acadèmica

Problemas de análisis de una variable y álgebra lineal: soluciones analíticas y con Matlab

Lucía Agud Albesa | Mª Leonor Pla Ferrando

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Lucía Agud Albesa
Leonor Pla Ferrando

Problemas de análisis de una variable y álgebra lineal: soluciones analíticas y con Matlab

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Agud Albesa, L.; Pla Ferrando, L. (2020). *Problemas de análisis de una variable y álgebra lineal: soluciones analíticas y con Matlab.* Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0416_03_01_01

Imprime: Byprint Percom, S. L.

ISBN: 978-84-9048-838-6
Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Resumen

Este libro consiste en una recopilación de ejercicios resueltos dentro de las ramas de Análisis o Cálculo de una variable y de una introducción con rigor al Álgebra.

Los contenidos tratados serán

1. Números reales y números complejos
2. Funciones reales de variable real. Continuidad y derivabilidad
3. Integración de funciones reales de variable real
4. Matrices reales: operaciones, propiedades. Resolución de sistemas: estudio de sistemas con parámetros, diagramas de flujo
5. Determinantes
6. Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones

La estructura general será un ejercicio planteado del cual se encontrarán dos resoluciones: una analítica con todos los pasos explicados y otra realizada mediante el paquete matemático `Matlab` versión `R2019a`. Cuando se termina la resolución de un ejercicio de forma analítica el lector se encontrará con el símbolo □, mientras que cuando se termina la resolución de un ejercicio usando `Matlab` se indicará con el símbolo ⊠.

Todas las instrucciones que se van a ejecutar con `Matlab` pueden encontrarse explicadas con más detalle en el libro indicado en (Agud Albesa y Pla Ferrando 2015), aunque a lo largo del libro se irán explicando las que se trabajen y comentarios sobre las mismas.

Indicar que si hay resueltos varios ejercicios parecidos, la resolución mediante `Matlab` se hará sólo de uno de ellos, ya que los pasos e instrucciones serán los mismos cambiando los argumentos de entrada. Se indicará el ejercicio de referencia donde esto ocurra.

Una de las principales motivaciones que ha llevado a las autoras a escribir este libro es ayudar al alumno a comprender, y no mecanizar, la resolución de problemas matemáticos y cómo afrontarlos tanto de forma analítica como con la ayuda de un paquete matemático -en este caso `Matlab`-. También se busca facilitar ese contacto que todo estudiante o persona que se acerca a las ciencias debe mantener con el lenguaje científico, que es universal y que permite, independientemente de nacionalidades, que toda la comunidad científica pueda expresarse y entenderse de forma única y unívoca.

Por otro lado, en la actualidad se está en un sociedad *online*, que pone al alcance de los ciudadanos cada vez más herramientas que realizan muchos de los pasos y cuentas que antes había que hacer 'a mano'. Hay que potenciar las ventajas que esto ofrece, pero dándose cuenta de que es el usuario el que le dice a las máquinas, a las herramientas, a los paquetes matemáticos, qué es lo que se debe hacer. Si no hay una comprensión de porqué se realizan las operaciones que se muestran, o qué operaciones matemáticas son las que permiten llegar al resultado adecuado, de nada sirve un paquete matemático que ejecute esas instrucciones. Es por eso que las autoras han visto interesante completar la resolución de los ejercicios mediante `Matlab`. Indicando qué debe hacerse y con qué órdenes `Matlab` permite llegar al resultado deseado.

En las ocasiones que interese añadir resultados teóricos o propiedades, se pondrán en esa sección.

Así mismo, en otros momentos, de cara a que cada lector profundice al nivel deseado, se completarán ciertos temas con curiosidades matemáticas o con conocimientos extras relacionados, ilustrando siempre estos nuevos conceptos con ejercicios resueltos. Las secciones de este tipo recibirán el nombre de *Curiosidades* del tema en cuestión.

El capítulo correspondiente a Métodos numéricos para ecuaciones no lineales será desarrollado de forma teórica, completando cada uno de los métodos explicados mediante ejercicios resueltos.

El libro termina con un capítulo donde se han puesto los comandos de las diversas figuras de representaciones gráficas con las que se han ilustrado los ejercicios, de cara a que aquel lector que quiera profundizar en el uso del `Matlab` tenga aquí cómo llevar a cabo esas representaciones. Así de paso, se van introduciendo más comandos de `Matlab` y cómo trabajarlos.

Esperamos que el lector pueda encontrar en este libro una ayuda para comprender mucho mejor los conceptos matemáticos aquí tratados y poder llevar a cabo su resolución, tanto analíticamente como con la ayuda de `Matlab`.

Índice general

Resumen iii

Índice general vii

1 Introducción a `Matlab` 1

1.1 Entorno `Matlab` 1

1.2 Comandos o instrucciones en `Matlab` 5

1.3 Variables y formatos 6

1.4 Ayuda de `Matlab` 9

2 Números. Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ 11

2.1 Inecuaciones 11

2.2 Números complejos 38

3 Funciones reales de variable real. Límites, continuidad y derivabilidad 83

3.1 Cálculo de límites 83

3.2 Derivabilidad de funciones reales de variable real 104

3.3 Curiosidades sobre el cálculo de límites 149

4 Integración de funciones reales de variable real 169

4.1 Integrales inmediatas 170

4.2 Cálculo de primitivas variadas 179

4.3 Integrales impropias 195

4.4 Aplicación al cálculo de áreas 207

5 Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales 213

5.1 Introducción a los métodos numéricos 213

5.2 Método de bisección 216

5.3 Método de Newton-Raphson 226

5.4 Conclusiones 244

6 Matrices y sistemas de ecuaciones 247

6.1 Operaciones elementales entre matrices 248

6.2 Ejercicios resueltos de matrices 260

6.3 Resolución de sistemas 273

6.4 Diagramas de flujo 300

7 Determinantes 317

7.1 Operaciones y propiedades de determinantes 320

7.2 Estudio de sistemas con parámetros utilizando determinantes 324

8 Introducción a gráficos con `Matlab` 341

8.1 Introducción a la representación gráfica con `Matlab` 341

8.2 Comandos utilizados para obtener algunas de las figuras del libro 348

Índice de figuras 357

Índice de tablas 363

Bibliografía 365

Índice alfabético 367

Capítulo 1

Introducción a `Matlab`

1.1 Entorno `Matlab`

Este libro utiliza la versión de `Matlab R2019a`. La ventana que el usuario se encontrará al abrir este paquete matemático se subdivide en varias ventanas dedicadas a mostrar distintas partes de la sesión de trabajo:

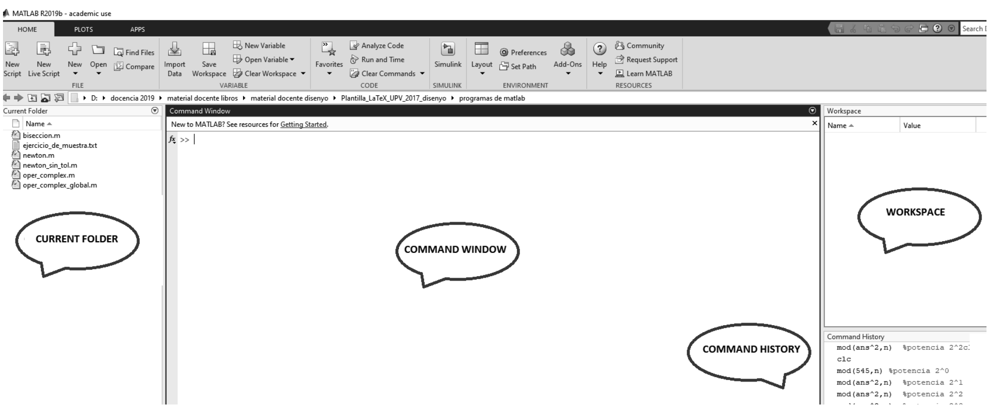


Figura 1.1: Ventana de trabajo del paquete matemático `Matlab`

La *Command Window* (ventana central) es donde se introducen los comandos, variables e instrucciones a realizar. Es decir, es la ventana donde se trabaja.

La ventana *Current Folder* (izquierda superior) indica el contenido del directorio en el que está trabajando en esa sesión y, salvo cambio del mismo, es donde se irán guardando los archivos que se vayan salvando. Si se quiere acceder a algún fichero que ya se tiene construido, recordad que para ejecutarlo desde la ventana de *Command Window* y que `Matlab` lo encuentre, él siempre buscará en la ruta de acceso que se muestra en la barra del *Browser*.

La ventana de *Workspace* (derecha superior) es la ventana donde se indican las variables que se van definiendo en la sesión de trabajo o que se tienen guardadas y cargadas de otras sesiones. Para borrar alguna de ellas, hay que usar el comando >> `clear` seguido del nombre de la variable o seleccionarla en esa ventana y eliminarla. Esta ventana es importante, ya que cuando el lector vaya ejecutando los distintos ejemplos, quizás ya tenga definida la variable que precisa para las instrucción a ejecutar y así no hace falta volver a definirla. Es conveniente siempre consultarlo en esta ventana por si ya tuviera un valor adjudicado de alguna asignación anterior.

La ventana de *Command History* muestra todos los comandos y órdenes introducidos, permitiendo recuperarlos, o bien arrastrándolos a la *Command Window* (no ejecuta), o bien haciendo doble click sobre ellos (ejecuta).

Cuando se ejecuta el comando para representar una función, `Matlab` abrirá una nueva ventana de *Figure*, que se puede minimizar y mantener toda la sesión mientras se va actualizando, o bien cerrar. Cuando se represente otra figura reemplaza la anterior, salvo que se abra una nueva ventana ejecutando el comando

```
>> figure
```

o bien indicando que represente en la misma ventana la siguiente gráfica, usando el comando

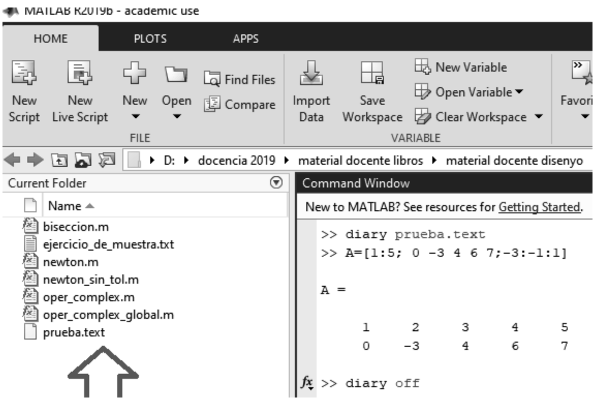
```
>> hold on
```

Si se quiere desactivar este comando basta indicar >> `hold off`.

Con el icono del folio o *New Script* de la barra de herramientas (primero de los iconos de la misma), también se abrirá una nueva ventana donde `Matlab` permite programar o crear funciones en ficheros con extensión *.m*.

La sesión de trabajo se puede guardar. Para ello, desde el instante en que se quiera guardar, escribir (sin espacios en blanco en el nombre del fichero):

>> `diary nombrefichero.txt`



Y desde ahí, hasta indicar >> `diary off`, guarda con el nombre indicado la sesión realizada. Si en cualquier momento se quiere volver a activar dicha sesión, basta con poner de nuevo >> `diary on`. Por defecto se guarda en la ruta especificada en la barra de *Browser*. Este fichero es un documento de texto, que se puede abrir desde el *Bloc de Notas de Windows*, o haciendo doble click en el directorio donde está, abriendo el documento en la ventana de *Editor* de `Matlab`, ver Figura 1.2

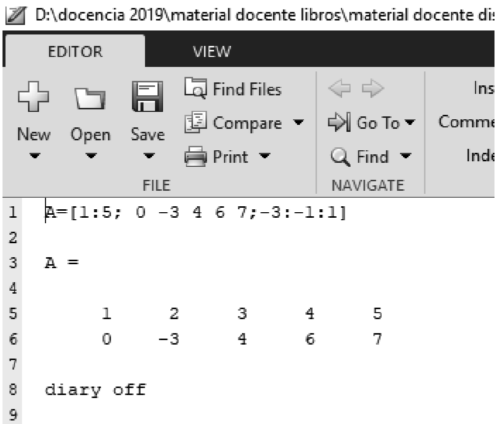
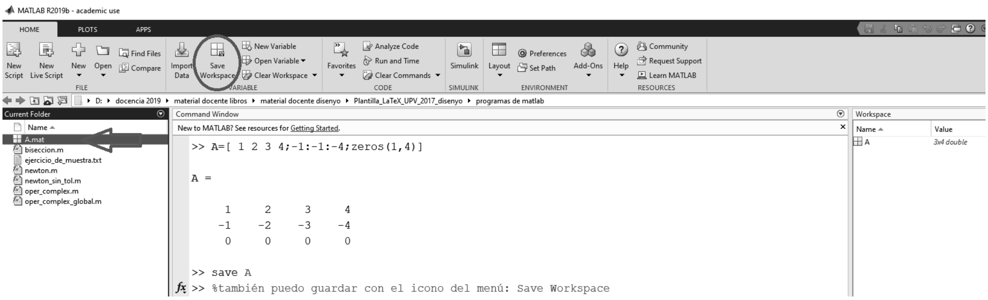


Figura 1.2: Editor con el contenido de la sesión guardada al pulsar dos veces en el archivo

Obsérvese que las instrucciones ejecutadas después de la orden >> `diary off` no se han guardado en el documento.

Si solo se quiere guardar las variables que se han ido creando en la sesión, bastará con el comando >> `save nombre_variable`, o *File>Save Workspace* o desde el icono con este mismo nombre disponible en la barra de herramientas (rodeado en la figura siguiente). Los archivos de variables tienen por defecto extensión *.mat* y al guardarlos deben aparecer en la ventana de *Current Folder*.



Para recuperar las variables en una nueva sesión de trabajo deben cargarse con el comando >> `load` y el nombre del fichero de variables que se haya especificado al guardarlas. Si se quieren, además, ver estas variables, haciendo doble click en la variable elegida de la ventana de *Workspace*, `Matlab` abre una nueva ventana tipo hoja de cálculo donde están almacenadas las variables

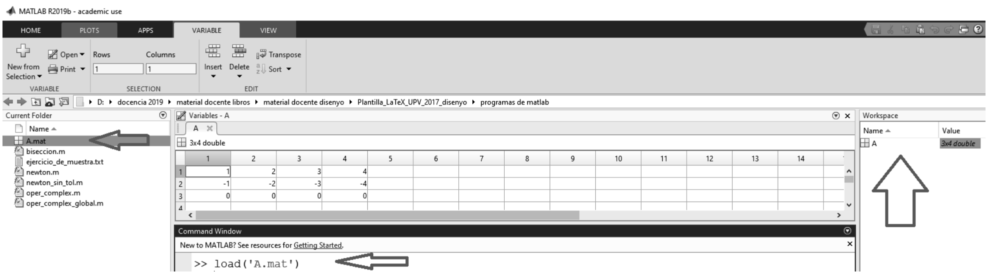


Figura 1.3: Ventana dentro de `Matlab` donde se almacenan las variables. Se marcan en la figura las variables seleccionadas para ser mostradas y cómo cargarlas

1.2 Comandos o instrucciones en `Matlab`

Los comandos en `Matlab` siempre estarán escritos en minúscula y entre paréntesis sus argumentos. Su escritura es en inglés y se ejecutan al dar a la tecla *Enter*. Si se tienen dudas de los argumentos de alguna instrucción, bastará con escribir en la ventana de comandos:

>> **help** nombre_comando

y saldrá la ayuda de `Matlab` . Por ejemplo, con >> `help gcd`, `Matlab` dará la ayuda que tiene para el cálculo del máximo común divisor.

Para recuperar alguno de los comandos introducidos, hay dos formas. Una, como ya se ha comentado, desde la ventana de *Command History*; la otra, con las teclas de desplazamiento. Las flechas de arriba y abajo, $\uparrow$, $\downarrow$ recuperan los comandos. Mientras que las de izquierda y derecha, $\leftarrow$, $\rightarrow$ mueven el cursor dentro de la línea de edición para poder modificar las instrucciones.

Para interrumpir el funcionamiento de una instrucción de `Matlab` se pulsan las teclas *Control* y *C* a la vez y después se pulsa *Enter*. A veces, esta operación se deberá repetir.

Para salir de `Matlab` o bien cerrar la ventana, o bien con los comando >> `exit`, o >> `quit`. Dándole al *Enter* al final de cualquier instrucción para que así se ejecute.

Si no se desea ver por pantalla la ejecución de un comando, aunque sí que sea ejecutado, bastará con poner después del comando un punto y coma.

Si al introducir una orden en una línea de la *Command Window* no cupiese toda entera se puede terminar con puntos suspensivos, (...), y darle a *Enter*. `Matlab` entiende que no ha terminado la instrucción y sin aparecer el *prompt* del sistema, >>, deja seguir escribiendo en la línea siguiente, ejecutando la instrucción al pulsar *Enter*. Puede verse un ejemplo en la Figura 1.4.

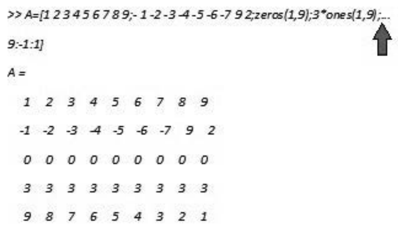


Figura 1.4: Ejemplo de la orden ... en `Matlab` para indicar que continúa la instrucción en la línea siguiente

Si en una línea de instrucción se pone el símbolo %, cambia el color del texto a verde y automáticamente `Matlab` entiende que lo que se escriba hasta darle al *Enter*, es un comentario y no debe ser ejecutado.

Interesante saber que si una vez ejecutadas muchas instrucciones se quiere borrar la pantalla, no las variables, el comando a utilizar es

```
>> clc
```

1.3 Variables y formatos

Cuando se ejecuta un comando y no se le da nombre a la variable que se obtiene como resultado, `Matlab` lo asigna a una variable que él tiene en el sistema que se llama *ans*. Como este nombre ya lo tiene él asignado, nunca se puede llamar a ninguna variable con este nombre. En cada ejecución sin variable de salida, `Matlab` irá guardando en ella ese resultado machacando el resultado anterior. Si se quiere guardar en una variable la operación ejecutada, se asigna con el =

```
>> a = gcd(3, 12)
a =
3
```

Automáticamente en la ventana del *Workspace* aparecerá la variable a e indicará su tipo y dimensión. Para asignar a esta variable otro valor, simplemente o se borra o se reasigna con otro valor. Recordad que `Matlab` es sensible a mayúsculas y minúsculas; por lo tanto a y A son dos variables distintas.

No se puede nombrar a una variable cuyo nombre ya esté siendo utilizado por `Matlab` o bien en una función o bien para sus variables internas.

Variables ya asignadas por `Matlab` son:

- `i` ó `j` ... para la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$
- `pi` ... para el valor de π
- `ans` ... para las variables de salida que no tengan asignación previa
- `eps` ... su valor es $2{,}2204e-016$. También puede utilizarse como comando (mirar >> `help eps` en caso de querer más información)

Para borrar una variable hay varias formas. Basta nombrar a otra variable con ese nombre y se reemplaza su valor por el nuevo. También puede seleccionarse la variable en la ventana de *Workspace* y darle a eliminar o suprimir con las opciones del botón derecho del ratón, o con la tecla de suprimir del teclado. Pueden seleccionarse varias. También existe el comando

>> `clear nombre_variable`

si solo se indica >> `clear`, `Matlab` borra de memoria todas las variables definidas hasta el momento.

`Matlab` usa para el almacenamiento interno de los números coma flotante normalizada; es decir, notación científica de forma que la parte entera es 0 y la primera decimal es distinta de cero (0.0003 sería 0.3*e03). Generalmente por pantalla trabaja con el formato *short*, 4 dígitos decimales. Si se quiere cambiar el formato, se pide con el comando

>> `format tipodeformato`

Los formatos más usuales en `Matlab` son:

- FORMAT SHORT: 5 dígitos, contando parte entera y decimal.
- FORMAT LONG: 15 dígitos o 7
- FORMAT SHORTE: 5 dígitos en coma flotante normalizada
- FORMAT LONGE: 15 dígitos o 7 en coma flotante normalizada
- FORMAT SHORTG: elige el mejor formato con 5 dígitos de salida (adecuado si se trabaja en un vector con números de diferentes longitudes)
- FORMAT +: saca por pantalla los signos, +, - y espacios en blanco

- FORMAT RAT: pone el valor en forma racional.

Si se quiere saber más sobre formatos de `Matlab` basta escribir

>> **help format**

En las últimas versiones de `Matlab` se ha visto disminuida la cantidad de información que se obtiene con la ayuda.

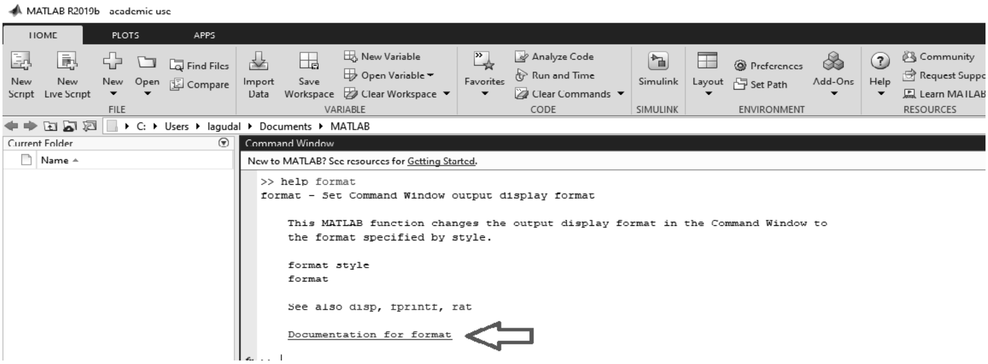


Figura 1.5: Salida por pantalla de la ayuda de `Matlab`

Para acceder a más ejemplos e información basta acudir al documento del enlace señalado en la Figura 1.5, obteniendo

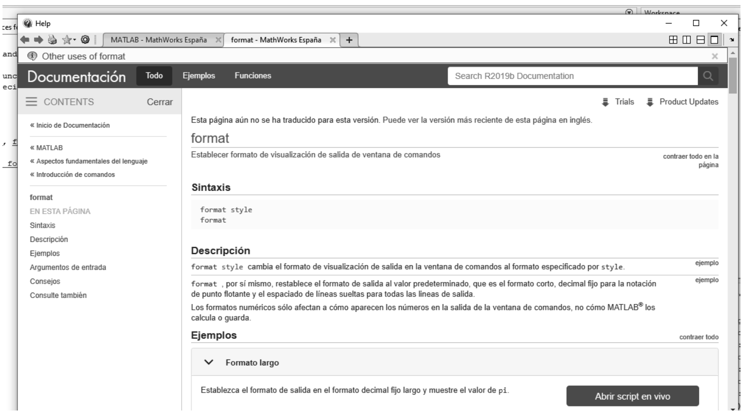


Figura 1.6: Salida por pantalla de la ayuda de `Matlab` para la instrucción >> `format`

1.4 Ayuda de `Matlab`

Si lo que se quiere es obtener ayuda general de `Matlab`, o de las funciones o *Toolbox* (paquetes de herramientas) que `Matlab` tiene ya predefinidas, basta con darle al icono de *Help* que se señala en la siguiente figura, que abrirá la ventana de ayuda también mostrada en esta figura

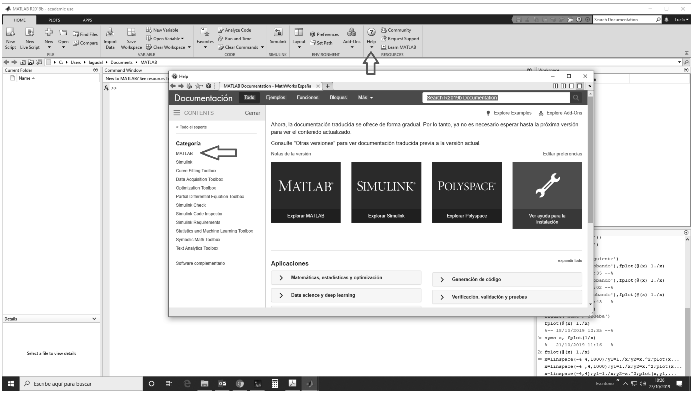
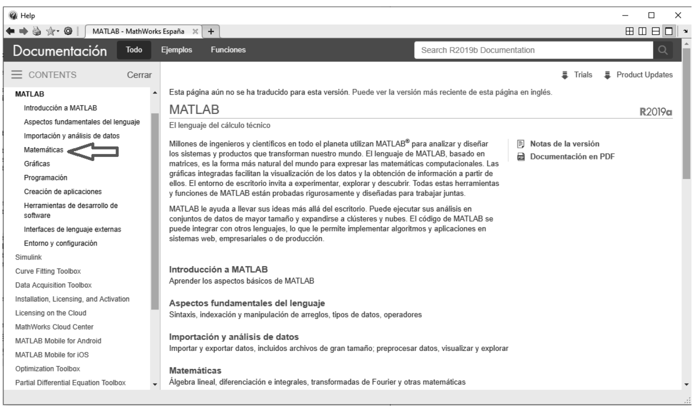


Figura 1.7: Ventana emergente de ayuda de `Matlab`

Si, por ejemplo, se quiere acceder a todas las funciones matemáticas que ya tiene construidas `Matlab`, bastaría darle al ítem dentro del listado de Categorías (a la izquierda de la ventana mostrada en la Figura 1.7) donde pone *Matlab* -destacado en la Figura 1.7-. Dentro de esta categoría, aparecerá en el índice Matemáticas, y pulsando ahí se accede a todas las funciones matemáticas y operaciones que `Matlab` realiza. Puede verse en la siguiente figura



Debe destacarse que para poder acceder a toda esta información que `Matlab` proporciona el usuario debe estar registrado en una cuenta de `Matlab`. Basta dar un *email* y una contraseña, siempre que se tenga licencia para poder descargarse este paquete, o bien personal, de empresa o de campus. La primera vez que se accede a la ayuda saldrá una pantalla en blanco, sólo con los márgenes, y al volver a pedir la ayuda pide que se registre. Una vez registrado, ya siempre puede acceder a la ayuda de `Matlab`. Esto ha cambiado con respecto a versiones anteriores.

Para más detalle e información sobre `Matlab` se recomienda acudir a los primeros capítulos del libro indicado en (Agud Albesa y Pla Ferrando 2015), aunque trabaja con versiones anteriores, hay algunas instrucciones que no se han visto modificadas.

Capítulo 2

Números. Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Si el lector necesita completar parte de la información teórica que en ocasiones aquí se utiliza puede consultar (Agud Albesa y Mora Carbonell 2019, Granero 1996, Salas, Hille y Etgen 2008).

2.1 Inecuaciones

Las reglas más importantes para trabajar con desigualdades son las siguientes:

1. Si $x < y$, entonces $x + a < y + a$. La misma propiedad se verifica si la desigualdad no es estricta (si $x \leq y$, entonces $x + a \leq y + a$).
2. Si $x < y$, $a > 0$, entonces $ax < ay$. Sin embargo, si $a < 0$, entonces la desigualdad cambia, $ax > ay$.

Para resolver estos ejercicios de inecuaciones o desigualdades con valores absolutos conviene recordar las propiedades del valor absoluto siguientes

$$|a| \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad -b \leq a \leq b \tag{2.1}$$

$$|a| \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \nearrow a \geq b \\ \searrow a \leq -b \end{matrix} \tag{2.2}$$

teniendo en cuenta que las propiedades expresadas en las desigualdades (2.1) y (2.2) pueden ser también estrictas.

Ejercicio 2.1.1 *Resuelve la siguiente inecuación $|x^2 - 6x + 5| \leq 2x - 6$.*

Resolución: aplicando la propiedad vista en (2.1) se llega a

$$|x^2 - 6x + 5| \leq 2x - 6 \overset{(2.1)}{\iff} 6 - 2x \leq x^2 - 6x + 5 \leq 2x - 6$$

donde al obtener una desigualdad de grado 2 donde no se puede aislar la variable x en un solo miembro. Debe ser resuelta cada desigualdad por separado y después hacer la intersección de las soluciones obtenidas, ya que deben verificarse ambas desigualdades a la vez. Es decir, resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rl} 6 - 2x & \leq x^2 - 6x + 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \leq 2x - 6 \end{array}\right\}$$

Se separará cada una de las inecuaciones del sistema y después se buscará la solución que verifica ambas inecuaciones a la vez.

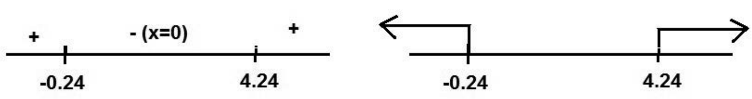
- Resolución de $6 - 2x \leq x^2 - 6x + 5$: como es una inecuación de grado mayor que 1, se pasa todo a un miembro y se estudia el signo del polinomio resultante

  $$6 - 2x \leq x^2 - 6x + 5 \iff x^2 - 4x - 1 \geq 0$$

  Se buscan las raíces del polinomio, pues ya se sabe por el teorema de Bolzano que una función continua que no se anula en un subintervalo, no cambia de signo, (ver Teorema 5.2.1 para un enunciado más completo del mismo). Más aún, los polinomios en concreto cambian de signo cada vez que atraviesan un cero tantas veces como su multiplicidad. Como

  $$x^2 - 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24 \\ \searrow 2 - \sqrt{5} \approx -0{,}24 \end{array}$$

  Y estudiando el signo del polinomio



(a) Signo de $x^2 - 4x - 1$ (b) Conjunto donde $x^2 - 4x - 1 \geq 0$

Por lo tanto, la solución de este primer caso es

$$x \in (-\infty, 2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}, +\infty)$$

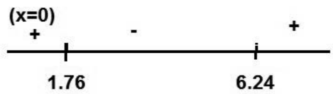
- Resolución de $x^2 - 6x + 5 \leq 2x - 6$: se pasa todo al mismo miembro

  $$x^2 - 6x + 5 \leq 2x - 6 \iff x^2 - 8x + 11 \leq 0$$

  Se buscan las raíces del polinomio

  $$x^2 - 8x + 11 = 0 \iff x = \frac{8 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{cases} \nearrow 4+\sqrt{5} \approx 6{,}24 \\ \searrow 4-\sqrt{5} \approx 1{,}76 \end{cases}$$

  Y estudiando el signo del polinomio



(c) Signo de $x^2 - 8x + 11$

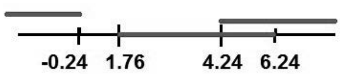
(d) Conjunto donde $x^2 - 8x + 11 \leq 0$

  Por lo tanto, la solución de este segundo caso es

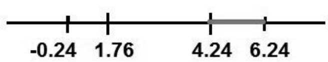
  $$x \in [4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}]$$

- Haciendo la intersección de las soluciones, es decir, el trozo común a ambos conjuntos, ver Figura 2.1,

  $$x \in ((-\infty, 2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}, +\infty)) \bigcap [4-\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}] = [2+\sqrt{5}, 4+\sqrt{5}]$$



(e) Intersección de las soluciones



(f) Solución final de $|x^2-6x+5| \leq 2x-6$

Figura 2.1: Intersección y solución final

$\square$

Resolución con `Matlab`: se ha de tener cuidado para resolver inecuaciones con `Matlab` en las últimas versiones de este paquete matemático. El comando a utilizar es >> `solve`, que es la instrucción que tiene `Matlab` para resolver cualquier tipo de ecuación o inecuación que pueda resolverse de forma analítica. Teniendo en cuenta que este comando trabaja en simbólico, se define la variable como simbólica, o se ponen los argumentos entre comitas simples (′ ...′).

En este caso, si se aplica sin más la instrucción, `Matlab` devolvería

```
>> syms x, solve(abs(x^2 - 6 * x + 5) <= 2 * x - 6, x)
ans =
5^(1/2) + 3
```

que evidentemente no es la solución de la inecuación, ya que la solución de una desigualdad no debe ser un valor sino un intervalo o la unión de ellos.

Para que funcione bien este comando deben asignársele variables de salida y añadirle unos argumentos extras. Se muestra dos formas de hacerlo.

- Indicar ya las variables de salida

  ```
  >> syms x, poli = abs(x^2 - 6 * x + 5);
  >> [sol var cond] = solve(poli <= 2 * x - 6,'ReturnConditions', true)
  sol =
  x
  var =
  x
  cond =
  5^(1/2) + 2 <= x&x <= 5^(1/2) + 4
  ```

  observando que las soluciones que se han obtenido en la resolución analítica `Matlab` las devuelve en la variable `cond`.

  Destacar que en la instrucción >> `solve`, en esta segunda ocasión ya no se ha indicado que la variable es x, puesto que no hay otra variable posible. En caso de querer indicarlo deberá escribirse:

  ```
  [sol var cond] = solve(poli <= 2 * x - 6, x,'ReturnConditions', true)
  ```

- Poner una sola variable de salida. `Matlab` devolverá

  ```
  >> sol = solve(poli <= 2 * x - 6,'ReturnConditions', true)
  sol =
  struct with fields :
  x : [1 × 1sym]
  parameters : [1 × 1sym]
  conditions : [1 × 1sym]
  ```

que es una salida tipo *variable estructura*. Para acceder a la solución de la inecuación basta pedirle a `Matlab` que devuelva el contenido que tiene en el campo *conditions*, así

```
>> sol.conditions
ans =
5^(1/2) + 2 <= x&x <= 5^(1/2) + 4
```

Es decir, la solución es $x \in [\sqrt{5}+2, \sqrt{5}+4]$. $\boxtimes$

Ejercicio 2.1.2 *Resuelve la siguiente inecuación:* $|x^2 - 6x + 5| - |x - 2| \leq |2x - 6|$.

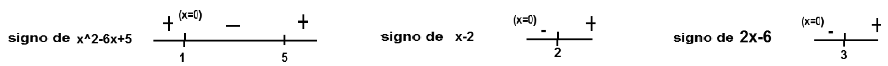
Resolución: para resolver una desigualdad con valores absolutos lo primero que hay que hacer es quitar el valor absoluto utilizando, siempre que se pueda, usando las propiedades vistas en la teoría, en (2.1) y (2.2).

Pero en este caso no se pueden aplicar directamente esas propiedades ya que no se tiene despejado el valor absoluto en uno de los miembros. Además, es sabido que no se pueden juntar valores absolutos que se estén sumando o restando. Por lo que hay que aplicar la definición de valor absoluto, estudiando el signo de lo de dentro del valor absoluto, ya que:

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x. & x < 0 \end{cases}$$

Para estudiar el signo de los polinomios que están dentro de los valores absolutos, se usa el teorema de Bolzano, que asegura que una función continua en un intervalo no cambia de signo si no se anula en ese intervalo. Además, recordad que los polinomios cambian de signo cada vez que atraviesan un cero (se llama cero de un polinomio al número que anula el valor numérico del polinomio), teniendo en cuenta siempre la multiplicidad del cero.

Para estudiar el signo de cada uno de los polinomios:



(a) Signo de $x^2 - 6x + 5$ (b) Signo de $x - 2$ (c) Signo de $2x - 6$

Figura 2.2: Estudio de los signos de los tres polinomios

Dividiendo la recta real, $\mathbb{R}$, en cada uno de los subintervalos que las raíces de los tres polinomios crean, se tiene:

Tabla 2.1: Signos de los polinomios de la inecuación según el intervalo

	$(-\infty,1)$	$[1,2]$	$(2,3]$	$(3,5]$	$(5,+\infty)$
x^2-6x+5	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-6$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

Por lo tanto, en cada uno de los subintervalos, los valores absolutos se convierten en

Tabla 2.2: Resultados de los valores absolutos según el intervalo

	$(-\infty,1)$	$[1,2]$	$(2,3]$	$(3,5]$	$(5,+\infty)$
$\lvert x^2-6x+5\rvert$	x^2-6x+5	$-x^2+6x-5$	$-x^2+6x-5$	$-x^2+6x-5$	x^2-6x+5
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	$2-x$	$x-2$	$x-2$	$x-2$
$\lvert 2x-6\rvert$	$6-2x$	$6-2x$	$6-2x$	$2x-6$	$2x-6$

Y ahora se pasa a estudiar cada caso por separado, prestando especial atención al subintervalo de la recta en el que uno se halla. Así:

- $x \in (-\infty,1)$: usando la Tabla 2.2 la inecuación del planteamiento queda,

  $$x^2-6x+5-(2-x) \leq 6-2x$$

  Como es una inecuación de grado mayor que 1, interesa pasar todo a un miembro y estudiar el signo del polinomio resultante:

  $$x^2-6x+5-2+x-6+2x \leq 0 \iff x^2-3x-3 \leq 0$$

  Para estudiar el signo de este polinomio, se calculan sus raíces:

  $$x^2-3x-3=0 \iff x=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2} \iff \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \approx 3.7 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \approx -0.7 \end{cases} \tag{2.3}$$

Una vez calculadas las raíces del polinomio, el signo del polinomio es:

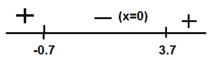


Figura 2.3: Estudio del signo del polinomio $x^2 - 3x - 3$

Se busca que el polinomio sea negativo o cero,

$$x^2 - 3x - 3 \leq 0 \iff x \in [\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}]$$

Importante: recordad que se está trabajando con $x \in (-\infty, 1)$, por lo tanto hay que quedarse con los valores de x que verifiquen ambas condiciones. Es decir, la solución total viene dada por la intersección:

$$x \in (-\infty, 1) \cap [\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}] = [\frac{3-\sqrt{21}}{2}, 1)$$

Si no se ve clara la intersección de los intervalos implicados, se puede representar gráficamente y seleccionar el trozo común, como se observa en la siguiente figura:

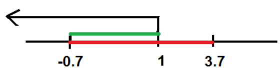


Figura 2.4: En rojo $[\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}]$, con flechas $(-\infty, 1]$, y en verde la intersección

- Caso $x \in [1, 2]$: la inecuación del planteamiento quedaría

$$-x^2 + 6x - 5 - (2 - x) \leq 6 - 2x \iff -x^2 + 9x - 13 \leq 0$$

Como no es de grado 1, se pasa todo a un miembro y se estudia el signo del polinomio resultante:

$$-x^2 + 9x - 13 \leq 0 \iff x^2 - 9x + 13 \geq 0 \tag{2.4}$$

Calculando primero las raíces de este polinomio, se llega a:

$$x^2 - 9x + 13 = 0 \iff x = \frac{9 \pm \sqrt{81-52}}{2} = \begin{cases} \dfrac{9+\sqrt{29}}{2} \approx 7.1 \\ \dfrac{9-\sqrt{29}}{2} \approx 1.8 \end{cases}$$

Por lo tanto, el signo de este polinomio en la recta real quedará:

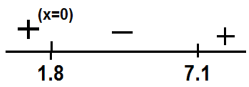


Figura 2.5: Estudio del signo del polinomio $x^2 - 9x + 13$

Como interesa la zona donde el polinomio sea positivo o cero, será:

$$x^2 - 9x + 13 \geq 0 \iff x \in (-\infty, \frac{9-\sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{9+\sqrt{29}}{2}, +\infty)$$

Importante: como $x \in [1,2]$, han de seleccionarse los valores de x que verifiquen ambas condiciones. Es decir, para hallar la solución total de este caso hay que realizar la intersección:

$$x \in [1,2] \cap \Big((-\infty, \frac{9-\sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{9+\sqrt{29}}{2}, +\infty)\Big) = [1, \frac{9-\sqrt{29}}{2}]$$

Si no se ve clara la intersección de los intervalos, se puede representar gráficamente y seleccionar el trozo que verifique ambas condiciones,

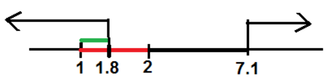


Figura 2.6: En rojo $[1,2]$ y con flechas $(-\infty, \frac{9-\sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{9+\sqrt{29}}{2}, +\infty)$. La intersección en verde

- Caso $x \in (2,3]$: la inecuación del planteamiento quedaría

  $$-x^2+6x-5-(x-2) \leq 6-2x \iff -x^2+7x-9 \leq 0 \iff x^2-7x+9 \geq 0$$

Calculando primero las raíces de este polinomio, se llega a:

$$x^2 - 7x + 9 = 0 \iff x = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \begin{cases} \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \approx 5.3 \\ \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \approx 1.6 \end{cases}$$

Por lo tanto, el signo de este polinomio en la recta real quedará:

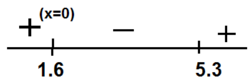


Figura 2.7: Estudio del signo del polinomio $x^2 - 7x + 9$

Como interesa la zona donde el polinomio sea positivo:

$$x^2 - 7x + 9 \geq 0 \iff x \in (-\infty, \frac{7-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{7+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$$

Importante: recordad que $x \in (2,3]$, así que

$$x \in (2,3] \cap \Big((-\infty, \frac{7-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{7+\sqrt{13}}{2}, +\infty)\Big) = \emptyset$$

ya que si se superponen ambos subintervalos, nunca hay una zona común:

Figura 2.8: En rojo el intervalo $(2,3]$ y con flechas $(-\infty, \frac{7-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{7+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$. La intersección no está por ser vacía

- Caso $x \in (3,5]$: la inecuación del planteamiento quedaría

$$-x^2 + 6x - 5 - (x-2) \leq 2x - 6 \iff 0 \leq x^2 - 3x - 3$$

Se observa que es el mismo polinomio que en el primer caso, así que ya se tienen las soluciones halladas en (2.3). También se ha realizado el estudio de los signos en la Figura 2.3. Como en este caso se pide:

$$0 \leq x^2 - 3x - 3 \iff x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{21}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{21}}{2}, +\infty)$$

Importante: como $x \in (3,5]$, haciendo la intersección se llega a la solución, ilustrada en la Figura 2.9

$$x \in (3,5] \cap \Big((-\infty, \frac{3-\sqrt{21}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{21}}{2}, +\infty) \Big) = [\frac{3+\sqrt{21}}{2}, 5]$$

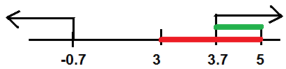


Figura 2.9: En rojo el intervalo $(3,5]$, con flechas $(-\infty, \frac{3-\sqrt{21}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{21}}{2}, +\infty)$, y en verde la intersección

- Caso $x \in (5, +\infty)$: la inecuación del planteamiento quedaría

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 - (x-2) \leq 2x - 6 \quad &\Longleftrightarrow \; x^2 - 6x + 5 - x + 2 \leq 2x - 6 \\ &\Longleftrightarrow \; x^2 - 9x + 13 \leq 0 \end{aligned}$$

donde se puede observar que el primer miembro coincide con la inecuación vista en (2.4). Allí se estudiaba cuándo este polinomio era positivo y ahora interesa cuándo es negativo. Por lo tanto, basta quedarse con el caso de signo negativo visto en la Figura 2.5. Concretando:

$$x^2 - 9x + 13 \leq 0 \iff x \in [\frac{9-\sqrt{29}}{2}, \frac{9+\sqrt{29}}{2}]$$

Importante: como $x \in (5, +\infty)$, haciendo la intersección se llega a la solución de este caso, ilustrada en la Figura 2.10

$$x \in (5, +\infty) \cap [\frac{9-\sqrt{29}}{2}, \frac{9+\sqrt{29}}{2}] = (5, \frac{9+\sqrt{29}}{2}]$$

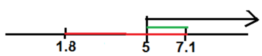


Figura 2.10: En rojo $[\frac{9-\sqrt{29}}{2}, \frac{9+\sqrt{29}}{2}]$ y con flecha $(5, +\infty)$. La intersección en verde

- Solución final: para hallar la solución final, han de unirse las soluciones de cada uno de los casos estudiados, zonas de la recta real indicadas en la Tabla 2.2. Con lo que:

$$\begin{aligned} x \in \quad & [\frac{3-\sqrt{21}}{2}, 1) \cup [1, \frac{9-\sqrt{29}}{2}] \cup \ \emptyset \ \cup [\frac{3+\sqrt{21}}{2}, 5] \cup (5, \frac{9+\sqrt{29}}{2}] \\ & = [\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{9-\sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{9+\sqrt{29}}{2}] \end{aligned}$$

□

Resolución con `Matlab`:

- Si se intenta resolver directamente esta inecuación con `Matlab` el lector se encontrará con el siguiente mensaje de error

  ```
  >> syms x, poli = abs(x^2 − 6 ∗ x + 5) − abs(x − 2);
  >> [sol var cond] = solve(poli <= abs(2 ∗ x − 6), x, 'ReturnConditions', true)
  Warning: Unable to find explicit solution. For options, see help.
  >In solve (line 317)
  sol =
  Emptysym : 0 − by − 1
  var =
  Emptysym : 1 − by − 0
  cond =
  Emptysym : 0 − by − 1
  ```

  Y `Matlab` no encuentra la solución de forma explícita. Además, obsérvese que la respuesta obtenida por `Matlab` tipo *estructura*, en verdad son campos vacíos, es decir, no hay respuesta por parte de `Matlab`. Este tipo de respuesta de `Matlab` ya se ha visto en el Ejercicio 2.1.1, y en el caso de que la estructura sea no vacía se ha indicado en ese ejercicio cómo acceder a la información de la misma.

- En este ejercicio habría que ir resolviendo cada uno de los pasos hechos en la resolución analítica. Es decir, estructurar el problema y aplicar ya `Matlab` en cada una de las desigualdades que se pueda. Puede hacerse dejando al menos un valor absoluto, pero una vez puestos a hacer casos se va a mirar aquí cada uno de ellos de forma completa.

  El estudio ya hecho en la Tabla 2.2, indicaba los subintervalos en los que habrá que realizar el estudio. Con lo que la estructura a ir resolviendo vendrá dada por

  - $x \in (-\infty, 1)$ donde la inecuación a resolver es

    $$x^2 - 6x + 5 - (2 - x) \leq 6 - 2x$$

Introduciendo esta desigualdad en `Matlab` (observese que si ya se ha definido anteriormente la variable x como simbólica, no haría falta hacerlo de nuevo) y juntando ambas condiciones, se puede hacer directamente con `Matlab` ya que en el fondo es resolver un sistema de desigualdades. Eso se indica poniendo ambas desigualdades entre corchetes en el primer argumento del comando >> `solve`:

```
>> [sol var cond] = solve([x^2 - 6 * x + 5 - (2 - x) <= 6 - 2 * x, x <= 1], ...
'ReturnConditions', true)
sol =
x
var =
x
cond =
x <= 1&3/2 - 21^(1/2)/2 <= x
```

Obteniendo ya la solución de este caso:

$$x \in [\frac{3-\sqrt{21}}{2}, 1)$$

- $x \in [1, 2]$: donde la inecuación a resolver es

$$-x^2 + 6x - 5 - (2 - x) \leq 6 - 2x \iff -x^2 + 9x - 13 \leq 0$$

De nuevo juntando todas las condiciones en `Matlab`

```
>> [sol var cond] = solve([x^2 - 9 * x + 13 >= 0, 1 <= x, x <= 2], ...
'ReturnConditions', true)
sol =
x
var =
x
cond =
1 <= x&x <= 9/2 - 29^(1/2)/2
```

Donde observad que ahora se han puesto tres condiciones, ya que hay que separar los extremos inferior y superior de un intervalo en dos condiciones.

Se ha obtenido como solución de este nuevo caso

$$x \in [1, \frac{9-\sqrt{29}}{2}]$$

- Y así sucesivamente con los otros casos. Se dejan para que el lector los implemente. Al finalizarlos, la solución será la unión de todas las soluciones de los casos estudiados.

$\boxtimes$

Ejercicio 2.1.3 *Resuelva la siguiente desigualdad:* $|-2x+16| \leq |x+2|-1$.

Resolución: al tener dos valores absolutos el método más adecuado es estudiar dichos valores absolutos usando su definición. Para ello, ha de verse el signo de los polinomios de dentro de los valores absolutos. El primer paso es calcular cuándo se anulan estos polinomios:

$$\begin{array}{lll} -2x+6=0 & \Longleftrightarrow & x=\frac{6}{2}=3 \\ x+2=0 & \Longleftrightarrow & x=-2 \end{array}$$

	$(-\infty,-2)$ por ejemplo x=-3	$[-2,3)$ $x=0$	$[3,+\infty)$ x=4
Signo de $-2x+6$	$+$	$+$	$-$
Signo de $x+2$	$-$	$+$	$+$

Y por lo tanto, como el valor absoluto de un número positivo es él mismo y el de un número negativo resulta ser su opuesto, el valor de cada uno de los valores absolutos que intervienen en la inecuación sería:

	$(-\infty,-2)$	$[-2,3)$	$[3,+\infty)$
$\|-2x+6\|$	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x-6$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$

Analizar cada uno de los subintervalos en los que ha quedado dividida la recta real:

- Caso $(-\infty,-2)$: la inecuación original pasa a ser

$$-2x+6 \leq -x-2-1$$

Como se tiene una desigualdad con polinomios de grado 1, conviene pasar todas las variables a un miembro y todos los términos independientes al otro. Se pasan las variables al segundo miembro para que ya queden con signo positivo (sino recordad que al multiplicar una desigualdad por $-1 < 0$ cambiaría de orden la desigualdad):

$$-2x+6 \leq -x-2-1 \iff 6+2+1 \leq 2x-x \iff 9 \leq x \iff x \in [9, +\infty)$$

Pero como se está en el caso de $x \in (-\infty, -2)$, la solución final es la intersección; es decir:

$$x \in (-\infty, -2) \cap [9, +\infty) = \emptyset$$

Esto queda plasmado en la siguiente figura:

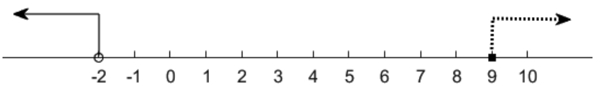


Figura 2.11: Estudio de $(-\infty, -2) \cap [9, +\infty)$. En línea punteada el intervalo $[9, +\infty)$ y con continua $(-\infty, -2)$. La intersección está vacía

- Caso $[-2, 3)$: la inecuación original pasa a ser

  $$-2x+6 \leq x+2-1 \iff -2x-x \leq -6+2-1 \iff -3x \leq -5 \overset{(*)}{\iff} x \geq \frac{5}{3}$$

  observando que en $(*)$ se ha cambiado el orden de la desigualdad porque se ha pasado dividiendo el -3 y $-3 < 0$.

  Por lo que la inecuación ha dado como solución: $x \in [\frac{5}{3}, +\infty)$. Pero como se está en el subintervalo $[-2, 3)$ y se sabe que $1 < \frac{5}{3} < 2$, la solución final de este apartado sería, ver Figura 2.12:

  $$x \in [-2, 3) \cap [\frac{5}{3}, +\infty) = [\frac{5}{3}, 3)$$

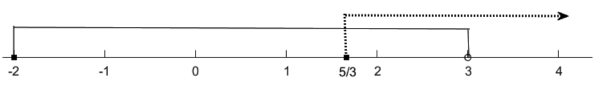


Figura 2.12: Estudio de $[-2, 3) \cap [\frac{5}{3}, +\infty)$. En línea punteada el intervalo $[\frac{5}{3}, +\infty)$ y con continua $[-2, 3)$. La intersección es la zona común a ambos conjuntos

- Caso $[3, +\infty)$: la inecuación original pasa a ser

  $2x - 6 \leq x + 2 - 1 \iff 2x - x \leq 6 + 2 - 1 \iff x \leq 7 \iff x \in (-\infty, 7]$

  Como se está trabajando en este apartado con valores $x \in [3, +\infty)$, la solución final en este caso será, ver Figura 2.13:

  $$x \in [3, +\infty) \cap (-\infty, 7] = [3, 7]$$

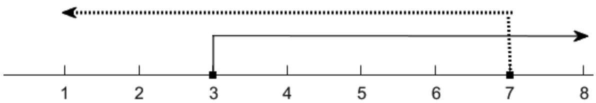


Figura 2.13: Estudio de $[3, +\infty) \cap (-\infty, 7]$. En línea punteada el intervalo $(-\infty, 7]$ y con continua $[3, +\infty)$. La intersección es la zona común a ambos conjuntos

Juntando todos los casos para hallar la solución final del ejercicio, se debe realizar la unión de todas las opciones. Con lo que:

$$x \in \emptyset \cup [\frac{5}{3}, 3) \cup [3, 7] = [\frac{5}{3}, 7]$$

$\square$

Nota 2.1.1 *Si se quiere resolver la inecuación escrita de la forma* $|-2x+6| - |x+2| \leq -1$*, también se puede pero se debe tener cuidado con el signo* $-$ *que afectará a todo el resultado del* $|x+2|$ *en cada uno de los casos. Quedando:*

- *Caso* $(-\infty, -2)$*: la inecuación original pasa a ser*

  $$-2x + 6 - (-x - 2) \leq -1 \iff -2x + 6 + x + 2 \leq -1$$

- *Caso* $[2, 3)$*: la inecuación original pasa a ser*

  $$-2x + 6 - (x + 2) \leq -1 \iff -2x + 6 - x - 2 \leq -1$$

- *Caso* $[3, +\infty)$*: la inecuación original pasa a ser*

  $$2x - 6 - (x + 2) \leq -1 \iff 2x - 6 - x - 2 \leq -1$$

pasando ya a resolver cada uno de los casos, y luego uniendo todas las soluciones obtenidas para hallar la solución final.

Resolución con `Matlab`: sería análoga a la resolución con `Matlab` hecha en el Ejercicio 2.1.2. ⊠

Ejercicio 2.1.4 *Resuelva la siguiente inecuación:* $|-2x+6| \geq |x-1|$.

Resolución: al tener dos valores absolutos el método más adecuado es estudiar dichos valores absolutos usando su definición. Para ello, ha de verse el signo de los polinomios de dentro de los valores absolutos. El primer paso por lo tanto, es calcular cuándo se anulan estos polinomios:

$$\begin{array}{lcl} -2x+6=0 & \iff & x=\frac{6}{2}=3 \\ x-1=0 & \iff & x=1 \end{array}$$

	$(-\infty,1)$ por ejemplo x=0	$[1,3)$ $x=2$	$[3,+\infty)$ x=4
Signo de $-2x+6$	$+$	$+$	$-$
Signo de $x-1$	$-$	$+$	$+$

Y por lo tanto, como el valor absoluto de un número positivo es él mismo y el de un número negativo resulta ser su opuesto, el valor de cada uno de los valores absolutos que intervienen en la inecuación sería:

	$(-\infty,1)$	$[1,3)$	$[3,+\infty)$
$\vert -2x+6\vert$	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x-6$
$\vert x-1\vert$	$1-x$	$x-1$	$x-1$

Se pasa a analizar cada uno de los subintervalos en los que ha quedado dividida la recta real:

- Caso $(-\infty,1)$: la inecuación original pasa a ser

  $$-2x+6 \geq 1-x$$

  Como se tiene una desigualdad con polinomios de grado 1, conviene llevar todas las variables a un miembro y todos los términos independientes al otro. Pasando las variables al segundo miembro para que ya queden con signo positivo (sino recordad que al multiplicar una desigualdad por $-1 < 0$ cambiaría de orden la desigualdad):

$$-2x + 6 \geq 1 - x \iff 6 - 1 \geq 2x - x \iff 5 \geq x \iff x \in (-\infty, 5]$$

Al estar trabajando en el subintervalo $x \in (-\infty, 1)$, la solución final es la intersección; es decir:

$$x \in (-\infty, 1) \cap (-\infty, 5] = (-\infty, 1)$$

Tal como se muestra en la siguiente figura:

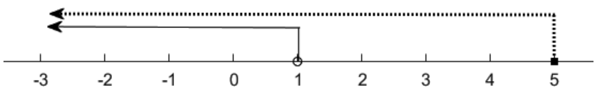


Figura 2.14: Estudio de $(-\infty, 1) \cap (-\infty, 5]$. En línea punteada el intervalo $(-\infty, 5]$ y con continua $(-\infty, 1)$. La intersección es el subconjunto $(-\infty, 1)$

- Caso $[1, 3)$: la inecuación original pasa a ser

$$-2x + 6 \geq x - 1 \iff -2x - x \geq -6 - 1 \iff -3x \geq -7 \overset{(*)}{\iff} x \leq \frac{7}{3}$$

observando que en $(*)$ se ha cambiado el orden de la desigualdad porque se ha pasado dividiendo el -3 y $-3 < 0$.

Por lo que la inecuación ha dado como solución: $x \in (-\infty, \frac{7}{3}]$. Al estar en el intervalo $[1, 3)$ y sabiendo que $2 < \frac{7}{3} < 3$, la solución final de este apartado sería, ver Figura 2.15:

$$x \in [1, 3) \cap (-\infty, \frac{7}{3}] = [1, \frac{7}{3}]$$

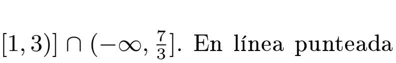


Figura 2.15: Estudio de $[1, 3)] \cap (-\infty, \frac{7}{3}]$. En línea punteada el intervalo $(-\infty, \frac{7}{3}]$ y con continua $[1, 3)$. La intersección es la zona común en ambos conjuntos, $[1, \frac{7}{3}]$

- Caso $[3, +\infty)$: la inecuación original pasa a ser

$$2x - 6 \geq x - 1 \iff 2x - x \geq 6 - 1 \iff x \geq 5 \iff x \in [5, +\infty)$$

Como se está trabajando en este apartado con valores $x \in [3, +\infty)$, la solución final en este caso será, ver Figura 2.16:

$$x \in [3, +\infty) \cap [5, +\infty) = [5, +\infty)$$

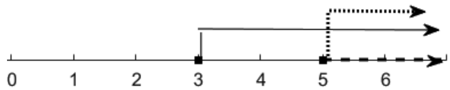


Figura 2.16: Estudio de $[3, +\infty) \cap [5, +\infty)$. En línea punteada el intervalo $[5, +\infty)$ y continua $[3, +\infty)$). La intersección es la línea discontinua, $[5, +\infty)$

Juntando todos los casos para hallar la solución final del ejercicio, se debe realizar la unión de todas las opciones. Con lo que:

$$x \in (-\infty, 1) \cup [1, \frac{7}{3}] \cup [5, +\infty) = (-\infty, \frac{7}{3}] \cup [5, +\infty)$$

$\square$

Nota 2.1.2 *Si se quiere resolver la inecuación escrita de la forma* $|-2x+6| - |x-1| \geq 0$, *también se puede teniendo cuidado con el signo* $-$ *que afectará a todo el resultado del* $|x-1|$ *en cada uno de los casos. Quedando:*

- *Caso* $(-\infty, 1)$*: la inecuación original pasa a ser*

$$-2x + 6 - (1 - x) \geq 0 \iff -2x + 6 - 1 + x \geq 0$$

- *Caso* $[1, 3)$*: la inecuación original pasa a ser*

$$-2x + 6 - (x - 1) \geq 0 \iff -2x + 6 - x + 1 \geq 0$$

- *Caso* $[3, +\infty)$*: la inecuación original pasa a ser*

$$2x - 6 - (x - 1) \geq 0 \iff 2x - 6 - x + 1 \geq 0$$

pasando ya a resolver cada uno de los casos, y luego uniendo la solución final.

Resolución con `Matlab`: sería análoga a la resolución con `Matlab` hecha en el Ejercicio 2.1.2. ⊠

Ejercicio 2.1.5 *Resuelve la siguiente desigualdad* $|x^2-16|+|x^2+4|\leq 13$.

Resolución: en este caso el ejercicio es muy sencillo ya que el polinomio $x^2+4\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Puede comprobarse fácilmente ya que

$$x^2+4=0 \iff x^2=-4 \iff x=\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$$

esto implica que al no anularse nunca en $\mathbb{R}$, no cambia de signo por tratarse de una función continua. Basta comprobar que

$$\left.\begin{array}{ll} 0^2+4=4 & \geq 0 \\ x^2+4\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} & \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+4\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Por lo que la inecuación de partida se puede escribir como:

$$|x^2-16|+x^2+4\leq 13 \iff |x^2-16|\leq 13-x^2-4 \iff |x^2-16|\leq 9-x^2$$

Y aplicando las propiedades del valor absoluto, (2.1), se sabe que:

$$|x^2-16|\leq 9-x^2 \iff -(9-x^2)\leq x^2-16\leq 9-x^2 \iff x^2-9\leq x^2-16\leq 9-x^2$$

Para resolver esta inecuación no es conveniente manipular a la vez los tres miembros ya que no se conseguiría poner todas las variables en un miembro. Por lo que se trabajará cada una por separado. Así:

$$x^2-9\leq x^2-16\leq 9-x^2 \iff \left\{\begin{array}{lll} \text{Caso I:} & x^2-9 & \leq x^2-16 \\ \text{Caso II:} & x^2-16 & \leq 9-x^2 \end{array}\right. \tag{2.5}$$

- Caso I: ha de resolverse $x^2-9\leq x^2-16$. Este primer caso es sencillo ya que

$$\begin{array}{rl} x^2-9\leq x^2-16 & \iff \cancel{x^2}-9\leq \cancel{x^2}-16 \iff -9\leq -16 \\ & \iff 9\geq 16 \text{ FALSO} \iff x\in\emptyset \end{array}$$

- Caso II: ha de resolverse $x^2-16\leq 9-x^2$, es decir

$$x^2-16\leq 9-x^2 \iff 2x^2-25\leq 0$$

Para estudiar el signo del polinomio se calcula primero cuándo se anula, después se estudia cada subintervalo en los que queda dividida la recta real:

$$2x^2 - 25 = 0 \iff x^2 = \frac{25}{2} \iff x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \iff x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

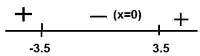


Figura 2.17: Estudio del signo del polinomio $2x^2 - 25$

Por lo tanto, la solución del caso II es, ver Figura 2.17:

$$2x^2 - 25 \leq 0 \iff x \in [-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}]$$

- Solución final: para cumplir lo visto en (2.5), se halla la intersección

$$x^2 - 9 \leq x^2 - 16 \leq 9 - x^2 \iff x \in \emptyset \cap [-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}] = \emptyset$$

□

Nota 2.1.3 *Cuando en una intersección uno de los casos ses el conjunto vacío, se puede parar el ejercicio, pues la intersección del conjunto vacío con cualquier otro conjunto siempre dará el conjunto vacío. Ahorrando estudiar el Caso II.*

Resolución con `Matlab`: como $x^2 + 4 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, se obtiene

$$|x^2 - 16| + x^2 + 4 \leq 13 \iff |x^2 - 16| \leq 13 - x^2 - 4 \iff |x^2 - 16| \leq 9 - x^2$$

Si se intenta resolver de forma directa en `Matlab`

```
>> syms x, [sol var cond] = solve(abs(x^2 - 16) <= 9 - x^2,'ReturnConditions', true)
Warning: Unable to find explicit solution. For options, see help.
> In solve (line 317)
sol =
Emptysym : 0 - by - 1
var =
Emptysym : 1 - by - 0
cond =
Emptysym : 0 - by - 1
```

de nuevo la estructura donde debería estar la solución puede verse que está vacía. `Matlab` no puede encontrar una solución de forma explícita, hecho que ocurre por tener grado mayor que 2 en los polinomios que intervienen.

Se resolverá la inecuación equivalente, donde primero se aplican propiedades del valor absoluto, para prescindir de él, concretamente (2.1)

$$x^2 - 9 \leq x^2 - 16 \leq 9 - x^2$$

introduciéndolo en `Matlab` como un sistema de inecuaciones

```
>> poli = x^2 - 16; poli2 = 9 - x^2;
>> [sol var cond] = solve([-poli2 <= poli, poli <= poli2], 'ReturnConditions', true)
sol =
z1
var =
z1
cond =
(in(-z1 * 1i, 'real')|z1 <= (5 * 2^(1/2))/2& - (5 * 2^(1/2))/2 <= z1)
&(z1 <= -(5 * 2^(1/2))/2|(5 * 2^(1/2))/2 <= z1)&(in(z1, 'real')|in(-z1 * 1i, 'real')
```

donde se puede observar que no hay solución real, ya que devuelve expresiones donde intervienen números complejos, que se verán en la siguiente sección.

Una forma de forzar que la variable que se define sea real y simbólica, desde el comienzo del ejercicio, puede ser mediante

`>> x = sym('x', 'real')` o `>> syms x real`

$\boxtimes$

Ejercicio 2.1.6 *Contesta verdadero o falso a las siguientes cuestiones, razonando, operando y justificando la respuesta. Resuelve o el apartado iii) o el apartado v):*

i) $x^2 < 4 \Rightarrow x < \pm 2$

ii) $|x+5| \cdot |x-3| \leq 3 \iff |x^2+2x-15| \leq 3 \iff -3 \leq x^2+2x-15 \leq 3$

iii) $|x+5| + |x-3| \leq 3 \iff |2x+2| \leq 3$

iv) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| < 1 \iff |x+2| < |x-3|$

v) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| < 1 \iff -1 < \frac{x+2}{x-3} < 1 \iff -(x-3) < x+2 < x-3$

Resolución: en primer lugar se indican las propiedades del valor absoluto de un número real que se van a utilizar en este ejercicio

- P1.-
$$|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

- P2.-
$$|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

- P3.-
$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a, , \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

- P4.-
$$0 \leq x \leq y \iff x^2 \leq y^2 \tag{2.9}$$

Ahora se irá contestando a cada uno de los apartados del ejercicio:

i) ¿$x^2 < 4 \Rightarrow x < \pm 2$? Falso. Fíjese el lector que la propiedad indicada en (2.9) solo es una doble implicación si los números son positivos, ya que por ejemplo

$$2^2 < (-3)^2 \nRightarrow 2 < -3$$

que evidentemente es falso. Habría que tener cuidado con un detalle esencial de la raíz cuadrada que es

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

es decir, solo da x si $x > 0$.

Ahí radica el problema, de hecho para resolver una desigualdad de orden superior a 1, es conveniente pasarlo todo al primer miembro y estudiar el signo del polinomio resultante:

$$x^2 < 4 \iff x^2 - 4 < 0 \iff x \in (-2, 2)$$

como puede apreciarse en la Figura 2.21

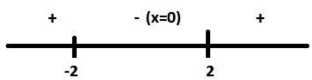


Figura 2.18: Signo del polinomio $x^2 - 4$