

# LA “TORCIA”: UN ULTERIORE TENTATIVO DI MODELLAZIONE SEMPLIFICATA DELL’INTERAZIONE TORCIA-GIRANTE

Michele Fanelli

## Riassunto:

Mentre abbondano gli studi sia teorici che sperimentali sulla cinematica e dinamica della torcia nel diffusore a valle della girante, sono piuttosto scarsi i contributi sull’interazione tra la torcia ed il campo di moto all’interno della girante, malgrado sia certo che tale campo di moto viene distorto dalla presenza della torcia, perdendo l’uniformità circonferenziale che è caratteristica del regime a pieno carico (cioè in condizioni di circolazione nulla –‘zero swirl’- all’uscita dalla girante).

Il presente studio si propone di affrontare il difficile problema ad un livello di modellazione matematica semplificata, costruendo per tappe successive un campo di moto a potenziale che soddisfi alle presumibili condizioni cinematiche in presenza della torcia. L’ipotesi che consente di elaborare un modello di questo tipo consiste nell’ammettere che nella girante, sotto condizioni di carico parziale, la portata non si riduca in misura uguale per tutti i canali interpalari, ma un certo numero di canali tenda a conservare una portata prossima a quella della condizione di pieno carico, mentre nei canali restanti si instaurano condizioni di portata fortemente ridotta (o prossime allo stallo). Imponendo che tale configurazione ruoti stabilmente con la stessa velocità angolare di precessione da cui è animato il filamento vorticoso della torcia si riesce a chiudere matematicamente il problema. Il modello in questione permette di fare previsioni che potrebbero essere verificate da opportune indagini sperimentali.

**Palabras clave:** Turbina Francis, Carico parziale, Torcia, Interazione torcia-girante, Modellazione matematica, Moto a potenziale, Vorticità concentrata.

## POSIZIONE DEL PROBLEMA, RICHIAMO DEGLI STUDI PRECEDENTI

Precedenti ricerche dello scrivente sulla modellazione matematica del fenomeno della ‘torcia’ allo scarico delle turbine idrauliche tipo FRANCIS funzionanti a carico parziale si erano concentrati dapprima sulla struttura del flusso nella parte iniziale (‘cono’) del diffusore (1988-1989), poi sul meccanismo di eccitazione del ‘draft tube surge’ che si verifica in condizioni di torcia cavitata (1997) ed in presenza di ‘gomito’ nel diffusore. Infine il contributo più recente (2001) rappresentò un primo tentativo di modellare in modo assai semplificato la complessa interazione tra il moto nella parte iniziale del diffusore ed il moto all’uscita dalla girante. Infatti è fuor di dubbio che in presenza di una torcia eccentrica il moto nello spazio interno all’uscita della girante (e nella girante stessa) viene distorto, perdendo la simmetria radiale che esiste a pieno carico, o meglio in condizioni di ‘zero swirl’.

Tutti questi studi erano motivati dall’opportunità di sviluppare modelli ‘globali’, i quali cioè, senza integrare le equazioni del moto (NAVIER-STOKES) in una complessa geometria tridimensionale e tempo-dipendente, tendessero a collegare tra loro i parametri macroscopici del fenomeno ai fini da una parte di giungere ad una più sintetica identificazione dei parametri fisici significativi, dall’altra dello sviluppo eventuale di modelli dinamici ‘a blocchi’ dell’intero impianto, destinati ad indagarne le condizioni di stabilità complessiva e nei quali comparissero, ancora una volta, solo parametri globali, come è senza dubbio opportuno se non necessario per evitare gravi complicazioni.

Il presente contributo mira a riprendere, su basi più accurate e fisicamente plausibili, il problema già affrontato nella memoria del 2001, e cioè a modellare la struttura cinematica del campo di moto nello spazio interno all’uscita della girante (sezioni di passaggio tra la girante ed il diffusore) in presenza di una ‘torcia’ eccentrica.

Michele Fanelli. Ex-director de CRIS-ENEL Spa. Consultor. Via L.B. Albert, 5. 20149 Milán, Italia. E-mail: michele.fanelli@infinito.it

Artículo recibido el 5 de septiembre de 2002, recibido en forma revisada el 20 de noviembre de 2002 y aceptado para su publicación el 9 de enero de 2003. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las “Instrucciones para autores”. En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

Ancora una volta, come già negli studi del 1989 e del 2001, ci si rifà largamente a modelli di moto 'quasi ovunque' a potenziale, nella speranza che questi possano abbastanza fedelmente approssimare una configurazione 'media' del campo di moto, da cui siano state filtrate le componenti turbolente e le perturbazioni armoniche ad alta frequenza (quali ad esempio quelle legate al passaggio delle pale mobili della girante davanti alle pale fisse del distributore)<sup>1</sup>.

Questi modelli, nel loro dichiarato carattere di tentativo euristico rivolto a proporre schemi semplificati ma plausibili della complessa struttura del campo di moto indagato, hanno altresì l'ambizione di costituire una possibile guida concettuale alla pianificazione ed effettuazione di rilievi sperimentali; questi ultimi, come sempre, sono in definitiva l'unico elemento probante per accettare, respingere o modificare i modelli matematici che l'intuizione fisica e l'applicazione di leggi fondamentali possono suggerire al ricercatore.

### Linee fondamentali del nuovo modello: la distorsione del campo di moto nello spazio interno alla sezione di uscita dalla girante

Nel contributo FANELLI, 2001 sussistevano almeno due motivi di scarso realismo nella modellazione del campo di moto in questione: ai fini della determinazione delle velocità radiale e tangenziale della torcia il flusso in uscita dai vari canali interpallari era implicitamente supposto essere uniforme nel senso circonferenziale (la portata essendo, cioè, ridotta in ugual misura in tutti i canali) e l'assorbimento della portata da parte del diffusore era rappresentato da un unico pozzo concentrato posizionato sull'asse (tra l'altro quest'ultima schematizzazione del modello comporterebbe, a rigore, l'instabilità della posizione radiale della torcia).

A dispetto di queste deficienze, il modello in questione permise di intravedere alcune caratteristiche interessanti, tra cui la probabile tendenza ad una distribuzione non uniforme della portata ridotta tra i diversi canali interpallari, di modo che si potesse ipotizzare che il moto cercasse di conservare la piena portata (e quindi l'uscita radiale) in alcuni dei canali, a spese di una situazione di portata fortemente ridotta, con probabile stallo del flusso, nei restanti canali.

Lo scrivente decise pertanto di cercare di sviluppare un modello che, rispecchiando la tendenza appena descritta, tendesse a rimuovere i difetti accennati precedentemente.

Nel nuovo modello pertanto il pozzo concentrato sull'asse viene rimpiazzato da una distribuzione continua, ma non radialmente simmetrica, di pozzi su tutta l'area centrale interna alla sezione di uscita dalla girante, e tra le condizioni imposte al moto vi è quella che su una parte dei canali si realizza approssimativamente la piena portata (uscita pressoché radiale).

Altro criterio guida nello sviluppo del nuovo modello è stata –come del resto nei contributi precedenti– la ricerca della massima semplicità.

### Formulazione matematica del nuovo modello

Come accennato, all'interno della sezione di uscita dalla girante (assimilato ad uno spazio cilindrico di raggio  $R$ ) si ipotizza, nel piano generico perpendicolare all'asse di rotazione, l'esistenza di una distribuzione continua, non uniforme e non azimutalmente simmetrica<sup>2</sup>, di pozzi che nel loro complesso assorbono la portata ridotta  $n \cdot Q_0$ , con  $n < 1$  e  $Q_0 =$  portata di 'zero swirl' per unità di altezza della sezione di uscita dalla girante.

La distribuzione continua di 'pozzi' ipotizzata all'interno della sezione di uscita dalla girante (cilindro di altezza  $h$  e di raggio  $R$ ) si è assunta come data, in coordinate polari  $\rho$ ,  $\vartheta$  con centro sull'asse di rotazione, dall'espressione

$$q(\rho, \vartheta) = -\frac{n \cdot Q_0}{\pi \cdot R^2} - \frac{4 \cdot (1-n) \cdot Q_0}{\pi \cdot R^2} \cdot \frac{\rho \cdot \sin \vartheta}{R} \quad (1)$$

dove  $0 \leq \rho \leq R$ ;

il corrispondente potenziale del moto nel piano anzidetto, tale che  $q = \nabla^2 \Phi$ , vale sotto queste ipotesi:

$$\Phi_{\text{pozzi}} = \frac{Q_0}{\pi} \cdot \left[ -\frac{n \cdot \rho^2}{4 \cdot R^2} + (1-n) \cdot \frac{\rho \cdot \sin \vartheta}{R} \cdot \left( 1 - \frac{\rho^2}{2 \cdot R^2} \right) \right] \quad (2)$$

<sup>1</sup> Il presente studio attinge anche alle considerazioni ed al modello sviluppati dallo scrivente nella memoria 'La fluidodinamica delle turbomacchine: il dualismo irrotazionalità-circolazione' presentata al convegno di Baveno dell'Associazione Idrotecnica Italiana (FANELLI 1993). Si tenga conto che la presenza di una torcia, cioè di una vorticità concentrata, lascia supporre di per sé che vi sia scarsa presenza di vorticità distribuita, ossia di turbolenza; dunque la pretesa di approssimare questo campo di moto con un potenziale non appare a priori assurda,

e le corrispondenti velocità radiale e tangenziale:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{Q_0}{\pi \cdot R} \left[ -\frac{n \cdot \rho}{2 \cdot R} + (1-n) \cdot \left( 1 - \frac{3 \cdot \rho^2}{2 \cdot R^2} \right) \cdot \sin \vartheta \right] \quad (3)$$

$$V_\vartheta = \frac{\partial \Phi}{\rho \cdot \partial \vartheta} = \frac{Q_0}{\pi \cdot R} \cdot (1-n) \cdot \left( 1 - \frac{\rho^2}{2 \cdot R^2} \right) \cdot \cos \vartheta \quad (4)$$

[nelle (3) e (4) si è ommesso il pedice  $_{pozzi}$  al simbolo del potenziale  $\Phi$ ].

A questo campo di velocità occorre aggiungere quelli causati dalla torcia, di circolazione

$$\Gamma = (1-n) \cdot m \cdot Q_0 \quad (5)$$

(con  $m$  dell'ordine dell'unità) la cui posizione è per ora incognita, e dalla circolazione 'scompensata' lungo quella parte della sezione di uscita dalla girante in cui la portata dei canali interpallari è fortemente ridotta e quindi il flusso in uscita non è radiale.

Le linee ad ugual valore del potenziale (2) sono raffigurate in FIG. 1 per la parte a simmetria radiale ed in FIG. 2 per la parte emisimmetrica rispetto al diametro orizzontale:

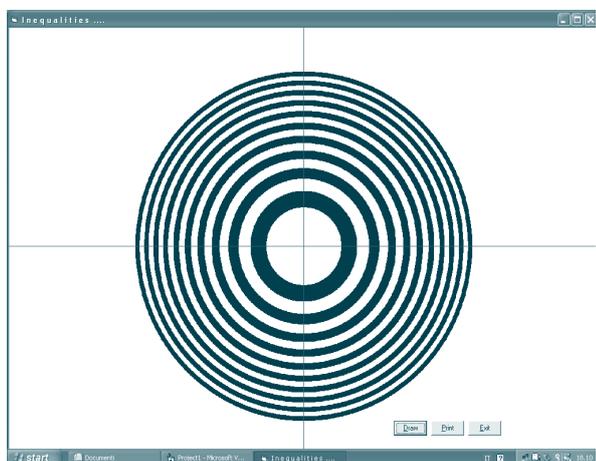


Figura 1. Equipotenziali del primo addendo al 2° membro di (2) (componente a simmetria radiale di  $\Phi_{pozzi}$ ).

Le equipotenziali di FIG. 1 corrispondono alla situazione di 'zero swirl', ossia  $n=1$ , in cui l'uscita dalla girante è radiale e la torcia è assente; in questa situazione non vi sono altri contributi al

potenziale nello spazio interno alla sezione di uscita dalla girante, come risulta dalle eqq. (2), (6), (9) ponendo  $n=1$ .



Figura 2. Equipotenziali del secondo addendo al 2° membro dell'eq. (2) [componente emisimmetrica del potenziale  $\Phi_{pozzi}$  a meno del fattore  $(1-n)$ ].

Nella seconda componente del campo (v. FIG.2) la velocità radiale si annulla per

$$\frac{\rho}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cong 0.8165, \text{ v. (3);}$$

nella parte interna a tale raggio la velocità ha componente prevalente verso l'alto della figura, mentre ha componente prevalente verso il basso nelle parti esterne e vicine all'asse  $y$ , cosicché nella parte alta si tende a correggere il deficit di portata nei canali interpallari, nella parte bassa ad aggravarlo (stallo parziale).

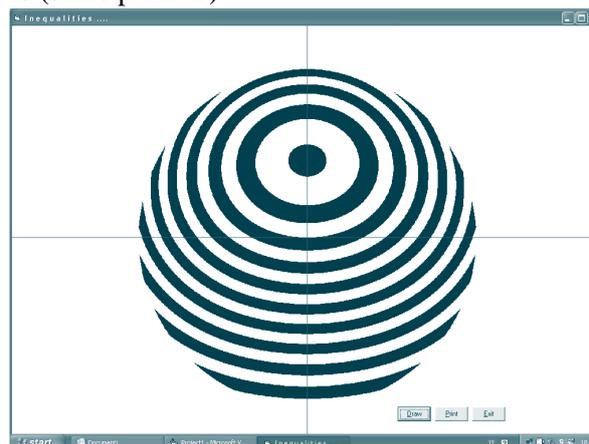


Figura 3. Equipotenziali di  $\Phi_{pozzi}$ , eq. (2), per  $n=0.75$  (campo asimmetrico a parte il contributo della torcia e della circolazione 'scompensata')

<sup>2</sup> La distribuzione non simmetrica risultante si è assunta la più semplice possibile, cioè con distribuzione lineare rispetto alla coordinata  $y=\rho \sin \vartheta$ , v. (1); l'intensità è tale da riportare la portata proveniente dai canali interpallari situati all'azimut  $\vartheta = \pi/2$  al valore di 'zero swirl'.

In FIG. 3 sono visualizzate le equipotenziali del campo risultante dalla sovrapposizione del potenziale di FIG. 1 con quello di FIG. 2.

Introduciamo ora il contributo della circolazione ‘scompensata’, che tende a ripristinare il valore di circolazione ‘normale’ attorno alle pale della metà superiore della figura e a diminuirla ulteriormente nella parte inferiore (stallo parziale). A tale scopo introduciamo un anello di vortici distribuiti, legati alle pale, di circolazione antioraria nella parte superiore ed oraria nella parte inferiore, di intensità proporzionale ad  $y = \rho \cdot \sin \vartheta$  e di intensità tale da riportare la circolazione attorno alla pala che si trova all’azimut  $\vartheta = \pi / 2$  al valore corrispondente alla condizione di ‘zero swirl’.

Dopo introduzione di questa ulteriore correzione (ma ancora senza il contributo della ‘torcia’ eccentrica) il potenziale del moto assume l’espressione:

$$\Phi_{S.T.} = \frac{Q_0}{\pi} \left[ -\frac{n \cdot \rho^2}{4 \cdot R^2} + (1-n) \cdot \frac{\rho \cdot \sin \vartheta}{R} \left( 1 - \frac{\rho^2}{2 \cdot R^2} \right) + m \cdot \frac{1-n}{4} \cdot \frac{\rho \cdot \cos \vartheta}{R} \right] \quad (6)$$

e le corrispondenti equipotenziali, per il caso particolare  $n = 0.75$  ed  $m = 1$ , sono rappresentate in FIG. 4:

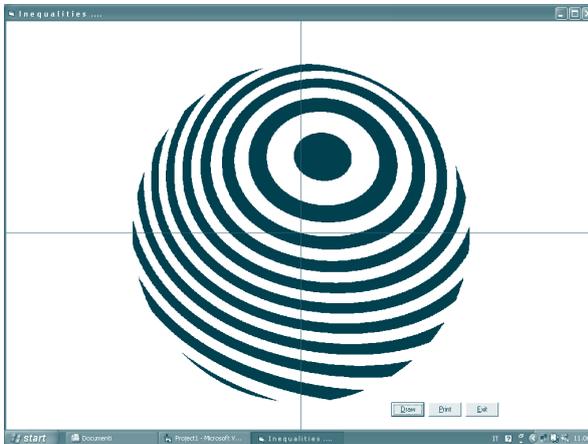


Figura 4. Equipotenziali del campo distorto, a meno della torcia eccentrica, per  $n = 0.75$  ed  $m = 1$ , v. (6)

Resta ora da inserire il contributo della torcia eccentrica, v. (5), ma prima è necessario determinarne la posizione  $(r, \alpha)$  all’interno del cerchio di raggio  $R$ . Ciò si conseguirà, analogamente a quanto fatto negli studi precedenti (v. FANELLI, 2001), imponendo le due condizioni seguenti nel punto:

$$V_r = \frac{\partial \Phi_{S.T.}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r, \vartheta=\alpha} = 0 \quad (7)$$

(la torcia orbita su un percorso circolare stabile)

$$\frac{V_\vartheta}{r} = \omega_T = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_{S.T.}}{\partial \vartheta} \Big|_{\rho=r, \vartheta=\alpha} = \text{velocità angolare di precessione, causata dalla torcia, della distribuzione di vortici ‘scompensati’ (v. sopra) legati alle pale (il sistema di sorgenti e vortici generatore del campo di moto segue la torcia nel suo moto di precessione nel tempo).} \quad (8)$$

Queste due condizioni, da imporre utilizzando il potenziale (6) per esplicitare l’espressione di  $V_r$  e  $V_\vartheta$  nelle (7), (8)<sup>3</sup>, assicurano, nei limiti delle varie approssimazioni introdotte, che il campo di moto si ‘autoriproduca’ con continuità nel tempo, ruotando con la velocità di precessione  $\omega_T$  [che risulterà determinata in base alla (8)].

Le linee costituenti i luoghi geometrici lungo cui è soddisfatta la (7) per  $m = 1$  ed  $n = 0.8, 0.7, 0.6$  sono rappresentate in FIG. 5. Si noti che all’interno di ognuna delle curve è  $V_r > 0$ , mentre all’esterno si ha  $V_r < 0$ , il che assicura che la posizione della torcia sulla curva è stabile.

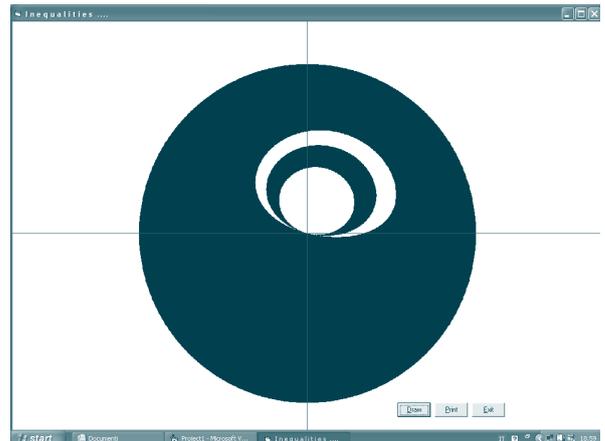


Figura 5. Linee lungo cui  $V_r = (\partial \Phi_{S.T.}) / \partial \rho = 0$ , v. eq. (6), per  $m=1$  ed  $n=0.6, 0.7, 0.8$  partendo rispettivamente dalla curva piu’ esterna.

La (8) si esprime in via approssimata come segue:

$$\frac{V_\vartheta}{r} = \omega_T = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_{S.T.}}{\partial \vartheta} \Big|_{\rho=r, \vartheta=\alpha} \cong \frac{(1-n) \cdot m \cdot Q_0}{2 \pi \cdot R^2} \quad (8^*)$$

e in FIG. 6 sono riportate le curve lungo cui sono soddisfatte tanto la (7) quanto la (8\*) per  $m = 1$ ,  $n = 0.75$ . Per quanto osservato sopra, dei due punti di intersezione delle curve in questione quello coincidente con l’origine degli assi è instabile, quindi solo l’altro è da prendere in considerazione.

Dall’esame delle FIGG. 5 e 6 si conclude che l’eccentricità della torcia cresce al diminuire di  $n$ ;

inoltre la velocità di precessione risulterebbe (per  $m = 1$ ) pari a  $\omega_r = (1 - n) \cdot \omega_0$ , dove  $\omega_0$  è la velocità angolare della girante. Questi risultati non sono in contrasto con le risultanze sperimentali.

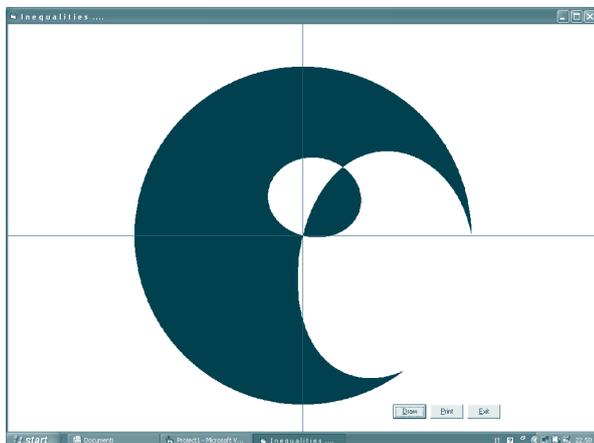


Figura 6. Localizzazione della torcia per  $m = 1$ ,  $n = 0.75$ : la curva ellittica più piccola è il luogo dei punti dove  $V_r = 0$ , la curva ellittica più grande è il luogo dei punti dove la velocità di precessione della torcia uguaglia la velocità angolare media dei vortici legati alle pale della girante. la torcia si situa pertanto all'intersezione delle due curve (escludendo l'origine degli assi).

Con l'introduzione del potenziale polidromo della torcia, assimilata ad un filamento vorticoso verticale, il potenziale totale all'interno dello spazio cilindrico di raggio  $R$  assume infine l'espressione:

$$\Phi_{TOT} = \frac{Q_0}{\pi} \left[ -\frac{n \cdot \rho^2}{4 \cdot R^2} + (1-n) \cdot \frac{\rho \cdot \sin \vartheta}{R} \left( 1 - \frac{\rho^2}{2 \cdot R^2} \right) + m \cdot \frac{1-n}{2} \left( \frac{\rho \cdot \cos \vartheta}{2 \cdot R} + \arg(\rho \cdot e^{i \cdot \vartheta} - r \cdot e^{i \cdot \alpha}) \right) \right] \quad (9)$$

Le equipotenziali di questo campo sono rappresentate in FIG. 7 per  $m = 1$ ,  $n = 0.75$ . Esse risultano dalla combinazione delle equipotenziali di FIG. 4 con quelle dovute alla sola torcia (fascio di rette uscenti dal centro della torcia, che è il punto individuato in FIG. 6).

### Interpretazione fisica; interpretazione geometrica approssimata

Si è così costruito un campo di moto che rispecchia approssimativamente le caratteristiche desiderate. Sorge naturalmente la domanda come si possa raccordare questo campo, che presenta un input di portata distribuita lungo la frontiera cilindrica (componente radiale), col campo a simmetria

elicoidale (v. FANELLI, 1989) che è atto a rappresentare approssimativamente il moto nella parte iniziale ('cono') del diffusore, a prevalente componente assiale, in cui la frontiera cilindrica è invece impermeabile.

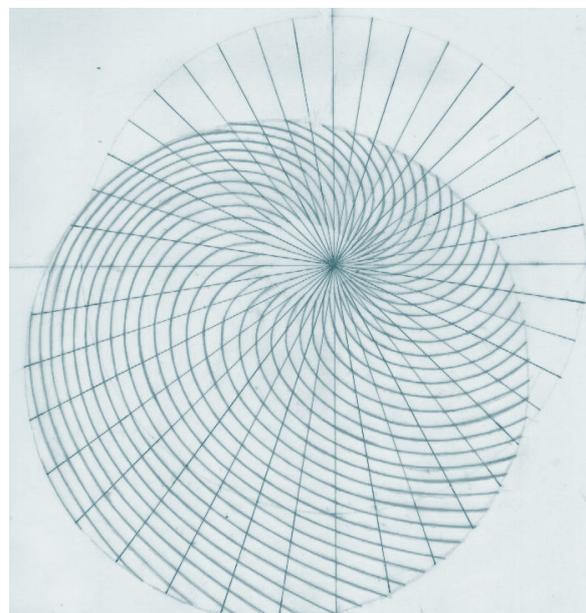


Figura 7. Equipotenziali (in rosso) del campo totale [v. (9)] per  $m = 1$ ,  $n = 0.75$ ; in nero le equipotenziali della sola torcia<sup>4</sup> il verso di circolazione è antiorario.

Poiché entrambi i campi, nella nostra schematizzazione, sono rappresentati da un potenziale, la via di uscita più immediata consiste nell'ipotizzare che in un breve tratto ( $z_1 \leq z \leq z_2$ , con  $z_2 - z_1 < h$ ) della parte più bassa dello spazio cilindrico di altezza  $h$  qui considerato si abbia una transizione graduale (ad es. con legge lineare in  $z$ ) tra i due potenziali:

$$\Phi_{TRANS} = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} \cdot \Phi_{TOT} + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \Phi_{CONO} \quad (10)$$

per  $z_1 \leq z \leq z_2$

[v. (9) per  $\Phi_{TOT}$  e FANELLI, 1989 per  $\Phi_{CONO}$ ]. Ciò corrisponde fisicamente ad una transizione del moto da un assetto prevalentemente radiale nella parte alta dell'uscita dalla girante ad un assetto prevalentemente assiale nella parte bassa, cosa perfettamente coerente con l'effettiva struttura del flusso medio.

Con quest'ultima schematizzazione il problema di rappresentare sinteticamente sia l'interazione torcia-girante, sia la transizione al moto in presenza di torcia nella parte iniziale del diffusore avrebbe trovato una soluzione approssimata di primo tentativo.

<sup>3</sup> Cioè a prescindere dal contributo della torcia stessa, che come noto non influisce sulla tendenza al movimento del filamento vorticoso.

<sup>4</sup> Il punto di localizzazione della torcia è quello di FIG. 6.

A proposito del potenziale  $\Phi_{TOT}$ , v. (9), la sua rappresentazione grafica in FIG. 7 suggerisce un'interessante interpretazione geometrica, certamente non valida in generale (cioè per qualunque valore di  $n$ , v. oltre) ma tuttavia assai suggestiva dal punto di vista fisico.

Si osserva che le equipotenziali di FIG. 7 sono sorprendentemente vicine, per larga parte del loro tracciato, ad archi di evolventi di cerchio (v. FIG. 8); inoltre la distanza tra due equipotenziali successive, pur non risultando costante, non presenta variazioni eccessive sull'area del cerchio di raggio  $R$ . Sulla base di queste osservazioni, si può essere indotti ad esaminare quali sarebbero le caratteristiche di un ipotetico moto a potenziale in cui le equipotenziali fossero archi di evolventi di cerchio (generate da un unico cerchio di raggio  $r_\tau$  assai minore di  $R$  e centrato presso l'asse della torcia) uniformemente distanziati tra loro; il che comporta che il campo di velocità esterno al cerchio generatore consisterebbe di vettori velocità di modulo uniforme  $V_\tau$  ed aventi direzioni tutte tangenti al cerchio generatore. Questo modello verrà indicato nel seguito, per brevità, con la locuzione 'modello ad evolventi'; occorre precisare che, mentre esternamente al cerchio di base delle evolventi le equipotenziali seguirebbero le predette evolventi equispaziate, all'interno del cerchio stesso, di raggio  $r_\tau$ , si ipotizza, nel caso la torcia non sia cavitata, un movimento rotatorio rigido (quindi non a potenziale e con vorticità distribuita uniforme), atto, a parte le dimensioni, a rappresentare la torcia, la cui velocità periferica sia congruente con la velocità uniforme del campo esterno descritto (in termini di equipotenziali) dalle evolventi equispaziate.

E' facile vedere che in un campo così definito esiste, all'esterno del cerchio di raggio  $r_\tau$ , un sistema di pozzi distribuiti di intensità:

$$q_\tau = -\frac{V_\tau}{\alpha \cdot r_\tau} \tag{11}$$

dove  $\alpha r_\tau$  (con  $\alpha \geq 0$ ) è la distanza del punto in cui si valuta la densità dei pozzi distribuiti dal punto di tangenza della direzione di  $V_\tau$  al cerchio di raggio  $r_\tau$ ; ed è altresì facile verificare che l'integrale della densità (11) esteso all'area compresa tra il cerchio di raggio  $r_\tau$  ed il cerchio di raggio  $R$  ugua-

glia la portata entrante attraverso la circonferenza di quest'ultimo cerchio.

Quindi assegnando un'opportuna spaziatura alle evolventi (ed una opportuna posizione al centro del cerchio di raggio  $r_\tau$ ) è possibile approssimare una distribuzione non uniforme di portate di entrata lungo la frontiera cilindrica, così come desiderato; inoltre assegnando un opportuno valore al raggio  $r_\tau$  si può far sì che la circolazione del moto rigido di rotazione interno al cerchio di raggio  $r_\tau$  uguagli quella della torcia, v. (5), ossia

$$r_\tau = \frac{(1-n) \cdot m \cdot Q_0}{2 \cdot \pi \cdot V_\tau} \tag{12}$$

In definitiva si può costruire in questo modo un modello alternativo a quello visto nei paragrafi precedenti, ma non troppo diverso da esso, che offre il vantaggio di una più sintetica definizione geometrica; si vede inoltre facilmente che le componenti orizzontali di tale moto, essendo di modulo costante su tutta l'area del campo di moto (tranne il cerchio di raggio  $r_\tau$ ), soddisferebbero al principio della minima energia cinetica, che si sa essere rispettato in generale nella fluidodinamica<sup>5</sup>. Il fatto che il campo qui proposto si avvicini ad un modello che soddisfa tale principio supporta, a parere dello scrivente, la plausibilità fisica della soluzione approssimata costruita nei paragrafi precedenti.

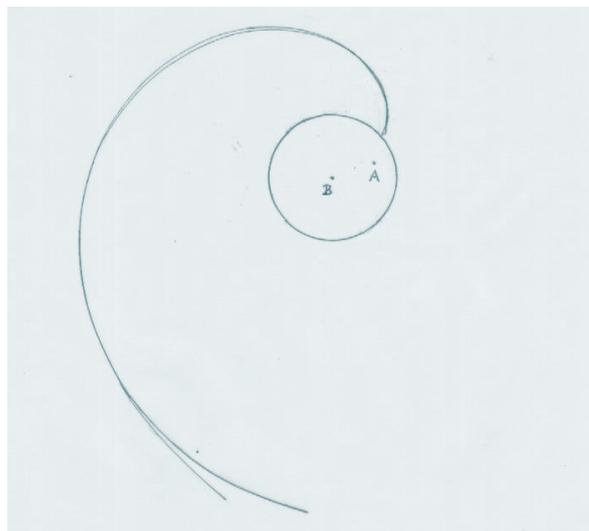


Figura 8. Confronto tra una delle equipotenziali di fig. 7 (in rosso) ed una evolvente del cerchio di centro b (in blu) – il centro teorico della torcia coincide col punto A

<sup>5</sup> In realtà, per soddisfare rigorosamente a tale principio occorrerebbe includere nella valutazione dell'energia cinetica locale anche la componente

verticale della velocità,  $V_z = -\int_0^z q d\zeta = \int_0^z \frac{V_\tau}{\alpha \cdot r_\tau} d\zeta$ , il che porterebbe a dover modificare lo schema 'ad evolventi' onde evitare integrali divergenti ( $V_z \rightarrow \infty$  per  $\alpha \rightarrow 0$ ).

Altro vantaggio del modello in questione consiste nell'assegnare una sezione finita (anziché puntiforme) alla torcia.

E' evidente peraltro che il 'modello ad evolventi' non potrebbe essere accettabile che in un ristretto intervallo di valori di  $n$ ; basti osservare che per  $n \rightarrow 1$  (e centro del cerchio di raggio  $r_\tau$  coincidente col centro del cerchio di raggio  $R$ ) secondo tale modello le velocità tenderebbero sì ad assumere direzione radiale, ma con modulo uniforme anziché proporzionale alla distanza  $\rho$  dal centro del cerchio di raggio  $R$ , come deve invece verificarsi in tal caso. Più in generale, un esame comparato delle proprietà geometriche dell'evolvente e della curva generica formata dalle intersezioni  $\Phi_{TOT} = \text{costante}$  tra campo della sola torcia e campo definito dal potenziale  $\Phi_{S.T.}$  mostra che le due entità geometriche possono essere simili solo se la componente lineare in  $\rho \sin \vartheta$  del secondo campo è di entità non trascurabile rispetto alla componente a simmetria centrale.

D'altra parte, se si aderisce al concetto che il moto tenda ad accostarsi al 'modello ad evolventi', purché questo sia compatibile coi vincoli cinematici e dinamici, per soddisfare al principio della minima energia cinetica, l'osservazione precedente potrebbe 'spiegare' qualitativamente perché la torcia eccentrica si manifesti stabilmente solo in un ristretto intervallo di valori di  $n$ : per altri valori, lo schema ad evolventi risultando incompatibile coi vincoli, verrebbero preferite altre configurazioni cinematiche.

### Commenti, opportunità di nuove ricerche

Il modello qui proposto, ancorché certamente di prima grossolana approssimazione, presenta il vantaggio di fornire 'predizioni' che dovrebbero essere facilmente verificabili (o falsificabili) sperimentalmente: così ad esempio l'eccentricità della torcia in funzione di  $n$  e la sua posizione rispetto ai canali interpallari in regime di stallo parziale (l'ispezione delle FIGG. 5 e 6 mostra che la torcia dovrebbe precedere i canali stallati di un angolo compreso tra circa  $135^\circ$  e circa  $180^\circ$ ) potrebbero essere suscettibili di verifica sperimentale.

Inoltre il modello presentato consentirebbe di stimare la dipendenza della spinta radiale (rotante

con la velocità angolare di precessione della torcia) e del rendimento<sup>7</sup> dal parametro  $n$ , e di confrontare tali previsioni, ancora una volta, con le risultanze sperimentali.

E' evidente che molte delle assunzioni fatte nel costruire il modello in questione sono criticabili e potrebbero essere suscettibili di affinamenti in successive elaborazioni; così per esempio sono discutibili tanto l'ipotesi che per  $\vartheta = \pi/2$  si ripristinino esattamente, nel corrispondente canale interpallare, la portata e la circolazione della condizione di 'zero swirl', quanto l'ipotesi che la distribuzione di pozzi entro l'area circolare sede del moto sia lineare in  $y$  anziché seguire una legge più generale.

### Sommario e conclusioni

Si è costruito per tappe successive (v. FIGG. 1, 2, 3, 4, 7) un modello matematico approssimato delle distorsioni nel campo di moto all'uscita della girante di una turbina Francis a carico parziale, basato sull'ipotesi che la cinematica in questione possa essere mediamente rappresentata da un moto a potenziale e che mentre alcuni dei canali interpallari tendano a mantenere la portata e la circolazione di 'zero swirl' (uscita radiale o pressoché tale), altri canali interpallari si trovino in condizioni di stallo parziale. Sotto tali assunzioni si sono ricavate tanto le espressioni approssimate del potenziale quanto le condizioni per l'esistenza di una 'torcia' in posizione eccentrica, stabile radialmente ed animata da un moto di precessione regolare. Le conclusioni dello studio, parzialmente sviluppate numericamente, appaiono suscettibili di verifica sperimentale. Sulla base del modello presentato si sono sviluppate considerazioni aggiuntive avanzando l'ipotesi che il moto così modellato approssimi le condizioni di 'minima energia cinetica' all'uscita dalla girante, il che, se confermato, conferirebbe credibilità al modello stesso (per ulteriori considerazioni sul modello 'ad evolventi' del § 4 v. APPENDICE).

Si ritiene che le basi del presente studio possano offrire utili spunti per approfondire la comprensione del complesso campo di moto esistente all'interno della sezione di uscita dalla girante in condizioni di carico parziale; non vi è dubbio peraltro che siano necessari a tale scopo altri studi e soprattutto verifiche sperimentali.

<sup>6</sup> Questa conclusione contrasta con quella di FANELLI, 2001, da cui risulterebbe che l'angolo in questione sia compreso tra circa  $35^\circ$  e circa  $40^\circ$ ; la FIG. 7, peraltro, potrebbe suggerire un diverso valore, dell'ordine di  $90^\circ$  circa.

<sup>7</sup> Il modello presentato in questa memoria appare in grado di spiegare meglio, in confronto all'ipotesi della distribuzione uniforme in tutti i canali interpallari della portata ridotta, il mantenimento di rendimenti sufficientemente alti per  $n < 1$  che si osserva nelle turbine Francis.

## LISTA DEI SIMBOLI USATI

$n$	rapporto tra la portata ridotta e la portata di 'zero swirl'
$Q_0$	portata di 'zero swirl' per unità di altezza dello spazio cilindrico a valle dell'uscita dalla girante
$h$	altezza dello spazio cilindrico a valle dell'uscita dalla girante
$R$	raggio dello spazio cilindrico a valle dell'uscita dalla girante
$\rho, \vartheta$	coordinate polari nel piano generico normale all'asse
$x, y$	coordinate cartesiane nel piano generico normale all'asse
$z$	coordinata cartesiana parallela all'asse
$q$	intensità per unità di superficie dei 'pozzi' distribuiti nel piano generico
$\nabla^2$	operatore di Laplace
$m$	rapporto tra circolazione della torcia e $Q_0$
$\Phi_{\text{pozzi}}$	potenziale generato dalla distribuzione dei 'pozzi' (v. sopra)
$\Phi_{S.T.}$	potenziale senza il contributo della torcia
$\Phi_{TOT}$	potenziale totale
$\Phi_{\text{cono}}$	potenziale nel 'cono' del diffusore
$V_r$	velocità radiale
$V_\vartheta$	velocità tangenziale
$V_z$	velocità assiale
$r$	distanza della torcia dall'asse
$\alpha$	azimut della torcia
$\omega_t$	velocità angolare di precessione della torcia
$\omega_0$	velocità angolare della girante
$r_\tau$	raggio del cerchio generatore delle equipotenziali nel modello 'ad evolventi'
$q_\tau$	densità dei 'pozzi' distribuiti nel modello ad evolventi
$V_\tau$	velocità tangenziale alla torcia nel modello ad evolventi senza variazione ciclica
$\rho_\tau, \vartheta_\tau$	coordinate polari centrate sulla torcia
$\varphi = 2\pi - \vartheta_\tau$	
$\gamma$	angolo tra il raggio tangente alla sezione d. torcia e il raggio vettore dall'asse
$\vartheta_0$	definito nel testo (APPENDICE)
$\beta$	fattore di variazione sinusoidale delle velocità tangenziali attorno alla torcia

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Angelico, G. e Fanelli, M. (1997)– On the Excitation Mechanism of Part Load Draft Tube Surge in Francis Turbines, 8th International Meeting of the IAHR W. G. on the behaviour of hydraulic machinery under steady oscillatory conditions, Chatou, 18-19 Sept. 1997

Doerfler, P. (1982)– Vortex rope excited oscillations in the draft tube of Francis turbines working at partial load (thesis, in German), 1982

Fanelli, M. (1989)– The vortex rope in the draft tube of Francis turbines operating at partial load: a proposal for a mathematical model, rapporto interno ENEL/CRIS, 1988; pubblicato sul Journal of Hydraulic Research, 1989

Fanelli, M. (1993) – La fluidodinamica nelle turbomacchine: il dualismo irrotazionalità-circolazione, Associazione Idrotecnica Italiana, Congresso Nazionale Macchine e Apparecchiature Idrauliche, Baveno 25-28 Maggio 1993 (pagg. 209-250)

Fanelli, M. (1996) –Some present trends in hydraulic machinery research, Invited Lecture at the XVIII IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Cavitation, Valencia, 1996

Fanelli, M. (2001) – On the precession rate of the vortex rope in Francis turbines operating at partial loads, 10th International Meeting of the IAHR W. G. on the behaviour of hydraulic machinery under steady oscillatory conditions, Trondheim, 26-28 June, 2001

Fritsh, A. e María, D. (1987)–Dynamic Behaviour of a Francis turbine at partial load, Third Round Table of IAHR W. G. on the behaviour of hydraulic machinery under steady oscillatory conditions, Lille, Sept. 1987

Magri, L. (1987)– Problematiche delle turbomacchine idrauliche per produzione di energia elettrica, Ed. Pitagora, 1987

Ohashi, H. (1991)– Vibration and Oscillation of Hydraulic Machinery, Ed. Avebury, 1991

Raabe, J. (1989) – Hydraulische Maschinen und Anlagen, VDI Verlag, 1989

Rheingans, W. J. (1940)– Power Swings in Hydroelectric Power Plants, Transactions ASME, Vol. 62, 1940

## APPENDICE

## Il modello 'ad evolventi': sviluppi matematici e considerazioni critiche

Che lo schema ad evolventi equispaziate, così come succintamente presentato sopra, sia eccessivamente semplificato si ricava tra l'altro dal fatto

che in esso la velocità tangenziale  $\frac{\partial \Phi_{S.T.}}{\rho \cdot \partial \vartheta}$

risulterebbe nulla, e quindi non si avrebbe il moto precessionario della torcia. Il modello dovrebbe quindi quanto meno essere corretto introducendo una variazione ciclica in  $\vartheta$  dell'intervallo tra due equipotenziali consecutive (v. anche FIG. 7).

Nel modello così come enunciato sopra si avrebbero le relazioni seguenti:

$$\Phi_{S.T.} = -V_{\tau} \left[ \sqrt{\rho_{\tau}^2 - r_{\tau}^2} + 2.r_{\tau} \cdot \left( \arctg \frac{r_{\tau}}{\rho_{\tau} + \sqrt{\rho_{\tau}^2 - r_{\tau}^2}} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (\text{A.1})^8$$

in coordinate polari  $\rho_{\tau}, \vartheta_{\tau}$  centrate sul centro della torcia (si è posto arbitrariamente  $\Phi_{S.T.} = 0$  per  $\rho_{\tau} = r_{\tau}$ , ossia sul contorno della sezione della torcia; il potenziale in questione sarebbe radialmente simmetrico rispetto al centro della torcia);

$$(1-n)m.Q_0 = 2.\pi.r_{\tau}.V_{\tau} \quad ; \quad (\text{A.2})$$

$$n.Q_0 = V_{\tau} \cdot \left[ 2.\pi \cdot \sqrt{(R-r)^2 - r_{\tau}^2} + \right. \quad (\text{A.3})^9$$

$$\left. + r \cdot \int_0^{2\pi} \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 + \frac{r \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{R^2 - r^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \right) \cdot d\varphi \right]$$

dove  $\varphi = 2.(\pi - \vartheta_{\tau})$  e  $\vartheta_{\tau} = 0$  sulla congiungente il centro della regione cilindrica sede del campo con il centro della torcia;  $r$  è qui l'eccentricità della torcia.

Manca, a chiudere formalmente il modello matematico, una relazione analoga alla (8\*), dato che non è possibile, come citato all'inizio di questa APPENDICE, esprimere una velocità di precessione della torcia; infatti il potenziale (A.1), essendo a simmetria radiale rispetto al centro della torcia, non genera velocità tangenziali della torcia stessa.

Se si volesse sviluppare il modello introducendo una variazione ciclica della distanza tra equi-

potenziali successive [v. eq.  $V_t = V_o \cdot (1 + \beta \cdot \cos \vartheta_o)$  qui sotto], si potrebbero usare le relazioni seguenti:

**a) relazioni geometriche**

- equazione polare dell'equipotenziale generica, con polo nel centro della torcia:

$$\rho_{\tau} = r_{\tau} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$\vartheta_{\tau} = \vartheta_o + \alpha - \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{r_{\tau}}{\rho_{\tau}} \quad (\vartheta_o \text{ azimut dell'}$$

equipotenziale generica all'intersezione con la sezione della torcia di raggio  $r_{\tau}$ ; l'origine degli azimut è sulla congiungente il centro del cerchio di raggio  $R$  con il centro della torcia)

-intersezione dell'equipotenziale col cerchio di raggio  $R$ :

azimut  $\varphi$ :

$$\varphi = \arcsin \left[ \frac{r_{\tau}}{R} \cdot (-\alpha \cdot \cos(\vartheta_o + \alpha) + \sin(\vartheta_o + \alpha)) \right]$$

-raggio vettore dal centro torcia:

$$\rho_{\tau} = r_{\tau} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2.R.r \cdot \cos \varphi} \quad ;$$

eliminando  $\varphi$  tra le due ultime relazioni si ricava  $\alpha(\vartheta_o)$  sul cerchio di raggio  $R$ ; sostituendo nella penultima relazione si ottiene  $\varphi(\vartheta_o)$ ; introducendo quest'ultima nell'ultima equazione scritta si ottiene  $\rho_{\tau}(\vartheta_o)$

-angolo  $\gamma$  tra il raggio tangente alla sezione torcia e il raggio vettore dal centro del cerchio di raggio  $R$  dato da:

$$\frac{\alpha \cdot \sin \gamma + \cos \gamma}{r} = \frac{\sin(\vartheta_o + \alpha) - \alpha \cdot \cos(\vartheta_o + \alpha)}{R}$$

dove  $\alpha = \alpha(\vartheta_o)$ , v. sopra ; si ricava  $\gamma = \gamma(\vartheta_o)$

**b) relazioni cinematiche:**

-circolazione torcia:

$$2.\pi.r_{\tau}.V_o = (1-n)m.Q_0 \quad (V_o, r_{\tau} \text{ incognite})$$

8 La (A.1) si ricava integrando la  $\nabla^2 \Phi_{S.T.} = \frac{1}{\rho_{\tau}} \cdot \frac{d}{d\rho_{\tau}} \left( \rho_{\tau} \cdot \frac{d\Phi_{S.T.}}{d\rho_{\tau}} \right) = -\frac{V_{\tau}}{\sqrt{\rho_{\tau}^2 - r_{\tau}^2}}$

9 La (A.3) si ricava integrando la  $n.Q_0 = V_{\tau} \cdot r_{\tau} \cdot \int \varphi(\alpha) d\alpha$  dove  $\alpha = \sqrt{\frac{\rho_{\tau}^2}{r_{\tau}^2} - 1}$

-portata ridotta:

$$n.Q_0 = R.V_0 \cdot \int_{\vartheta_0=0}^{\vartheta_0=2\pi} (1 + \beta \cdot \cos \vartheta_0) \cdot \cos \gamma \cdot d\varphi \quad (\beta \text{ incognite})$$

-velocità angolare di precessione della torcia:

$$\frac{\beta.V_0}{r} \cong (1 - n) \cdot m \cdot \omega_0 \quad (r \text{ incognite})$$

-ripristino velocità di 'zero swirl' su alcuni canali interpalari:

$$\max [(1 + \beta \cdot \cos \vartheta_0) \cdot V_0 \cdot \cos \gamma] = \frac{Q_0}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad .$$

Le velocità tangenziali sul contorno della sezione della torcia sarebbero date da:

$$V_T = V_0 \cdot (1 + \beta \cdot \cos \vartheta_0)$$

Le 4 relazioni cinematiche **b)**, tenuto conto delle **a)**, consentirebbero, in linea di principio ma con evidenti complicazioni di calcolo<sup>10</sup>, di determinare le 4 incognite sopra messe in evidenza.

<sup>10</sup> Inoltre, come già osservato, il modello non potrebbe essere eventualmente valido che in un ristretto range di valori di  $n$ .