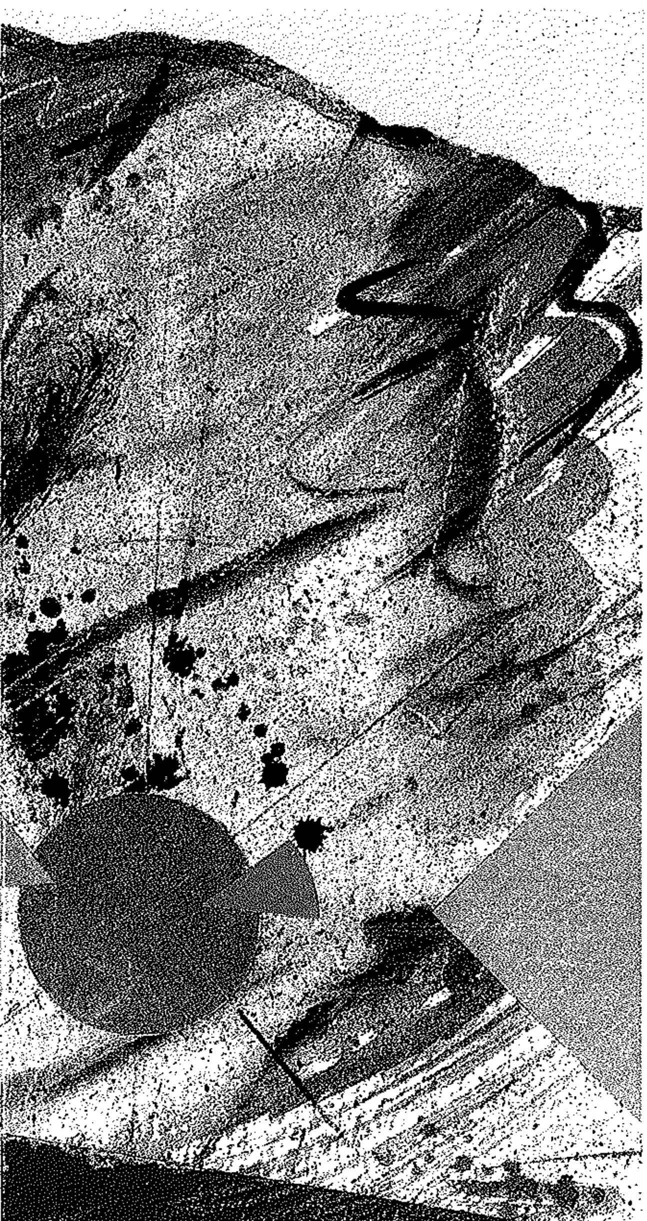
epsilon



REVISTA DE LA S.A.E.M. «THALES» / Nº 53 / VOLUMEN 18(2)

epsilon

REVISTA DE LA SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACION MATEMATICA "THALES"

consejo editorial

Edita
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Centro Documentación «Thales»
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Imprime
Grafitrés, S.L.
Cristóbal Colón, 12 - Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

I.S.S.N.
1131-9321

Período
2º Cuatrimestre 2002

Suscripción
ESPAÑA: 36,00 EUROS
PAÍSES DEL EURO: 55,00 EUROS
RESTO PAÍSES: 55 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

UNA NOTA SOBRE CAPITALIZACIÓN A INTERÉS COMPUESTO

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad Politécnica de Valencia.
Gema Calbo Sanjuan
Departamento de Matemáticas.
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

RESUMEN. *En este trabajo se estudia una curiosa regla bancaria poco conocida para determinar de forma aproximada el tiempo que debe transcurrir para la multiplicación de un capital que se invierte inicialmente a un interés compuesto anual. La regla resulta atractiva por que sólo requiere la realización de una división sencilla, en lugar, de la aparatosa, pero exacta fórmula que es bien conocida. El trabajo está expuesto para ser aprovechado como una actividad dirigida para los alumnos de bachillerato, especialmente para aquellos que cursan la optativa de Economía.*

1. INTRODUCCIÓN

Hace unos días fui a diferentes bancos para informarme de las distintas ofertas que tienen para invertir unos *ahorrillos* en un plan de pensiones. Por supuesto, los tiempos que corren para un profesor no invitan a otra cosa y pregunté por la modalidad clásica de interés anual compuesto.

En una de las entidades bancarias que visité, me llamó la atención que el empleado (más bien mayor) que me atendió, después de ofrecerme dos productos con diferentes ventajas fiscales y con tipos de interés $r_1 = 3.5$ y $r_2 = 5$, respectivamente, me dijera: "... *y entonces el capital que usted desea invertir ahora, se habrá duplicado en el primer caso en 20 años y en el segundo en sólo 13 años, es decir, antes de que se jubile, aunque debe tener en cuenta las diferencias fiscales que le he co-*

mentado". Yo me quedé perplejo, por que apenas habían pasado unos segundos desde que yo le dije cuál era el capital que deseaba invertir y sus palabras. Como profesor de matemáticas que soy, no pude contenerme y le pregunté, cómo había podido realizar los cálculos con tanta rapidez. Su respuesta fue: "*Es sencillo, con independencia del capital que usted desee invertir, éste siempre se doblará al cabo (en años) de 70 entre el interés, aproximadamente. Y no me pregunte por qué, pues esta regla la vengo aplicando toda la vida y funciona*".

Para un profesor de matemáticas, que el resultado no dependa del capital inicial invertido está claro además de ser intuitivo, pero lo demás me dejó pensativo.

Nada más llegar al día siguiente al instituto lo comenté con otros compañeros, pero ninguno conocía el truco.

El resto de estas páginas pretenden justificar esta aproximación contable, así como generalizarla, por que resulta una interesante actividad para realizarla en el aula con nuestros alumnos de bachillerato, sobre todo con aquellos que cursan la optativa de economía.

2. JUSTIFICACIÓN DE LA REGLA

Es bien sabido que si se invierte un capital inicial C0 a un interés fijo compuesto anual r ($0 \leq r \leq 100$), entonces el capital al cabo de t años es

$$C_t = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Para justificar la regla debemos resolver

$$2C_0 = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)} \qquad \textbf{(1)}$$

En (1) ya vemos que t no depende de C_0, y que si ponemos $r = 3.5$, entonces $t \cong 20.14879$ y si $r = 5$ entonces $t \cong 14.20670$, tal y como dijo el empleado de banca.

Ahora veremos cómo podemos, en general, dar validez al razonamiento que utilizaba el banquero.

Desarrollaremos nuestra exposición para llevarla al aula, tal y como hicimos nosotros: mediante una *actividad dirigida*.

En primer lugar, pedimos a nuestros alumnos que establezcan la desigualdad doble

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \qquad \forall x \geq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Aunque (2) puede probarse utilizando desarrollos en serie de Mac Laurin, como nuestros alumnos no los conocen utilizamos una estrategia basada en derivadas.

Para probar una desigualdad doble del tipo

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \geq 0 \qquad \textbf{(3)}$$

definimos las funciones auxiliares $\alpha(x) = g(x) - f(x)$ y $\beta(x) = h(x) - g(x)$ y podemos intentar probar que $\alpha(0) = 0$ y $\alpha'(x) \geq 0 \; \forall\, x \geq 0$, en cuyo caso, al ser $\alpha(x)$ una función creciente en $[0,+\infty]$ se tendrá:

$$\alpha(0) \leq \alpha(x) \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq 0$$

Razonando de forma idéntica sobre $\beta(x)$ se establece la segunda desigualdad en (3). En el caso particular (2)

$$\alpha(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$
$$\alpha(0) = 0$$
$$\alpha'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

y

$$\beta(x) = x - \ln(1+x)$$
$$\beta(0) = 0$$
$$\beta'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

con lo cual (2) queda probado.

En segundo lugar, podemos sugerir a los alumnos que obtengan a partir de (2) la siguiente aproximación

$$\ln(1+x) \cong x \qquad \textbf{(4)}$$

y que estimen una cota superior del error cometido al realizar esta estimación.

La aproximación (4) es inmediata y de (2) se tiene la cota buscada

$$\left|\ln(1+x) - x\right| \leq \frac{x^2}{2} \qquad \textbf{(5)}$$

Ahora sugerimos a los alumnos que utilicen la aproximación (4) para llegar a probar la regla contable. En efecto, aplicando (4) en (1) se obtiene

$$t = \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)} \cong \frac{\ln 2}{\frac{r}{100}} = \frac{100 \cdot \ln 2}{r} \cong \frac{70}{r}$$

Esta actividad invita a proponer a nuestros alumnos algunas cuestiones. Por ejemplo, ¿para qué valores de r es bueno el truco del empleado de banca, si no se permite utilizarlo con un error mayor a 0.01, es decir, a poco más de tres días?.

La respuesta la obtenemos a partir de (5)

$$\text{Error} \leq \frac{\left(\frac{r}{100}\right)^2}{2} = \frac{r^2}{20000} \leq 0.01 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 14$$

Es decir, en esas condiciones el truco sólo vale para $0 \leq r \leq 14$. Es posible que este detalle se le escapase al empleado de banca, porque rara vez habrá ofrecido un producto de ahorro con interés compuesto por encima del 14%.

Por último, podemos proponer a nuestros alumnos que busquen trucos análogos para calcular rápidamente cuándo se triplicará, cuadriplicará, ... el capital inicial invertido a interés compuesto. En este caso, basta aproximar al entero más próximo el numerador de

$$t = \frac{100 \cdot \ln k}{r}$$

siendo k la constante de multiplicación del capital. En la tabla 1 se recoge la extensión de la regla para k = 3, 4, 5, 10.

TABLA 1. GENERALIZACIÓN DE LA REGLA

k	t
3	$\cong \frac{110}{r}$
4	$\cong \frac{140}{r}$
5	$\cong \frac{160}{r}$
10	$\cong \frac{230}{r}$