

# APLICACIÓN DE UNA FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS A LA RESOLUCIÓN DEL FLUJO EN UNIDADES DE PROCESO DE AGUAS RESIDUALES

Pablo Vellando, Jerónimo Puertas, Ignasi Colominas, Joaquín Suárez y José Gil de Bernabé

## Resumen:

En el presente trabajo se exponen los resultados de la aplicación de una formulación numérica propuesta por los autores, en la resolución de varios problemas de flujo relacionados con el tratamiento de aguas residuales. La formulación expuesta está basada en el Método de los Elementos Finitos, y resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el flujo viscoso incompresible. El desarrollo de este código permite modelar de manera adecuada el flujo viscoso incompresible y es capaz de evaluar el comportamiento del agua en depósitos y canales de las estaciones de tratamiento de aguas, permitiendo así conseguir un funcionamiento óptimo de éstas, gracias a la modificación de los parámetros hidráulicos y geométricos de estas plantas.

**Palabras clave:** Elementos Finitos, Navier-Stokes, SUPG, Tratamiento de Aguas

## INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que rigen el flujo de un fluido viscoso incompresible son las ecuaciones de Navier-Stokes. Esta ley está constituida por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, cuyas incógnitas son la velocidad y la presión del fluido. Con carácter general no existe solución analítica para estas ecuaciones, por lo que en el análisis de casos prácticos de interés en la ingeniería se recurre a obtener soluciones aproximadas, haciendo uso de un método numérico. De entre estos métodos los más utilizados son el de las Diferencias Finitas, el de los Elementos Finitos y el de los Volúmenes Finitos (Roe, 89).

La resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes plantea una serie de dificultades muy importantes en su resolución numérica. La mayoría de estas dificultades derivan del hecho de la presencia de un término que evalúa los efectos de la aceleración convectiva en el flujo viscoso. Algunas formu-

laciones simplemente eliminan este término convectivo de las ecuaciones constitutivas, para sustituir así la formulación general de Navier-Stokes por la simplificación de Stokes (Carey, 84). Esta aproximación es sólo válida para los *flujos reptantes* (creeping flows) o, lo que es lo mismo, flujos de pequeña velocidad y calado. Otra simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes sería la utilización de la formulación del flujo potencial, que se limita a igualar a cero el laplaciano del potencial. Estas ecuaciones simplificadas dan una idea de la evolución del flujo en canales y depósitos, pero no detectan ciertas características de éste. La resolución numérica de estos dos tipos de formulación simplificada es bastante sencilla y en determinados casos puede ser muy útil. Sin embargo, estas ecuaciones no facilitan una información veraz sobre los fenómenos de recirculación, distribución de caudales, variación de calados, etc que tienen lugar en la realidad y que pueden ser básicos a la hora de afrontar ciertos problemas de flujo relacionados con la ingeniería civil (Vellando, 01).

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Dpto. de Métodos Matemáticos y de Representación. Universidad de La Coruña. Campus de Elviña. 15071 La Coruña. España. Tel: (34) 981 167000, fax: (34) 981 167170. e-mail: vellando@iccp.udc.es

Artículo recibido el 22 de febrero de 2002, recibido en forma revisada el 19 de diciembre de 2002 y aceptado para su publicación el 20 de marzo de 2003. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

Recientemente, los autores de este artículo han propuesto una formulación numérica basada en el Método de los Elementos Finitos y han desarrollado un código de ordenador que permite la resolución del problema del flujo viscoso incompresible para números de Reynolds de orden moderado (Vellando, 02). Así, ha sido posible evaluar el flujo que se produce al analizar diversos problemas de gran interés práctico en la Ingeniería Sanitaria, como son aquellos que tienen lugar en los depósitos y canales de las estaciones de tratamiento de aguas. Las estructuras en las que se evalúa el flujo han sido decantadores convencionales de tipo rectangular y circular, un prototipo de decantador de lamelas con tratamiento de biopelícula y un canal de floculación de tipo laberinto (Metcalf, 95). Gracias a la evaluación numérica del comportamiento del flujo en estas estructuras será posible llevar a cabo una redefinición de los parámetros hidráulicos y geométricos, encaminada a conseguir una mejora en el funcionamiento de las plantas de tratamiento de aguas.

### ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Como ya se ha sido citado, las ecuaciones constitutivas que rigen estos problemas son las ecuaciones de Navier-Stokes. En todo lo sucesivo vamos a utilizar la notación indicial (que asume derivación de la variable dependiente con respecto de la variable independiente indicada en el subíndice después de la coma). Las ecuaciones de Navier-Stokes están constituidas por dos leyes; la ecuación dinámica que se deriva directamente de la aplicación de la segunda ley de Newton, y la ecuación de continuidad que asegura la conservación de la masa en el dominio. Utilizando la notación indicial podemos expresar las ecuaciones dinámica y de continuidad como:

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,jj} + f_i \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0$$

donde  $u_i$  es la velocidad,  $p$  es la presión,  $f_i$  son las fuerzas de masa,  $\rho$  es la densidad,  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $t$  es el tiempo. Como puede verse, se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales, cuyas incógnitas son la velocidad y la presión. Además, estas ecuaciones diferenciales, deberán considerarse las condiciones iniciales y de contorno, que se pueden expresar como:

$$u_i \Big|_{\Gamma} = b_i \quad \sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = t_i \quad (2)$$

$$u_i(x_j, 0) = u_{i0}(x_j)$$

donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son dos subconjuntos no solapados del contorno  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$ ,  $b_i$  es el vector velocidad prescrito en  $\Gamma_1$ ,  $t_i$  son las tracciones prescritas en  $\Gamma_2$ ,  $\sigma_{ij}$ , son las tensiones a lo largo del contorno  $\Gamma_2$ ,  $n_j$ ,  $n_j$  es el versor normal y hacia afuera de  $\Gamma_2$ , y  $\Omega$  es el dominio de definición. En (Chaudhry, 99) pueden encontrarse más detalles sobre la deducción de estas ecuaciones.

### FORMULACIÓN NUMÉRICA

Se van a considerar dos tipos de formulación, una formulación bidimensional de Navier-Stokes y una formulación de Aguas Someras.

#### Formulación 2D de Navier-Stokes

La formula (1) incluye dos ecuaciones distintas, la dinámica y la de continuidad. Como consecuencia de ello, para poder resolverlas por el Método de los Elementos Finitos vamos a aplicar el método de los residuos ponderados sobre las dos ecuaciones presentes en la formulación de Navier-Stokes (Carey, 84). Así, se obtienen unas ecuaciones integrales de la forma:

$$\int_{\Omega_h} w_i^h (u_{i,t}^h + u_j^h u_{i,j}^h - f_i^h) d\Omega + \nu \int_{\Omega_h} w_{i,j}^h u_{i,j}^h d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_h} w_{i,i}^h p d\Omega - \int_{\Gamma_2} t_i^h w_i^h d\Gamma_2 + \sum_e \int_{\Omega_h^e} \bar{p}_i^h \left( u_{i,t}^h + u_j^h u_{i,j}^h - \nu u_{i,jj}^h + \frac{1}{\rho} p_{,i}^h - f_i^h \right) d\Omega = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_h} q^h u_{i,i}^h d\Omega = 0$$

donde  $\bar{w}_i = w_i + p_i$  son las funciones de peso para la ecuación dinámica,  $q$  son las funciones de peso para la ecuación de continuidad (Brookes 82) y  $e$  representa cada una de las divisiones finitas del dominio. El superíndice  $h$  hace referencia a la discretización llevada a cabo en el dominio como consecuencia de la aplicación del Método de los Elementos Finitos y por tanto  $\Omega_h$  es el dominio discretizado.

En las ecuaciones (3) existen dos tipos distintos de incógnitas: velocidades y presiones, por lo que este tipo de algoritmos reciben el nombre de 'mixtos'. Para llevar a cabo la interpolación de ambas incógnitas es necesario tener en cuenta la compatibilidad de las funciones de aproximación de ambas. Además de la necesidad de verificar las propias ecuaciones de Navier-Stokes,

debemos asegurar también que se cumplen ciertas condiciones de consistencia para este problema (para más detalles ver (Babuska, 71), (Taylor, 73), (Brezzi, 74)), para así evitar la inestabilidad numérica del algoritmo. En los presentes cálculos se ha utilizado un elemento básico de tipo Q1P0 (velocidad bilineal, presión constante), que ha demostrado dar lugar a soluciones totalmente estables (Vellando, 01).

Una vez introducida la aproximación, las matrices elementales se ensamblan para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales, que en notación matricial se puede expresar como:

$$M_v \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + C_v(u, v) \underline{v} + \nu A_v \underline{v} - Bp = f \quad (4)$$

$$B^T \underline{v} = 0$$

donde  $M_v$  es la matriz de masas,  $C_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es la matriz de convección,  $A_v$  es la matriz de esfuerzos viscosos,  $B$  es la matriz de presiones,  $f$  es el vector de fuerzas de masa,  $p$  es el vector de presiones,  $\underline{v}$  es el vector de velocidades,  $\mathbf{u}$  es el vector de velocidades en la dirección  $x$ , y  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidades en la dirección  $y$ , (para más detalles ver (Vellando, 01)).

La integración en el tiempo se ha llevado a cabo mediante un algoritmo en Diferencias Finitas hacia atrás. De forma que en la iteración  $n$ -ésima se han evaluado las derivadas de la velocidad con respecto del tiempo en función de los valores de la velocidad para la iteración anterior.

$$M_v \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \approx M_v \left( \frac{\underline{v}^n - \underline{v}^{n-1}}{\Delta t} \right) \quad (5)$$

Para eliminar las no linealidades del sistema se ha utilizado un algoritmo de aproximaciones sucesivas de forma que el término no lineal  $C_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})\underline{v}$ , se aproxima para la iteración  $n$ -ésima en términos de los resultados de la iteración anterior como  $C_v(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}^{n-1})\underline{v}^n$

Con todo ello se obtiene un sistema de  $2N+M$  ecuaciones algebraicas, siendo  $N$  y  $M$  el número de nodos de interpolación de velocidades y presiones en los que se ha dividido el dominio. La matriz asociada al sistema resulta ser no simétrica, y de ancho de banda grueso (Vellando, 01), por lo cual se ha resuelto el sistema mediante un algoritmo de tipo PBCG (Gradientes Precondicionados Biconjugados), este tipo de métodos de Krylov permiten resolver sistemas con matrices asociadas no simétricas

con almacenamiento en matriz dispersa, con el consiguiente ahorro en términos computacionales (Nigro, 98).

Los problemas de estabilidad más importantes que encontramos a la hora de resolver la ecuación de Navier-Stokes por el Método de los Elementos Finitos son los que surgen de la forma en que se aplica el método de los residuos ponderados sobre el término de convección de la ecuación dinámica. Esta inestabilidad aparece en forma de oscilaciones espurias nodo a nodo en el campo de velocidades, especialmente para números de Reynolds suficientemente altos, y se pueden eliminar llevando a cabo un exhaustivo refinamiento de la malla. Sin embargo, este refinamiento puede implicar unos costes computacionales muy altos. En este trabajo se utilizará un algoritmo de tipo SUPG, que permite obtener soluciones estables basadas en el Método de los Elementos Finitos, sin necesidad de refinar la malla. Las bases de este método fueron establecidas por primera vez en (Brooks, 82). Con posterioridad a esta fecha, diversos autores han propuesto otras formas de estabilización de tipo SUPG en sus formulaciones (Sampaio, 91), (Zijl, 91), (Franca, 92), (Kondo, 94), (Hannani, 95), (Choi, 97). La base de este método consiste en añadir a las funciones de peso del método de Galerkin, que son simétricas, un término no simétrico en el que se le da más peso a los nodos de aguas arriba. La presente formulación de estabilización SUPG en oposición a otras como las ya citadas, aplica las funciones de peso de estabilización a todos los términos presentes en la ecuación dinámica, en base a un coeficiente de difusión artificial calculado en términos de una función de aproximación óptima, que depende de la cotangente hiperbólica de los números de Reynolds multidimensionales, calculados sobre cada elemento básico (Vellando, 01). Las funciones de peso del método SUPG utilizadas en la presente formulación son:

$$\bar{w}_i = w_i + \bar{p}_i \quad \text{con} \quad \bar{p}_i^h = \frac{\bar{k} \hat{u}_j^h w_{i,j}^h}{\|u^h\|} \quad (6)$$

donde  $\hat{u}_i = \frac{u_i}{\|u\|}$ ,  $\|u\|^2 = u_i u_i$  y el coeficiente

de difusión artificial multidimensional  $\bar{k}$  está definido como:

$$\bar{k} = \frac{\bar{\xi} u_\xi^h h_\xi + \bar{\eta} u_\eta^h h_\eta}{2} \quad (7)$$

Los parámetros  $\bar{\xi}$  y  $\bar{\eta}$  han sido determinados haciendo uso de una regla de aproximación óptima en función de las cotangentes hiperbólicas (ver figura 1).

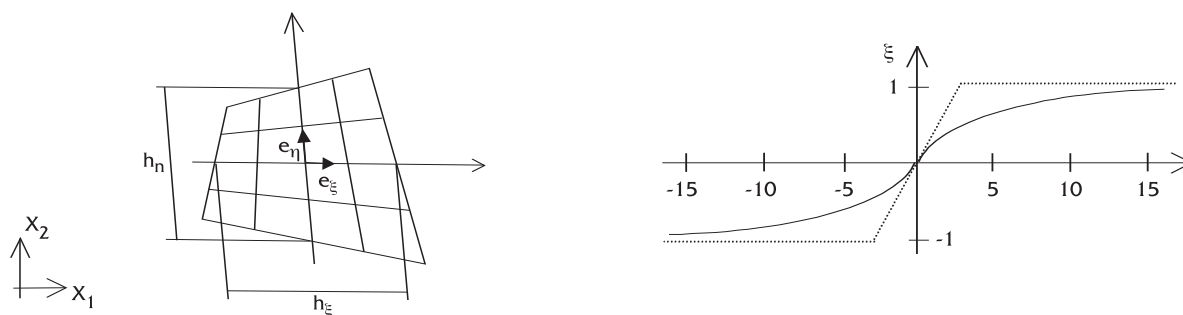


Figura 1. Longitudes características y versores del elemento básico y regla de aproximación óptima para  $\bar{\xi}$  y  $\bar{\eta}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \left( \coth \alpha_{\xi} - \frac{1}{\alpha_{\xi}} \right) & \bar{\eta} &= \left( \coth \alpha_{\eta} - \frac{1}{\alpha_{\eta}} \right) \\ \alpha_{\xi} &= \frac{u_{\xi}^h h_{\xi}}{2\nu} & \alpha_{\eta} &= \frac{u_{\eta}^h h_{\eta}}{2\nu} \\ u_{\xi}^h &= e_{\xi i} u_{ei}^h & u_{\eta}^h &= e_{\eta i} u_{ei}^h \end{aligned} \tag{8}$$

donde  $h_{\xi}$ ,  $h_{\eta}$ , y  $e_{\xi i}$ ,  $e_{\eta i}$  son las longitudes características del elemento básico y los versores en la dirección de los ejes locales  $\xi$  y  $\eta$  (ver figura 1). Los parámetros  $\alpha_{\xi}$  y  $\alpha_{\eta}$  son los números de Reynolds direccionales del elemento básico,  $u_{ei}^h$  es la velocidad en el interior del elemento y  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido.

### Formulación de Aguas Someras

El algoritmo anterior resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones. La incorporación de la tercera dimensión a la formulación anteriormente explicada supone además de unas exigencias computacionales muy elevadas, la complicación añadida del tratamiento de la lámina libre. Se ha utilizado la formulación de ‘Aguas Someras’ para considerar la influencia del calado en aquellos flujos en los que la profundidad es pequeña en comparación con la dimensión horizontal. Este algoritmo hace la suposición de que la dirección principal del flujo es la horizontal, y sólo flujos despreciables tienen lugar en planos verticales. Se asume además una distribución hidrostática de presiones.

La formulación de aguas someras se basa en llevar a cabo una integración en altura de las ecuaciones de Navier-Stokes, para así considerar como velocidad horizontal la media de velocidades a lo largo de la vertical.

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = -gh_{,i} + \nu u_{i,jj} + g(S_{0i} - S_{fi}) \tag{9}$$

donde  $h$  es el calado y  $S_{0i}$  y  $S_{fi}$  son las pendientes geométrica y motriz. La derivación completa de estas ecuaciones puede encontrarse en (Weiyan, 92).

Como consecuencia de la integración en altura que se va a llevar a cabo en las ecuaciones 3D de Navier-Stokes aparece un término de pendiente motriz  $S_{fi}$  que se va a evaluar a partir de la fórmula de Manning según la expresión:

$$S_{fi} = \frac{n^2 u_i \sqrt{u_j^2}}{R_h^{4/3}} \tag{10}$$

donde  $R_h$  es el radio hidráulico (Vellando, 01).

La determinación del coeficiente de Manning, que es función de la rugosidad del canal y del cual depende el término de la pendiente motriz, se hace de manera experimental. De esta forma las pérdidas de energía que quedan englobadas gracias a su consideración, no sólo tienen en cuenta los efectos provocados por el rozamiento con las paredes y la soleira del canal, sino que estiman las pérdidas globales que tienen lugar en el flujo como consecuencia de la aparición de los esfuerzos turbulentos que surgen en el fluido a partir de un determinado número de Reynolds (Rodi, 93). En este análisis, se ha incluido además un término disipativo de tipo difusivo.

Para eliminar los posibles problemas de consistencia se ha utilizado el mismo elemento básico de tipo Q1P0 usado en la formulación 2D y las

mismas funciones de peso SUPG tal y como se han descrito en el apartado anterior. Con objeto de estimar las no linealidades que aparecen en la ecuación por efecto de la presencia del término convectivo, se han utilizado los mismos procedimientos numéricos de la formulación 2D.

Para materializar la influencia del calado sobre la ecuación de continuidad y eliminar así las pseudo-no-linealidades que aparecen en esta ecuación, se han definido unos valores intermedios del calado  $h^*$  y del gradiente del calado  $\dot{h}^*$ . Estos valores intermedios se evalúan según un esquema específico en diferencias finitas desarrollado en (Vellando, 01). De esta forma la formulación matricial de flujo permanente que se obtiene es:

$$\begin{aligned} C_v(u, v)\underline{v} + vA_v \underline{v} - Bh = f \\ D(h^*)\underline{v} + E(\dot{h}^*)\underline{v} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $C_v(u, v)$  es la matriz de convección,  $A_v$  es la matriz de esfuerzos viscosos,  $B$  es la matriz de calados,  $f$  es el vector de fuerzas de masa,  $D(h^*)$  es la matriz de valores intermedios de calados,  $E(\dot{h}^*)$  es la matriz de valores intermedios del gradiente de calados,  $h$  es el vector de calados y  $\underline{v}$  es el vector de velocidades. El desarrollo completo de esta formulación puede encontrarse en (Vellando, 01).

## VERIFICACIÓN DE LA FORMULACIÓN

A continuación se verificará el correcto funcionamiento de la formulación mediante la resolución de los problemas académicos del Flujo en una Cavidad (Cavity Flow) y el Flujo en un Canal de Ensanchamiento Brusco (Backward Facing Step).

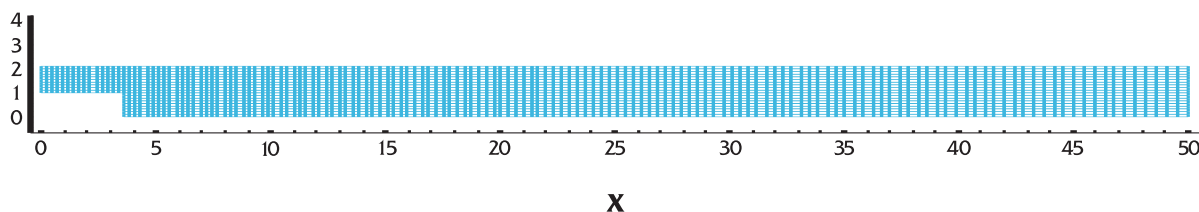


Figura 2. Flujo en un canal de ensanchamiento brusco. Malla

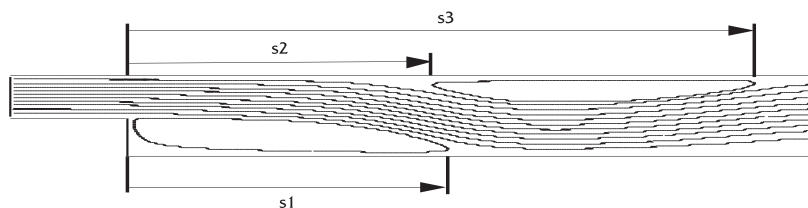


Figura 3. Flujo en un canal de ensanchamiento brusco. Longitudes de recolocación de los vórtices

## Flujo en un Canal de Ensanchamiento Brusco

Se trata éste de un problema académico muy adecuado para la validación, debido al hecho de que además de la existencia de numerosos resultados numéricos obtenidos por diversos autores, existen además resultados empíricos de (Armaly, 83), es por ello uno de los problemas académicos más comúnmente utilizados para contrastar y verificar distintos modelos de cálculo. En él se puede observar la formación de varios vórtices de recirculación a lo largo de la longitud del canal como consecuencia de dicho ensanchamiento en la sección. La comparación con los datos experimentales de Armaly se hace en términos de las longitudes de reacoplamiento, que están tabuladas para distintos números de Reynolds. Los resultados obtenidos mediante la utilización del algoritmo 2D recogido en este trabajo mejoran además apreciablemente los datos numéricos de Armaly obtenidos mediante una formulación en Volúmenes Finitos, aproximándose además de una manera manifiesta a los datos experimentales obtenidos por el propio autor.

Todas las condiciones geométricas y de contorno han sido escogidas para igualar a las usadas en (Armaly, 83). La malla utilizada en los cálculos es de 3021 nodos, siendo más refinada en la entrada del canal, para así permitir una mejor captación de los vértices que tienen lugar en la esquina de expansión (ver figura 2). Las longitudes de recolocación  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  de los vórtices primario (inferior) y secundario (superior), que van a ser utilizadas en la verificación del algoritmo, pueden observarse en la figura 3.

Se ha utilizado el algoritmo 2D para el cálculo de este problema académico con números de Reynolds entre 100 y 1200.

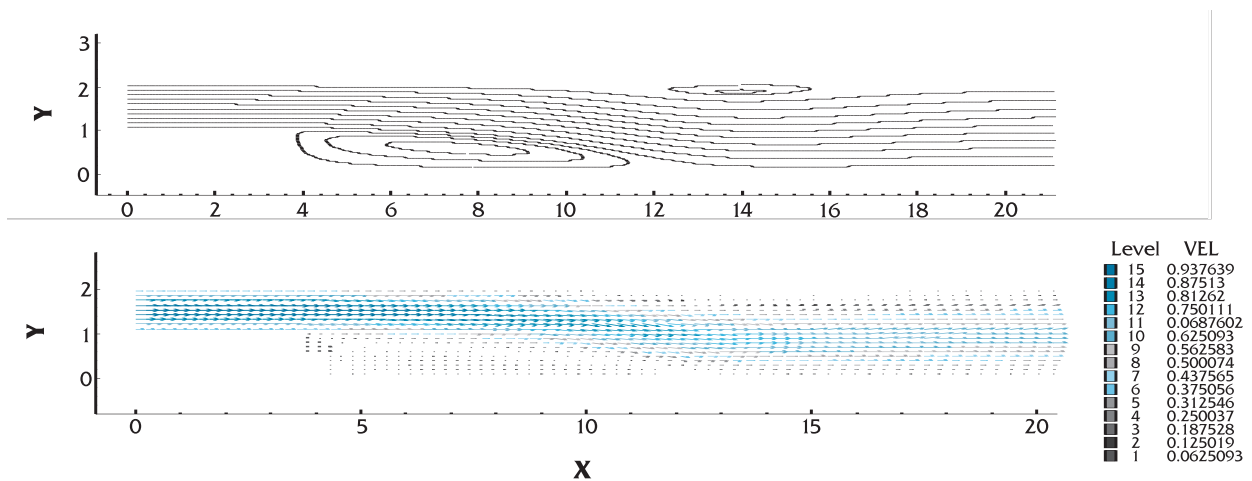


Figura 4. Flujo en un canal de ensanchamiento brusco. Líneas de corriente y campo de velocidades para Re=500

En la figura 4 puede verse el resultado obtenido para las líneas de corriente y el campo de velocidades con un número de Reynolds igual a 500. El número de Reynolds que se utiliza para definir este problema de referencia es el producto entre la media de la velocidad de entrada (que es normal a la superficie de entrada y de perfil parabólico) y el diámetro hidráulico, dividido por la viscosidad cinemática.

Como puede comprobarse en las figuras 5, 6, y 7 donde se han representado las longitudes de recolocación s1, s2, s3 para distintos números de Reynolds, los resultados obtenidos en el presente trabajo se acercan más a los empíricos que los numéricos obtenidos por el propio Armaly. En concreto, la longitud de recolocación s3 se ajusta totalmente a la obtenida empíricamente para todos los números de Reynolds considerados, mientras que las longitudes de recolocación s1, y s2 obtenidas en el presente trabajo, se aproximan mucho más a los resultados empíricos de Armaly.

En todos los cálculos se ha utilizado un parámetro de convergencia de 10<sup>-4</sup>. Los tiempos de CPU y el número de iteraciones empleados en la resolución del presente problema académico en la computadora Alpha Server 4000 de Digital, con 1G de memoria son los siguientes:

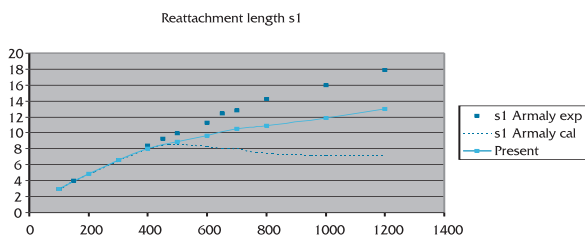


Figura 5. Longitud de recolocación s1 para distintos números de Reynolds

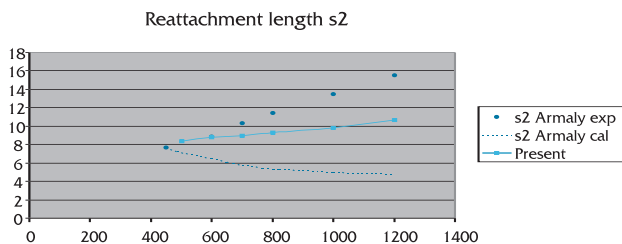


Figura 6. Longitud de recolocación s2 para distintos números de Reynolds

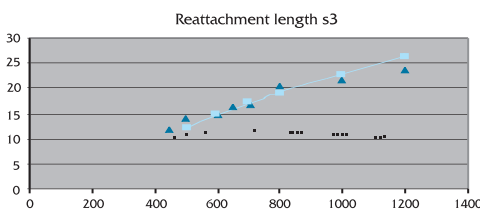


Figura 7. Longitud de recolocación s3 para distintos números de Reynolds

Tabla 1. Tiempo de CPU empleado en los cálculos del "Backward Step"

Número de Reynolds	Iteraciones	Tiempo de CPU
100	8	1333''
200	12	3441''
300	17	5405''
400	23	9297''
500	28	11601''
600	34	16227''
700	38	18549''
800	43	21301''
1000	47	26683''
1200	53	32219''

Los tiempos de CPU empleados en la convergencia de los resultados para los dos ejemplos académicos considerados caracterizan el algoritmo como muy eficiente, teniendo en cuenta la máquina en la que fueron resueltos. Los tiempos empleados en la resolución del 'Backward Step' son sensiblemente superiores como corresponde a una malla con un número considerablemente mayor de nodos. Lógicamente el tiempo empleado en la resolución de estos problemas crece con la magnitud del número de Reynolds, o lo que es lo mismo el peso relativo del término convectivo en la ecuación dinámica.

## Flujo en una Cavidad

El problema del Flujo en una Cavidad cuadrada con velocidad tangente y unitaria en el lado superior, y condición de no deslizamiento en el resto es uno de los problemas de referencia más comúnmente utilizados en la verificación de las formulaciones de Navier-Stokes, ya que presenta varias zonas de recirculación y singularidades del campo de presiones en las esquinas superiores, lo que junto con la amplia literatura disponible al respecto lo convierten en un problema de referencia. Para resolver este problema se ha utilizado una malla no regular de 40x40 elementos de tipo Q1P0 (ver figura 8).

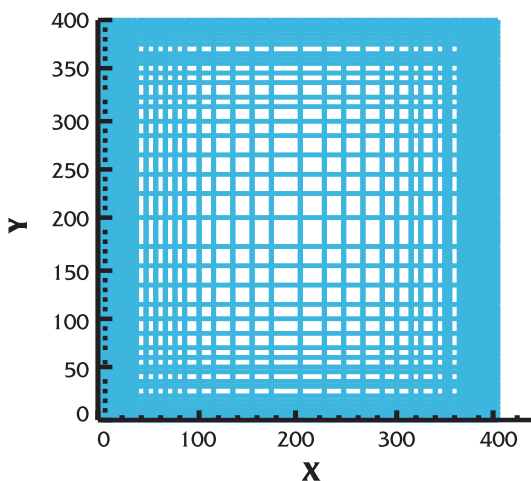


Figura 8. Flujo en una Cavidad. Malla

Los números de Reynolds utilizados en la resolución de este ejemplo han sido 100, 1000, 5000, y 10000. El número de Reynolds se ha definido como el producto entre la velocidad tangente del lado superior y el lado del cuadrado, dividido por la viscosidad cinemática del fluido. Se ha admitido que la formulación 2D utilizada para este ejemplo ha convergido para un parámetro de convergencia de 10<sup>-4</sup>.

Los tiempos de CPU empleados por una máquina Alpha Server 4000 de Digital, con 1G de memoria han sido:

Tabla 2. Tiempo de CPU empleado en los cálculos del "Cavity Flow"

Número de Reynolds	Iteraciones	Tiempo de CPU
100	10	59''
1000	15	156''
5000	150	2012''
10000	321	6156''

En la figura 9 y 10 se muestran los resultados obtenidos para el campo de líneas de corriente, campo de velocidades y campo de presiones con números de Reynolds de 1000 y 10000 respectivamente.

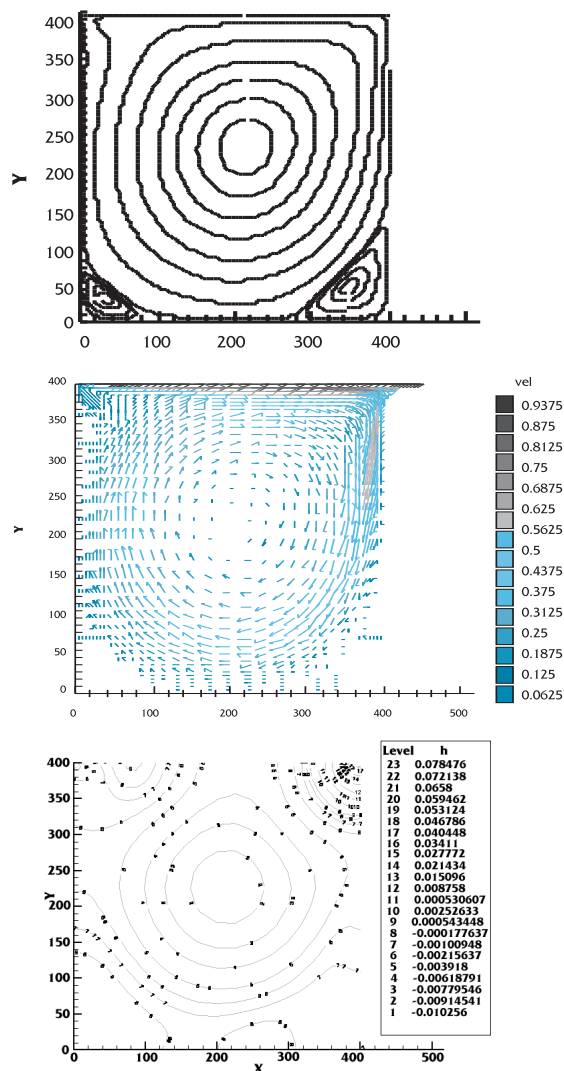


Figura 9. Flujo en una Cavidad. Curvas de corriente, velocidades y presiones, Re=1000

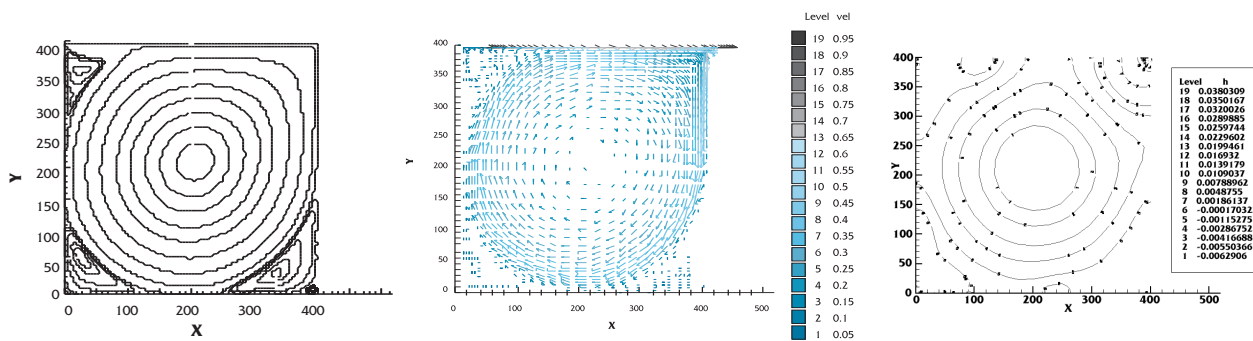


Figura 10. Flujo en una Cavity. Curvas de corriente velocidades y presiones, Re=10000

Los valores de verificación en este tipo de problemas suelen ser las velocidades horizontales a lo largo de una línea vertical centrada de la cavity. En este sentido, los resultados obtenidos concuerdan con los resultados de referencia de (Ghia 82), (Kondo 91) y (Hannani 95) con los que se han comparado (figura 11). De hecho, se han obtenido resultados muy aproximados a la solución numérica de Ghia para una malla de 129x129 nodos (que es la solución de referencia por excelencia de los problemas de flujo en una cavity), para un refinamiento de malla no regular de tan sólo 40x40 elementos básicos de tipo Q1P0, mejorando así los resultados de Kondo y Hannani para una malla de similar e incluso superior refinamiento, gracias a la utilización del método de estabilización especificado con anterioridad. En la figura 11 se muestran los resultados obtenidos para números de Reynolds 1000 y 10000

Una vez se ha verificado el correcto funcionamiento del código desarrollado con los tests presentados se ha utilizado en la resolución del flujo de agua residual en varios depósitos y canales utilizados en las estaciones de depuración de aguas residuales.

### APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL FLUJO EN UNIDADES DE PROCESO DE AGUAS RESIDUALES

Algunos autores han resuelto este problema haciendo uso de una formulación de tipo potencial en la que, por lo tanto, se ignoran los efectos relacionados con la aceleración convectiva (Espert 96). Este tipo de algoritmos son muy sencillos de programar, pero sólo nos dan una idea del verdadero comportamiento del flujo. Sin embargo, la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante la formulación de Elementos Finitos propuesta, permite captar la evolución real del flujo en estos canales y depósitos, a pesar de la mayor complejidad de la formulación numérica y de sus mayores requerimientos computacionales, tanto de memoria como de tiempo de computación.

En los distintos ejemplos analizados se ha evaluado el flujo de agua residual en decantadores convencionales de tipo circular y rectangular, y se ha observado la evolución del flujo en un prototipo de decantador de lamelas que está siendo desarrollado en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros

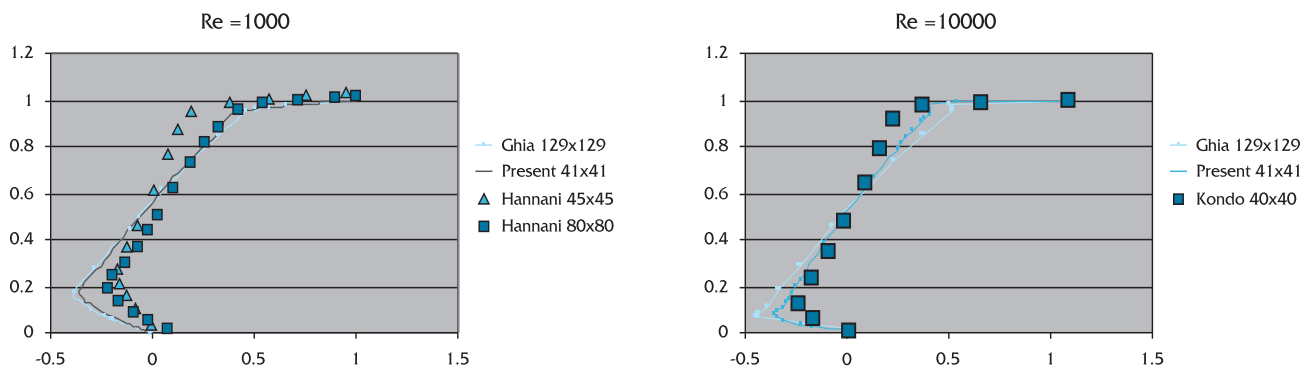


Figura 11. Flujo en una Cavity. Velocidades horizontales a lo largo de una línea vertical centrada Re=1000, y 10000



de Caminos, Canales y Puertos de La Coruña (ET-SICCCPC). Por último, se ha evaluado numéricamente el flujo en un floculador o tanque de contacto de tipo laberinto. Seguidamente se presentan los resultados para estos casos. En (AWWA, 88) y (Metcalf, 95) pueden encontrarse descripciones más detalladas de estos tipos de conducciones y depósitos para el tratamiento de aguas residuales.

## Flujo en un decantador convencional de tipo rectangular

Se ha evaluado el flujo en una sección longitudinal de un decantador rectangular con una geometría análoga a la utilizada comúnmente en las estaciones de depuración de aguas residuales (9x24x3.3 m<sup>3</sup>), con una pendiente en la solera del 1.25% (ver figura 12). Los parámetros hidráulicos utilizados para este depósito han sido un tiempo de retención de 3 h y una velocidad ascensional de 1 m/h. Como puede verse en el croquis de la sección del decantador, el flujo hace entrada por el lado izquierdo de la sección, donde se ha dispuesto una estructura de disipación de energía en forma de laberinto, para así evitar alterar el flujo de agua en el interior de la cavidad rectangular. La dirección principal del flujo es de izquierda a derecha hasta alcanzar el vertedero libre en el lado superior derecho de la sección. Además, como se demuestra en la práctica, es de esperar la presencia de vórtices de recirculación que generan zonas muertas en el depósito, provocando una disminución en el tiempo de retención hidráulico. La influencia en el flujo de la presencia de las rasquetas de fondo, así como de otros dispositivos menores ha sido despreciada.

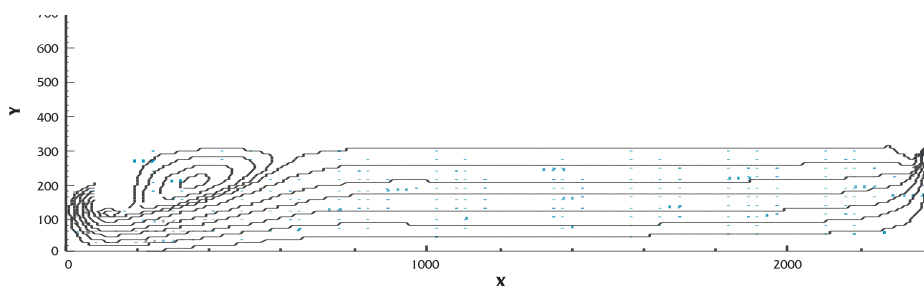


Figura 13. Campo de velocidades y líneas de corriente del decantador rectangular (dimensiones en cm)

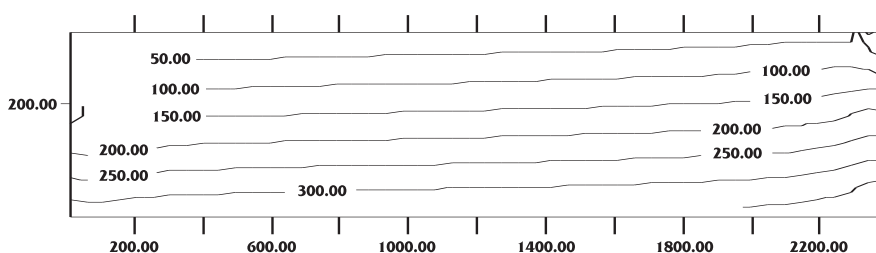


Figura 14. Campo de presiones (en cm) del decantador rectangular

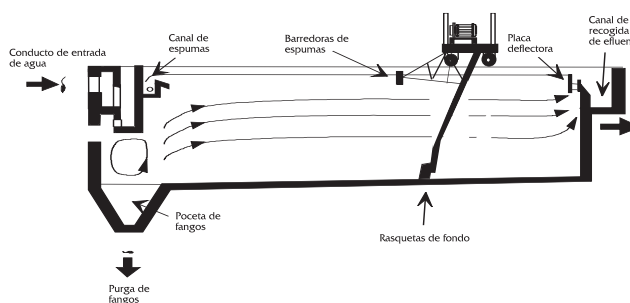


Figura 12. Sección longitudinal del decantador rectangular

La discretización de Elementos Finitos empleada ha consistido en una malla de 1052 nodos y 949 elementos no regulares de tipo Q1P0. En el cálculo, se ha utilizado un algoritmo 2D, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet (1 cm/s) en el canal de entrada.

Con todas las premisas citadas se ha obtenido el campo de velocidades y presiones en la sección del decantador rectangular que puede verse en la figuras 13 y 14.

A la vista de estos resultados es posible la caracterización hidrodinámica del flujo. La resolución de la hidrodinámica del flujo permite caracterizar las distintas regiones de los tanques y canales en función de la velocidad del fluido en ellas, detectar la posición y el tamaño de las zonas de recirculación, detectar las zonas de remanso y las zonas de flujo rápido y caracterizar en definitiva la evolución del flujo. A la vista de estas características del flujo es posible alterar las condiciones del flujo modificando la geometría de las unidades de tratamiento y de los canales de salida y entrada,

situando placas deflectoras en posiciones estratégicas o alterando los parámetros del flujo, como son las velocidades de entrada, los tiempo de retención, velocidad ascensional, etc... De esta forma también es posible considerar la posibilidad de disponer aparatos de agitación en las unidades o distribuir los caudales en beneficio de los procesos de tratamiento. Por todo ello la resolución hidrodinámica del flujo es una herramienta poderosa en la mejora del funcionamiento de las plantas de tratamiento de aguas.

### Flujo en un decantador convencional de tipo circular

En este ejemplo se estudia el comportamiento del flujo en un decantador convencional de tipo circular. Dada la simetría del dominio se ha discretizado la mitad de la sección vertical de un decantador circular de 3.65 m de profundidad, 17.5 m de diámetro y pendiente de la solera 0.8%. Para evitar la aparición de fenómenos turbulentos en la zona de entrada del agua, se ha dispuesto una campana deflectora de 1 m de altura y 1.7 m de diámetro. Los parámetros hidráulicos utilizados en los cálculos han sido 3 h de tiempo de retención hidráulico y velocidad ascensional de 1 m/h.

La discretización de la mitad de la sección ha consistido en una malla de 817 nodos y 756 elementos no regulares de tipo Q1P0. El algoritmo numérico utilizado en los cálculos ha sido de tipo 2D con condiciones de contorno de tipo Dirichlet (1 cm/s) en el canal de entrada.

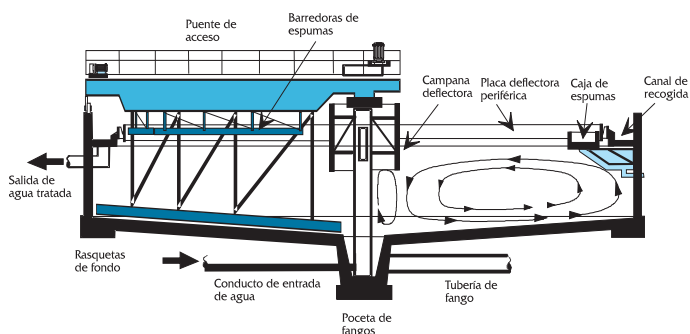


Figura 15. Sección longitudinal del decantador circular

Con todas las premisas citadas, se ha obtenido el campo de velocidades y presiones en la sección del decantador circular, que puede verse en las figuras 9 y 17.

### Flujo en un decantador lamelar 'LUPA' con tratamiento de biopelícula

A continuación se estudia el flujo de agua en un prototipo de decantador de lamelas que está siendo desarrollado en la ETSICCCPC y el CITEEC. En los decantadores de lamelas se aumenta el área de sedimentación mediante la incorporación de una serie de placas dispuestas de forma paralela entre sí, y que en este caso forman un ángulo de 50 grados con respecto de la horizontal. A este prototipo, bautizado con el nombre de 'LUPA', que simula un espacio interlamelar, se le va a incorporar un proceso de biopelícula sobre las lamelas. El aspecto de este prototipo puede observarse en la imagen 1, junto con un croquis de un decantador de lamelas convencional (figura 18).

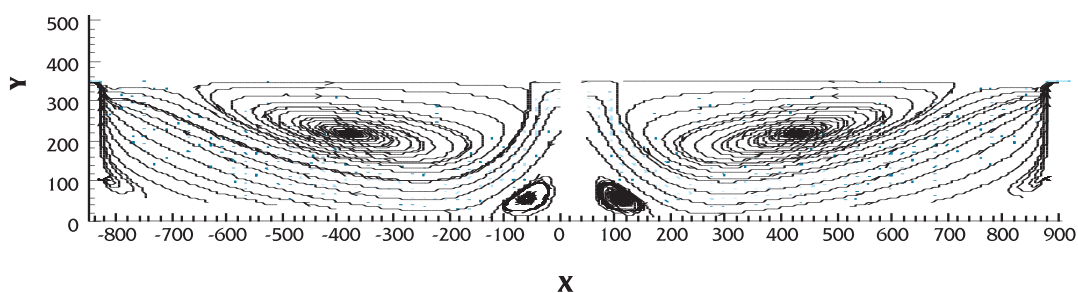


Figura 16. Campo de velocidades y líneas de corriente del decantador circular (dimensiones en cm)

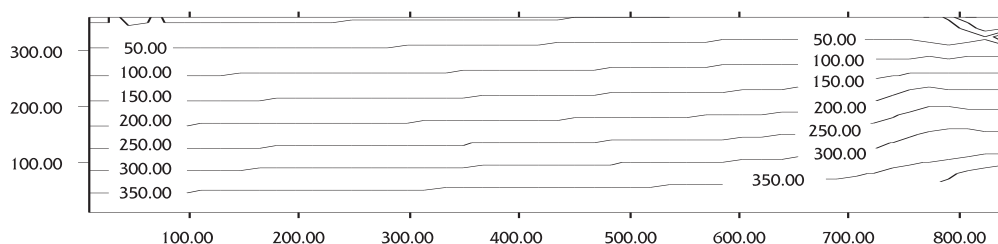


Figura 17. Campo de presiones (en cm) del decantador circular (dimensiones en cm)

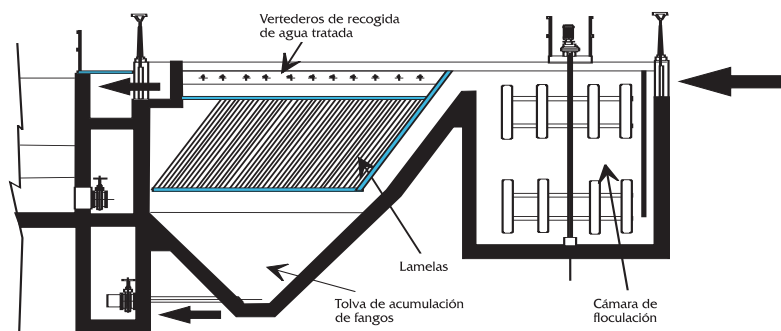


Figura 18. Decantador de lamelas convencional



Imagen 1. Prototipo 'LUPA'.

Las dimensiones del prototipo son 80x30x10 cm<sup>3</sup>, y los caudales de ensayo para los cuales se ha evaluado las características del flujo son de 15 y 1500 l/día.

La sección vertical interlamelar de dicho prototipo se ha dividido en un total de 1916 nodos y 1760 elementos básicos de tipo Q1P0. Se ha utilizado un algoritmo de tipo 2D en los cálculos, con condiciones de contorno de Dirichlet en la entrada. En el resto del contorno se ha supuesto una condición de no deslizamiento. Los resultados de las líneas de corriente para los distintos caudales de uso utilizados pueden verse en la figura 19.

A la vista de los campos de líneas de corriente obtenidos para los distintos tipos de decantadores se pueden obtener importantes conclusiones. Gracias a la obtención de la situación y dimensiones de los principales vórtices que aparecen en el flujo, podemos llevar a cabo una modificación en la geometría de los decantadores para alterar así, por ejemplo, la dimensión de las campanas deflectoras o disponer de placas cortadoras de flujos preferentes en las zonas del vertedero.

En el caso concreto del decantador 'LUPA', en el que la película de tratamiento biológico está dispuesta en el lado superior izquierdo de la sección, la aparición de un remolino secundario de cierta envergadura en esta zona para el mayor de los caudales de entrada considerados, perturba el contacto entre el agua residual y la biopelícula, y su mera existencia debería de ser evitada.

### Flujo en un floculador de tipo laberinto

Este tipo de floculadores, constituido por un canal sinuoso, es utilizado en el tratamiento de aguas residuales para obtener un flujo lento que permita aumentar el tiempo de retención del agua para conseguir así mejorar el funcionamiento de los procesos de floculación o cloración, entre otros. Se trata de un canal de longitud 80 m y anchura 1 m, que formando meandros se mantiene inscrito dentro de un rectángulo de dimensiones 8x10x2 m<sup>3</sup>. Así mismo, se ha considerado una pendiente dirigida hacia la derecha de una milésima a lo largo de todo el canal. La velocidad del fluido se impone a la entrada del canal con un valor de 6.6 cm/s, siendo el tiempo de contacto de 20.2 minutos.

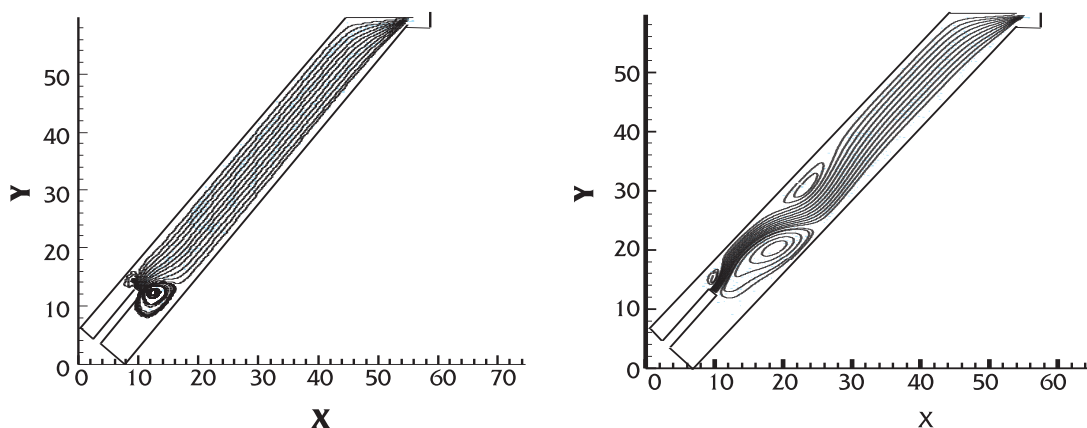


Figura 19. Líneas de corriente de un decantador de lamelas de tipo 'LUPA'. Q= 15 y 1500 l/día (dimensiones en cm)

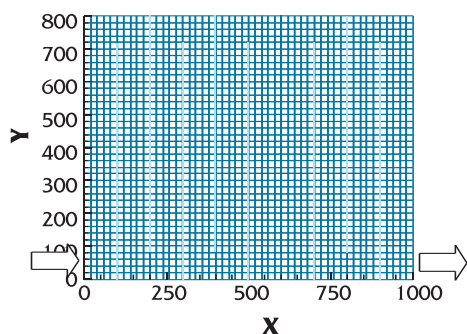


Figura 20. Floculador de tipo laberinto. Croquis en planta y malla

Como condición de contorno de aguas abajo se ha considerado una profundidad de agua de 2 m. El dominio se ha discretizado en un total de 2091 nodos y 2000 elementos básicos de tipo Q1P0. El algoritmo utilizado en los cálculos ha sido el de aguas someras, tal y como se ha descrito en el apartado previo. Los resultados para el campo de velocidades y de presiones han sido los siguientes:

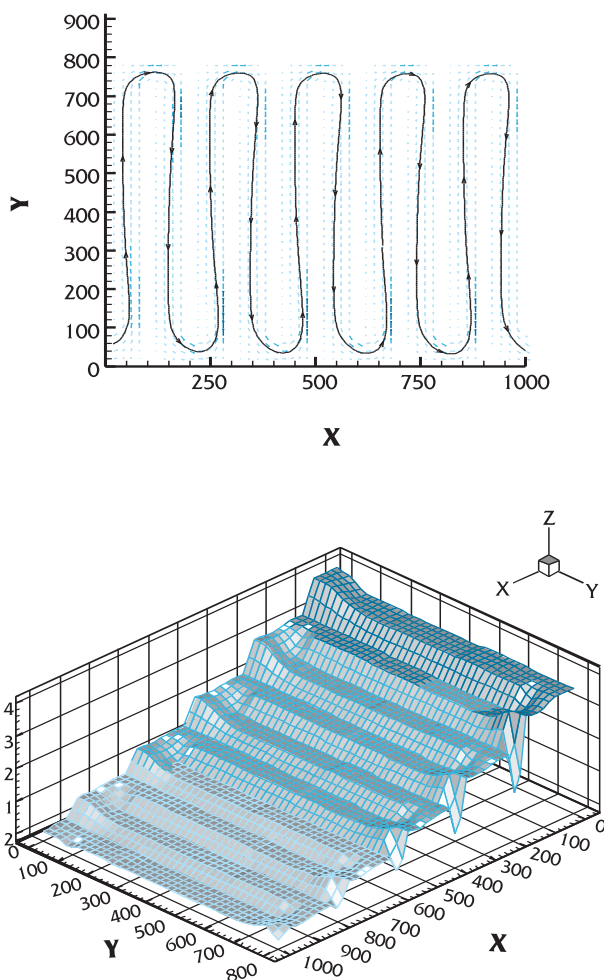


Figura 21. Floculador de tipo laberinto. Curvas de corriente, campo de velocidades y campo de calados.

Si observamos el campo de velocidades resultado, se puede detectar cómo aparecen unas pequeñas zonas de recirculación en los codos del canal. Estas inflexiones de las curvas de corriente y estas pequeñas zonas de recirculación no podrían ser detectadas mediante el uso de un algoritmo de flujo potencial. La utilización de una formulación que no ignora los efectos provocados por la aceleración convectiva permite detectar y corregir la aparición de estas zonas de recirculación, mediante por ejemplo una suavización de las aristas de los codos, evitando así que exista una excesiva sedimentación en estas zonas.

### CONCLUSIONES

En este trabajo se ha expuesto brevemente una formulación numérica basada en el Método de los Elementos Finitos para la resolución del problema del flujo viscoso incompresible, y tras su verificación se han presentado algunos ejemplos prácticos resueltos con dicha formulación.

A la vista de los resultados obtenidos en los problemas académicos, dicha formulación ha demostrado proporcionar resultados muy precisos, exentos de oscilaciones espurias y efectivos desde un punto de vista computacional. Gracias a la incorporación del algoritmo de estabilización indicado en el texto, desaparecen las oscilaciones numéricas nodo a nodo que surgen en la resolución de ciertos problemas para números de Reynolds suficientemente elevados. Además, se obtienen soluciones muy precisas sin necesidad de la utilización de mallas excesivamente refinadas, revirtiendo con ello en su eficiencia computacional y mejorando así los resultados obtenidos por muchos autores en trabajos previos. La utilización del código desarrollado permite evaluar además la disipación de energía de carácter turbulento que tienen lugar en el flujo en lámina libre gracias a la incorporación de un término disipativo de tipo difusivo y de un término de fricción de Manning.

Se han resuelto varios problemas de flujo en canales y depósitos utilizados muy frecuentemente en la depuración de aguas residuales. Mediante el uso de esta formulación es posible evaluar el comportamiento del flujo y modificar la geometría de estas unidades de proceso. La resolución de la hidrodinámica del flujo permite caracterizar las distintas regiones de los tanques y canales en función de la velocidad del fluido en ellas, detectar la posición y el tamaño de las zonas de recirculación,

detectar las zonas de remanso y las zonas de flujo rápido y caracterizar en definitiva la evolución del flujo. Por ello la resolución hidrodinámica del flujo es una herramienta poderosa en la mejora del funcionamiento de las plantas de tratamiento de aguas. De esta forma será posible corregir la geometría de una cámara de distribución para conseguir así un reparto equitativo de los caudales a través de las vías de salida, o alterar las dimensiones de la sección de un decantador para así regular la formación de vórtices de recirculación a lo largo de su longitud. Además, podrá evaluarse la influencia de la disposición de campanas y/o placas deflectoras en los depósitos, para así mejorar el funcionamiento de las unidades de proceso. La evaluación numérica del comportamiento del flujo en depósitos y canales a través de la modificación de la geometría de éstos, supondrá un considerable ahorro que permitirá un mejor funcionamiento de las estaciones de tratamiento de aguas, sin necesidad de recurrir a la modificación real de la geometría de las mismas, mediante un costoso proceso de prueba y error. En estudios previos que se han realizado en esta misma línea, otros autores proponen calcular la evolución del flujo en algunas unidades de proceso haciendo uso de un algoritmo de tipo potencial. A pesar del avance que han supuesto este tipo de formulaciones en el análisis de flujo viscoso, en la práctica permiten únicamente dar una idea del comportamiento del flujo, pero sólo una formulación de Navier-Stokes en la que se incluyan todos los términos, puede resolver estos problemas de manera correcta.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores de este artículo quieren expresar su gratitud por el apoyo técnico prestado por el Área de Ingeniería Sanitaria y Ambiental de la ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de La Coruña, dirigida por Joaquín Suárez. La investigación llevada a cabo para la realización de este artículo ha sido parcialmente financiada por los fondos FEDER de la Unión Europea (Optimización de circuitos hidrodinámicos y de los procesos en instalaciones de tratamiento físico-químico de agua. Aplicación a la planta de efluentes químicos de As Pontes (1FD1997-0053/HID1,XI/98-X/01)), la Fundación de la Ingeniería Civil de Galicia, el Ministerio de Ciencia y Tecnología, la Secretaría Xeral de I+D de la Xunta de Galicia y la empresa Endesa (As Pontes).

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos latinos

$A_v$	Matriz de esfuerzos viscosos
$B$	Matriz de gradiente de presiones
$b_i$	Velocidad prescrita en el contorno
$C_v(u,v)$	Matriz de esfuerzos convectivos
$e$	Elemento básico
$e_{\xi t}$	Versor de dirección en la dirección de $\xi$
$e_{\eta t}$	Versor de dirección en la dirección de $\eta$
$f$	Vector de fuerzas de masa
$g$	Aceleración de la gravedad
$h$	Vector de calados
$h$	Calado
$h^*$	Valor intermedio del calado
$h_j^*$	Valor intermedio del gradiente del calado
$h_{\xi}^{\xi}$	Longitud característica en la dirección de $\xi$
$h_{\eta}^{\eta}$	Longitud característica en la dirección de $\eta$
$\bar{k}$	Coef. de difusión artificial multidimensional
$M_v$	Matriz de masas
$n$	Coefficiente de rugosidad de Manning.
$n$	Versor normal hacia afuera de una superficie
$N_i$	Funciones de forma de velocidades
$p$	Vector de presiones
$p$	Presiones
$p^h$	Discretización del campo de presiones
$\underline{p}$	Función de ponderación del método SUPG
$q$	Funciones de forma de presiones
$Q_e P_0$	Elemento básico de velocidad bilineal y presión constante
$Re$	Número de Reynolds
$R_h$	Radio hidráulico
$S_0$	Pendiente geométrica
$S_f$	Pendiente motriz
$t$	Tiempo
$t_i$	Vector de tracciones
$u$	Velocidad a lo largo de la dirección $x$
$u$	Vector velocidad a lo largo de la dirección $x$
$u_i^h$	Discretización del campo de velocidades
$v$	Velocidad a lo largo de la dirección $y$
$v$	Vector velocidad a lo largo de la dirección $y$
$w_i$	Funciones de peso de velocidad

### Símbolos griegos

$\alpha_{\xi}$ y $\alpha_{\eta}$	Números de Reynolds direccionales
$\Gamma$	Contorno del dominio $\Omega$
$\nu$	Viscosidad cinemática del fluido
$\rho$	Densidad del fluido
$\sigma_{ij}$	Tensiones a lo largo del contorno
$\tau_{ij}$	Tensor de tensiones
$v$	Vector de velocidades
$\chi_i$	Funciones de forma de presión
$\Omega$	Dominio de integración
$\Omega_h$	Dominio discretizado

## REFERENCIAS

- Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F. y Schönung B., Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.* 127 (1983), pp 473-496.
- AWWA. American Water Works Association, American Society of Civil Engineers. *Water Treatment Plant Design*. McGraw-Hill, (1988).
- Babuska I., Error bounds for finite element method, *Numerische mathematic* 16 (1971), pp 322-333.
- Benim A. C. y Zinser W., A segregated formulation of Navier-Stokes equations with finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 57 (1986) 223-237.
- Brezzi F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. *Rev. Française Automatique Informatique Recherche Operationnelle, Ser. Rouge Anal. Numér.*, 8 (R2) (1974), pp 129-151.
- Brooks A.N. y Hughes J.R., Streamline Upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 32 (1982), pp 199-259.
- Carey G. y Oden J., *Finite Elements*. Prentice-Hall (1984).
- Chadwick A. y Morfett J., *Hydraulics in Civil Engineering*. Allen & Unwin (1986).
- Chaudhry M.H., *Open Channel flow*. Prentice Hall (1999).
- Choi H. G., Choi H. y Yoo J.Y., A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 143 (1997), pp 333-348.
- Espert V., García M., Sancho H. y López A., Modelo matemático bidimensional para el estudio de flujo de agua a través de un decantador rectangular con lamelas. *Ingeniería del Agua* 3 (1996) pp 16.
- Franca L. P. y Frey S. L., Stabilized finite element methods: II The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 99 (1992), pp 209-233.
- Ghia U., Ghia K. N. y Shin C.T., High Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and the multigrid method. *J. Comput. Phys.* 48 (1982), pp 387-411.
- Hannani S.K., Stanislas M. y Dupont P., Incompressible Navier-Stokes computations with SUPG and GLS formulations- A comparison study. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 124 (1995), pp 153-170.
- Kondo N., Third order Finite Element solutions of high Reynolds number flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 112 (1994), pp 227-251.
- Kondo N., Third-Order upwind finite element formulations for incompressible viscous flow problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 93 (1991), pp 169-187.
- Metcalf & Eddy INC., *Ingeniería de aguas residuales, tratamiento, vertido y reutilización*. Mc Graw Hill (1995).
- Nigro N., Storti M., Idelshon S. y Tezduyar T., Physics based GMRES preconditioner for compressible and incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 154 (1998), pp 203-228.
- Rodi W., *Turbulence models and their application in hydraulics: A state of the art review*. Balkema, Rotterdam (1993).
- Roe P.L., A survey on upwind differencing techniques. VKI Lecture notes (1989).
- Sampaio P. A. B. de, A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure. *Int. J. Numer. Meth. Engrg* 31 (1991), pp 1135-1149.
- Taylor C. y Hood P., A numerical solution of the Navier-Stokes equation using FEM technique. *Compt. & Fluids* I (1973), pp 73-100.
- Vellando, P., On the resolution of the Navier-Stokes equations by the Finite Element Method using a SUPG stabilization technique. Application to some wastewater treatment problems. Doctoral Thesis. Universidad de La Coruña. Spain (2001).
- Vellando P., Puertas J. y Colominas I., SUPG stabilized finite element resolution of the Navier-Stokes equations. Applications to water treatment engineering. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191/51-52 pp. 5889-5912 (2002).
- Weiyang T., *Shallow water hydrodynamics*. Elsevier (1992).
- Zienkiewicz O.C., R.H. Gallagher and P. Hood, Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows. Finite element solution, J.R. Whiteman, ed. *The Mathematics of Finite Elements and Applications II (MAFELAP 1975)*. Academic Press, London (1976).
- Zijl G.P.A.G., y du Toit C.G. A simpler Finite Element solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *Proceedings of the Second National Symposium on Fluid Dynamics. Vereeniging*, (1991), pp 236-250.