valores por el resto de la cúpula.

(Resultados ANGLE)

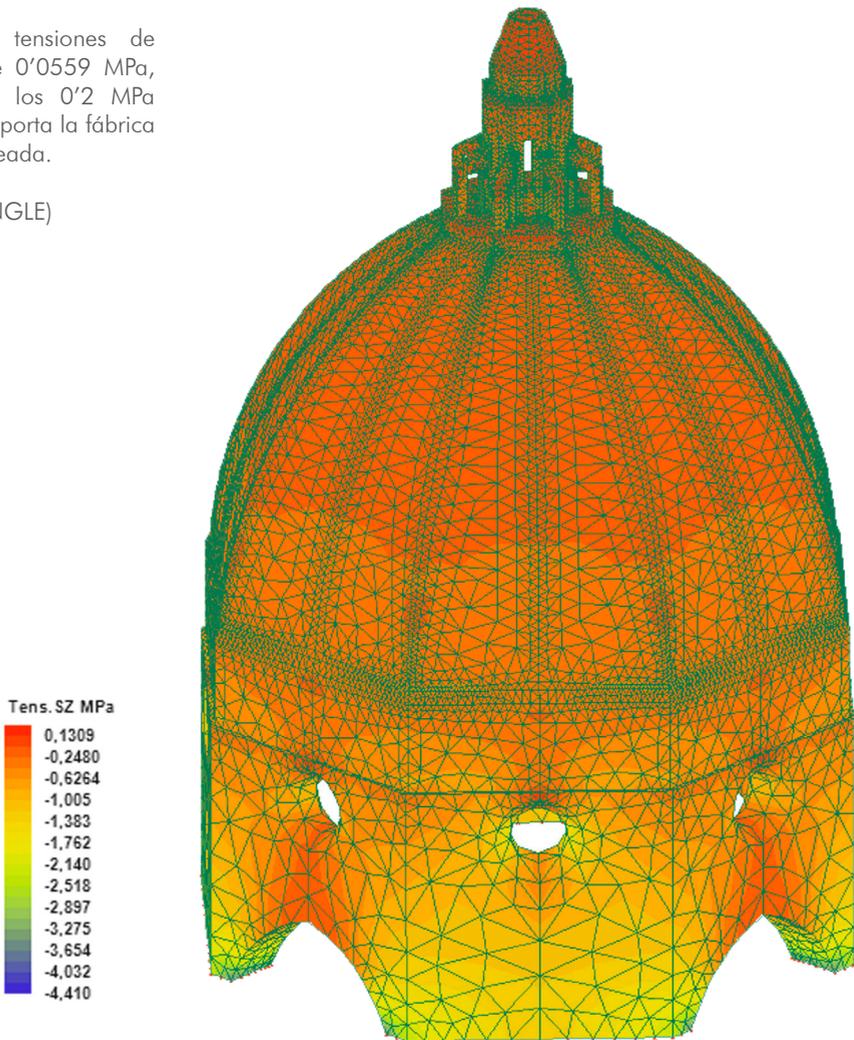
Tensiones Z

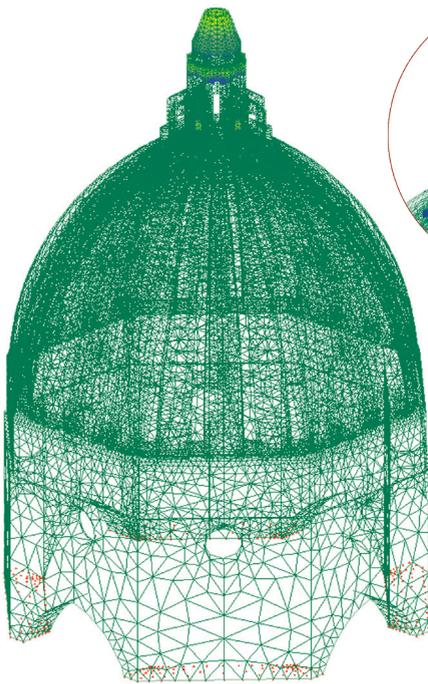
6.8_

Diagrama de las tensiones en la dirección Z.

Las mayores tensiones de tracción son de 0'0559 MPa, por debajo de los 0'2 MPa máximos que soporta la fábrica de ladrillo empleada.

(Resultados ANGLE)





6.9_

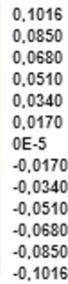
Diagrama de las tensiones en la dirección Z.

Tramo 0'1- -0'1 MPA.

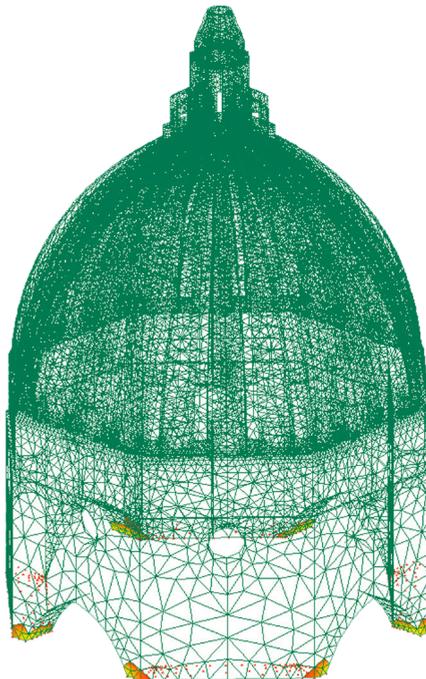
Las tensiones de tracción son prácticamente nulas.

(Resultados ANGLE)

Tens. SZ MPa



Tens. SZ MPa



6.10_

Diagrama de las tensiones en la dirección Z.

Tramo -2- -5 MPA.

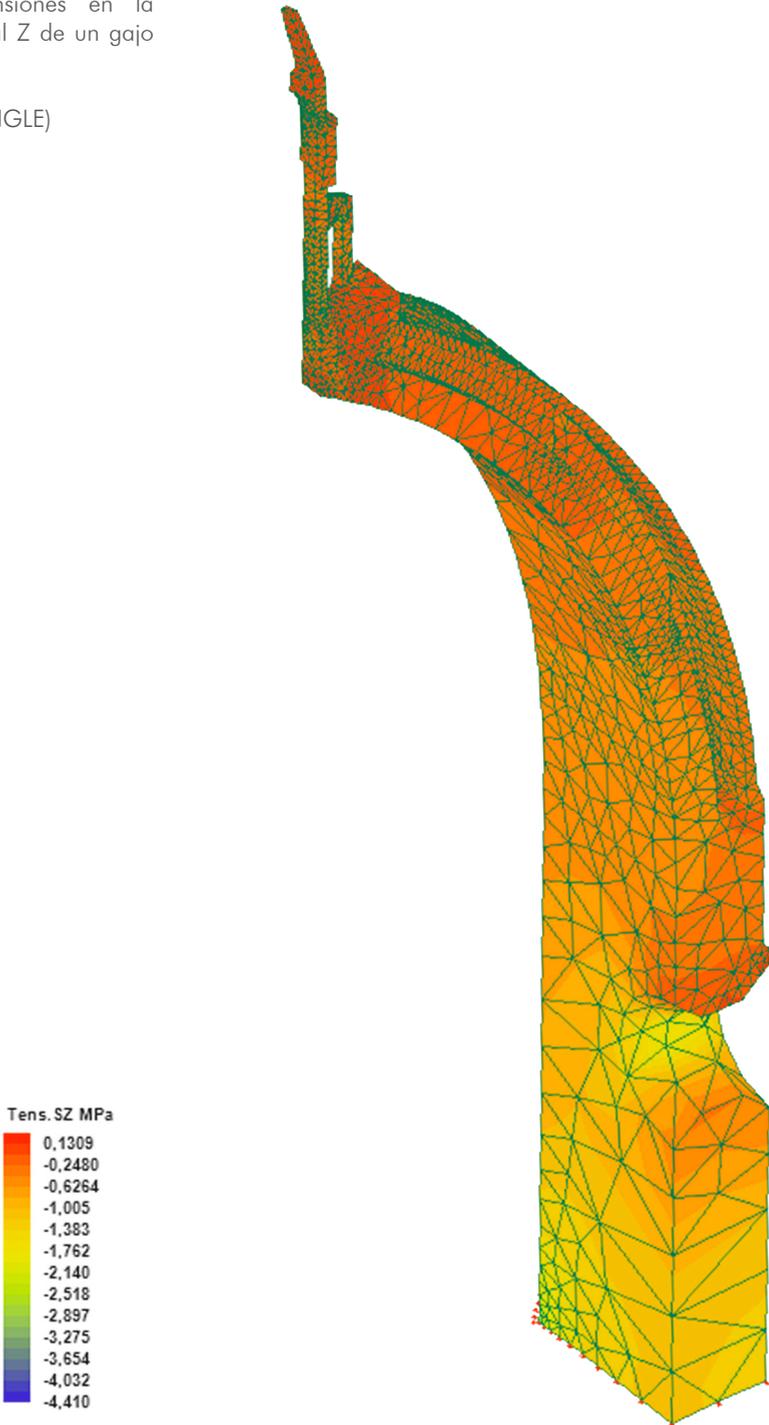
Con este diagrama observamos que las mayores tensiones de compresión se obtienen de manera puntual en la parte inferior del tambor junto a los arcos debido a la mayor concentración de fuerzas, no siendo generalizados estos valores por el resto de la cúpula.

(Resultados ANGLE)

6.11_

Diagrama tensiones en la dirección vertical Z de un gajo aislado.

(Resultados ANGLE)



Las observaciones del cálculo de primer orden o cálculo estático lineal para el caso de estructuras de fábrica nos dan una aproximación de las tensiones que soporta la estructura con su peso propio sin mayorar.

Este tipo de cálculos se emplea en las estructuras modernas de elementos lineales, tanto en acero, como en hormigón y madera, pero siempre y cuando las deformaciones esperadas por movimientos de la estructura se puedan considerar aceptables, es decir, en estructuras intraslacionales.

Como hemos visto en los diferentes diagramas, las tensiones más generalizadas son de compresión exceptuando en la linterna, donde la fábrica se encuentra en ciertas zonas bajo tracciones pequeñas $0'13$ MPa, las cuales no llegan al límite resistente del material $0'2$ MPa. También podemos ver cómo las máximas tensiones de compresión son del orden de $4'46$ MPa en la zona más baja del tambor junto a los arcos muy alejados del límite de 20 MPa.

A pesar de esto, las tensiones medias de la cúpula son del orden de $1-2$ MPa a compresión, teniendo los valores anteriormente descritos en zonas muy puntuales.

Es cierto que el cálculo en sí es mucho más rápido y sencillo que el no lineal, no obstante, los resultados no tienen en cuenta las características del material y en el caso de las fábricas, donde la resistencia a tracción es baja y la fisuración se da rápido, es importante tenerlo en cuenta. En efecto, el cálculo lineal nos dará una aproximación que seguramente no es lo suficientemente fiable y debemos realizar cálculos de segundo orden.

6.5 Cálculo no lineal

Antiguamente, los constructores razonaban sobre los elementos resistentes, tanto horizontales como verticales, la transmisión de las cargas mediante métodos empíricos.

Fue a partir de Galileo Galilei cuando se empieza a debatir sobre los principios de la estática estructural y resistencia de los materiales.

A través de la experiencia, se dedujo que las deformaciones de una estructura tienen influencia sobre la resistencia de la estructura. Se empiezan a tener en cuenta los movimientos, se tiene una comprensión intuitiva del equilibrio entre fuerzas externas y solicitaciones internas.

Se desarrolla así la Mecánica de los Cuerpos Deformables, que establece la necesidad de postular una ley analítica entre las tensiones y las deformaciones locales (ley constitutiva).

Estos efectos no fueron tenidos en cuenta por Brunelleschi, ya que pertenece a una época anterior, por lo que en la construcción de estructuras de este tipo se asumen ciertos riesgos al no conocer cómo trabajan realmente.

A través de los nuevos principios de deformaciones y resistencias del material, se desarrolla el cálculo no lineal en estructuras.

Se trata de un método iterativo en el cual la carga se va aplicando de manera progresiva en la estructura mediante pasos de carga predefinidos*, de manera que en cada incremento de carga se recalcula la estructura para obtener el estado de tensiones y reformular las rigideces debidas para el siguiente paso de carga.

En el cálculo de estructuras habituales se consideran suficientes los resultados obtenidos por el método lineal, al tratarse de elementos que trabajan en una dirección principalmente, pero cuando se trata de estructuras en las que el material tiene carácter no lineal (fábricas), es necesario la realización de este cálculo.

En la cúpula, este cálculo nos permite ver cómo avanzan los daños según la carga, qué zonas tienen mayores solicitaciones, e incluso dar un valor de peso mayor al que tiene para saber en qué momento llegaría a colapsar la estructura.

Estos resultados los extrapolaremos a las fisuras reales para ver cómo se relacionan y si los resultados obtenidos son lo suficientemente fiables.

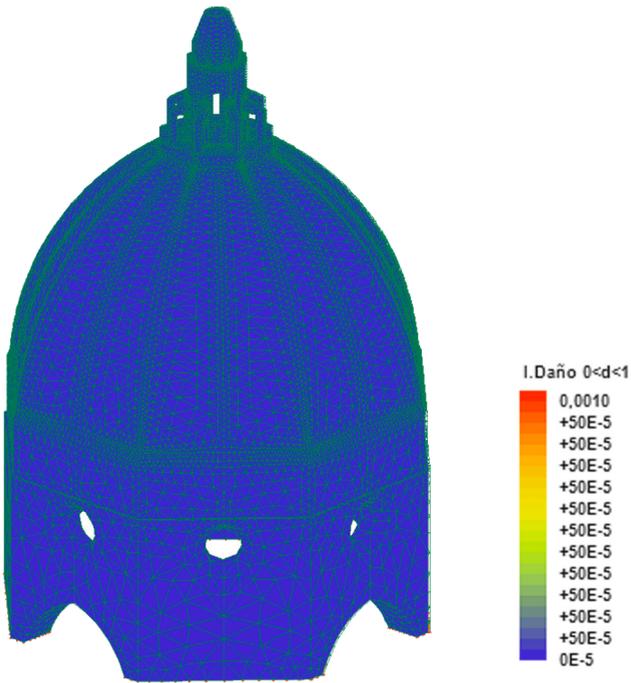
Pasos de carga*

Nº paso	% de carga
1	0,1
2	0,25
3	0,4
4	0,55
5	0,71
6	0,86
7	1
8	1,16
9	1,32
10	1,47
11	1,62
12	1,78
13	1,93
14	2

6.12_ PASO 1

Aplicamos la carga desde 10% sobre el total. El daño es nulo bajo este estado de carga.

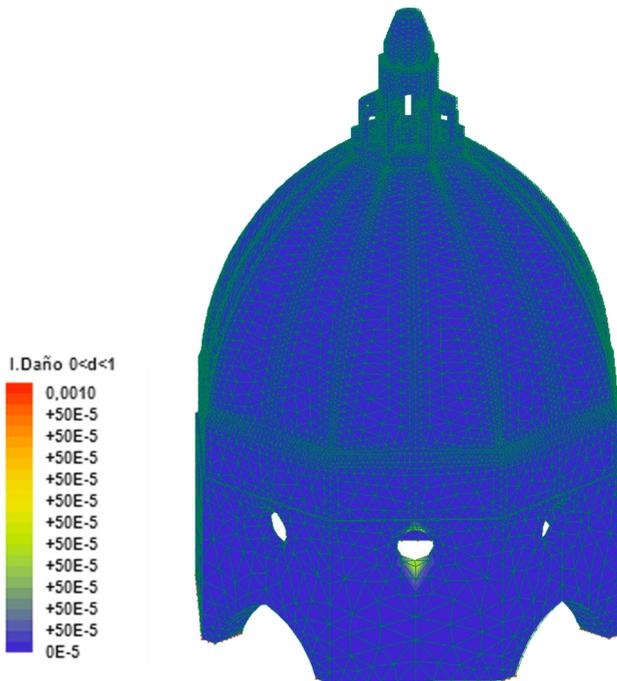
(Resultados ANGLE)



6.13_ PASO 4

55% del total de la carga, empieza a notarse daño en las zonas próximas a los óculos en los paños macizos.

(Resultados ANGLE)

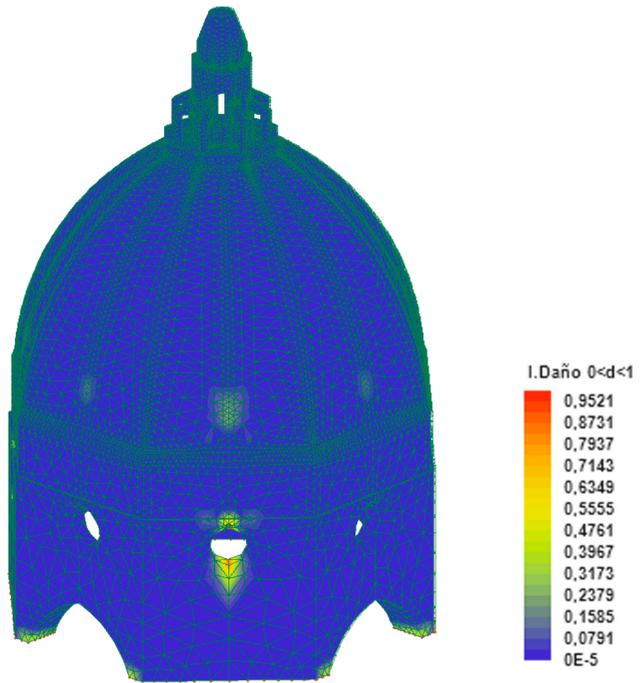


6.14_

PASO 7

Aplicamos la carga desde 100% sobre el total. El daño de carga es el real bajo una geometría idealizada.

(Resultados ANGLE)

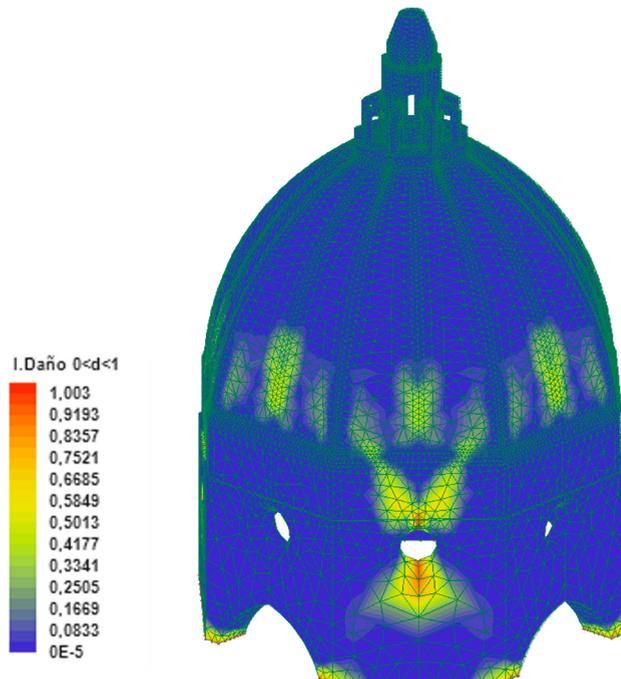


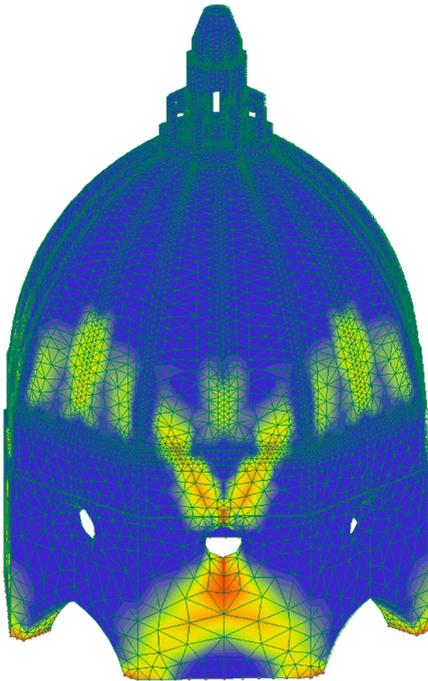
6.15_

PASO 9

Aplicamos la carga desde 132% sobre el total.

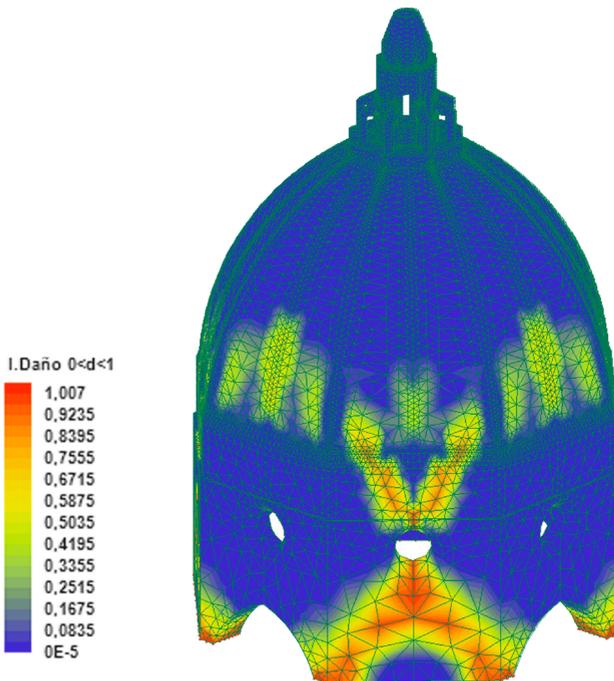
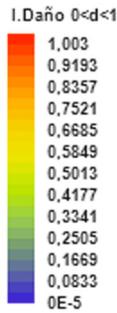
(Resultados ANGLE)





6.16_
PASO 10
Aplicamos la carga desde 147% sobre el total.

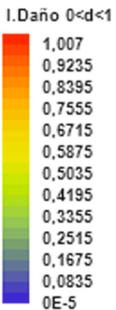
(Resultados ANGLE)



6.17_
PASO 12
Aplicamos la carga desde 178% sobre el total. Último paso con resultados de tensiones sobre la cúpula, por lo cual, se forma un mecanismo antes del estado de carga del paso número 13.

El colapso llega entre el 178% y 193% del total de la carga, por lo que cuenta con un factor de seguridad de 1,8.

(Resultados ANGLE)



Tensiones principales I

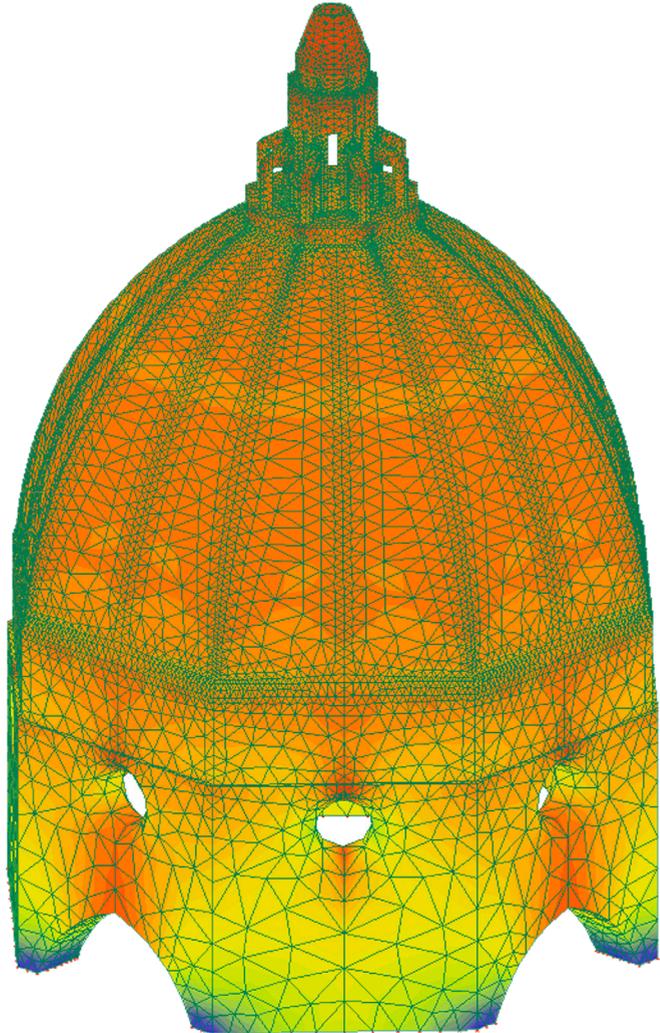
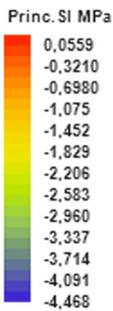
6.18_

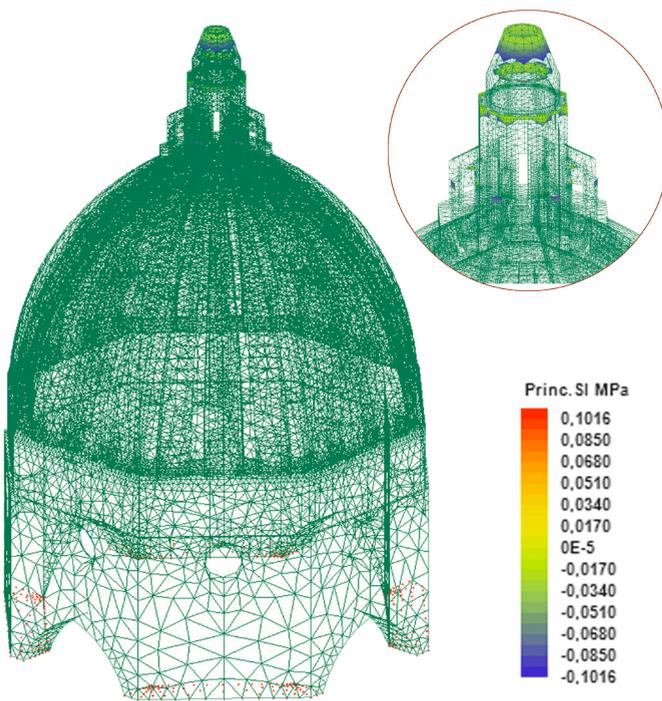
Diagrama de las tensiones principales I.

Comparamos los resultados obtenidos con el cálculo no lineal con el anteriormente realizado, cálculo lineal. Para esto tendremos en cuenta que el paso sobre el cual debemos hacer las comparaciones es en el séptimo, debido a que en él la carga se encuentra al 100% del peso real.

Las tensiones tanto de tracción como las de compresión vemos cómo son mayores.

(Resultados ANGLE)





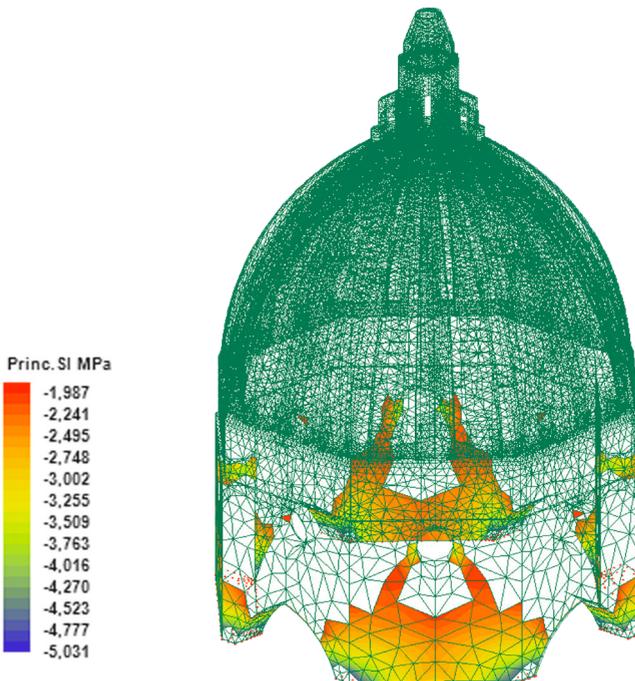
6.19_

Diagrama de las tensiones principales I.

Tramo 0'1- -0'1 MPA.

Las tensiones de tracción son menores a las del cálculo lineal, observándose en menos zonas de la linterna.

(Resultados ANGLE)



6.20_

Diagrama de las tensiones principales I.

Tramo -2- -5 MPA.

Esta vez las tensiones de compresión son mayores en el cálculo no lineal debido a que la fisuración del material disminuye su resistencia y aumenta las tensiones.

(Resultados ANGLE)

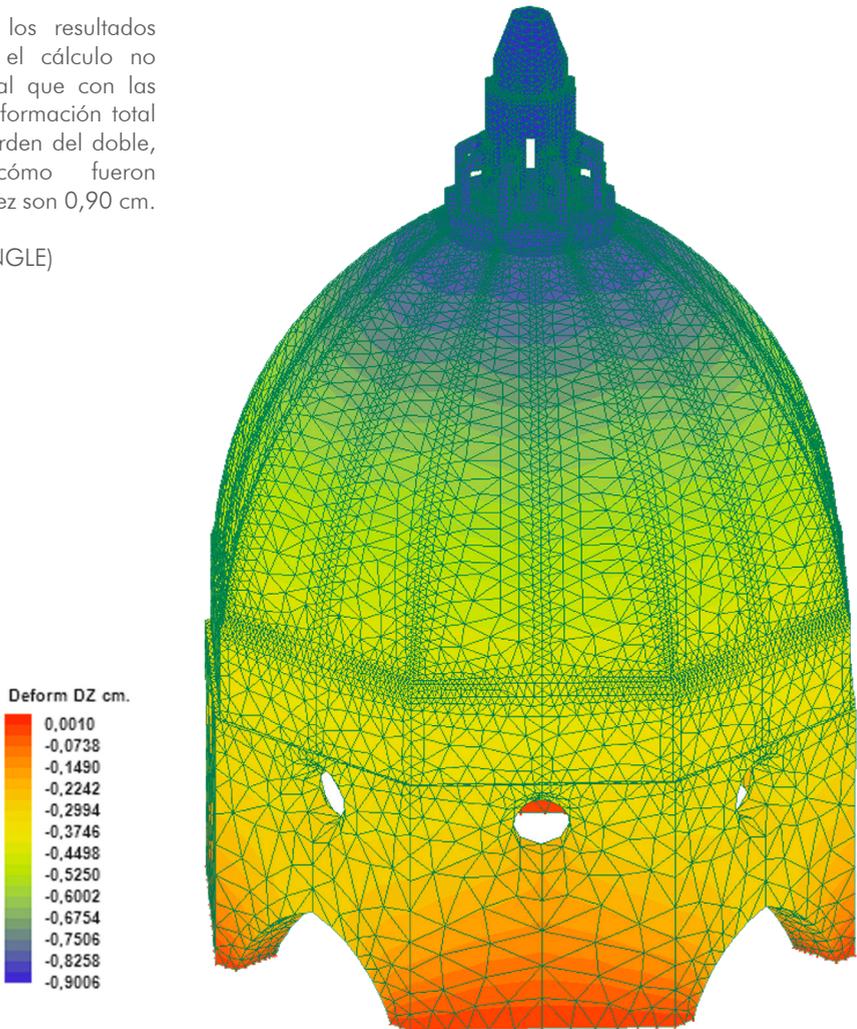
Deformaciones Z

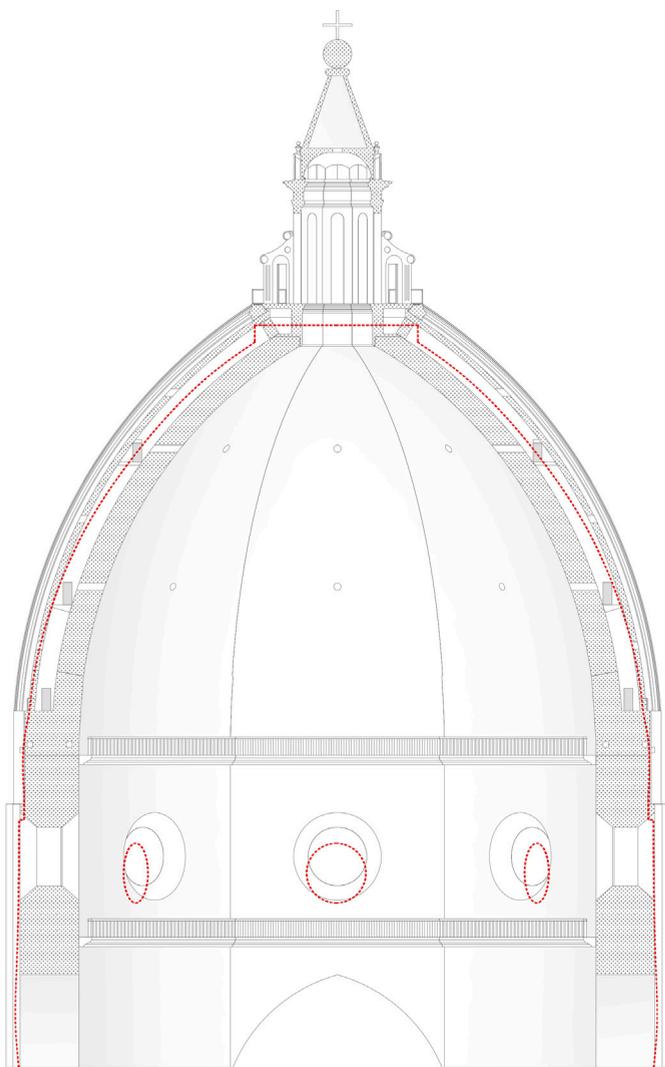
6.21_

Diagrama de las deformaciones.

Comparamos los resultados obtenidos con el cálculo no lineal y, al igual que con las tensiones, la deformación total es mayor, del orden del doble, recordamos cómo fueron 0,43cm y esta vez son 0,90 cm.

(Resultados ANGLE)



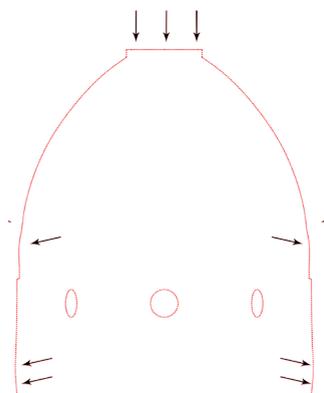


6.22_

Deformada sobre la sección de la cúpula.

Con este dibujo, que no está a escala, se pretende mostrar el efecto que producen las tensiones, abombando en la zona del tambor y en el arranque de la cúpula. Debemos tener en cuenta que la base del tambor en el modelo es indeformable debido a que se han colocado los apoyos, de esta manera no se pueden producir movimientos horizontales que agravasen más las deformaciones.

(Elaboración propia)



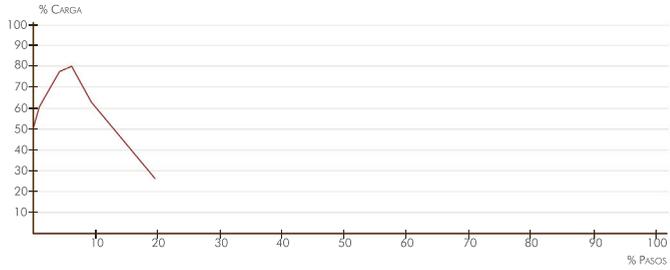
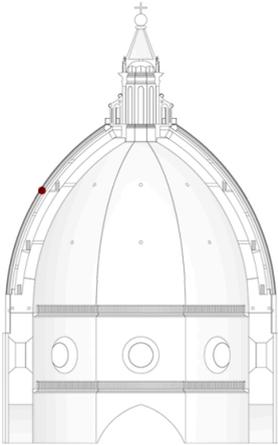
6.23_

Esquema de las deformaciones sobre la cúpula.

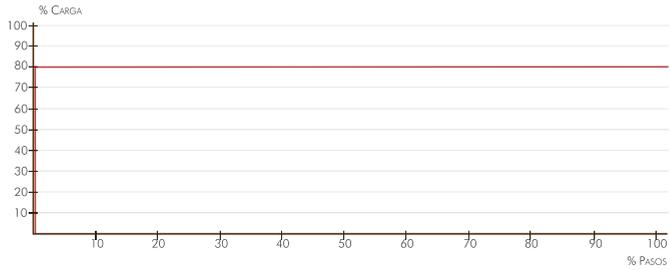
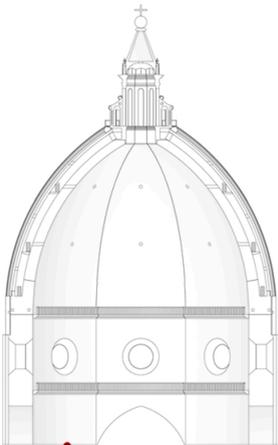
(Elaboración propia)

Tensiones en puntos

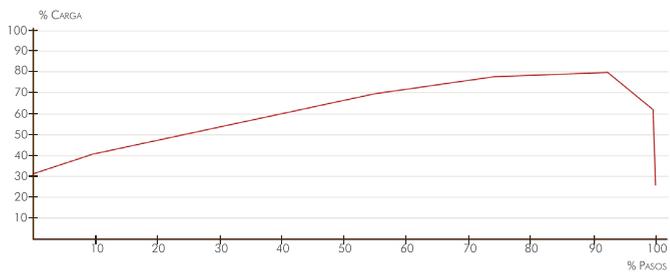
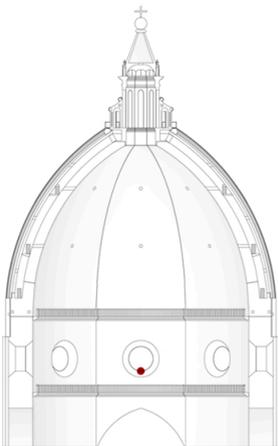
Casquete exterior

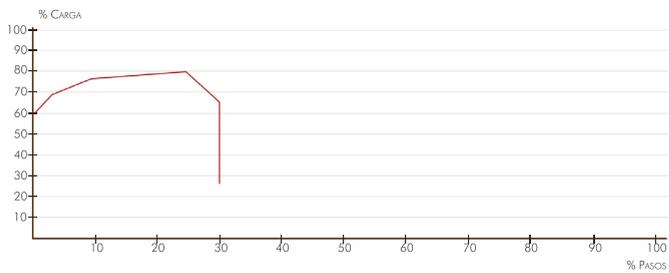


Base tambor

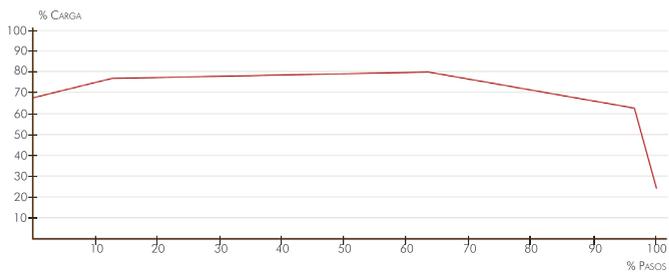
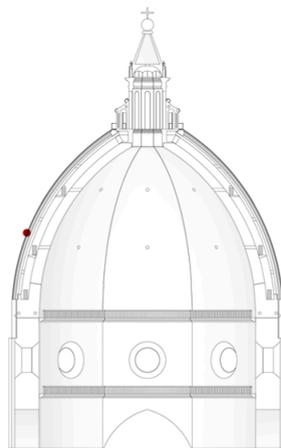


Parte interior óculo

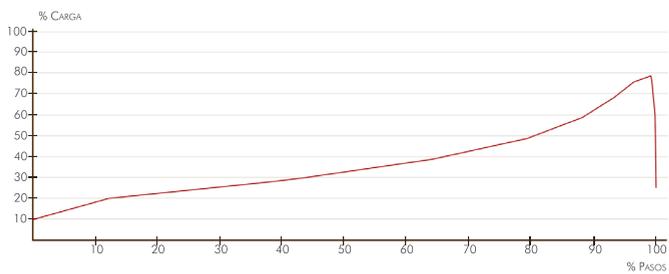
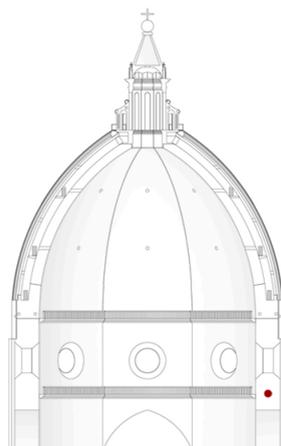




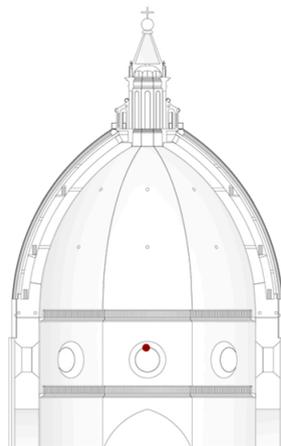
Casquete exterior



Interior tambor



Parte superior óculo



07_ ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para concluir el estudio estructural y poder darlo por válido, analizaremos el estado fisurativo de la cúpula para compararlo con el diagrama de daño fisurativo y ver si entre ambos se corresponden. Si lo hiciesen, podríamos decir que tanto la toma de datos como el estudio realizado son correctos, de lo contrario deberíamos pensar qué ha sucedido para que los datos sean erróneos. Pero antes que nada, vamos a ponernos en contexto histórico.

“El primer documento guardado en el Archivo histórico de la Ópera del Duomo en el que se hace referencia a la Cúpula se remonta a 1639, cuando Gherardo Silvani, entonces arquitecto de la Opera, elaboró un informe para resaltar la presencia de una serie de lesiones pasajeras que describen soluciones de diseño “vinculante a implementar”. Por lo tanto, es un hecho conocido que la cúpula florentina está sujeta a un complejo sistema de lesiones antiguas y es precisamente por ese motivo por el cual la cúpula se vigila constantemente, desde 1952 con instrumentos mecánicos y desde 1978 con un sistema instalado por el Ministerio de Patrimonio Cultural y que puede ser considerado el más preciso del mundo en un conjunto monumental.”

Para la realización de los trabajos de restauración se lleva a cabo un concurso convocado en 1997 para la contratación del andamio aéreo. La comisión de Angelis d'Ossat que acabó sus trabajos en 1977.

Además, durante 1984-86 la Soprintendenza per i Beni Ambientali e Architettonici realizó un catálogo en el cual representaba las lesiones de toda la catedral. Contaba con un total de 60 grietas, las cuales quedan grafiadas y fotografiadas.

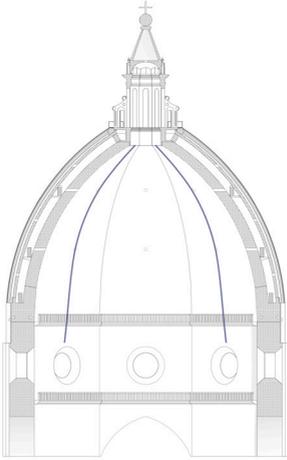
Este documento llega a describir el fenómeno de las lesiones en el conjunto arquitectónico pero sin llegar a cuantificar los daños. Supone un gran avance en los estudios hasta hoy realizados.

En el informe se ponen en evidencia los fenómenos que aparecen en la cúpula, determinándose tres niveles diferentes. Cabe destacar cómo se ha apreciado una diferente respuesta estructural en el octógono, diferenciándose entre los paños continuos hasta la cota 0 y entre los que en ellos abren grandes arcos para la comunicación con otras naves.

6.1 Estudio fisurativo

“operaduomo.firenze.it

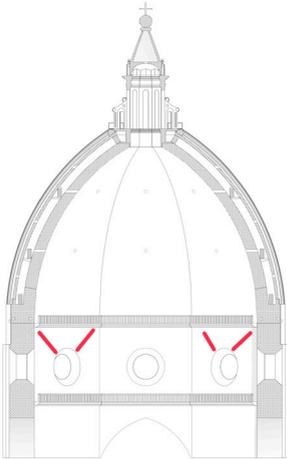
Fenómeno 1



Sobre los sectores SO, SE, NE, NO. Dirección vertical desde la linterna hasta el tambor, donde presentar mayor amplitud, afectando a las pilastras.

Han pasado del casquete interior al exterior, principalmente en el lado este, sobre la sacristía.

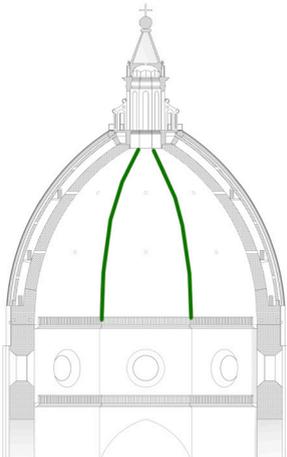
Fenómeno 2



Sobre los sectores O, E, E, O. Se produce en las proximidades de los óculos del tambor. De estas lesiones nacen grietas con una inclinación de 60° sobre el plano horizontal.

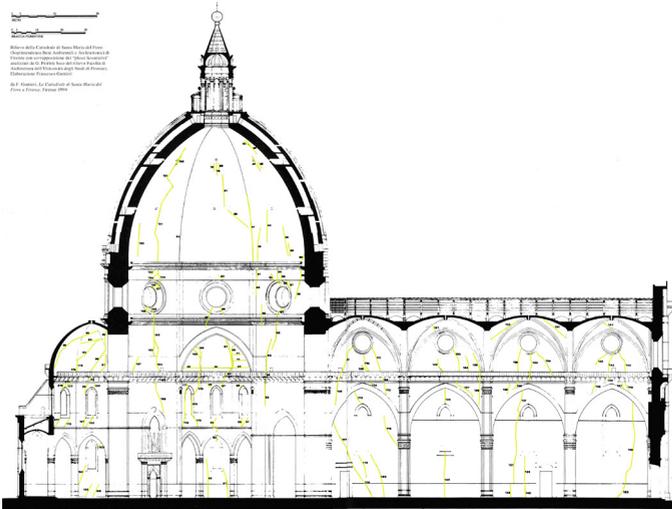
Atraviesan una parte del tambor comprendida entre la segunda y tercera galería.

Fenómeno 3



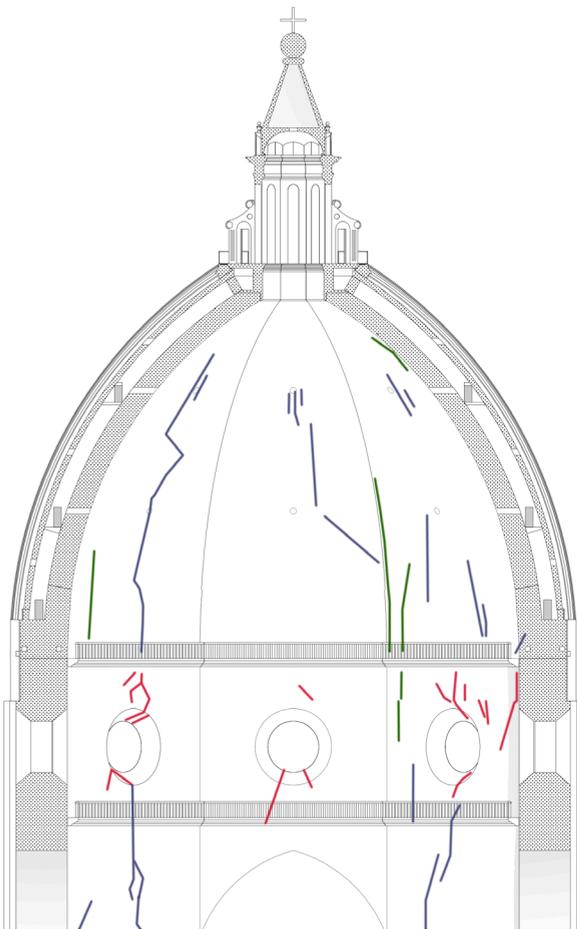
Este fenómeno se refiere a las lesiones angulares, las que se encuentran en la intersección entre los diferentes paños de la cúpula, en dirección vertical.

Estas grietas se suelen observar en el intradós del casquete interno.



7.1_
Sección de la catedral con estudio de fisuras.

(operaduomo.firenze.it)



7.2_
Sección de la cúpula con estudio de fisuras. Se han distinguido las fisuras obtenidas de la anterior ilustración pero esta vez diferenciando por los tipos de fenómenos.

(Elaboración propia)

6.2 Comparación resultados

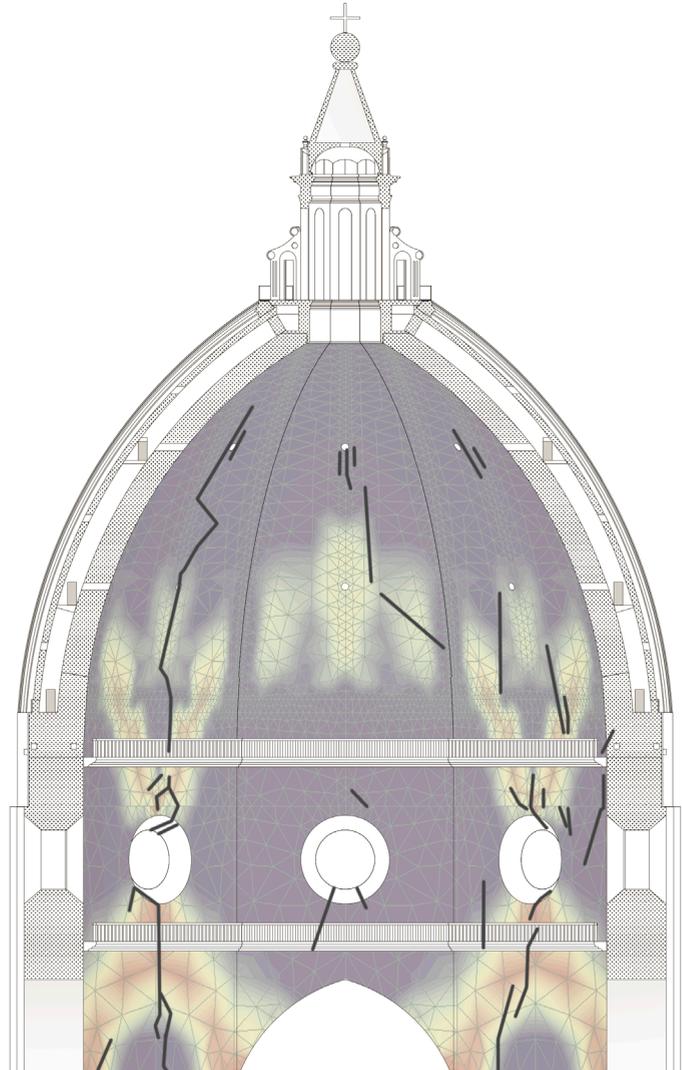
7.3_

Ilustración de todas las fisuras junto a los resultados del daño isotrópico obtenidos en el cálculo estructural no lineal.

Para comparar los resultados de cálculo vamos a superponer los isovalores obtenidos en el programa de los daños isotrópicos con el cuadro fisurativo real.

Comparamos el alzado interior de la cara sur con los paños sureste, suroeste y este. Por una parte vemos cómo el paño ciego es el que más daño tiene y por lo tanto donde más fisuras encontramos. Por otra parte en los óculos están las fisuras correspondientes al fenómeno 2, tal y como aparece en los resultados de cálculo.

(Elaboración propia)



08_ CONCLUSIONES

Para abordar el análisis de estructuras históricas no es suficiente con un cálculo estructural lineal y deberemos realizar cálculos no lineales mediante los cuales podamos observar la evolución del daño en las estructuras clásicas de mampostería debido a su pérdida de resistencia por la aparición de deformaciones y fisuras.

En el caso de la catedral de Santa María del Fiore hemos estudiado su historia y construcción de una manera detallada para así poder realizar un modelo que represente la realidad de la estática. Así pues, con las nuevas tecnologías y softwares hemos podido comprobar cómo los resultados son acordes al presente de la cúpula al comparar el daño con el estado de fisuración actual, dando por bueno el estudio.

En cuanto a la seguridad estructural que presenta la cúpula, tiene un coeficiente del 1'80 aproximadamente respecto a las cargas gravitatorias y sin tener en cuenta los posibles efectos del sismo y del viento, siendo este último prácticamente despreciable. En otras palabras, la cúpula podría soportar un 80 % más de su propio peso, siendo un valor muy común en las estructuras históricas.

Comparando con los factores de seguridad actuales, según el CTE para las cargas permanentes debe hacerse una mayoración de cargas de 1'35, por lo que cumpliría de sobra con las especificaciones.

En el caso de querer realizar refuerzos en la cúpula, las zonas más dañadas se encuentran en los óculos en los paños ciegos, es decir, en los orientados a NE, NO, SE y SO.

Además, las tensiones máximas no llegan en ningún punto a la máxima resistencia del material, tanto a compresión como a tracción, por lo que no se producen grandes daños.

En rasgos generales y a modo de conclusión del TFG, podemos decir que la estática de la cúpula está a salvo gracias a la brillante mente que pudo hacer posible, en el siglo XV, que una estructura de tal envergadura se levantase sobre el cielo de Florencia. La de Filippo Brunelleschi.

10_ BIBLIOGRAFÍA

Libros

BACCI, B.M. NAVARRO SALAZAR, M.T. *"El cielo de piedra: Brunelleschi y la gran cúpula"*. Madrid: Veleció, 2005.

BARTOLI, L. *"Il disegno della cupola del Brunelleschi"*. Firenze: Leo S. Olschki, 1994.

BATTISTI, E. *"Brunelleschi: The complete work"*. London: Thames & Hudson, 1981.

CONTI, G. CORAZZI, R. *"La cupola di Santa Maria del Fiore: Raccontata dal suo progettista Filippo Brunelleschi"*. Livorno: Sillabe, cop, 2005.

FANELLI, G. FANELLI, M. *"La cúpula de Brunelleschi: Historia y futuro de una grande estructura"*. Italia: Mandragora. 2004.

GUASTI, C. *"La cupola di Santa Maria del Fiore: illustrata con i documenti dell'archivio dell'opera secolare. Saggio di una compiuta illustrazione dell'opera secolare e del tempio di Santa Maria del Fiore"*. Firenze: Barbera, Bianchi, 1857.

IPPOLITO, L. PERONI, C. *"La cupola di Santa Maria del fiore"*. Roma: La nuova Italia Scientifica, 1997.

KING, R. *"La cúpula de Brunelleschi: historia de la gran catedral de Florencia"*. Barcelona: Apóstrofe, 2002.

PIZZIGONI, A. *"Brunelleschi"*. Bologna: Zanichelli, cop, 1989.

RICCI, M. *"Il fiore di Santa Maria del Fiore: (ipotesi sulla regola di costruzione della cupola"*. Firenze: Alinea, cop, 1983.

RICCI, M. Universidad Politécnica de Valencia. Exposición *"La cupola, le macchine ed altro nella Firenze del Brunelleschi"* E.T.S. de Gestión de la Edificación, Universidad Politécnica de Valencia (España) 10-15 maggio 2004. Universidad Politécnica de Valencia, 2004" Valencia: UPV, 2004.

VASARI, G. *"Vida de pintores, escultores y arquitectos ilustres. Tomo II"*. Buenos aires: El Ateneo, 1945.

DALLA NEGRA, R. *"Los trabajos de restauración de la cúpula de Santa María del Fiore" en Loggia, Arquitectura & Restauración. Florencia, nº 2, p. 18-80, 1997.*

Páginas web

ALARGOS ARTE E HISTORIA. "La cúpula de la catedral de Florencia a través de blogger y adobe spark" disponible en: http://algargos2.rssing.com/chan-51246429/all_p4.html. 2017.

ÁLVAREZ RICO, G. "Cúpula de la catedral de Florencia" disponible en: www.lacruzadadelsaber.org. 2017.

DUOMO FIRENZE. "Il Duomo Di Firenze" disponible en: <http://www.duomofirenze.it/>.

GOMIS RIBERA, H. "Cúpula Santa María del Fiore" disponible en: <https://studylib.es/doc/4801612/c%C3%BApula-de-santa-maria-del-fiore>.

LOPEZ HERNANDEZ, P, J. "Brunelleschi express" disponible en: <http://elarquitectoimpenitente.blogspot.com/2012/>. 2012.

MAGI, L. "Desvelado el secreto de la cúpula de Florencia" disponible en: https://elpais.com/cultura/2011/11/10/actualidad/1320879610_850215.html. 2011.

MAGI, L. "Hallado el "boceto" de Brunelleschi" disponible en: https://elpais.com/cultura/2012/12/14/actualidad/1355516971_590783.html. 2011.

RTVE. "¿Cómo se construyó la cúpula de la catedral de Florencia? 'Los secretos del Duomo'" disponible en: <https://blog.rtve.es/somosdocumentales/2015/04/c%C3%B3mo-se-construy%C3%B3-la-c%C3%BApula-de-la-catedral-de-florencia-la-2-estrena-el-documental-los-secretos-del-.html>. 2015.

SIRA, G. "El concurso para la segunda puerta de bronce del baptisterio di San Giovanni de Florencia" disponible en: <http://viajarconelarte.blogspot.com/2016/02/el-concurso-para-la-segunda-puerta-de.html>. 2016.

