

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA**

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



**TESIS DE MASTER**

---

**EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL  $J_2$  Y  
APLICACIÓN A PROBLEMAS EN MODO  
MIXTO 2D DE LA MECÁNICA DE LA  
FRACTURA ELÁSTICO-LINEAL**

---

*Presentada por:* D. Andrea Fattori

*Dirigida por:* Dr. D. Eugenio Giner Maravilla  
Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

Valencia, Diciembre de 2009



A mis padres y mi hermano Michele.

A Sonia.







## RESUMEN

*En la presente Tesis de Máster se desarrolla un programa para el cálculo de la integral  $J_2$  mediante el Método de Eischen para problemas 2D cargados en modo mixto de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal (MFEL). El trabajo realizado durante el desarrollo de esta Tesis ha llevado a la implementación del Método de Eischen para el cálculo de  $J_2$  mediante dos metodologías: mediante el cálculo de integrales de contorno y mediante el método de la Integral de Dominio Equivalente (EDI), que resulta en el cálculo de una integral de área y una integral de línea en las caras de grieta.*

*A través del uso de estos métodos, se han calculado las integrales  $J$  y  $J_2$  en los problemas analizados y, a partir de estos valores, se han obtenido los Factores de Intensidad de Tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$  (FIT) y el valor del T-Stress mediante relaciones conocidas de la MFEL.*

*El programa desarrollado para alcanzar estos objetivos consiste en un conjunto de rutinas programadas en Matlab. Estas rutinas postprocesan los datos obtenidos a partir de un análisis mediante el método de los elementos finitos (MEF), con el objetivo de calcular magnitudes de interés típicas de un problema de la MFEL ( $J$ ,  $J_2$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  y T-Stress). El análisis mediante el MEF de los problemas analizados se ha llevado a cabo mediante el uso del programa de análisis por elementos finitos ABAQUS.*

**Palabras clave:** mecánica de la fractura, modo mixto, integral  $J_2$ , integral  $J$ , Factor de Intensidad de Tensiones, T-Stress, método de Eischen, método de la Integral de Dominio Equivalente.



## ABSTRACT

*In this Master Thesis, a program for computing the  $J_2$  integral through the Eischen's method in mixed mode problems of Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) has been developed. The work realized during the development of the Thesis led to the implementation of Eischen's method for  $J_2$  computation through two different methodologies: by means of a contour integral method and by means of the Equivalent Domain Integral (EDI) method, which consists of computing a domain integral and a path integral over the crack faces.*

*By implementing these methods, the  $J$  and  $J_2$  integrals have been computed in the analyzed problems and Stress Intensity Factors (FITs)  $K_I$  and  $K_{II}$  and T-Stress values have been subsequently obtained by using known expressions of the LEFM.*

*The program developed to achieve these objectives consists of several routines programmed in Matlab environment. These routines postprocess the results obtained from a finite element method (FEM) analysis, with the aim of calculating target magnitudes typical of a LEFM problem ( $J$ ,  $J_2$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  y T-Stress). The FEM analysis has been carried out by means of the program ABAQUS.*

**Keywords:** fracture mechanics, mixed mode,  $J_2$  integral,  $J$  integral, Stress Intensity Factor, T-Stress, Eischen method, Equivalent Domain Integral method.



## RESUM

*En la present Tesi de Màster es desenrotlla un programa per al càlcul de la integral  $J_2$  per mitjà del Mètode d'Eischen per a problemes 2D carregats en mode mixt de la Mecànica de la Fractura Elàstic Lineal (MFEL). El treball realitzat durant el desenrotllament d'esta Tesi ha conduït a la implementació del Mètode d'Eischen per al càlcul de  $J_2$  per mitjà de dos metodologies: per mitjà del càlcul d'integrals de contorn i per mitjà del mètode de la Integral de Domini Equivalent (EDI), que resulta en el càlcul d'una integral d'àrea i una integral de línia en les cares de clavill.*

*A través de l'ús d'estos mètodes, s'han calculat les integrals  $J$  i  $J_2$  en els problemes analitzats i, a partir d'estos valors, s'han obtingut els Factors d'Intensitat de Tensions  $K_I$  i  $K_{II}$  (FIT) i el valor del T-Stress per mitjà de relacions conegudes de la MFEL.*

*El programa desenrotllat per a aconseguir estos objectius consistix en un conjunt de rutines programades en Matlab. Estes rutines postprocesen les dades obtingudes a partir d'una anàlisi per mitjà del mètode dels elements finits (MEF), amb l'objectiu de calcular magnituds d'interés típiques d'un problema de la MFEL ( $J$ ,  $J_2$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  i T-Stress). L'anàlisi per mitjà del MEF dels problemes analitzats s'ha dut a terme per mitjà de l'ús del programa d'anàlisi per elements finits ABAQUS.*

**Paraules clau:** Mecànica de la fractura, mode mixt, integral  $J$ , integral  $J_2$ , T-Stress, mètode d'Eischen, mètode de la Integral de Domini Equivalent.



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi director de tesis, Eugenio, por su dedicación y disponibilidad durante el desarrollo de esta Tesis. Esta experiencia me ha brindado la oportunidad de aprender muchas cosas nuevas y tratar temas que desconocía por completo: en fin, gracias por haberme abierto las puertas al mundo de la Mecánica de la Fractura, ha sido muy instructivo e interesante.

Mi sentido agradecimiento a todo el equipo docente del Máster de Ingeniería Mecánica y Materiales, por haber contribuido a ampliar mis conocimientos y mi formación académica, especialmente a los miembros del Área de Ingeniería Mecánica.

Un agradecimiento también a todos los compañeros del Máster de Ingeniería Mecánica y Materiales. Me he encontrado muy a gusto con todos y cada uno de vosotros, que de una manera o de otra me habéis ayudado a lo largo del camino que nos ha llevado hasta aquí. Un agradecimiento especial a José por el apoyo que me ha dado durante la redacción de esta Tesis. Esta etapa concluye aquí, pero estoy seguro de que nos enfrentaremos a muchos más desafíos en la vida, así que os deseo todo lo mejor y que seáis capaces de superar cada obstáculo con el mismo ánimo que siempre habéis tenido.

Dedico esta Tesis a mis padres y mi hermano, que no sólo son mi familia, sino también los que han hecho de mí la persona que soy hoy en día. Gracias por haber creído siempre en mí, y por haberme dado todas las oportunidades que he tenido en esta vida.

Por último, quiero dedicar de corazón esta Tesis a Sonia. Gracias por haberme apoyado siempre en estos últimos meses, sobre todo por haber estado siempre cerca de mí cuando más lo necesitaba. Todo lo que haces y has hecho por mi demuestra la persona estupenda que eres. Sé que te debo mucho tiempo, y te prometo que juntos lo vamos a recuperar todo...

Diciembre 2009



# Índice general

Resumen	i
Abstract	iii
Resum	v
Agradecimientos	vii
Índice general	ix

<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 ANTECEDENTES	1
1.2 OBJETIVOS	4
1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS DE MÁSTER	6
<b>2 CÁLCULO DE LAS INTEGRALES <math>J</math> Y <math>J_2</math> MEDIANTE EL MEF</b>	<b>7</b>
2.1 CAMPOS DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN PRESENCIA DE SINGULARIDADES	7
2.2 MÉTODOS ENERGÉTICOS APLICABLES MEDIANTE EL MEF	13
2.2.1 <i>Introducción</i>	14
2.2.2 <i>Los métodos energéticos mediante el MEF</i>	14
2.2.3 <i>Integrales de contorno</i>	16
2.2.3.1 La integral de contorno $J$	16
2.2.3.2 Las integrales de contorno $J_k$ , $L$ y $M$	25
2.2.3.3 Evaluación numérica de la integral $J$ mediante el MEF	32
2.2.4 <i>Integrales de contorno en modo mixto</i>	38
2.2.4.1 Método de la integral $M_1$ (Integral de interacción $I$ )	39
2.2.4.2 Método de Eischen para el cálculo de $J_2$	41
2.2.5 <i>Método de la Integral de Dominio (EDI)</i>	55
2.2.5.1 Método EDI para el cálculo de la integral $J$	56
2.2.5.2 Método EDI para el cálculo de la integral $J_2$ mediante una integral de área y una de línea	58
2.2.5.3 Formulación del método mediante el MEF	62
<b>3 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA</b>	<b>67</b>
<b>4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS</b>	<b>73</b>
4.1 INTRODUCCIÓN	73
4.2 PROBLEMAS 2D ANALIZADOS	75
4.2.1 <i>Problema asintótico singular</i>	77
4.2.2 <i>Problema de Westergaard</i>	79
4.3 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS	91

4.4	VALIDACIÓN PARCIAL DEL PROGRAMA: PROBLEMAS EN MODO I .....	101
4.4.1	<i>Problemas en modo I: modelo simétrico</i> .....	103
4.4.2	<i>Problemas en modo I: modelo con dominio completo</i> .....	112
4.5	APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA ÍNTEGRAL $J_2$ : PROBLEMAS EN MODO MIXTO.....	124
4.5.1	<i>Estudio de convergencia de problemas en modo mixto</i> .....	125
4.5.1.1	Problemas con <i>T-Stress</i> nulo.....	125
4.5.1.2	Problemas con <i>T-Stress</i> no nulo.....	136
4.5.2	<i>Influencia del parámetro <math>\delta</math> en el método de Eischen</i> .....	149
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS.....</b>	<b>159</b>
5.1	CONCLUSIONES.....	159
5.2	DESARROLLOS FUTUROS .....	160
<b>6</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>163</b>

# 1 INTRODUCCIÓN

## Resumen del capítulo:

*En este capítulo se presenta, en primer lugar, la problemática asociada al cálculo de la integral  $J_2$ , necesario para calcular los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT)  $K_I$  y  $K_{II}$  en problemas en modo mixto de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal. A continuación, se describen los objetivos que se pretende alcanzar y se concluirá el capítulo describiendo como se ha organizado y estructurado la Tesis.*

## 1.1 ANTECEDENTES

La simulación numérica en la Mecánica de la Fractura tiene especial importancia a la hora de diseñar estructuras mecánicas bajo el criterio de tolerancia al fallo. Para estructuras complejas, la robustez y la precisión de cálculo son prerequisites esenciales en el diseño de nuevas piezas cuando se utilizan métodos numéricos.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es uno de los métodos más implementados en el cálculo ingenieril debido a su simplicidad y versatilidad, y desde los años 70 hasta nuestros días ha pasado a dominar la disciplina de los métodos numéricos en Mecánica de la Fractura.

Una de los temas más importantes en la Mecánica de la Fractura es el estudio de la propagación de grieta y su dirección de propagación en piezas mecánicas (Chang y Pu 1996 [3]). En este contexto, varios criterios han sido propuestos para predecir el comportamiento de una grieta en el interior de un material, entre otros los basados en el cálculo de la tasa de

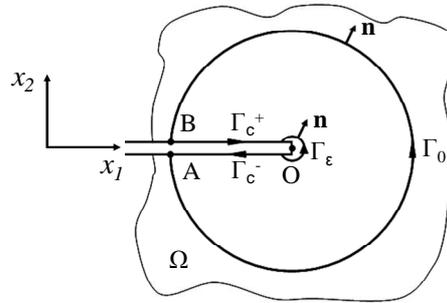
liberación de energía  $G$  (véase p.ej. Knowles y Sternberg 1972 [14]). Existen varios métodos para el cálculo de  $G$  en problemas 2D de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal (MFEL). Uno de ellos consiste en el cálculo del vector  $\mathbf{J}$ , cuyas componentes  $J_k$  ( $k=1,2$ ) se definen a través de la relación (véase p.ej. Eischen 1987 [7]):

$$J_k = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( W n_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (1.1)$$

donde  $\Gamma_\varepsilon$  representa un camino infinitamente próximo al extremo de grieta, que comienza en la cara inferior y termina en la cara superior, recorrido en el sentido indicado en la Figura 1.1 y de normal externa  $\mathbf{n}$  que queda a la derecha del camino. En realidad la expresión anterior no es de gran utilidad para el cálculo numérico de las integrales  $J_k$ . Por eso, se utiliza la definición equivalente:

$$J_k = \int_{\Gamma_0} \left( W n_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \delta_{k2} \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} W n_k d\Gamma \quad (1.2)$$

donde se ha utilizado la nomenclatura de la Figura 1.1, con  $\Gamma_0$  recorrida del punto  $A$  al punto  $B$  ( $\overline{AB}$ ) y con  $\Gamma_c^+$  y  $\Gamma_c^-$  superpuestos respectivamente a la cara de grieta superior (tramo  $\overline{BO}$ ) e inferior (tramo  $\overline{OA}$ ). Todos los caminos son recorridos en su sentido de definición y de forma tal que el versor normal  $\mathbf{n}$  se quede a la derecha. Finalmente,  $\delta_{k2}$  es la delta de Kronecker.



**Figura 1.1.** Porción de dominio  $\Omega$  alrededor de una grieta y caminos utilizados en la definición del vector  $J_k$ .

Mediante el MEF es posible plantear el cálculo de las integrales  $J_k$  y, a partir de dichos valores, estimar los *Factores de Intensidad de Tensiones* (FIT)  $K_I$  y  $K_{II}$  utilizando relaciones conocidas de la MFEL (relaciones de Cherepanov [5], ver apartado 2.2.4.2). A partir de los FIT es posible finalmente calcular la tasa de liberación de energía  $G$ .

A la componente  $J_1$  del vector  $\mathbf{J}$  se le denomina comúnmente “integral  $J$ ” y, como se puede observar en la ec. (1.2), para su cómputo tan solo se requiere el cálculo a lo largo del camino  $\Gamma_0$ . Bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico (no necesariamente lineal), libre de fuerzas por unidad de volumen y contorno de la entalla libre de fuerzas por unidad de superficie aplicadas, la integral  $J$  es independiente del camino  $\Gamma_0$  escogido. Así, es posible estimar  $J$  en zonas alejadas del extremo de la entalla o grieta, donde los gradientes de deformación no son elevados y donde la solución numérica del problema suele ser razonablemente precisa.

Bajo las mismas hipótesis, también la componente  $J_2$  del vector  $\mathbf{J}$  (llamada “integral  $J_2$ ”) resulta ser independiente del camino  $\Gamma$  escogido, siendo  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ + \Gamma_c^-$ . Sin embargo, a diferencia de la integral  $J$ , el cómputo de la integral  $J_2$  requiere el cálculo a lo largo del camino  $\Gamma_0$  y también a lo largo de las caras de grieta  $\Gamma_c = \Gamma_c^+ + \Gamma_c^-$ , hasta llegar al extremo de grieta (punto singular). Por lo tanto, su evaluación numérica mediante el MEF incluye la integración en elementos en el entorno de la singularidad, donde la solución calculada mediante el MEF es menos precisa.

Existen varias técnicas que intentan evitar las dificultades asociadas al cálculo de la integral  $J_2$ . Una de ellas es el Método de Eischen (Eischen 1987 [7]), que se ha implementado en esta Tesis para el estudio de problemas 2D de la MFEL cargados en modo mixto.

## 1.2 OBJETIVOS

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de problemas 2D de la mecánica de la fractura elástico lineal (MFEL) cargados en modo mixto mediante análisis por el Método de los Elementos Finitos (MEF), con el fin de calcular los FIT y, en el caso de que sea no nulo, el término de tensión no singular *T-Stress*.

Para poder calcular las magnitudes descritas, es necesario en primer lugar calcular las integrales  $J$  y  $J_2$  del problema analizado mediante elementos finitos. A continuación, es posible extraer los FIT mediante relaciones conocidas de la MFEL, mientras que el *T-Stress* es obtenible implementando ciertas metodologías que se detallarán en esta tesis. Mientras que el cómputo de la integral  $J$  en general no presenta dificultades, por contra la integral  $J_2$  requiere especial atención, ya que para su cómputo es necesario utilizar la solución procedente de elementos finitos cercanos al extremo de grieta, donde la solución es menos precisa. Para intentar superar este inconveniente, se ha implementado el método de Eischen [7] para el cálculo de  $J_2$ , utilizando dos metodologías de cálculo: mediante un método basado en integrales de contorno y mediante un método basado en la Integral de Dominio Equivalente (EDI). El análisis por el MEF de los problemas estudiados se ha llevado a cabo mediante el programa comercial ABAQUS 6.6-1. A partir del análisis por el MEF, los datos obtenidos han sido postprocesados en Matlab 7.0 para el cálculo de las magnitudes de interés (integrales  $J$  y  $J_2$ , FIT, *T-Stress*). Para eso se han utilizado como punto de partida los desarrollos llevados a cabo por Giner 2001 [11], en cuya Tesis Doctoral se estudiaron diferentes problemas 2D de la MFEL con el fin de cuantificar a posteriori el error de discretización introducido en el cálculo del FIT cuando se evalúa a través del MEF. El programa desarrollado en dicha tesis consiste en una serie de rutinas para el cálculo de la integral  $J$  y la extracción de los factores de intensidad de tensiones (FIT) en problemas 2D de la mecánica de la fractura elástico lineal (MFEL). El programa de cálculo utilizado por Giner en su Tesis Doctoral ha sido así utilizado como base para esta tesis, adaptándolo e integrándolo con macros de programa desarrolladas ad hoc para alcanzar el objetivo principal. Para alcanzar el objetivo principal, ha sido entonces necesario alcanzar los siguientes objetivos parciales:

- Revisión bibliográfica sobre los métodos empleados para el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  en la MFEL mediante el MEF.
- Adaptación y ajuste del programa de partida a las necesidades de esta tesis (preparación de las mallas de Elementos Finitos y su parametrización para los problemas estudiados, definición de las condiciones de contorno, etc.).
- Desarrollo de un programa para el cálculo de la integral  $J$  a partir de caminos concéntricos recorridos alrededor de la grieta; validación del programa aplicándolo a problemas de modo I de la MFEL con solución conocida.
- Adaptación del código desarrollado para el cálculo de la integral  $J$  al cálculo de la integral  $J_2$  según el método de Eischen [7]. Como se verá más adelante, esta adaptación consiste simplemente en cambiar tres de las variables de entrada del programa, al ser las expresiones de las integrales  $J$  y  $J_2$  parecidas. Además, las mismas rutinas se podrán extender al cálculo de la integral  $J_2$  en las caras de grieta, cosa que no se hace con  $J$  al ser esta contribución nula.
- Adaptación del código implementado por Giner [11] para calcular la integral  $J$  mediante EDI (Equivalent Domain Integral – Integral de Dominio Equivalente) al cálculo de la integral  $J_2$  en los problemas estudiados, e integración del código con las rutinas para el cálculo de la integral  $J_2$  en las caras de grieta.
- Aplicación del código desarrollado al cálculo de problemas en modo mixto de la MFEL con solución conocida. Las magnitudes calculadas en los problemas analizados serán: integrales  $J$  y  $J_2$ , FIT  $K_I$  y  $K_{II}$  y  $T$  ( $T$ -Stress).

El estudio de estos problemas permite calcular todas las variables más relevantes en problemas de la Mecánica de la Fractura en modo mixto como son  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $J$ ,  $J_2$  y  $T$  ( $T$ -Stress). Además, a partir de los desarrollos de esta tesis combinados con los desarrollos obtenidos por Giner [11] es posible calcular ciertas magnitudes implementando diferentes estrategias, lo que permite comparar la eficacia de métodos distintos de cálculo aplicados a este tipo de problemas. En conclusión, el objetivo es implementar diferentes métodos en el cálculo de problemas concretos de la mecánica de la fractura elástico lineal.

### 1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS DE MÁSTER

En primer lugar, en el capítulo 2 se detallan las expresiones matemáticas para la descripción de los campos de tensiones y desplazamientos en los puntos cercanos al extremo de grieta para problemas bidimensionales. A continuación, se presentarán los métodos energéticos que se han implementado en esta tesis para el cálculo de las diferentes magnitudes de interés (integral  $J$ , integral  $J_2$ , FIT  $K_I$  y  $K_{II}$  y el  $T$ -Stress) en los problemas estudiados. Estos métodos se basan en el cálculo de integrales de contorno o de integrales de dominio, estos últimos llamados también métodos de la Integral de Dominio Equivalente (EDI).

En el capítulo 3 se detalla el funcionamiento del programa de cálculo implementado en Matlab, describiendo las funciones desarrolladas para el cálculo de las magnitudes de interés, su integración con las rutinas procedentes de trabajos anteriores (Giner 2001 [11]), así como la secuencia de ejecución de las diferentes rutinas, las variables de input y los resultados de output.

En el capítulo 4 se describen en primer lugar el tipo de problemas 2D de la MFEL estudiados. A continuación, se presentarán varios ejemplos numéricos en los que se estudian los problemas descritos bajo diferentes condiciones de carga. Los resultados obtenidos se detallarán en tablas y gráficas y permitirán hacer comparaciones entre magnitudes calculadas implementando distintos métodos energéticos (integrales de contorno e integrales de dominio equivalente).

Las conclusiones extraídas de todo el trabajo realizado se recogen en el capítulo 5, haciendo especial hincapié en el cálculo de la integral  $J_2$  y el  $T$ -Stress en problemas en modo mixto de la Mecánica de la Fractura Elástico Lineal. Finalmente, en este mismo capítulo, se identifican posibles líneas de investigación y desarrollos futuros.

La memoria concluye con una lista de referencias bibliográficas.

## 2 CÁLCULO DE LAS INTEGRALES $J$ Y $J_2$ MEDIANTE EL MEF

### Resumen del capítulo:

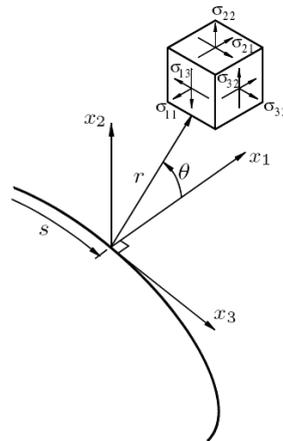
*En el presente capítulo se hará una breve introducción sobre las ecuaciones para describir los campos de tensiones y desplazamientos en problemas con singularidades. A continuación, se hará una revisión de los métodos energéticos más importantes para la evaluación de los FIT y de las integrales  $J$  y  $J_2$  en la MFEL. Finalmente, se presentarán con más detalle los métodos energéticos implementados en esta tesis para el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  y, a partir de esas variables, para el cálculo de los FIT y del T-Stress.*

### 2.1 CAMPOS DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN PRESENCIA DE SINGULARIDADES

En este subapartado se presentan las ecuaciones que describen los campos de tensiones y de desplazamientos en presencia de singularidades, lo que permite modelar una singularidad mediante el MEF.

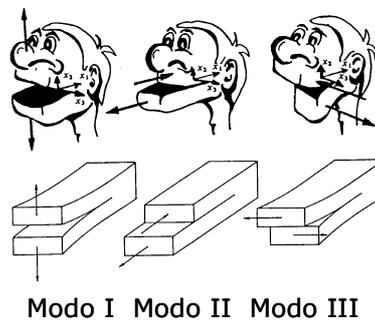
Antes de describir el estado tensional en el entorno de una grieta, conviene dar algunas definiciones y notaciones que sirvan como referencia. Consideremos la Figura 2.1, en la que se presenta el frente de grieta de un sólido 3D. Se puede observar cómo es posible, en cada punto del frente de grieta, definir un sistema de coordenadas cartesiano local con el eje  $x_3$  tangente al frente de grieta, el eje  $x_2$  perpendicular a la superficie local de la grieta y el eje  $x_1$  perpendicular al frente de grieta. También es posible definir

un sistema de referencia polar  $(r, \theta)$  en el plano  $(x_1, x_2)$  del sistema previamente definido, lo que permite estudiar el comportamiento de una sección del sólido considerado.



**Figura 2.1. Sistemas de referencia cartesiano y polar utilizados para definir los campos de tensiones y desplazamientos en un punto cercano al frente de grieta en MFEL.**

En proximidad al frente de una grieta perteneciente a un sólido 3D, un campo tensional dado se puede considerar debido a la superposición de tres modos de carga al que el cuerpo se ve sometido. Dichos modos, llamados modo I, modo II y modo III, se representan en Figura 2.1:



**Figura 2.2. Modos de carga y de apertura de grieta.**

Los tres modos actúan como se describe a continuación:

- Modo I: este tipo de carga hace que la grieta se abra (o se cierre) en dirección perpendicular a la superficie local de la misma, es decir en dirección  $x_2$ . Este modo de carga se genera mediante tensiones normales.
- Modo II: este tipo de carga hace que las dos superficies de la grieta deslicen en sentido contrario en la dirección del eje  $x_1$ , y se genera mediante tensiones de tipo tangencial.
- Modo III: este tipo de carga hace que las dos superficies de la grieta deslicen en sentido contrario en la dirección del eje  $x_3$ . Como para el modo II, el modo III es generado por tensiones tangenciales.

La descripción analítica de los campos de tensiones y desplazamientos en proximidad de una grieta en problemas de la MFEL fue obtenida por Williams [24].

De acuerdo con la nomenclatura de la Figura 2.1, las ecuaciones de Williams corresponden a una expansión en serie cuyos primeros términos, para un problema 3D de la MFEL, son:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \\ & - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(r^{1/2}) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^{1/2}) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad (\text{en tensión plana})$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{en deformación plana}) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r^{1/2}) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.5)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.6)$$

donde  $O(r^{1/2})$  indica términos proporcionales a  $r^{1/2}$  y los puntos suspensivos indican términos de orden superior a  $r$ . Los términos de orden superior a  $r^{1/2}$  son los que normalmente se desprecian para describir un estado tensional en proximidad del frente de grieta, ya que en ese caso  $r \rightarrow 0$  y los términos proporcionales a  $r^{-1/2}$  (términos singulares) son los que dominan sobre los otros términos.

En las ecuaciones anteriores aparecen tres parámetros ( $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$ ), llamados Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) para modo I, modo II y modo III respectivamente. Estos parámetros caracterizan la severidad de una grieta para el respectivo modo de carga y, como se puede observar en las diferentes expresiones, son parámetros caracterizantes del estado tensional: conocidos los FIT, quedan totalmente determinados los campos elásticos de tensiones y desplazamientos en las cercanías del extremo de grieta. Se deduce que cualquier grieta con los mismos FIT tendrá asociado el mismo campo de tensiones en el extremo de grieta.

Cabe además señalar que existe una relación explícita (demostrada por Irwin en 1957, ver p.ej. Gdoutos [10]) entre los FIT y la **tasa de liberación de energía total  $G^1$** , definida como:

---

<sup>1</sup> La tasa de liberación de energía  $G$  representa la energía disponible para el crecimiento de una grieta. Si la variación de la energía disponible es igual o mayor que la necesaria para romper la cohesión del material existente en el extremo de grieta, esa grieta progresará. Dependiendo de cada material, habrá una resistencia característica que deberá ser vencida para que la grieta progrese. En el caso de la MFEL, siempre es  $G=J=J_1$ .

$$G = -\frac{d\Pi}{da} \quad (2.7)$$

siendo  $a$  la longitud de grieta y  $\Pi$  la energía potencial total del sistema, que a su vez se define como:

$$\Pi = U + F \quad (2.8)$$

donde  $U$  es la energía potencial de deformación elástica y  $F$  es la energía potencial de las fuerzas exteriores aplicadas (que equivale al trabajo cambiado de signo realizado por éstas, asumiendo que son constantes).

La tasa de liberación de energía  $G$  y los FIT están relacionados mediante la expresión:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (2.9)$$

siendo las tasas de liberación de energía asociadas a cada modo de carga

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} ; G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} ; G_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.10)$$

y donde  $E' = E$  en tensión plana,  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$  en deformación plana y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

Se puede además observar en la ec. (2.1) la presencia de un término no singular,  $T$ . Este término constante, llamado  $T$ -Stress, es un parámetro muy importante a la hora de considerar el ángulo inicial de propagación de una grieta en un cuerpo sometido a cargas en modo mixto (Kim y Paulino 2003 [13]). En su trabajo, Tong [23] llevó a cabo ensayos mecánicos en probetas y describió la influencia del  $T$ -Stress en al menos tres aspectos relacionados con la propagación de una grieta en un cuerpo:

1. En la tasa de crecimiento de la grieta
2. En la forma geométrica del frente de grieta
3. En la estabilidad direccional

La propagación de una grieta en un cuerpo y la influencia del  $T$ - $Stress$  en este aspecto no es objeto de esta tesis, así que no se volverá a tratar el tema en los apartados siguientes. Aún así, cabe destacar que en esta tesis se ha incluido el parámetro  $T$ - $Stress$  en el cálculo de las tensiones aplicadas a problemas bidimensionales, y se ha calculado su valor en la fase de postproceso de datos para compararlo con el valor fijado inicial.

Con respecto a los desplazamientos, los primeros términos del desarrollo del campo de desplazamientos en puntos cercanos al extremo de grieta son:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) + \dots \quad (2.11)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) + \dots \quad (2.12)$$

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \quad (2.13)$$

donde  $\mu$  es el módulo de rigidez a cizalladura y  $\kappa$  es la constante de Kolosov, que toma los siguientes valores según el tipo de estado tensional:

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 - 4\nu && \text{en deformación plana} \\ \kappa &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} && \text{en tensión plana} \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.2 MÉTODOS ENERGÉTICOS APLICABLES MEDIANTE EL MEF

En este subapartado se hará una revisión de los principales métodos energéticos para el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  y de los FIT, aplicables mediante el MEF. A continuación, se describirán con más detalle los métodos implementados en esta tesis para el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  y, a partir de dichos valores, para la extracción de los Factores de Intensidad de Tensiones (FITs). Dichos métodos son:

- el método de Eischen [7], en el que el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  se basa en el cálculo de integrales de contorno;
- el método de la Integral de Dominio Equivalente (EDI – Equivalent Domain Integral) en el que el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  se basa en el cálculo de integrales de área<sup>2</sup> (véase Li *et al.* [16] para la integral  $J$  y Chang y Pu [3] para la integral  $J_2$ );
- el método de la Integral de Interacción de dominio, aplicado en forma de integral de contorno y en forma de Integral de Dominio Equivalente.

El método de Eischen y el método EDI aplicado al cálculo de  $J_2$  han sido implementados en el marco de la presente tesis. El método de la Integral de interacción de Dominio y el método EDI para el cálculo de  $J$  han sido implementados en el trabajo de Giner [11], y han sido reutilizados en esta tesis para comparar los valores de  $J$ ,  $J_2$ ,  $K_I$  y  $K_{II}$  obtenidos con los otros métodos en los problemas estudiados.

En Giner 2001 [11] es posible encontrar una revisión más amplia y detallada de los métodos energéticos y, además, una revisión de los métodos locales para el cálculo de los FIT y de las integrales  $J$  y  $J_2$  mediante el MEF en problemas de MFEL.

---

<sup>2</sup> Para la integral  $J_2$ , el método EDI consiste en el cálculo de una integral de área y una integral de línea a lo largo de las caras de grieta.

### 2.2.1 Introducción

El Método de los Elementos Finitos se ha consolidado durante las últimas cuatro décadas como el método numérico más versátil para el análisis de problemas de la mecánica del sólido. Tras el establecimiento de las bases del método, muy pronto surgieron aplicaciones directas a la Mecánica de la Fractura. Desde entonces el número de referencias en la literatura acerca de la aplicación del MEF a Mecánica de la Fractura ha crecido de forma imparable.

Las técnicas que permiten evaluar los FIT y/o las integrales  $J$  y  $J_2$  se dividen en dos grandes grupos:

- **Métodos locales (o directos):** tras un análisis numérico del problema, la evaluación de los FIT se realiza a partir de los campos de desplazamientos y/o tensiones obtenidos en el entorno de grieta. Por eso, necesitan de una correcta modelización de la singularidad.
- **Métodos globales (o indirectos):** se basan en planteamientos energéticos extendidos a zonas que no necesariamente corresponden al entorno de grieta, lo que hace innecesaria una modelización precisa de la singularidad. El parámetro caracterizante calculable con estos métodos es la tasa de liberación de energía  $G$ , permitiendo así la estimación indirecta de los FIT.

El objetivo de esta tesis es el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  en problemas 2D en modo mixto de la MFEL mediante la implementación de métodos de tipo energético. Por eso, los métodos de tipo local no se revisarán en esta tesis.

### 2.2.2 Los métodos energéticos mediante el MEF

El enfoque sobre el que se fundamentan los métodos energéticos (o indirectos) permite estimar  $J$  y  $J_2$  e, indirectamente, los FIT  $K_I$  y  $K_{II}$  si consideramos problemas 2D en modo mixto de la MFEL. Comparados con

los métodos de tipo local, estos métodos presentan notables ventajas que los hacen especialmente indicados para la estimación del error de discretización inducido en la evaluación de las magnitudes previamente citadas. Ello es debido a que presentan características muy destacables, a saber:

- Permiten obtener resultados precisos utilizando mallas relativamente bastas y sin necesidad de ningún refinamiento especial en el entorno de grieta. Estos métodos implican la evaluación global de ciertas magnitudes energéticas, haciendo intervenir en su cómputo elementos alejados del extremo de grieta, en zonas donde los campos de EF son aproximados con mayor exactitud. Su elevada precisión es una consecuencia del fundamento mismo del MEF: minimización de forma global de un funcional de carácter energético<sup>3</sup>. Por tanto, estos métodos hacen innecesaria la utilización de elementos singulares<sup>4</sup>.
- Los métodos energéticos se prestan a una estimación del error de discretización cometido al utilizar el MEF. La solución aproximada dada por el MEF es la que mejor representa la solución exacta de entre todas las disponibles con una malla dada y es interpretable como la solución que mejor se ajusta desde un punto de vista de mínimos cuadrados. En general, y dado que el error de discretización de EF está distribuido por todos los elementos de la malla en mayor o menor grado, técnicas globales de estimación que consideren el error de discretización en un gran número de elementos de la malla permitirán evaluar mucho mejor el error cometido.

Entre los métodos energéticos más importantes cabe señalar:

- Diferencias finitas de  $U$ .
- Integrales de contorno (integral  $J$  y otras integrales).
- Método de las funciones de extracción.

---

<sup>3</sup> Minimización del funcional *energía potencial total*  $\Pi$ .

<sup>4</sup> Elementos singulares: elementos específicos que permiten modelar de forma adecuada el comportamiento singular en el entorno del extremo de grieta. Su utilización reduce las exigencias en cuanto a los refinamientos necesarios para modelar correctamente el comportamiento teórico. Evidentemente, la utilización de elementos singulares en combinación con la implementación de métodos energéticos puede contribuir a la obtención de una solución más precisa.

- Método de la Integral de Dominio Equivalente (EDI).
- Método de la derivada de la matriz de rigidez.
- Método del cierre virtual de grieta (VCCT).

En general, un gran inconveniente de los métodos energéticos es su dificultad para separar las contribuciones energéticas asociadas a cada uno de los modos de apertura de grieta y así obtener estimaciones independientes de  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$ . Sin embargo, con el fin de paliar este inconveniente, existen técnicas específicas para desacoplar los modos, como se verá en el apartado 2.2.4.

De todos los métodos energéticos, en esta tesis se presentarán los basados en **integrales de contorno** y los basados en el **método de la integral de dominio equivalente** (EDI), ya que son los que han sido implementados en esta tesis en problemas en modo mixto de la MFEL. Además, debido al hecho de que se ha limitado el estudio problemas 2D, no se tratará el caso 3D. Para una revisión detallada sobre la extensión de estos métodos al caso 3D, se puede consultar el trabajo de Giner [11].

## 2.2.3 Integrales de contorno

### 2.2.3.1 La integral de contorno $J$

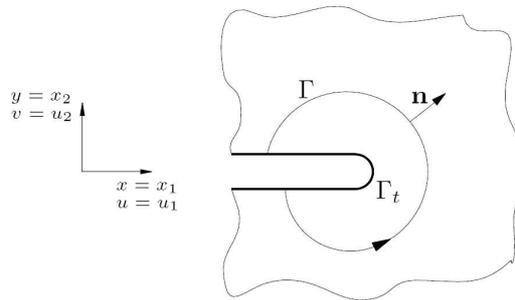
La evaluación correcta del campo de deformaciones en las inmediaciones de una entalla o grieta con el objetivo de permitir su caracterización suele presentar dificultades (en especial si se considera un comportamiento no lineal del material). Este hecho llevó a Rice [18] a proponer la conocida integral de contorno  $J$ , originariamente para una entalla en un problema bidimensional en el que el campo de tensiones sólo depende de dos coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ .

Bajo las hipótesis de sólido homogéneo con comportamiento elástico (no necesariamente lineal), libre de fuerzas por unidad de volumen y

contorno de la entalla libre de fuerzas por unidad de superficie aplicadas, Rice definió su integral  $J$  como sigue (teniendo en cuenta la disposición de la entalla con arreglo al sistema de referencia mostrado en la Figura 2.3):

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma \quad (2.15)$$

donde  $\Gamma$  es cualquier camino que rodee el extremo de entalla (cuyo contorno es  $\Gamma_t$ ), recorrido en sentido antihorario desde una cara de la entalla a la otra,  $W$  es la energía de deformación por unidad de volumen,  $\mathbf{T}$  es el vector de tracciones en el contorno  $\Gamma$  (fuerzas por uds.),  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos y  $d\Gamma$  es un elemento diferencial de arco de la curva  $\Gamma$ .



**Figura 2.3. Entalla en un dominio bidimensional.  $\Gamma$  es cualquier curva que contenga el fondo de entalla  $\Gamma_t$ .**

La densidad de energía de deformación  $W$  para el caso elástico (lineal o no) viene dada por la expresión<sup>5</sup>

$$W = W(x, y) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.16)$$

en la que  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de deformaciones infinitesimales. Por otra parte, las componentes del vector de tracciones  $\mathbf{T}$  sobre el contorno  $\Gamma$  se definen, con arreglo al vector normal unitario  $\mathbf{n}$  indicado en la Figura 2.1, como:

---

<sup>5</sup> En gran parte de este capítulo se utiliza la notación tensorial y el correspondiente criterio de suma respecto a los índices repetidos.

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.17)$$

Conviene remarcar que la ec. (2.15) está planteada para una entalla del tipo mostrado en la Figura 2.3 cuyas caras son paralelas al eje  $x_1$ , resultando evidente que una grieta alineada con dicho eje es un caso límite del mismo problema.

### ***J* como integral independiente del camino**

La independencia de la integral  $J$  con respecto al camino  $\Gamma$  utilizado para su evaluación es sin duda la propiedad que ha hecho de este método energético uno de los más versátiles en las técnicas numéricas aplicadas a Mecánica de la Fractura. Así, es posible estimar  $J$  en zonas alejadas del extremo de la entalla o grieta, donde los gradientes de deformación no son elevados y donde la solución numérica del problema suele ser razonablemente precisa. Rice [18] demostró que la integral que aparece en la ec. (2.15) es nula cuando se evalúa a lo largo de un *contorno cerrado*  $\Gamma^*$  que encierre un dominio *libre de singularidades*  $A^*$  de forma que las funciones a integrar presenten continuidad  $C^1$ . En estas condiciones es aplicable el teorema de Green<sup>6</sup> y la ec. (2.15) se puede escribir utilizando notación indicial como:

$$\oint_{\Gamma^*} \left( W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = \int_{A^*} \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right) dx_1 dx_2 \quad (2.18)$$

Por otra parte, la derivada de la energía de deformación por unidad de volumen se puede expresar del siguiente modo:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (2.19)$$

---

<sup>6</sup> Bajo otras expresiones se le denomina también teorema de Gauss o de la divergencia.

ya que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

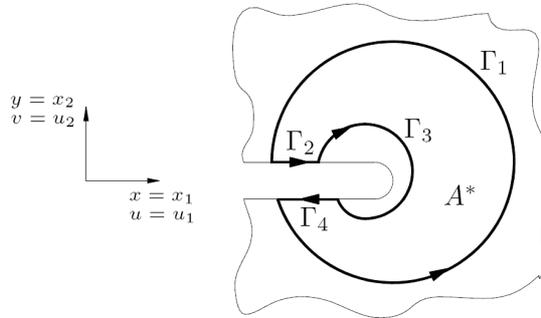
(puesto que por hipótesis se ha supuesto ausencia de fuerzas por udv. en el dominio):

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (2.20)$$

lo que implica que la integral que aparece en las ecs. (2.15) y (2.18) es nula si  $\Gamma^*$  es un contorno cerrado:

$$J = \oint_{\Gamma^*} \left( W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right) = 0 \quad (2.21)$$

Si se elige convenientemente el camino  $\Gamma^*$  (ver Figura 2.4) resulta inmediato demostrar la independendencia de  $J$  con respecto al camino tomado: la contribución de los tramos del camino que recorren las caras de la entalla,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$ , es nula ya que en ellos se verifica que  $dx_2=0$  y que  $T_i=0$  al estar las caras de entalla libres de fuerzas aplicadas. Por tanto, para que se cumpla la ec. (2.21), la contribución de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  ha de ser necesariamente la misma, aunque con signos opuestos debido al sentido diferente con el que se recorren dichos tramos. Es decir,  $J$  tiene el mismo valor si se evalúa con caminos que partan de la cara inferior plana de la entalla, terminen en la cara superior y sean recorridos en igual sentido.



**Figura 2.4. Camino cerrado  $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  utilizado en la demostración de  $J$  como independiente del camino.**

### Sentido físico de la integral $J$

El hecho de presentar la integral  $J$  como un parámetro aplicable a entallas permite dar un cierto sentido físico (Rice [18]). Si se escoge como camino aquél que recorre el fondo de entalla  $\Gamma_t$  (ver Figura 2.3) la ec. (2.15) se reduce a:

$$J = \int_{\Gamma_t} W dx_2 \quad (2.22)$$

ya que  $T_i=0$  al estar las superficies de la entalla libres de fuerzas aplicadas. Por consiguiente,  $J$  es una medida del grado de deformación alcanzado en el fondo de entalla, evaluado a través de una integral de la densidad de energía de deformación. Obviamente, se pierde este sentido físico cuando se trata de un extremo de grieta, ya que entonces  $\Gamma_t$  es infinitamente pequeño y, bajo la hipótesis de comportamiento elástico,  $W$  es infinitamente grande.

### Relación entre $J$ y $K_I$ en MFEL

En Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal es conocido que el campo de tensiones en el entorno de la grieta está dominado por la singularidad de tipo  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , donde  $r$  es la distancia al extremo de grieta. Las tensiones del campo elástico bidimensional en coordenadas polares  $(r, \theta)$  con origen en el extremo de grieta vienen dadas por las ecs. (2.1)-(2.6). Para el modo I el campo está caracterizado únicamente por  $K_I$  a través de ecuaciones del tipo siguiente ( $i, j = 1, 2$ ):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \dots \quad (2.23)$$

donde los puntos suspensivos indican términos acotados que son despreciables en todo entorno de grieta suficientemente pequeño comparado con las dimensiones del problema y con la longitud de grieta. Si se considera una grieta lateral semiinfinita en un dominio infinito con comportamiento elástico lineal, es evidente que estos términos acotados son despreciables para toda distancia finita desde el extremo de grieta. En esta situación se puede evaluar  $J$  tomando un camino circular  $\Gamma$  de radio  $r$  desde el extremo de grieta e integrar el campo elástico singular antes mencionado.

Expresando la ec. (2.15) en coordenadas polares resulta:

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left( W(r, \theta) \cos \theta - \mathbf{T}(r, \theta) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(r, \theta) \right) d\theta \quad (2.24)$$

Si se tiene en cuenta que el campo de deformaciones viene dado por expresiones del tipo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^I(\theta, \kappa) + \dots \quad (2.25)$$

(donde  $\kappa$  es la constante de Kolosov, ver ec. (2.14), y  $g_{ij}^I$  son funciones diferentes según se trate de *deformación plana* o *tensión plana*) es inmediato observar de nuevo la independencia de  $J$  con respecto al radio  $r$  del camino tomado tras sustituir en la ec. (2.24), ya que los términos del integrando son esencialmente productos de tensiones y deformaciones y por tanto

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \propto \frac{1}{r} \quad (2.26)$$

Llevando a cabo la integración de la ec. (2.24) resulta

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.27)$$

donde  $E'$  equivale a

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E}{1-\nu^2} && \text{en deformación plana} \\ E' &= E && \text{en tensión plana} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Este resultado es generalizable a otros problemas reales de dimensión finita, incluso con pequeña plastificación en el fondo de grieta (*small scale yielding*) siempre que se pueda encontrar una zona lo suficientemente pequeña comparada con las dimensiones del problema y la longitud de grieta y suficientemente alejada de la zona de plastificación. En

otras palabras, una zona donde el campo elástico esté regido por las ecs. (2.23) con términos acotados despreciables. La gran ventaja que ofrece la invariancia de  $J$  con respecto al camino tomado es que permite su evaluación lejos de la zona dominada por las ecs. (2.23), donde el campo elástico (en general, analíticamente desconocido) es estimado con mucha mayor precisión cuando se utilizan métodos numéricos.

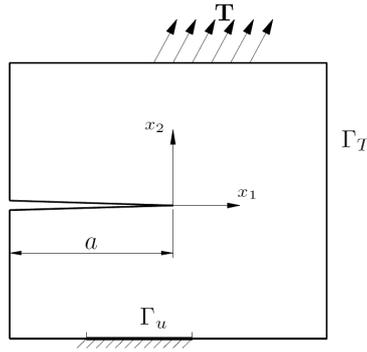
La ec. (2.27) se puede generalizar a otros modos de apertura de grieta o su combinación:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.29)$$

Dado que la relación entre  $J$  y  $K$  es la misma que la relación entre la tasa de liberación de energía  $G$  y  $K$  (ver ec.(2.9)), este planteamiento prueba la equivalencia  $J=G$  en MFEL. Obviamente existe una demostración directa de la relación entre  $J$  y  $G$  sin necesidad de utilizar el concepto de  $K$ , como se muestra en el apartado siguiente.

### Relación entre $J$ y $\frac{d\Pi}{da}$

Rice demostró también la relación existente entre  $J$  y la tasa de liberación de energía por unidad de área de grieta formada (ver p.ej. Gdoutos [10]). Considérese una grieta en un cuerpo bidimensional (espesor unidad) con comportamiento elástico *no necesariamente lineal*, como el mostrado en la Figura 2.5. Sea el contorno del sólido  $\Gamma$ , dividido en dos porciones  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_u$ , tales que  $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_u$  y  $\Gamma = \Gamma_T \cap \Gamma_u = \emptyset$ . Sobre  $\Gamma_T$  se suponen aplicadas fuerzas por unidad de superficie  $\mathbf{T}$  que se consideran *independientes* de la longitud de grieta  $a$ , al igual que las restricciones en desplazamientos aplicadas sobre  $\Gamma_u$ . Se considera ausencia de fuerzas por udv. y que  $T_i=0$  en las caras de grieta. Además se supone que el sistema de referencia  $x_1, x_2$  es fijo en el extremo de grieta y avanza con ella, que la grieta está orientada en la dirección  $x_1$  y cuando avanza lo hace en dicha dirección.



**Figura 2.5. Grieta en un sólido bidimensional elástico (lineal o no) bajo la acción de tracciones T. Notar los sistemas de referencia utilizados.**

Si  $A$  es el área total del sólido, la energía potencial total  $\Pi$  (definida por la ec. (2.8)) se puede expresar como:

$$\Pi = \int_A W dA - \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.30)$$

Derivando  $\Pi$  respecto a la longitud de grieta  $a$  y dado que se ha supuesto que  $\mathbf{T}$  es independiente de  $a$

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{dW}{da} dA - \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{da} d\Gamma \quad (2.31)$$

Notar que la segunda integral en la ec. (2.31) se puede extender a la totalidad del contorno del cuerpo  $\Gamma$ , debido a que los desplazamientos prescritos en  $\Gamma_u$  son también independientes de  $a$ . Al ser  $a$  asimilable al tiempo  $t$  (puesto que  $a$  es una función monótona creciente con  $t$ ) el operador  $a$  se puede interpretar como el operador *derivada material*  $\frac{d}{dt}$ , utilizado en

Mecánica del Medio Continuo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.32)$$

ya que se utiliza una descripción euleriana (o espacial) al ser el sistema  $x_1, x_2$  móvil con el extremo de grieta. Se puede escribir entonces

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial x_1}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.33)$$

dado que  $\frac{\partial x_1}{\partial a} = -1$ . De esta forma, la ec. (2.31) queda

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \left( \frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA - \int_{\Gamma} T_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (2.34)$$

Por otro lado, bajo la hipótesis de comportamiento elástico, se cumple de manera análoga a lo visto en la ec. (2.19):

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) \quad (2.35)$$

Si se interpreta  $\frac{\partial u_i}{\partial a}$  como una "velocidad" virtual cinemáticamente admisible a partir de la posición de equilibrio, el Principio de las Potencias Virtuales establece que la potencia virtual debida a las fuerzas externas aplicadas ha de ser igual a la potencia consumida por las fuerzas internas en la deformación del cuerpo:

$$\int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dA = \int_A \frac{\partial W}{\partial a} dA \quad (2.36)$$

donde se ha utilizado la ec. (2.35), lo que permite simplificar la ec. (2.34). Haciendo uso del teorema de Green para la integral extendida sobre el área  $A$  (aplicable, ya que la singularidad se encuentra sobre el contorno  $\Gamma$ ) se puede escribir del siguiente modo, análogo al visto en la ec. (2.18)

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{\partial W}{\partial x_1} dA - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = \int_{\Gamma} W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma = J \quad (2.37)$$

Evidentemente, al cumplirse las hipótesis que aseguran la independencia de  $J$  con respecto al camino tomado, el contorno del cuerpo  $\Gamma$  no es el único que cumple la ec. (2.18).

En el supuesto de comportamiento *elástico lineal* y por definición de la tasa de liberación de energía  $G$  (ver ec. (2.7)), se cumple que  $J=G$  como ya se había demostrado anteriormente. Sin embargo, en la relación dada por la ec. (2.37) el comportamiento no ha de ser necesariamente lineal, aunque sí elástico. Esta importante conclusión es la que ha permitido interpretar  $J$  como una generalización de  $G$  para comportamiento plástico, y justifica la extensa aplicación que se ha hecho de este método en los últimos 30 años (favorecida también por la facilidad de estimar  $J$  experimentalmente).

### 2.2.3.2 Las integrales de contorno $J_k$ , $L$ y $M$

Tras el trabajo de Rice en 1968, se han propuesto en el ámbito de la Mecánica de la Fractura numerosas integrales de contorno, la mayoría extendiendo la aplicabilidad de la integral  $J$  y generalizando sus hipótesis. Knowles y Stenberg [14] dedujeron nuevas integrales planteando el problema desde el punto de vista más general de la Mecánica del Medio Continuo tanto para deformaciones infinitesimales (elasticidad lineal y no lineal) como para deformaciones finitas en elasticidad (hiperelasticidad), de forma que sus integrales se pueden considerar principios conservativos de la elastoestática.

A partir de principios variacionales y un teorema sobre invariantes formulado por Noether en 1918 obtuvieron expresiones de nuevos principios conservativos, aplicables a sólidos homogéneos en campos elastoestáticos, en ausencia de fuerzas másicas. Si  $S$  es una superficie que encierra un dominio tridimensional con comportamiento elástico (lineal o no) carente de singularidades y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal saliente a dicha superficie, entonces se cumple que:

$$\int_S \left( W n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dS = 0 \quad (2.38)$$

Si además el comportamiento es *isótropo*, también se cumple que

$$\int_S \varepsilon_{ijk} \left( W x_k n_j + T_j u_k - T_p \frac{\partial u_p}{\partial x_j} x_k \right) dS = 0 \quad (2.39)$$

donde  $\varepsilon_{ijk}$  hace referencia al tensor de permutaciones cíclicas<sup>7</sup>. Por último, únicamente si el comportamiento es *lineal* (aunque no necesariamente *isótropo*) se tiene

$$\int_S \left( W x_i n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} x_i - \frac{1}{2} T_i u_i \right) dS = 0 \quad (2.40)$$

Por tanto, los tres principios se cumplen en el caso de comportamiento elástico lineal isótropo. Es interesante señalar que Knowles y Sternberg [14] obtuvieron la ec. (2.38) por aplicación del teorema de Noether con una función de transformación de coordenadas del dominio equivalente a una *traslación* de sus puntos. Para la ec. (2.39), la transformación de coordenadas es equivalente a una *rotación* del dominio y para la ec. (2.40) a un *cambio de escala*. También demostraron que bajo la hipótesis de comportamiento elástico lineal no son obtenibles otros principios conservativos por aplicación del teorema de Noether.

### Sentido físico de las integrales de Knowles y Sternberg

Budiansky y Rice [2] denominaron a estas integrales  $J_k$ ,  $L$  y  $M$  para el caso bidimensional en el que los campos dependen sólo de  $x_1$ ,  $x_2$  (estados de deformación plana o antiplana, e incluso tensión plana generalizada cuando se interpretan  $\sigma_{ij}$ ,  $u_i$  como valores promedio en el espesor):

$$J_k = \oint_C \left( W n_k - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (2.41)$$

---

<sup>7</sup>  $\varepsilon_{ijk} = 0$  si al menos dos de los índices son iguales;  $\varepsilon_{ijk} = \pm 1$  si  $i, j, k$  es una permutación cíclica de 1,2,3 o de 1,3,2 respectivamente

$$L = \oint_C \varepsilon_{ijk} \left( W x_j n_i + T_i u_j - T_p \frac{\partial u_p}{\partial x_i} x_j \right) d\Gamma \quad (2.42)$$

$$M = \oint_C \left( W x_i n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} x_i \right) d\Gamma \quad (2.43)$$

donde el camino  $C$  es un contorno cerrado en el plano  $(x_1, x_2)$ .

Resulta evidente que la primera de estas integrales (ec. (2.41)) coincide con la integral  $J$  (ec. (2.15)) para el caso  $k=1$ . Para el caso  $k=2$  tenemos la integral  $J_2$ , que será tratada con mas detalles en el apartado 2.2.4.2. Finalmente, en cuanto a  $J_3$  es trivial comprobar que es siempre nula en un problema bidimensional. Por ello, Budiansky y Rice también denominaron a la ec. (2.41) como  $J_k$  ( $k=1,2$ ).

Como sucede para el caso tridimensional, las tres integrales  $J_k$ ,  $L$  y  $M$  se anulan en ausencia de singularidades dentro de  $C$  para el caso elástico lineal e isótropo (ver demostración en apartado 2.2.4.2). Si  $C$  encierra alguna singularidad, las integrales serán en general *no nulas e independientes del camino* (suponiendo obviamente que todos los caminos tomados encierren únicamente la misma singularidad). Este hecho permite utilizarlas como parámetros caracterizantes de dicha singularidad, como ya se razonó para la integral  $J$ .

Budiansky y Rice [2] dieron sentido físico a estas integrales, considerando el caso más general tridimensional. Sea  $V$  el volumen de material contenido por una superficie  $S+s$ , siendo  $s$  la porción de superficie libre de fuerzas por uds. y  $S$  la porción sobre la que actúan las cargas externas aplicadas  $\mathbf{T}$ , que se suponen constantes en todo el proceso. Se trata ahora de apreciar cuál es la variación en la energía potencial total  $\Pi$  cuando se modifica la posición del contorno libre de cargas  $s$  con el tiempo  $t$ <sup>8</sup>. Al ser el contorno una función del tiempo,  $S+s(t)$ , el volumen  $V$  también lo será,  $V=V(t)$ . De acuerdo con la expresión de la energía potencial total, ec. (2.8), resulta que:

---

<sup>8</sup> En lugar de realizar el estudio con respecto al tiempo se puede realizar con respecto a otro parámetro que varíe de forma análoga, como podría ser la longitud  $a$  en el caso de una grieta.

$$\Pi = \int_{V(t)} W dV - \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} dS \quad (2.44)$$

Estudiando la variación de  $\Pi$  respecto al tiempo y recordando que el propio volumen varía con  $t$  a través de  $s(t)$  (no así  $S$  ni  $\mathbf{T}$  que permanecen constantes)

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{V(t)} \frac{dW}{dt} dV - \int_S \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} dS + \int_{s(t)} W v_j m_j dS \quad (2.45)$$

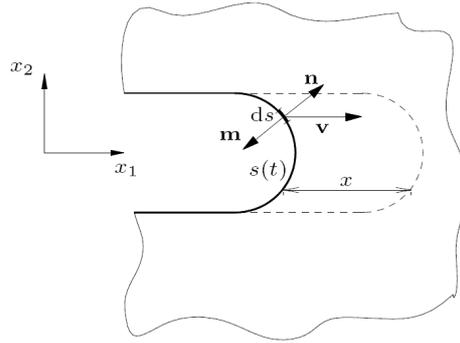
donde  $v_j$  son las componentes del vector velocidad  $\mathbf{v}$  con que se desplazan los puntos del contorno  $s$  y  $m_j$  las componentes del vector unitario  $\mathbf{m}$  normal *saliente* al contorno  $s$  (ver Figura 2.6), ya que es evidente que si  $\mathbf{x}$  es el cambio de posición de los puntos del contorno  $s$  se cumple

$$dV = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) ds \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} dV = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) ds = v_j m_j ds \quad (2.47)$$

igualdad que permite escribir la última integral de la ec. (2.45). Por otra parte, las dos primeras integrales del lado derecho de la ec. (2.45) se cancelan entre sí en virtud del Principio de las Potencias Virtuales, siempre que se considere  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$  una *velocidad virtual* cinemáticamente admisible (de forma totalmente análoga a lo visto en la ec. (2.36)). Por consiguiente

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{s(t)} W v_j m_j dS \quad (2.48)$$



**Figura 2.6.** Traslación de una cavidad en el seno de un dominio 2D.  $s(t)$  es su contorno y  $\mathbf{m}$  el vector unitario normal saliente.

Por otro lado, si la superficie  $s(t)$  resulta ser el contorno de una cavidad en un dominio como la mostrada en la Figura 2.6<sup>9</sup> y el vector velocidad de traslación  $\mathbf{v}$  es un vector *unidad* en una dirección  $i$  (por ejemplo, en la dirección  $x_1$  para el caso bidimensional de la Figura 2.6) se puede escribir

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{s(t)} W m_i dS = - \int_{s(t)} W n_i dS = -J_i \quad (2.49)$$

ya que por definición  $n_i = -m_i$  por tratarse de un vector hacia la derecha cuando el contorno se recorre en sentido antihorario. Esta es precisamente la definición de  $\mathbf{n}$  que se utiliza en la expresión de la integral  $J_k$  según las ecs. (2.38) y (2.41). Observando que el contorno llamado  $S$  en la ec. (2.38) ( $C$  en la ec. (2.41)) se puede hacer coincidir con  $s(t)$  y que  $\mathbf{T}$  es nulo en  $s(t)$ , se justifica la última igualdad de la ec. (2.49).

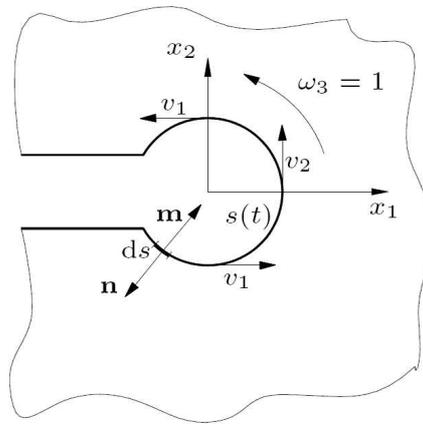
Este razonamiento es básicamente el mismo que el visto en la relación entre  $J$  y  $\frac{d\Pi}{da}$  e introduce el concepto de campo de velocidades, demostrando que la integral  $J$  está relacionada con la energía liberada por unidad de *traslación* de la cavidad en la dirección  $i$  (avance de grieta en dirección  $i$  en Mecánica de la Fractura).

<sup>9</sup> En el límite, la cavidad se puede asimilar al extremo de una grieta.

La integral  $L$  está relacionada con la energía liberada por unidad de *rotación* de la cavidad. Si se considera una velocidad angular de módulo *unidad* alrededor del eje  $k$  (por ejemplo, alrededor del eje  $x_3$  de la Figura 2.7 en un caso bidimensional) se cumple que  $v_i = -\varepsilon_{kij}x_j$  (en la Figura 2.7,  $v_1 = -\varepsilon_{312}x_2 = -x_2 = -\omega_3x_2$  y  $v_2 = -\varepsilon_{321}x_1 = x_1 = \omega_3x_1$ ), con lo que la ec. (2.48) quedará

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{s(t)} W(-\varepsilon_{kij}x_j)m_i dS = \int_{s(t)} W(\varepsilon_{kij}x_j)n_i dS = L \quad (2.50)$$

La relación está justificada por la particularización de la ec. (2.42) al caso en el que el contorno  $C$  coincide con la pared de la cavidad  $s(t)$ , y por tanto libre de cargas  $\mathbf{T}$ .



**Figura 2.7.** Rotación de una cavidad en el seno de un dominio 2D al girar con una velocidad angular  $\omega_3=+1$ .

De forma totalmente análoga se demuestra que la integral  $M$  se puede asociar con la energía liberada al *expandir uniformemente* una cavidad con contorno  $s(t)$  libre de cargas de acuerdo con la relación  $v_i = x_i$ . Partiendo de nuevo de la ec. (2.48) y particularizando la ec. (2.43) se obtiene:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{s(t)} Wx_i m_i dS = -\int_{s(t)} Wx_i n_i dS = -M \quad (2.51)$$

Para modo mixto de apertura de grieta (modos I y II) Budiansky y Rice [2] ya anticiparon que, en contra de las expectativas iniciales que generó el trabajo de Knowles y Stenberg [14], la integral  $L$  no suministra el otro parámetro escalar necesario junto con  $J_1$  para caracterizar el estado tensional en el entorno de grieta.

### $J_k$ y el tensor de Eshelby

En el contexto de la Mecánica de Sólidos, Eshelby [8] denominó "*energy-momentum tensor*" al tensor que permite caracterizar la intensidad de defectos internos del material, de forma análoga a  $J$ . Eshelby lo definió para un material elástico homogéneo como

$$\Sigma_{ki} = W\delta_{ki} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (2.52)$$

En sentido estricto, utilizó esta notación como referencia a una descripción espacial (o euleriana) de la Mecánica del Medio Continuo, por ejemplo con respecto a un sistema de coordenadas fijo con el extremo de grieta. Por simple comparación con la generalización a 3D de la ec. (2.41) se puede escribir:

$$J_k = \int_S \left( W\delta_{ki} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) n_i dS = \int_S \Sigma_{ki} n_i dS \quad (2.53)$$

que en general será distinta de cero para una superficie  $S$  cerrada que incluya una singularidad en su interior (debida, por ejemplo, a un defecto interno o grieta).

### $J_k$ como medida del flujo energético

Desde un punto de vista de la teoría general de campos, resulta evidente a partir de la ec. (2.53) que  $J_k$  es una medida del flujo correspondiente al campo vectorial representado por la componente en  $x_k$  del tensor de Eshelby  $\Sigma_{ki}$ . Este flujo es de carácter energético y se puede considerar que tiene como *sumidero* la singularidad (extremo o frente de grieta en Mecánica de la Fractura Elástico Lineal). Cuando no existen

singularidades encerradas por  $S$ , no existe flujo a través del contorno, y por aplicación del teorema de Gauss, la divergencia de dicho campo evaluada en el dominio encerrado por el contorno  $S$  es nula. Esta es una propiedad de los denominados *campos solenoidales*. Este hecho es el que permite demostrar la independencia de la superficie  $S$  utilizada en la evaluación de la ec. (2.53), siempre que contenga la misma singularidad.

Como se ha comentado anteriormente, la interpretación física del flujo es sencilla. Cuando se supone una traslación virtual del contorno  $S$  en dirección  $k$  con velocidad unidad, el primer término del integrando de  $J_k$  representa el cambio energético debido al *flujo de material* y el segundo término el aporte energético debido al trabajo realizado por el material exterior a  $S$  sobre el material que queda en su interior (ver p.ej. Nakamura *et al.* [17]). Conviene señalar que en el caso de Mecánica de la Fractura, la traslación virtual de la grieta implica su movimiento como sólido rígido en la dirección  $k$  *en el plano de grieta*, no admitiéndose por tanto cambios en la dirección de propagación (Atluri [1]).

### 2.2.3.3 Evaluación numérica de la integral $J$ mediante el MEF

En este apartado se dan indicaciones acerca de la evaluación numérica de la integral  $J$ , restringida a expresiones como la ec. (2.15) y sus correspondientes hipótesis de carga. En estas condiciones,  $J$  es simplemente una integral de línea. Los conceptos aquí expuestos también se pueden extender al cálculo de la integral  $J_2$ , siendo su implementación prácticamente análoga.

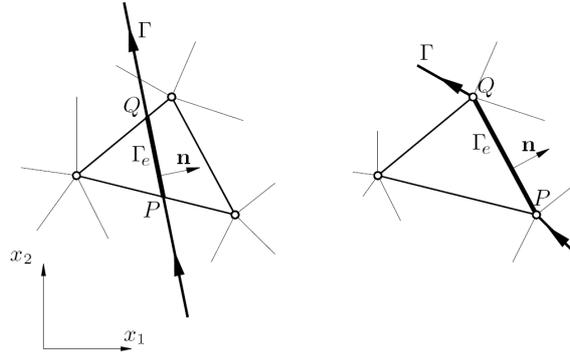
El camino a tomar  $\Gamma$  es arbitrario y supondremos en el desarrollo que sigue que está formado por *tramos rectilíneos*. Es preferible escoger un camino alejado del entorno del extremo de grieta, con el fin de evitar la zona donde los campos solución del MEF son peor estimados. El camino  $\Gamma$  puede intersectar los lados de los elementos o bien recorrerlos exactamente (ver Figura 2.8). Desde un punto de vista topológico la segunda opción es la más recomendable, pues hace innecesaria la búsqueda de los puntos de intersección de  $\Gamma$  con los lados de los elementos que atraviesa. Además, en este caso los puntos inicial y final del tramo recorrido en el elemento

coinciden con nodos. En cualquiera de las dos situaciones, por las propiedades de la integral se puede escribir:

$$J = \sum_{e=1}^{N_e \in \Gamma} J_e \quad (2.54)$$

donde  $N_e$  es el número de elementos atravesados por  $\Gamma$ . Si se denomina  $\Gamma_e$  a la porción de camino  $\Gamma$  que atraviesa el elemento  $e$ ,  $J_e$  será

$$J_e = \int_{\Gamma_e} \left( Wn_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Gamma_e \quad (2.55)$$



**Figura 2.8. Intersección del camino  $\Gamma$  con un elemento. El tramo comprendido es  $\Gamma_e$ . Dcha: el camino se superpone a un lado.**

Es conveniente realizar un cambio de coordenadas a un sistema de referencia unidimensional  $\xi \in [-1,1]$  de forma que el punto  $P$  de la Figura 2.8 esté asociado con la coordenada local  $\xi=-1$  y el punto  $Q$  con la coordenada local  $\xi=1$ . La integral en el sistema de referencia unidimensional será

$$J_e = \int_{-1}^1 \left( Wn_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \frac{\overline{PQ}}{2} d\xi \quad (2.56)$$

donde  $\overline{PQ}$  es la distancia entre los puntos  $P$  y  $Q$  en el sistema de referencia global  $(x_1, x_2)$ . En estas condiciones es inmediato aproximar la integral numéricamente mediante la cuadratura de Gauss en  $N_G$  puntos:

$$J_e \approx \frac{\overline{PQ}}{2} \sum_{m=1}^{N_G} H_m \left( W n_1 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right)_{\xi_m} \quad (2.57)$$

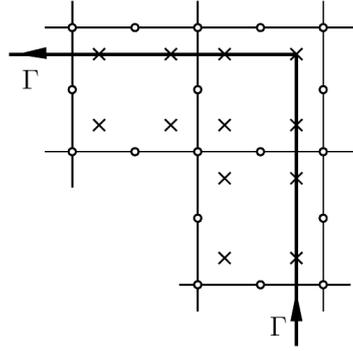
donde la expresión entre paréntesis corresponde al integrando de la ec. (2.56) evaluado en la coordenada  $\xi_m$  asociada al punto de Gauss  $m$  y a su respectivo peso de Gauss  $H_m$ . Si se utilizan elementos lineales con una formulación en desplazamientos, los campos de tensiones y deformaciones son constantes en cada elemento. Es suficiente entonces tomar un único punto de Gauss,  $m=1$ , de coordenada unidimensional  $\xi_1=0$  y peso  $H_1=2$ . Si se utilizan elementos cuadráticos, el integrando de la ec. (2.56) deja de ser constante y es necesario realizar la integración numérica unidimensional al menos con dos puntos de Gauss,  $m=2$ . Los campos de tensiones y deformaciones se pueden estimar en las coordenadas  $\xi_m$  con una interpolación lineal a partir de sus valores en los puntos  $P$  y  $Q$  ( $\xi=-1$  y  $\xi=1$ , respectivamente).

En la tabla siguiente (Tabla 2.1) se dan los pesos y las coordenadas de los puntos de Gauss para integración unidimensional:

<b>n</b>	$\pm \xi_i$	<b>H<sub>i</sub></b>	<b>Integra exactamente</b>
1	0	2	p=1
2	$\pm \sqrt{\frac{1}{3}}$	1	p=3
3	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}} ; 0$	$\frac{5}{9} ; \frac{8}{9}$	p=5
4	$\pm \sqrt{\frac{\left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}} ; \pm \sqrt{\frac{\left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}{7}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36} ; \frac{18 + \sqrt{30}}{36}$	p=7
5	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}} ; \pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}} ; 0$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900} ; \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900} ; \frac{128}{225}$	p=9

**Tabla 2.1. Puntos de integración, pesos de la Cuadratura de Gauss y máximo grado de polinomios integrados exactamente.**

Con elementos cuadriláteros es posible definir el camino  $\Gamma$  de forma que pase precisamente por los puntos de integración en cada elemento. De este modo se aprovecha la superconvergencia del gradiente de la solución en los puntos de integración (ver Figura 2.9). Para ello es necesario tomar un camino tal que sea paralelo a los lados del elemento, aprovechando así que los puntos de integración unidimensional coinciden con los puntos de integración bidimensional utilizada en la formulación de EF. Este planteamiento implica que la malla ha de estar distribuida y ordenada convenientemente e impide que se pueda tomar un camino  $\Gamma$  totalmente arbitrario. Con elementos triangulares en general no es posible hacer coincidir los puntos  $\xi_m$  de la integración unidimensional con los puntos de superconvergencia.



**Figura 2.9.** Camino de integración  $\Gamma$  tomado sobre los puntos de superconvergencia (puntos de integración) de elementos cuadriláteros cuadráticos.

### Técnicas usadas en esta Tesis

En los problemas analizados en esta Tesis se han utilizado mallas regulares y uniformes con elementos cuadriláteros, lo que permitiría en principio escoger un camino  $\Gamma$  que pase por los puntos de integración. Sin embargo, como se verá en el apartado 4.1 y por los motivos que ahí serán explicados, se han escogido caminos  $\Gamma$  rectilíneos superpuestos a los lados de los elementos para el cálculo de las integrales de contorno. En ese caso, es necesario extrapolar los valores de las funciones a integrar (p.ej.  $W(x_1, x_2)$ ,  $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ , etc.) en los lados de los elementos. Para eso se pueden implementar técnicas de *alisado local*<sup>10</sup> mediante ajuste por mínimos cuadrados. La técnica consiste básicamente en extrapolar a cada punto del elemento las estimaciones obtenidas por el MEF en los puntos de Gauss del elemento, ya que es en estos puntos donde los valores de los campos se estiman con mayor precisión. La hipótesis básica del procedimiento (ver p.ej. Hinton y Campbell [12]) es que el campo buscado (p.ej. una tensión  $\sigma$ ) se corresponde con el ajuste de un polinomio:

---

<sup>10</sup> Alisado local: extrapolación aplicada a un sólo elemento. También existen técnicas de *alisado por zonas*, cuando se aplican simultáneamente a un conjunto de elementos (en una zona del dominio global), y de *alisado global* cuando es aplicado simultáneamente a todos los elementos (a todo el dominio global).

$$\sigma^*(x_1, x_2) = a_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_1x_2 + a_5x_1^2 + a_6x_2^2 + \dots \quad (2.58)$$

de orden  $q$  y definido localmente en cada elemento.

El polinomio  $\sigma^*$  que ajusta la tensión  $\sigma$  es función de las coordenadas espaciales  $x_i$  y sus monomios están multiplicados por unas constantes  $a_m$  desconocidas que hay que determinar para resolver el ajuste. Así, para la tensión  $\sigma$  a ajustar en el elemento, se tendrá:

$$\sigma^* = \mathbf{P}^T \mathbf{a} \quad (2.59)$$

siendo el vector  $\mathbf{a}$  el vector de constantes desconocidas  $a_m$  y donde, en el caso 2D, el vector de monomios  $\mathbf{P}$  será de la forma:

$$\mathbf{P} = \{1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1x_2 \quad x_1^2 \quad x_2^2 \quad \dots\} \quad (2.60)$$

El polinomio  $\sigma^*$  se define de modo que su orden  $q$  coincida con  $p$ , el orden de las funciones de forma ( $q=p$ ). Con el fin de determinar los coeficientes  $a_m$  se realiza un ajuste de mínimos cuadrados a partir de los valores  $\sigma_{ef}$  obtenidos mediante el MEF en los puntos de Gauss del elemento. Para ello se minimiza el siguiente funcional con respecto a los coeficientes  $a_m$  del polinomio que se pretende ajustar:

$$\mathbf{F}(a_m) = \sum_{g=1}^{NPG} (\sigma_{ef}|_g - \sigma^*|_g)^2 \quad (2.61)$$

donde  $NPG$  es el número total de puntos de Gauss en el elemento,  $\sigma_{ef}|_g$  es la solución de EF en cada uno de ellos y  $\sigma^*|_g$  el polinomio a ajustar evaluado en las coordenadas de los puntos de Gauss del elemento. El campo obtenido  $\sigma^*(x_1, x_2)$  se puede así utilizar para calcular los valores en los lados del elemento, donde se va a calcular la integral de contorno  $J$ . Para aumentar la precisión de cálculo es posible, en puntos del lado en común de dos elementos adyacentes, calcular el valor medio  $\sigma_m^*$  obtenido a partir del alisado local de cada elemento, es decir:

$$\sigma_m^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2} [\sigma_A^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \sigma_B^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2)] \quad (2.62)$$

siendo  $\sigma_A^*$  y  $\sigma_B^*$  los campos de dos elementos A y B adyacentes calculados en un punto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  del lado en común. Esto no será obviamente aplicable si el camino utilizado para calcular la integral de contorno recorre algún tramo del borde de un dado dominio, como ocurre por ejemplo en el cálculo de la integral  $J_2$  (donde el camino pasa por las caras de la grieta, 2.2.4.2).

Como conclusión de este apartado, se señala que en cuanto a la independencia de  $J$  respecto del camino escogido cuando se calcula mediante el MEF, ésta se verifica razonablemente siempre que el camino  $\Gamma$  no atraviese los elementos inmediatos al extremo de grieta, donde los resultados son menos precisos. Por último, indicar que el uso de elementos que reproduzcan la singularidad en el entorno de grieta (p.ej. elementos singulares) no suele tener gran influencia cuando se utilizan caminos suficientemente alejados, por lo que su uso no es imprescindible.

#### 2.2.4 Integrales de contorno en modo mixto

Uno de los grandes inconvenientes de los planteamientos energéticos en MFEL es la dificultad de obtener estimaciones independientes de los FIT en problemas sometidos a modo mixto de apertura de grieta. Las integrales de contorno, como la integral  $J$ , no son una excepción, ya que  $J=G$  en MFEL y por tanto está relacionada con la tasa de liberación de energía *total* en casos de modos combinados (ver ec. (2.29)). Diversos autores han propuesto métodos para *separar* los modos haciendo uso de integrales de contorno, generalmente restringidos al caso 2D (único en el que la aplicación práctica de integrales de contorno tiene sentido). A continuación se presentan dos métodos:

- el método de la integral de Interacción: este método ha sido implementado por Giner [11] en los ejemplos numéricos propuestos

en su tesis doctoral y trabajos subsiguientes (en la versión EDI, ver apartado 2.2.5). Las rutinas desarrolladas por Giner han sido reutilizadas también en los problemas estudiados en la presente tesis, en especial para validar las rutinas desarrolladas y para comparar los valores de  $K_{II}$  obtenidos. Por esta razón, en este apartado se proponen las ecuaciones del método a título informativo.

- el método de Eischen [7] para la evaluación de  $J_2$ . Este método ha sido la base para el desarrollo de las rutinas de Matlab implementadas en el cálculo de problemas 2D cargados en modo mixto en esta tesis.

#### 2.2.4.1 Método de la integral $M_1$ (Integral de interacción $I$ )

Suponiendo comportamiento *elástico lineal* y si se consideran dos estados de equilibrio independientes con sus correspondientes campos de desplazamientos  $u_i^{(1)}$  y  $u_i^{(2)}$ , es evidente que la suma de estos dos estados  $u_i^{(1,2)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$  corresponde a un nuevo estado de equilibrio. Aprovechando las propiedades de linealidad de la derivación e integración, Chen y Shield [4] aplicaron la definición de integral  $J_k$  dada por Budiansky y Rice [2] (ver ec. (2.41)) al campo  $u_i^{(1,2)}$  obteniendo

$$J_k(\mathbf{u}^{(1,2)}) = J_k(\mathbf{u}^{(1)}) + J_k(\mathbf{u}^{(2)}) + M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) \quad (2.63)$$

donde  $M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$  incluye los términos cruzados, es decir

$$M_k(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \int_S \left\{ W^{(1,2)} n_k - \sigma_{ij}^{(2)} n_i \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_k} - \sigma_{ij}^{(1)} n_i \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_k} \right\} dS \quad (2.64)$$

siendo  $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ . Supongamos se aplican estas expresiones al caso de la integral  $J$ , es decir,  $k=1$ . Si se denota por simplicidad  $J^{(1)} \equiv J_1(\mathbf{u}^{(1)})$ ,  $J^{(2)} \equiv J_1(\mathbf{u}^{(2)})$  y  $J^{(1,2)} \equiv J_1(\mathbf{u}^{(1,2)})$ , se puede escribir para cada uno de los dos estados de equilibrio:

$$J^{(1)} = \frac{1}{E'} \left[ (K_I^{(1)})^2 + (K_{II}^{(1)})^2 \right] ; \quad J^{(2)} = \frac{1}{E'} \left[ (K_I^{(2)})^2 + (K_{II}^{(2)})^2 \right] \quad (2.65)$$

De la expresión análoga para  $J^{(1,2)}$  y aprovechando la linealidad de los FIT, es inmediato demostrar que:

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} \left[ K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right] \quad (2.66)$$

Por comparación con la ec. (2.63) se tiene:

$$M_1(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \frac{2}{E'} \left[ K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right] \quad (2.67)$$

A la hora de aplicar el método a un problema bidimensional en modo mixto, con un campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^{\text{mixto}}$ , conviene tomar como segundo estado de equilibrio un estado de modo I puro, con campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^{*,I}$  y cuyo  $K_I^*$  sea conocido, por lo que la ec. (2.67) se reduce a:

$$M_1(\mathbf{u}^{\text{mixto}}, \mathbf{u}^{*,I}) = \frac{2}{E'} K_I K_I^* \quad (2.68)$$

donde  $K_I$  es el FIT desconocido del problema en modo mixto. Habitualmente suele tomarse como campo auxiliar el campo asintótico en el entorno de grieta, especificando por simplicidad  $K_I^* = 1$ . De esta forma es posible calcular  $K_I$  para el problema en modo mixto a través de la integral  $M_1$  y obtener el correspondiente  $K_{II}$  con ayuda de una de las ecs. (2.65). También es posible calcular  $K_{II}$  a través de la aplicación de la integral  $M_1$  con un campo  $\mathbf{u}^{*,II}$  asociado a un modo II puro y cuyo  $K_{II}^*$  sea conocido:

$$M_1(\mathbf{u}^{\text{mixto}}, \mathbf{u}^{*,II}) = \frac{2}{E'} K_{II} K_{II}^* \quad (2.69)$$

Otros autores presentan el mismo planteamiento, denominando la integral  $M_1$  como *integral de interacción*  $I^{(1,2)}$ . Este método se suele

implementar en forma de integral de dominio equivalente (ver apartado 2.2.5).

#### 2.2.4.2 Método de Eischen para el cálculo de $J_2$

La definición de las integrales  $J_k$ ,  $k=1,2$  (ver p.ej. Eischen [7]) es la que se presenta a continuación:

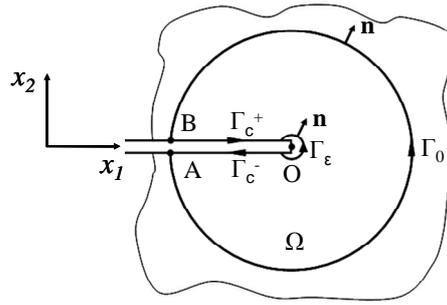
$$J_k = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (2.70)$$

siendo  $\Gamma_\varepsilon$  un camino infinitamente próximo al extremo de grieta, que comienza en la cara inferior y termina en la cara superior recorrido en el sentido indicado en la Figura 2.10 y de normal  $\mathbf{n}$ .

En realidad esta expresión no es de gran utilidad para el cálculo numérico de las integrales  $J_k$  en problemas de la MFEL. Por eso, se utiliza la definición equivalente:

$$J_k = \int_{\Gamma_0} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \delta_{k2} \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_k d\Gamma \quad (2.71)$$

donde se ha utilizado la nomenclatura de la Figura 2.10, con  $\Gamma_0$  recorrida del punto  $A$  al punto  $B$  ( $\overline{AB}$ ) y con  $\Gamma_c^+$  y  $\Gamma_c^-$  superpuestos respectivamente a la cara de grieta superior (tramo  $\overline{BO}$ ) e inferior (tramo  $\overline{OA}$ ). Todos los caminos son recorridos en su sentido de definición y de forma tal que el versor normal  $\mathbf{n}$  se quede a la derecha. Finalmente,  $\delta_{k2}$  es la delta de Kronecker.

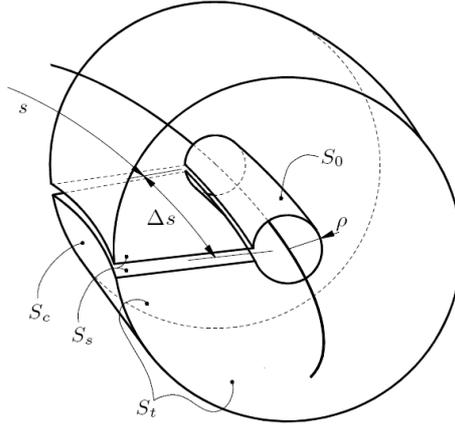


**Figura 2.10.** Dominio  $\Omega$  definido por el contorno cerrado  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_c^-$ .

La equivalencia de las definiciones dadas en las ecs. (2.70) y (2.71) se puede fácilmente demostrar recordando la definición y las propiedades de la primera integral de Knowles y Sternberg [14] (ec. (2.38)). Si  $S$  es una superficie que encierra un dominio tridimensional con comportamiento elástico (lineal o no) carente de singularidades y  $\mathbf{m}$  es el vector unitario normal saliente de dicha superficie, entonces se cumple que:

$$\int_S \left( Wm_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dS = 0 \quad (2.72)$$

Podemos considerar que la superficie  $S$  sea la representada en la Figura 2.11, donde  $S = S_0 \cup S_c \cup S_t \cup S_s$  (con  $S_0$  superficie cilíndrica de radio  $\rho$  infinitamente pequeño, rodeada por la superficie cilíndrica de radio arbitrario  $S_c$ ) de normal externa  $\mathbf{m}$  y que  $\Delta s$  sea un pequeño segmento del frente de grieta. Como  $\Delta s$  es un segmento muy pequeño del frente de grieta, se puede considerar rectilíneo y, por tanto, podemos pensar que  $S$  es la superficie generada por la extrusión del camino cerrado  $\Gamma$  a lo largo del segmento de frente  $\Delta s$ . Se asumirá estado de deformación plana en el tramo  $\Delta s$  y por tanto se interpretará el valor obtenido como el valor promedio integrado a lo largo de la longitud  $\Delta s$ . Se puede observar que la superficie cerrada  $S$  no encierra ninguna singularidad, y por lo tanto para  $S$  se cumple la ec. (2.72).



**Figura 2.11.** Cilindro de radio arbitrario que rodea al cilindro de radio infinitesimal  $\rho$ , que a su vez engloba un segmento  $\Delta S$  de frente de grieta 3D.

Resulta evidente que el dominio  $\Omega$  de la Figura 2.10, encerrado por  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_c^-$ , representa una sección 2D de la superficie  $S$  representada en la Figura 2.11. Bajo la hipótesis de deformación plana (campos dependientes sólo de  $x_1, x_2$ ) podemos entonces volver a escribir la ec. (2.72) como:

$$\int_S \left( W m_k - \sigma_{ij} m_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS = \Delta s \cdot \oint_{\Gamma} \left( W m_k - \sigma_{ij} m_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.73)$$

ya que  $dS = \Delta s \cdot d\Gamma$ . Resulta entonces:

$$\oint_{\Gamma} \left( W m_k - \sigma_{ij} m_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.74)$$

Esta ecuación coincide con la ec. (2.41) obtenida por Budiansky y Rice [2], válida para el caso bidimensional en el que los campos dependen sólo de  $x_1, x_2$  (estados de deformación plana o antiplana, e incluso tensión plana generalizada cuando se interpretan  $\sigma_{ij}, u_i$  como valores promedio en el espesor).

Recordando que  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_c^-$ , podemos volver a escribir la ec. (2.74) como<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_c^-} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.75)$$

habiendo sustituido el vector  $\mathbf{m}$  con el respectivo vector  $\mathbf{n}$  de cada tramo del contorno cerrado  $\Gamma$ .

Finalmente, bajo la hipótesis de caras de grieta libres de fuerzas, las integrales a lo largo de  $\Gamma_c^+$  y  $\Gamma_c^-$  quedan<sup>12</sup>:

$$\int_{\Gamma_c^+} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_k d\Gamma \quad (2.76)$$

y, asumiendo que las caras de grieta sean paralelas al eje  $x_1$ , también podemos escribir:

$$\int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_k d\Gamma = \delta_{2k} \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_k d\Gamma \quad (2.77)$$

ya que  $n_1=0$  en las caras de grieta y por lo tanto la contribución a la integral de la ec. (2.76) siempre será nula cuándo  $k=1$ .

Por lo tanto la ec. (2.75) queda:

---

<sup>11</sup> Obsérvese que en la ec. (2.75) el vector  $\mathbf{n}$  (definido en la Figura 2.10), vale  $\mathbf{n}=-\mathbf{m}$  para  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\mathbf{n}=\mathbf{m}$  para los otros tramos.

<sup>12</sup> Siendo las caras de grieta libres de cargas, el vector de tracciones  $\mathbf{T}$  será nulo a lo largo de las caras de grieta.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \delta_{2k} \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_k d\Gamma = \\ & = \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.78)$$

lo que demuestra la equivalencia entre las ecs. (2.70) y (2.71).

Cabe señalar que, en la ec. (2.71), para  $k=1$  se obtiene la definición de  $J$  dada por Rice [18], ec. (2.15), y que  $J$  tiene el mismo valor si se evalúa con caminos que partan de la cara inferior plana de la entalla, terminen en la cara superior y sean recorridos en igual sentido. Para  $k=2$  (integral  $J_2$ ), la ec. (2.71) queda:

$$J_2 = \int_{\Gamma_0} \left( Wn_2 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_2 d\Gamma \quad (2.79)$$

Es inmediato demostrar también la independencia del camino de la integral  $J_2$  (es suficiente observar la ec. (2.78) con  $k=2$  y recordar que  $\Gamma_\epsilon$  es una curva de radio infinitesimal alrededor de la grieta). Cabe señalar que, a diferencia de la integral  $J$ , para la integral  $J_2$  la independencia del camino escogido está condicionada por el cálculo de las contribuciones a la integral en las caras de grietas  $\Gamma_c^+$  y  $\Gamma_c^-$ , cosa que no ocurría con la integral  $J$  al ser estas contribuciones nulas (bajo las hipótesis de ausencia de fuerzas en caras de grieta). En otros términos,  $J_2$  tiene el mismo valor si se evalúa con caminos recorridos en igual sentido  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ + \Gamma_c^-$ , que partan de la cara inferior plana de la entalla, terminen en la cara superior e incluyen los tramos  $\Gamma_c^+$  y  $\Gamma_c^-$ .

Así, el cálculo de  $J_2$  requiere el cómputo de la integral del *salto de la energía de deformación elástica* en las caras de grieta (respectivamente  $W^+$  para la energía de la cara superior y  $W^-$  para la de la cara inferior),

debido a que la componente  $n_2$  del vector normal  $\mathbf{n}$  vale  $\pm 1$  sobre las caras de grieta<sup>13</sup> (si se toma un sistema de referencia como el de la Figura 2.10):

$$\int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} W n_2 d\Gamma = -\int_{\Gamma_c^+} W d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} W d\Gamma = -\int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) d\Gamma \quad (2.80)$$

En ese caso, la integral a lo largo de las caras de grieta  $\Gamma_c = \Gamma_c^+ + \Gamma_c^-$  de la densidad de energía de deformación  $W$  no es nula ( $\int_{\Gamma_c} W n_2 d\Gamma \neq 0$ ) y por tanto tampoco lo es su contribución a  $J_2$  aunque las caras de grieta estén libres de fuerzas aplicadas por uds. ( $\mathbf{T}=\mathbf{0}$ ).

Resulta evidente la dificultad de evaluar numéricamente la segunda integral a lo largo de  $\Gamma_c$  ya que  $W$  es singular en las cercanías del extremo de grieta, introduciendo grandes imprecisiones en la estimación de  $J_2$ . Si se quiere reducir las imprecisiones en el cálculo de  $J_2$ , es importante recurrir a una modelización de la singularidad adecuada, utilizando por ejemplo elementos singulares.

Sin embargo, para superar este inconveniente, Eischen propuso un método alternativo que permite obtener resultados razonables de  $J_2$  sin necesidad de recurrir a una modelización de la grieta mediante elementos singulares o a excesivos refinamiento de malla en el entorno de grieta. Antes de presentar el método, es interesante revisar las relaciones entre las integrales  $J_k$  ( $k=1,2$ ) y los FIT ( $K_I$  y  $K_{II}$ ).

### Relaciones $J_k$ –FIT

Gracias al resultado obtenido por Cherepanov [5], es posible relacionar las integrales de contorno  $J_k$  con los factores de intensidad de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$ . En concreto, cuando se aplica al problema de una grieta en un problema elástico plano (deformación o tensión plana), con caras de grieta libres de carga, Cherepanov obtuvo la siguiente relación:

---

<sup>13</sup> Recordemos que  $\mathbf{n}$  es un vector normal hacia la derecha cuando se recorre el camino en sentido antihorario. Así  $n_2=-1$  en la cara superior y  $n_2=1$  en la cara inferior con arreglo a la Figura 2.10.

$$\mathbf{J} = \frac{\kappa+1}{8\mu} \left[ (K_I^2 + K_{II}^2) \mathbf{e}_1 - (2K_I K_{II}) \mathbf{e}_2 \right] \quad (2.81)$$

donde  $\mathbf{e}_i$  es un vector unitario en dirección  $x_i$ ,  $\mu$  es el módulo de rigidez a cizalladura, y  $\kappa$  (constante de Kolosov) toma el valor definido en la ec. (2.14). Las componentes del vector bidimensional  $\mathbf{J}$  en función de los factores de intensidad de tensiones también se expresan frecuentemente del siguiente modo:

$$J_1 = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.82)$$

$$J_2 = \frac{1}{E'} (-2K_I K_{II}) \quad (2.83)$$

donde  $E'$  viene dado por la ec. (2.28). Puede ser de interés la definición de  $E'$  dada por Cherepanov [5] que interpola  $E'$  para estados tensionales intermedios entre tensión y deformación plana (con valores de  $\varepsilon_{ii}$  estimados en la cercanía del frente de grieta):

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right) \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}} \quad (2.84)$$

Las relaciones dadas por las ecs. (2.82) y (2.83) ofrecen la gran ventaja de poder *desacoplar* los modos de apertura de grieta mediante métodos energéticos que estimen  $J_k$  y conocer los valores independientes de los factores de intensidad de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$ . Despejando convenientemente se obtiene:

$$K_I = \frac{\sqrt{E'}}{2} \left( \sqrt{J_1 - J_2} + \sqrt{J_1 + J_2} \right) \quad (2.85)$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{E'}}{2} \left( \sqrt{J_1 - J_2} - \sqrt{J_1 + J_2} \right) \quad (2.86)$$

En realidad, estas expresiones sólo son válidas para una combinación determinada de los desplazamientos relativos en la cara superior e inferior.

Otra forma de despejar de las ecs. (2.82) y (2.83) conduce a las expresiones siguientes más generales (ver p.ej. Eischen [7]):

$$K_I = \pm \sqrt{\frac{E'J_1}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2} \right]} \quad (2.87)$$

$$K_{II} = \pm \sqrt{\frac{E'J_1}{2} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2} \right]} \quad (2.88)$$

El signo de  $K_I$  y  $K_{II}$  se tomará positivo si los desplazamientos relativos de la cara superior de grieta  $\Gamma_s^+$  respecto a la inferior  $\Gamma_s^-$  son positivos:

$$K_I > 0 \quad \text{si} \quad u_2^+ - u_2^- > 0 \quad (2.89)$$

$$K_{II} > 0 \quad \text{si} \quad u_1^+ - u_1^- > 0 \quad (2.90)$$

En cuanto al signo dentro del corchete de la ec. (2.87) se tomará de la siguiente forma (para la ec. (2.88) se tomará el opuesto):

$$\text{si} \quad |u_2^+ - u_2^-| \geq |u_1^+ - u_1^-| \quad \text{tomar (+)} \quad (2.91)$$

$$\text{si} \quad |u_2^+ - u_2^-| < |u_1^+ - u_1^-| \quad \text{tomar (-)} \quad (2.92)$$

### El método de Eischen

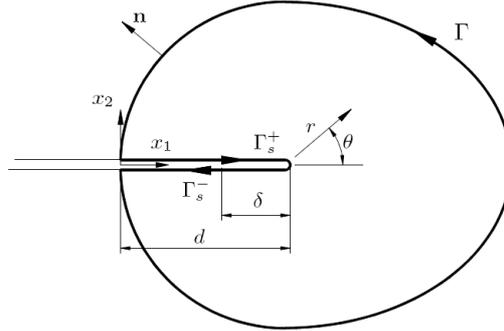
Con el objetivo de mejorar el cálculo numérico de la integral  $J_2$ , Eischen [7] propuso el siguiente procedimiento. Se basa en las expresiones de los campos de tensiones en las cercanías del extremo de grieta (ver ecs. (2.1)-(2.6)) para calcular el salto de la energía de deformación  $W$  en las caras de grieta (ec. (2.80)).

Con arreglo a la Figura 2.12, si se denomina  $W^+ = W(r, \pi)$  al valor que toma la densidad de energía de deformación en la cara superior de la

grieta  $\Gamma_s^+$  y  $W^- = W(r, -\pi)$  al valor correspondiente a la cara inferior  $\Gamma_s^-$ , la integral de contorno extendida a  $\Gamma_s = \Gamma_s^+ + \Gamma_s^-$  se puede escribir como:

$$\int_{\Gamma_s} W n_2 d\Gamma = -\int_0^d (W^+ - W^-) dx_1 \quad (2.93)$$

Notar en la Figura 2.12 que  $d$  es la distancia entre el origen del sistema de referencia  $x_1, x_2$  y el extremo de grieta, y que dicho origen se toma en el punto de intersección del camino  $\Gamma$  con las caras de grieta.



**Figura 2.12. Definición de los caminos utilizados en la evaluación de  $J_2$  según el método de Eischen.**

En su trabajo, Eischen [7] planteó el problema para un estado de tensión plana. Sin embargo, el método se puede extender de forma inmediata a problemas en estado de deformación plana. Le expresión de la energía de deformación  $W$  en el caso de *tensión plana* es:

$$W_{TP} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2E} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu \sigma_{11} \sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2] \quad (2.94)$$

mientras que en el caso de *deformación plana* es:

$$W_{DP} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1-\nu^2}{2E} \left[ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{11} \sigma_{22} \frac{\nu}{1-\nu} + \frac{2\sigma_{12}^2}{1-\nu} \right] \quad (2.95)$$

Para calcular el salto de energía  $W^+ - W^- = W(r, \pi) - W(r, -\pi)$  se necesita calcular las tensiones  $\sigma_{11}(r, \pm\pi)$ ,  $\sigma_{22}(r, \pm\pi)$  y  $\sigma_{12}(r, \pm\pi)$ . Utilizando las ecs. (2.1), (2.2) y (2.4) se tiene:

$$\sigma_{11}(r, \pm\pi) = \mp \frac{2K_{II}T}{\sqrt{2\pi r}} + T + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.96)$$

$$\sigma_{22}(r, \pm\pi) = O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.97)$$

$$\sigma_{12}(r, \pm\pi) = O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.98)$$

Sustituyendo las ecs. (2.96)-(2.98) en las ecs. (2.94)-(2.95) y con sencillas manipulaciones es inmediato comprobar que:

$$W_{TP}^+ - W_{TP}^- = -\frac{4K_{II}T}{E\sqrt{2\pi r}} + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.99)$$

$$W_{DP}^+ - W_{DP}^- = -\frac{(1-\nu^2)4K_{II}T}{E\sqrt{2\pi r}} + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.100)$$

Por tanto, a partir de ahora, se expresará el salto de energía de deformación en la forma más general:

$$W^+ - W^- = -\frac{4K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi r}} + O(r^{1/2}) + \dots \quad (2.101)$$

recordando que  $E' = E$  para tensión plana y  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$  para deformación plana.

Para evitar la singularidad propia de esta diferencia expresada por la ec. (2.101) en la integral a lo largo de  $\Gamma_s$ , Eischen propuso dividir la integral de la ec. (2.93) en dos tramos, determinados por la longitud  $\delta$  suficientemente cercana al extremo de grieta, en cuyo interior los campos singulares tengan validez:

$$-\int_0^d (W^+ - W^-) dx_1 \approx -\int_0^{d-\delta} (W^+ - W^-) dx_1 - \int_{d-\delta}^d -\frac{4K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi r}} dx_1 \quad (2.102)$$

Como  $r = d - x_1$  se puede efectuar analíticamente la última de las integrales y se podrá estimar  $J_2$  como<sup>14</sup>

$$J_2 \approx \int_{\Gamma} \left( Wn_2 - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) d\Gamma - \int_0^{d-\delta} (W^+ - W^-) dx_1 + \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta} \quad (2.103)$$

Si al conjunto de las dos integrales de la ec. (2.103) se le designa por  $\bar{J}_2$  y se tiene en cuenta la ec. (2.83), se puede escribir:

$$J_2 = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} \approx \bar{J}_2 + \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta} \quad (2.104)$$

A la hora de aplicar numéricamente este procedimiento se presenta el problema de estimar el valor del *T-Stress*  $T$  y la longitud  $\delta$ , ya que  $\bar{J}_2$  es calculable en la forma habitual. Eischen planteó generar dos ecuaciones mediante aplicación de la ecuación anterior con dos valores de  $\delta$  diferentes,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  (Eischen tomó en sus ejemplos  $\delta_1 = a/6$  y  $\delta_2 = a/12$ , siendo  $a$  la longitud de grieta):

$$\bar{J}_{2,1} = J_2 - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta_1} = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta_1} \quad (2.105)$$

$$\bar{J}_{2,2} = J_2 - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta_2} = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta_2} \quad (2.106)$$

Se puede despejar  $J_2$  de las ecs. (2.105)-(2.106):

$$J_2 = \frac{\bar{J}_{2,1} \sqrt{\delta_2} - \bar{J}_{2,2} \sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1}} \quad (2.107)$$

---

<sup>14</sup> No confundir las componentes del vector de tracción  $\mathbf{T}$  ( $T_j$ ) con el *T-Stress* ( $T$ ).

y así obtener  $K_I$  y  $K_{II}$  con ayuda de las ecs. (2.87)-(2.88), ya que  $J_1$  es calculable a lo largo de  $\Gamma$  al ser independiente del camino. Este método presenta la ventaja adicional de poder estimar la *tensión no singular* o *T-Stress*  $T$  a través de la siguiente relación:

$$T = -\frac{E'\sqrt{2\pi}}{8K_{II}} \frac{\bar{J}_{2,2} - \bar{J}_{2,1}}{\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1}} \quad (2.108)$$

Conviene insistir en que el procedimiento propuesto mejora el cálculo de la integral  $J_2$  sin realizar integración cerca del extremo de grieta y por lo tanto hace innecesaria la utilización de elementos singulares alrededor del extremo de grieta.

El planteamiento del método de Eischen se basa en expresar el salto de la energía de deformación elástica implementando las expresiones del campo de tensiones asintótico expresado por las ecs. (2.1), (2.2) y (2.4) y despreciando los términos de orden superior (ver ecs. (2.94)-(2.101)). Sin embargo, existen problemas en los que los campos de tensiones tienen expresión analítica conocida, como el problema de placa con grieta sometida a cargas en el infinito. Puede entonces resultar interesante obtener las expresiones del método de Eischen para estos problemas.

Consideremos una placa con grieta de longitud total  $2a$  cargada en el infinito (problema de Westergaard) con sistema de referencia  $x_1, x_2$  con origen en el centro de la grieta (Figura 2.13). La expresión analítica para el salto de la energía de deformación elástica en las caras de grieta del problema considerado es (ver p.ej. Eischen 1987 [7]):

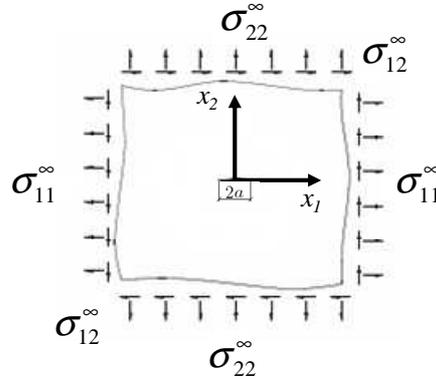
$$W^+ - W^- = -\frac{4\sigma_{12}^\infty(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty)}{E'} \cdot \frac{x_1}{(a^2 - x_1^2)^{1/2}} \quad (2.109)$$

Como  $\sigma_{22}^\infty = K_I / \sqrt{\pi a}$ ,  $\sigma_{12}^\infty = K_{II} / \sqrt{\pi a}$  y  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty + T$  (ver p.ej. Eischen 1987 [7]), resulta:

$$\frac{4\sigma_{12}^\infty(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty)}{E'} = \frac{4K_{II}T}{E'\sqrt{\pi a}} \quad (2.110)$$

y la ec. (2.107) queda:

$$W^+ - W^- = -\frac{4K_{II}T}{E'\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{x_1}{(a^2 - x_1^2)^{1/2}} \quad (2.111)$$



**Figura 2.13. Placa con grieta sometida a cargas en el infinito.**

Si se divide el cálculo de la integral a lo largo de las caras de grieta como se hizo con la ec. (2.102) resulta:

$$J_2 = \int_{\Gamma} \left( W n_2 - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) d\Gamma - \int_{a-d}^{a-\delta} (W^+ - W^-) dx_1 - \int_{a-\delta}^a (W^+ - W^-) dx_1 \quad (2.112)$$

donde  $\Gamma$  es una curva que empieza y acaba en las caras de grieta, en un punto puesto a distancia  $d > \delta$  del extremo de grieta como en la Figura 2.12 (pero con sistema de referencia  $x_1, x_2$  con origen en el centro de la grieta como en la Figura 2.13), recorrida en sentido antihorario y con versor normal  $\mathbf{n}$  que queda a la derecha del camino cuando se recorre en su sentido de definición.

Se puede calcular la tercera integral de la ec. (2.112) implementando la ec. (2.111):

$$\begin{aligned}
\int_{a-\delta}^a (W^+ - W^-) dx_1 &= \int_{a-\delta}^a -\frac{4K_{II}T}{E'\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{x_1}{(a^2 - x_1^2)^{1/2}} dx_1 = \\
&= \frac{4K_{II}T}{E'\sqrt{\pi}} \sqrt{2\delta - \frac{\delta^2}{a}} = \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta - \frac{\delta^2}{2a}}
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Si a las dos primeras integrales de la ec. (2.112) se le designa por  $\bar{J}_2$  y se tiene en cuenta la ec. (2.83), se puede escribir:

$$J_2 = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} = \bar{J}_2 + \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta - \frac{\delta^2}{2a}} \tag{2.114}$$

De manera análoga a lo visto anteriormente, se pueden plantear dos ecuaciones mediante aplicación de la ecuación anterior con dos valores de  $\delta$  diferentes,  $\delta_1$  y  $\delta_2$ :

$$\bar{J}_{2,1} = J_2 - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2a}} = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2a}} \tag{2.115}$$

$$\bar{J}_{2,2} = J_2 - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{\pi}} \sqrt{\delta_2 - \frac{\delta_2^2}{2a}} = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \frac{8K_{II}T}{E'\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta_2 - \frac{\delta_2^2}{2a}} \tag{2.116}$$

Se puede despejar  $J_2$  de las ecs. (2.115)-(2.116):

$$J_2 = \frac{\bar{J}_{2,1} \sqrt{\delta_2 - \frac{\delta_2^2}{2a}} - \bar{J}_{2,2} \sqrt{\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2a}}}{\sqrt{\delta_2 - \frac{\delta_2^2}{2a}} - \sqrt{\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2a}}} \tag{2.117}$$

y así obtener  $K_I$  y  $K_{II}$  con ayuda de las ecs. (2.87)-(2.88), ya que  $J_1$  es calculable a lo largo de  $\Gamma$  al ser independiente del camino. Se puede observar que para valores  $\delta$  muy pequeños,  $\delta \ll a$ , la ec. (2.117) queda:

$$J_2 \approx \frac{\bar{J}_{2,1}\sqrt{\delta_2} - \bar{J}_{2,2}\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1}} \quad (2.118)$$

que coincide con la expresión dada por la ec. (2.107).

La *tensión no singular* o *T-Stress*  $T$  se calcula a través de la siguiente relación:

$$T = -\frac{E'\sqrt{2\pi}}{8K_{II}} \frac{\bar{J}_{2,2} - \bar{J}_{2,1}}{\sqrt{\delta_2 - \frac{\delta_2^2}{2a}} - \sqrt{\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2a}}} \quad (2.119)$$

Se observa que para valores  $\delta$  muy pequeños,  $\delta \ll a$ , la ec. (2.119) queda:

$$T \approx -\frac{E'\sqrt{2\pi}}{8K_{II}} \frac{\bar{J}_{2,2} - \bar{J}_{2,1}}{\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1}} \quad (2.120)$$

que coincide con la expresión dada por la ec. (2.108).

Para la implementación del método mediante el MEF, valen las consideraciones hechas en el apartado 2.2.3.3. Se trata básicamente de calcular dos integrales de contorno ( $\bar{J}_{2,1}$  y  $\bar{J}_{2,2}$ ) utilizando la misma metodología de cálculo utilizada para calcular la integral de contorno  $J$ , pero incluyendo la integración del salto de la energía de deformación en las caras de grieta.

## 2.2.5 Método de la Integral de Dominio (EDI)

La evaluación numérica de las integrales  $J_k$  (ver p.ej. ec. (2.71)) a partir de su definición en forma de integral de contorno (de línea en 2D o de superficie en 3D) es siempre más compleja y laboriosa que la integral de dominio asociada (de área en 2D o de volumen en 3D). El Método de la

Integral de Dominio Equivalente (*Equivalent Domain Integral Method*, EDI) propuesto por Li *et al.* [16] varía ingeniosamente la formulación de la integral  $J$  a través del teorema de Gauss, de forma que *no es necesaria la evaluación de una integral de contorno, sino únicamente*<sup>15</sup> *de una integral de dominio*, siempre preferible por su mayor precisión y facilidad de cómputo (especialmente en problemas tridimensionales). Como se verá en los próximos apartados, el concepto de la Integral de Dominio Equivalente aplicado al cálculo de la integral  $J$  también se puede extender al cálculo de la integral  $J_2$ . En este caso, debido a la necesidad de calcular la integral de línea a lo largo de las caras de grieta, la implementación del método EDI para el cálculo de  $J_2$  implicará el cómputo de una integral de contorno junto con una integral de dominio.

### 2.2.5.1 Método EDI para el cálculo de la integral $J$

Recordemos que  $J$  es independiente del camino en un problema bidimensional con comportamiento elástico y homogéneo, ausencia de fuerzas por  $udv.$  y en caras de grieta. Para el caso de una grieta orientada en dirección  $x_1$  y crecimiento en la misma dirección, y de acuerdo con la denominación y sentido de los caminos empleados en la Figura 2.4,  $J$  viene dada por la expresión siguiente:

$$J = -\int_{\Gamma_3} \left( W\delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_i d\Gamma = -\int_{\Gamma_3} \Sigma_{1i} n_i d\Gamma \quad (2.121)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal al contorno que queda a la derecha del camino cuando se recorre en su sentido de definición y  $\Sigma_{1i}$  las componentes  $(1,i)$  del tensor de Eshelby. Al ser nulas las cargas en caras de grieta y al encontrarse éstas orientadas en dirección  $x_1$ , esta integral se puede escribir como extendida al camino cerrado  $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  si el integrando se

---

<sup>15</sup> Siempre y cuando la integral  $J$  sea independiente del camino y no incluya el cómputo de términos a lo largo de las caras de grieta. Esto siempre es cierto bajo las hipótesis de sólido elástico, homogéneo, ausencia de fuerzas por  $udv.$  y en caras de grieta.

multiplica por una función  $q_1$  que valga la unidad en  $\Gamma_3$  y se anule en  $\Gamma_1$ . Recordando entonces que  $\Sigma_{li}n_i = 0$  en las caras de grieta  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  y utilizando la función  $q_1$  descrita, podemos volver a escribir la ec. (2.121) como:

$$J = -\int_{\Gamma_3} \Sigma_{li} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_4} \Sigma_{li} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Sigma_{li} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \Sigma_{li} q_1 n_i d\Gamma \quad (2.122)$$

con

$$q_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ 1 & (x_1, x_2) \in \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.123)$$

Resulta entonces que:

$$J = -\oint_{\Gamma^*} \Sigma_{li} q_1 n_i d\Gamma = -\oint_{\Gamma^*} \left( W \delta_{li} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) q_1 n_i d\Gamma \quad (2.124)$$

Suponiendo que  $q_1$  sea una función suficientemente continua en  $A^*$  se puede aplicar el teorema de Gauss, resultando

$$J = -\int_{A^*} \left( \frac{\partial \Sigma_{li}}{\partial x_i} q_1 + \Sigma_{li} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right) dA = -\int_{A^*} \Sigma_{li} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (2.125)$$

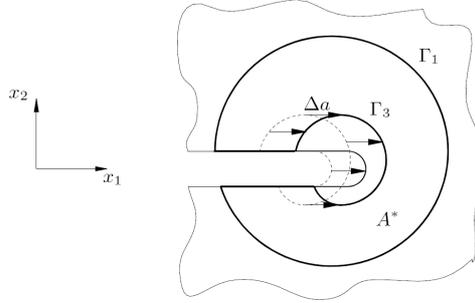
ya que  $\frac{\partial \Sigma_{li}}{\partial x_i} = 0$  en las condiciones anteriormente expuestas. Por tanto,  $J$  se puede calcular a partir de una integral de área como

$$J = \int_{A^*} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{li} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (2.126)$$

Multiplicando y dividiendo la ec. (2.126) por un incremento virtual de grieta  $\Delta a$  se tiene una interpretación física de  $q_1$  como una *función de ponderación* que hace variar el desplazamiento virtual  $\Delta x_1$  de los puntos

contenidos en  $A^*$  en dirección  $x_1$  entre el valor máximo  $\Delta a$  en el contorno  $\Gamma_3$  y 0 en el contorno  $\Gamma_1$  (ver Figura 2.14):

$$J = \frac{1}{\Delta a} \int_{A^*} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA \quad \text{con } \Delta x_1 = \Delta a q_1 \quad (2.127)$$



**Figura 2.14.** Desplazamiento virtual  $\Delta a$  de los puntos  $\Gamma_3$  (y de todos los puntos encerrados por  $\Gamma_3$ ) que induce un desplazamiento virtual  $\Delta x_1$  de los puntos en  $A^*$ .

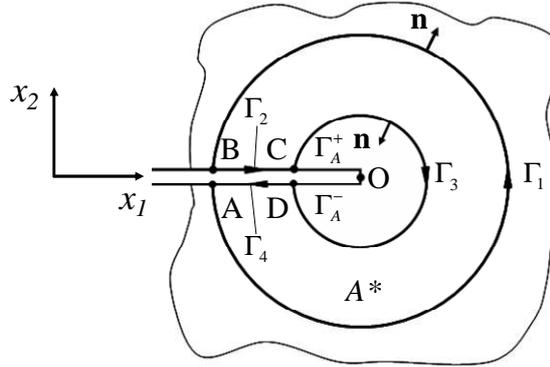
De otra manera,  $q_1$  es el desplazamiento virtual  $\Delta x_1$  de cada punto en  $A^*$  adimensionalizado con respecto al incremento virtual de longitud de grieta  $\Delta a$ , es decir  $q_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta a}$  y en el límite  $q_1 = \frac{dx_1}{da}$ .

### 2.2.5.2 Método EDI para el cálculo de la integral $J_2$ mediante una integral de área y una de línea

Bajo las mismas hipótesis vistas en el apartado anterior (comportamiento elástico y homogéneo, ausencia de fuerzas por udv. y en caras de grieta) es posible plantear, de manera análoga, el método EDI para el cálculo de la integral  $J_2$  (ver p.ej. Chang y Pu 1996 [3] o Woo *et al.* 1998 [25]). Para el caso de una grieta orientada en dirección  $x_1$  y crecimiento en la misma dirección, y de acuerdo con la denominación y sentido de los caminos empleados en la Figura 2.15,  $J_2$  viene dada por la expresión siguiente:

$$J_2 = -\int_{\Gamma_3} \left( W\delta_{2i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_A^+ + \Gamma_A^-} (W\delta_{2i}) n_i d\Gamma \quad (2.128)$$

donde  $\Gamma_A^+ = \overline{CO}$  y  $\Gamma_A^- = \overline{OD}$  en la Figura 2.15, y siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal al contorno que queda a la derecha del camino cuando se recorre en su sentido de definición (no indicado en las caras de grieta de Figura 2.15).



**Figura 2.15.** Definición de los caminos utilizados en el planteamiento del método EDI para el cálculo de  $J_2$ .

De forma análoga al método EDI para la integral  $J$ , definimos una función  $q_1$  que valga la unidad en  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_A^+$  y  $\Gamma_A^-$ , y se anule en  $\Gamma_1$ . Ejemplos gráficos de funciones con estas propiedades se presentan en el apartado 2.2.5.3 (Figura 2.16).

En estas hipótesis y haciendo uso esta vez de  $\Sigma_{2i} = W\delta_{2i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_2}$  (componentes  $(2,i)$  del tensor de Eshelby), podemos volver a escribir la ec. (2.128) como:

$$J_2 = -\int_{\Gamma_3} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_A^+ + \Gamma_A^-} (W\delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma \quad (2.129)$$

con

$$q_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ 1 & (x_1, x_2) \in \Gamma_3 \\ 1 & (x_1, x_2) \in \Gamma_A^+ ; (x_1, x_2) \in \Gamma_A^- \end{cases} \quad (2.130)$$

De esta forma no se altera el resultado y la ec. (2.129) es la misma que la ec. (2.128).

Si definimos los tramos orientados  $\Gamma_2 = \overline{BC}$  y  $\Gamma_4 = \overline{DA}$  (siempre con  $\mathbf{n}$  vector normal al contorno que queda a la derecha del camino cuando se recorre en su sentido de definición), podemos añadir y quitar una cantidad  $\int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma$  en la ec. (2.129) sin alterar su resultado:

$$\begin{aligned} J_2 &= -\int_{\Gamma_3} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_A^++\Gamma_A^-} (W\delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.131)$$

Cabe señalar que en las hipótesis planteadas, podemos volver a escribir la cuarta integral de la ec. (2.131) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma &= \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \left( W\delta_{2i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) q_1 n_i d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} (W\delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.132)$$

al ser las caras de grieta libres de carga.

Por lo tanto, la cuarta y la quinta integral se pueden unir resultando:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} (W\delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_A^++\Gamma_A^-} (W\delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma &= \\ = \int_{(\Gamma_2+\Gamma_A^+)+(\Gamma_4+\Gamma_A^-)} (W\delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.133)$$

recordando que  $q_1 = 1$  en  $\Gamma_A^+$  y  $\Gamma_A^-$ , mientras que  $q_1$  varía entre 0 y 1 en  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$ .

Llamando ahora  $\Gamma_s^+ = \Gamma_2 + \Gamma_A^+ = \overline{BO}$  y  $\Gamma_s^- = \Gamma_B^+ + \Gamma_4 = \overline{OA}$ , y teniendo en cuenta la ec. (2.132) podemos escribir la ec. (2.131) como:

$$J_2 = - \left[ \int_{\Gamma_3} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma \right] + \int_{\Gamma_s^+ + \Gamma_s^-} (W \delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma \quad (2.134)$$

y observando que  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  es un camino cerrado (que encierra el área  $A^*$ , ver Figura 2.15) la ec. (2.134) queda:

$$J_2 = - \oint_{\Gamma} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_s^+ + \Gamma_s^-} (W \delta_{2i}) q_1 n_i d\Gamma \quad (2.135)$$

Suponiendo que  $q_1$  sea una función suficientemente continua en  $A^*$  se puede aplicar el teorema de Gauss a la primera integral de la ecuación anterior, resultando:

$$\begin{aligned} - \oint_{\Gamma} \Sigma_{2i} q_1 n_i d\Gamma &= - \int_{A^*} \left( \frac{\partial \Sigma_{2i}}{\partial x_i} q_1 + \Sigma_{2i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} \right) dA = \\ &= - \int_{A^*} \Sigma_{2i} \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA = \int_{A^*} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} - W \delta_{2i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \end{aligned} \quad (2.136)$$

ya que  $\frac{\partial \Sigma_{2i}}{\partial x_i} = 0$  en las condiciones anteriormente expuestas. Por tanto,  $J_2$  se puede calcular a partir de una integral de área y de una integral de línea como

$$J_2 = \int_{A^*} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} - W \delta_{2i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA + \int_{\Gamma_s^+ + \Gamma_s^-} W q_1 n_2 d\Gamma \quad (2.137)$$

donde se ha utilizado la igualdad  $(W \delta_{2i}) n_i = W n_2$ .

### 2.2.5.3 Formulación del método mediante el MEF

En este apartado se describe la implementación del método EDI en el MEF para problemas 2D.

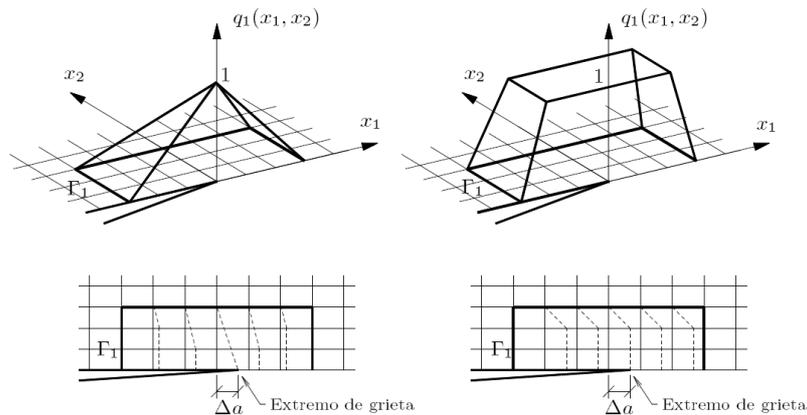
#### Área de integración

En primer lugar hay que determinar el área de integración  $A^*$ . Esta área puede tener forma anular (como se muestra en la Figura 2.15) siempre que las hipótesis de carga garanticen la independencia de  $J$  con respecto al camino escogido. A efectos prácticos, resulta obvia la conveniencia de que el contorno exterior  $\Gamma_1$  este formado por *lados de elementos* (y también el interior  $\Gamma_3$  si  $A^*$  es anular).

#### Elección de la función $q_1$

Recordemos que la función  $q_1$  ha de ser suficientemente continua y debe cumplir las condiciones dadas por la ec. (2.123) para el cálculo de  $J$  y/o la ec. (2.130) para  $J_2$ , donde  $\Gamma_3$  se reduce a un punto (el extremo de grieta) en el caso de que  $A^*$  no pueda ser anular. De hecho, como afirman Shih *et al.* [20], si la precisión con la que se calculan los campos de EF sobre todo el dominio es del mismo orden, entonces *las estimaciones de  $J$  serán insensibles al tamaño y forma de la región  $A^*$  e independientes de la función  $q_1$  escogida*. Sin embargo, en la práctica la estimación en la zona cercana al extremo de grieta es siempre menos precisa que en zonas alejadas. En estas condiciones, sí puede afectar el área  $A^*$  y la función  $q_1$  elegidas. Como regla general, cuanto más se extienda lejos del extremo de grieta el área  $A^*$  las estimaciones de  $J$  serán más precisas. Las mismas consideraciones se aplican al cómputo de la *componente de dominio* de la integral  $J_2$  calculada mediante EDI. Sin embargo, a diferencia de la integral  $J$ , el resultado global está condicionado por el cómputo de la *componente de contorno*, al ser esta contribución inevitablemente calculada en elementos cercanos a la grieta. Para superar este inconveniente, se puede aplicar el método EDI al cálculo de  $J_2$  complementando con el método de Eischen. Es decir, para calcular  $J_2$  se calcula normalmente la integral extendida al área

$A^*$  de la ec. (2.137), y a continuación se le suma la integral de contorno en las caras de grieta calculada mediante el método de Eischen.



**Figura 2.16.** Ejemplo de dos funciones  $q_1$  para problemas 2D: tipo piramidal (izda) y tipo plateau (dcha). Debajo: representación de los desplazamientos virtuales  $\Delta x_1$  en nodos.

En la Figura 2.16 se representan las funciones  $q_1$  tipo *piramidal* y tipo *plateau* propuestas por Shih *et al.* [20]. Ambas definen el dominio de integración alrededor del extremo y cumplen que  $q_1=0$  en el contorno exterior,  $q_1=1$  en el extremo de grieta y son funciones continuas. Si se utiliza una función tipo *plateau* los términos que multiplican a  $\frac{\partial q_1}{\partial x_i}$  no contribuyen

al cómputo cuando se trata de elementos en la zona plana de la función  $q_1$  (es decir, sólo importa donde hay gradiente de  $q_1$ ). Notar que para un problema en el que las hipótesis de carga sean las asociadas a la independencia de  $J$  del camino tomado, la utilización de una función tipo *plateau* equivale a la integración en un dominio  $A^*$  *anular*, ya que la única contribución es debida a aquellos elementos donde  $q_1$  no es constante. En estos casos la elección de una función  $q_1$  tipo *plateau* presenta la ventaja de evaluar los resultados lejos de la zona de elevados gradientes, donde la solución de EF es más exacta, aunque por contra es menor el número de elementos que contribuye al cómputo de la integral.

Cabe destacar la diferencia entre la implementación de una función tipo piramidal o tipo Plateau en el cálculo de  $J_2$  mediante EDI:

- Implementando una función de tipo Plateau, podemos calcular la componente de dominio de la integral en elementos alejados del extremo de grieta, donde la solución de EF es más exacta. Sin embargo, en la zona plana de  $q_1$ , la integral de contorno es ponderada con  $q_1=1$  para aquellos elementos que se encuentran en dicha zona;
- Implementando una función de tipo piramidal, calculamos la componente de dominio incluyendo elementos alrededor del extremo de grieta (donde la solución de EF es menos precisa). Sin embargo, la integral de línea no es ponderada en ningún tramo con  $q_1=1$ , ya que la función piramidal no tiene una zona plana como la función Plateau. Por eso, en la integral de línea, los elementos cerca de la cara de grieta son ponderados en menor medida respecto a una función de tipo Plateau (donde eran ponderados con  $q_1=1$ ).

### Integración numérica

Resulta evidente que la integración extendida al área  $A^*$  equivale a la suma de las integrales extendidas al área de cada uno de los elementos incluidos en  $A^*$ . La integral en cada elemento de expresiones como las ecs. (2.126) o (2.137) se realiza entonces numéricamente *en el dominio de referencia*  $\xi, \eta$  mediante la cuadratura de Gauss. A continuación se incluye a modo de ejemplo la expresión discretizada de la ec. (2.126). Se supondrá el uso de *elementos isoparamétricos*.

$$J \approx \sum_{e=1}^{N_e \in A^*} \left\{ \sum_{m=1}^{N_G} \sum_{n=1}^{N_G} H_m H_n \left[ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{li} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} |\mathbf{J}| \right]_{(\xi_m, \eta_n)} \right\}_e \quad (2.138)$$

donde  $N_e$  es el número de elementos contenidos en el área de integración  $A^*$ ,  $N_G$  es el número de puntos de Gauss tomados en cada dirección local de integración  $\xi, \eta$ , siendo  $H_m, H_n$  sus correspondientes pesos de Gauss y  $|\mathbf{J}|$  es el determinante de la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  de la transformación de coordenadas. El integrando (expresión entre corchetes) ha de ser evaluado en las coordenadas de referencia de los puntos de Gauss  $(\xi_m, \eta_n)$ . Para la

evaluación de  $\frac{\partial q_1}{\partial x_i}$  resulta conveniente definir la función  $q_1$  en cada elemento como interpolación a partir de los valores nodales:

$$q_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{N_{ne}} N_n(\xi, \eta) q_{1n} \quad (2.139)$$

donde  $N_{ne}$  es el número de nodos por elemento,  $N_n(\xi, \eta)$  es la función de forma del nodo  $n$  en coordenadas de referencia de elemento y  $q_{1n}$  es el valor de  $q_1$  asociado al nodo  $n$ . De esta manera, las derivadas de  $q_1$  con respecto a las coordenadas espaciales  $x_i$  se calculan como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N_{ne}} \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \xi} q_{1n} \\ \sum_{n=1}^{N_{ne}} \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \eta} q_{1n} \end{pmatrix} \quad (2.140)$$

#### Aplicación a la integral de interacción $M_1 \equiv I^{(1,2)}$

La formulación del método EDI también es aplicable a otras integrales de contorno distintas de las integrales  $J$  y  $J_2$ . Así, en el caso 2D y bajo las hipótesis que permiten la aplicación del método EDI, Shih y Asaro [19] dan una expresión en forma de integral de dominio para la integral de interacción  $M_1 \equiv I^{(1,2)}$  (ver ec. (2.64)):

$$M_1 \equiv I^{(1,2)} = \int_{A^*} \left( \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} dA \quad (2.141)$$



### 3 ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

#### Resumen del capítulo:

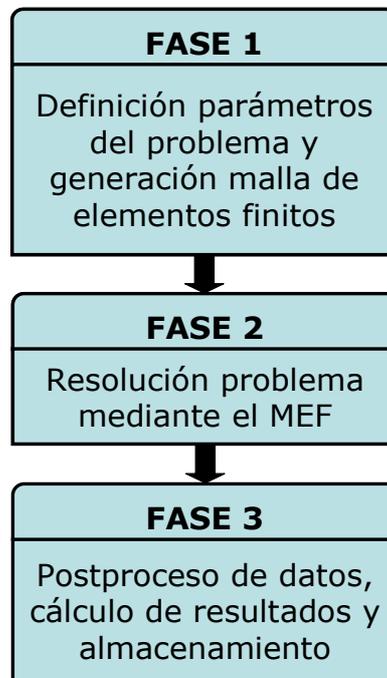
*En este capítulo se presenta, mediante diagramas de bloques, la estructura del programa implementado en esta Tesis para el cálculo de la integral  $J_2$  y del  $T$ -Stress mediante los métodos presentados en el capítulo anterior.*

En los apartados anteriores se ha descrito como abordar el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  (e indirectamente de los FIT  $K_I$  y  $K_{II}$ ) y de la tensión no singular  $T$  ( $T$ -Stress) que aparece en la expresión de  $\sigma_{11}$  de las ecuaciones de Williams (ver ec. (2.1)). La aplicación de diferentes metodologías para el cálculo de las variables descritas en problemas de la MFEL se ha implementado en Matlab conjuntamente con el programa de análisis por elementos finitos ABAQUS. Como parte del programa había sido desarrollado en un trabajo anterior para el cálculo de la integral  $J$  (Giner 2001 [11]), ha sido necesario por un lado adaptar e integrar el código existente y por otro lado desarrollar nuevas rutinas con el fin de alcanzar los objetivos de la presente Tesis. Por eso, este capítulo se centrará en las rutinas desarrolladas para el cálculo de  $J_2$  (y del  $T$ -Stress) mediante el método de Eischen y mediante el método de la Integral de Dominio Equivalente (EDI) complementado con la metodología de Eischen.

Debido al gran número de rutinas involucradas y a la densidad del código desarrollado, en este apartado tan sólo se describirá de forma esquemática (mediante diagramas de bloques) el funcionamiento del programa.

El programa de cálculo se subestructura en tres fases bien diferenciadas, que se muestran en la Figura 3.1:

- **Fase 1:** en la primera fase se definen los datos del problema y se genera la malla de elementos finitos (nodos y topología de la malla). La información generada es almacenada en ficheros para ser leídos e interpretados por el programa ABAQUS en la fase sucesiva.
- **Fase 2:** en esta fase el programa principal llama al programa ABAQUS que lee la información generada en la fase precedente y resuelve el problema mediante el MEF. A continuación, ABAQUS genera unos ficheros de resultados que serán utilizados para el postproceso en la fase sucesiva.
- **Fase 3:** en la fase final, el programa principal lee los resultados obtenidos a partir del análisis por el MEF y, implementando diferentes rutinas, calcula las variables de interés para el problema estudiado (concretamente las integrales  $J$  y  $J_2$ , los FIT  $K_I$  y  $K_{II}$  y, si procede, el  $T-Stress$ ). Finalmente, se generan unos ficheros donde se almacenan de manera ordenada todos los resultados obtenidos en los problemas analizados.



**Figura 3.1.** Fases principales del programa de cálculo para problemas en modo mixto de la MFEL.

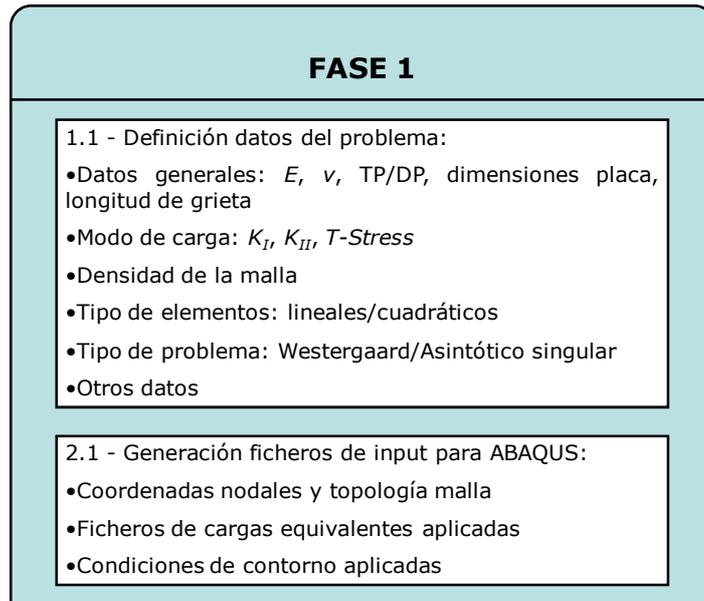
Los diagramas de bloques anteriores representan de una forma global el funcionamiento del programa de cálculo de Matlab implementado. Para conocer de una manera más detallada su funcionamiento, a continuación se detalla la función que realiza cada fase.

La primera fase del programa está formada por diferentes subrutinas que se encargan de definir los datos generales del problema y de generar la malla de elementos finitos del problema a estudiar. La primera fase se puede dividir en dos subfases (ver Figura 3.2), descritas a continuación:

- 1) En la primera subfase se definen los datos del problema. Entre otros, se definen el módulo de Young  $E$ , el coeficiente de Poisson  $\nu$ , el estado tensional (tensión plana o deformación plana) y las dimensiones de la placa y de la longitud de grieta. A continuación, se definen los datos relacionados con el modo de carga que se quiere aplicar al problema. Estos datos son el  $K_I$ , el  $K_{II}$  y el  $T$ -Stress  $T$ . Estos datos, que definiremos “exactos”, son introducidos por el usuario y permiten, mediante las ecs. (2.1)-(2.6), definir unívocamente un estado tensional que se aplicará al problema a estudiar. A continuación, se define el tipo de elementos con los que se quiere mallar al geometría del problema (cuadráticos o lineales) y, finalmente, el tipo de problema que se quiere estudiar (el problema de Westergaard o el problema asintótico singular<sup>16</sup>, ver apartado 4.2).
- 2) Con los datos definidos anteriormente, se lanzan una serie de subrutinas que se encargan de generar los ficheros necesarios para ejecutar el análisis de elementos finitos mediante ABAQUS. Los ficheros generados básicamente consisten en datos para generar la malla en ABAQUS (coordenadas nodales y topología), datos para aplicar las cargas nodales previamente calculadas y datos para aplicar las condiciones de contorno (restricciones en desplazamientos).

---

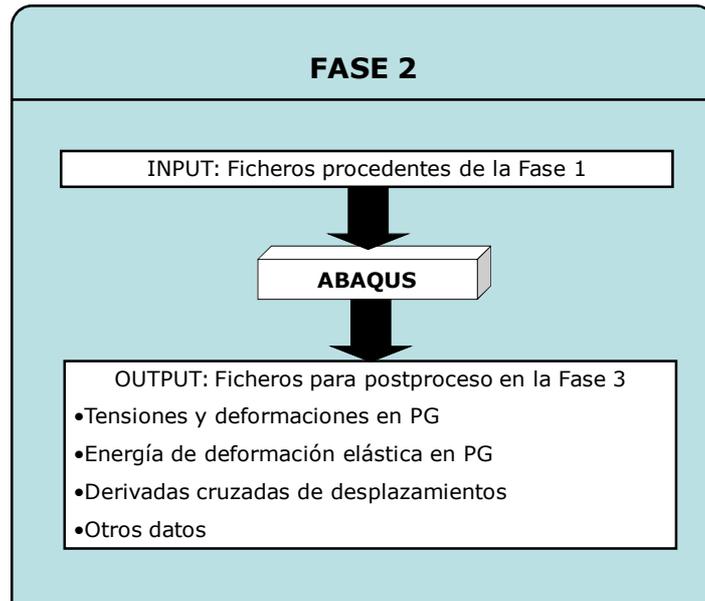
<sup>16</sup> Problema en el que las tensiones aplicadas se deben únicamente al primer término del campo de tensiones asintótico (y al  $T$ -Stress para la tensión  $\sigma_{11}$ ).



**Figura 3.2. Descripción de la fase 1 del programa principal y sus sub-fases.**

La fase sucesiva consiste en el análisis del problema mediante el MEF en ABAQUS. Los ficheros generados en la fase 1 son utilizados por ABAQUS como input. A partir del análisis por EF se generan una serie de ficheros que serán luego utilizados por el programa principal en la fase 3 (postproceso). Estos ficheros contienen toda la información necesaria para el cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  mediante los métodos presentados en el capítulo 2. Dicha información consiste en:

- Tensiones  $\sigma_{ij}$  y deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  en los puntos de Gauss
- Energía de deformación elástica  $W$  en los puntos de Gauss
- Derivadas cruzadas de desplazamientos  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$  en los puntos de Gauss
- Otros datos para el postproceso

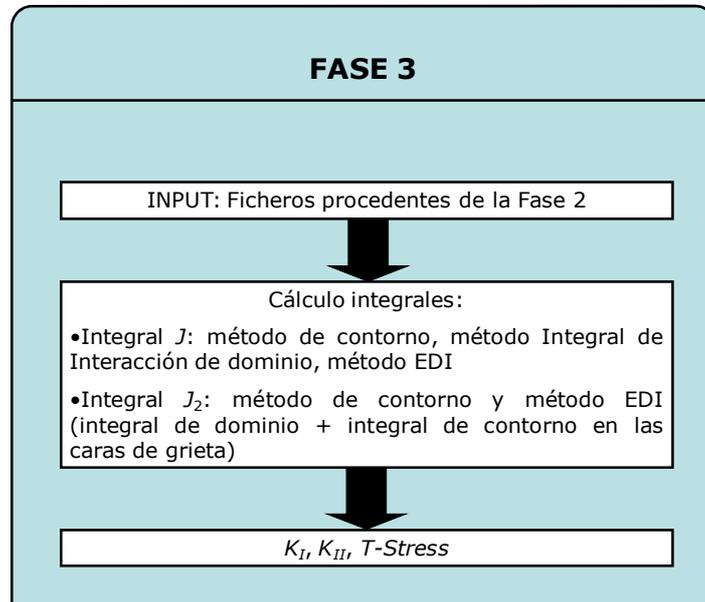


**Figura 3.3. Descripción de la fase 2 del programa principal: análisis por el MEF mediante ABAQUS.**

Finalmente, en la fase 3, a partir de los datos obtenidos del análisis por el MEF se procede a calcular las integrales  $J$  y  $J_2$  (Figura 3.4). Las metodologías empleadas son:

- Integral  $J$ : se calcula mediante el método EDI y mediante el método de la Integral de Interacción I (implementada mediante una formulación de dominio equivalente) según la metodología indicada en el apartado 2.2.5. Para eso se implementa una integración numérica en el área interesada (como descrito en el apartado 2.2.5.2) a partir de la información procedente de los puntos de Gauss de los elementos del área. También se calcula la integral  $J$  implementando un método de contorno, utilizando por ejemplo la ec. (2.15). Para el cálculo de la integral de contorno se han escogido caminos cuadrados concéntricos alrededor de la grieta (ver apartado 4.3) y coincidentes con los lados de los elementos. La metodología de cálculo para la integración en el lado de un elemento a partir de la información procedente de sus puntos de Gauss también se ha descrito en el apartado 2.2.3.3.

- Integral  $J_2$ : se evalúa mediante integral de contorno y mediante método EDI (que supone una integral de dominio y más una integral de contorno). En ambos métodos se implementa la metodología de Eischen [7] para el cálculo de  $J_2$  (ver apartado 2.2.4.2).



**Figura 3.4. Descripción de la fase 3 del programa principal: postproceso de datos.**

A partir de los valores de  $J$  y  $J_2$  obtenidos, en la fase 3 es posible calcular los FIT utilizando las relaciones descritas en el apartado 2.2.4.2 y, finalmente, también el  $T-Stress$  mediante el método de Eischen utilizando la ec. (2.108). Todos los resultados obtenidos son almacenados y ordenados en ficheros para ser leídos una vez terminado el programa.

Una vez programado todo el cálculo necesario, se puede ya explotar el programa y extraer los resultados a partir del análisis de diferentes problemas de la MFEL en modo I, modo II o modo mixto. Todos los resultados obtenidos se muestran detalladamente en el siguiente capítulo.

## 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se presentan los resultados obtenidos implementando el programa desarrollado mediante varios ejemplos numéricos. En primer lugar, se describirán los problemas estudiados y los datos de partida utilizados. A continuación, se presentarán los resultados obtenidos a partir de la validación parcial del programa, aplicando las rutinas desarrolladas al cálculo de problemas cargados en modo I. Finalmente, se presentarán los resultados obtenidos implementando el programa en el cálculo de problemas cargados en modo mixto.*

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 se ha descrito toda la formulación matemática necesaria para abordar el estudio de problemas 2D de la MFEL, y en especial modo para el cálculo de  $J_2$  en problemas en modo mixto. También se ha descrito en el capítulo 3, mediante diversos diagramas de bloques, el funcionamiento básico del programa implementado en Matlab para el lanzamiento de análisis de problemas mediante el MEF y el postproceso de los datos para el cálculo de las magnitudes de interés (básicamente  $J$ ,  $J_2$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $T$ -Stress). En este capítulo se presentan los resultados obtenidos implementando el programa desarrollado mediante varios ejemplos numéricos.

Cabe señalar que en el proceso de desarrollo del programa, se ha llevado a cabo una validación parcial del mismo. Como ya se ha comentado anteriormente, el programa desarrollado en esta tesis calcula la integral  $J_2$

mediante el método de Eischen, bien calculando integrales de contorno, bien calculando integrales equivalentes de dominio. Para alcanzar este objetivo, se ha decidido desarrollar inicialmente un conjunto de subrutinas que permitan calcular integrales  $J$  en contornos cuadrados concéntricos alrededor de la grieta y **superpuestos a los lados de los elementos**.

Esta elección para abordar el problema conlleva las siguientes ventajas:

1. Una vez desarrollado el programa para el cálculo de la integral  $J$ , su extensión al cálculo de la integral  $J_2$  es simple e inmediata. De hecho, considerando la expresión

$$J_k = \int_{\Gamma_0} \left( Wn_k - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \delta_{k2} \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_k d\Gamma \quad (4.1)$$

se observa que, una vez desarrollada una rutina que implemente la ec. (4.1) para el cálculo de  $J$ , para calcular  $J_2$  es suficiente cambiar  $n_1$  por  $n_2$  y  $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$  ( $j=1,2$ ) por  $\frac{\partial u_j}{\partial x_2}$  ( $j=1,2$ ). A nivel de programación, se trata simplemente de cambiar las variables de input de la rutina.

2. El desarrollo de una rutina que calcule integrales de contorno en los lados de los elementos, permite implementar dicha rutina de forma inmediata para el cálculo del salto de energía de deformación elástica  $\int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} Wn_2 d\Gamma$  en las caras de grieta  $\Gamma_c = \Gamma_c^+ + \Gamma_c^-$ , necesario para el cálculo de  $J_2$ . De hecho, en las caras de grieta es imprescindible que el camino pase por los lados de los elementos que constituyen las caras de grieta. Además, una rutina con las características previamente descritas se puede implementar también para el cálculo de  $J_2$  mediante el método EDI, ya que para eso se requiere calcular también una integral de contorno en las caras de grieta (ver ec. (2.137))
3. Finalmente, el desarrollo de una rutina que calcule inicialmente la integral  $J$ , permite comparar los resultados obtenidos con los obtenidos a partir de otros métodos para el cálculo de  $J$ . Para eso, se han utilizado las rutinas realizadas por Giner [11] para el cálculo de

$J$  mediante el método EDI y el Método de la Integral de Interacción (en forma de integral de dominio equivalente). La validación de la rutina desarrollada mediante la comparación con resultados de  $J$  obtenidos por otros métodos permite:

- detectar problemas y errores de forma más sencilla, al ser más sencillo el cálculo de la integral  $J$  comparado con la integral  $J_2$  (no es necesario calcular la integral en las caras de grieta, ni utilizar el método de Eischen que, aunque sencillo, es bastante laborioso);
- garantizar la robustez y la validez de la rutina una vez extendida al cálculo de la integral  $J_2$  (siendo además su extensión simple e inmediata, ver punto 1).

Cabe señalar que el carácter paramétrico de las rutinas desarrolladas no limita su aplicación al cálculo de las integrales  $J$  y  $J_2$  a lo largo de caminos concéntricos superpuestos a los lados de los elementos, pudiéndose en un futuro adaptar el programa de forma inmediata a otras exigencias si se requiere (p.ej. caminos no concéntricos, cálculo a lo largo de caminos pasantes por puntos de Gauss de elemento, etc.).

Una vez validado el programa, es posible en un principio pasar a la implementación del mismo para el cálculo de  $J_2$  en problemas en modo mixto de la MFEL.

## 4.2 PROBLEMAS 2D ANALIZADOS

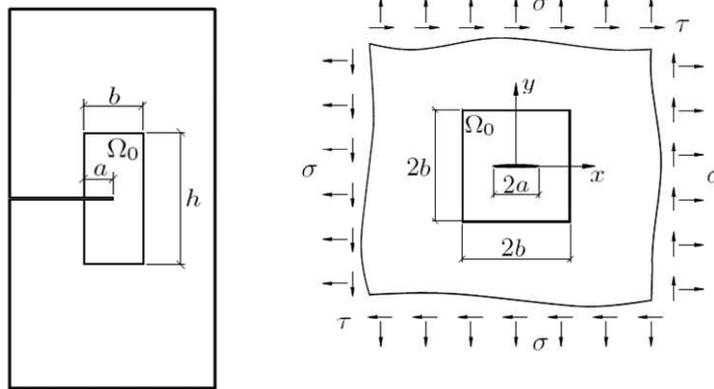
En este apartado se describen los dos problemas bidimensionales que se han estudiado en esta tesis mediante análisis con el método de los elementos finitos (MEF). Aunque haya gran variedad de posibles problemas para el cálculo de los parámetros relevantes en la Mecánica de Fractura Elástico-Lineal, en esta tesis se han estudiado los problemas siguientes (Figura 4.1):

1. el problema asintótico singular, donde se estudia una porción de dominio en proximidad de una grieta describiendo el estado

tensional mediante los primeros términos (términos singulares, proporcionales a  $r^{-1/2}$ ) de las ecuaciones (2.1)-(2.6). Cabe señalar que además de los términos singulares, también se ha considerado el término  $T$  ( $T$ -Stress) que aparece en la ec. (2.1). Al despreciar los términos de orden superior, el campo tensional descrito es por lo tanto un campo truncado al primer término. En esta tesis se ha estudiado una placa de dimensiones finitas con grieta lateral.

2. el **problema de Westergaard**, donde se estudia una porción finita de dominio en proximidad de una grieta de una placa infinita, en el que el campo de tensiones corresponde a un problema que incluye los diferentes términos del desarrollo en serie y tiene expresiones conocidas.

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = f(r^{-1/2}, \theta)$$

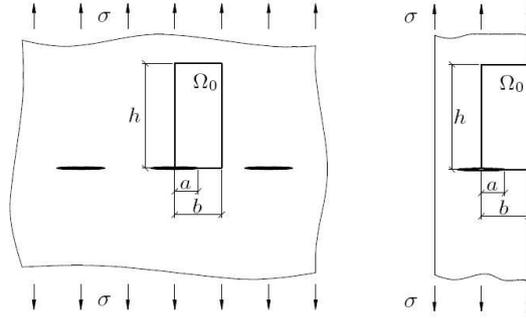


**Figura 4.1. Porciones de dominio consideradas para el problema asintótico singular (porción de placa finita con grieta lateral, izda) y para el problema de Westergaard (grieta en placa infinita, dcha).**

La gran ventaja de estos problemas es que los campos de tensiones y desplazamientos son conocidos de forma exacta, lo que permite evaluar el error exacto cometido en el cálculo.

Cabe destacar que, aunque en esta tesis se haya limitado el estudio a los problemas previamente descritos, el carácter paramétrico de las macros del programa de cálculo desarrollado permite adaptarlas de forma inmediata para el estudio de otros tipos problema (en general es suficiente cambiar las condiciones de contorno aplicadas). Algunos posibles ejemplos son una

secuencia infinita de grietas colineales en el seno de placa infinita o una grieta centrada en una placa de anchura finita y longitud infinita (Figura 4.2)



**Figura 4.2. Ejemplos de otros problemas analizables con el programa: secuencia infinita de grietas colineales (izda) y grieta centrada en una placa de longitud infinita y anchura finita (dcha).**

A continuación, se describen con más detalle los dos problemas estudiados en el marco de esta tesis.

#### 4.2.1 Problema asintótico singular

En un problema asintótico singular se considera que el estado tensional en proximidad de la grieta es completamente descrito por el primer término del desarrollo de Williams. Esto equivale a considerar tan sólo los términos singulares (proporcionales a  $r^{-1/2}$ ) que aparecen en las ecs. (2.1)-(2.6), de ahí el nombre de problema “singular”. Dicha aproximación resulta razonable ya que, de acuerdo con la nomenclatura de la Figura 2.1, en proximidad de la grieta el radio  $r$  tiende a cero, por lo que predominan los términos singulares y es posible entonces despreciar los términos de orden superior ( $O(r^{1/2})$  y superiores). Sin embargo, es posible añadir un término no singular constante (el *T-Stress*) en la expresión de  $\sigma_{11}$  (ec. (2.1)). Por eso, en esta tesis también se ha contemplado el estudio de problemas singulares en los que el *T-Stress* es no nulo.

Para definir un problema asintótico singular en dos dimensiones se fijan los valores de entrada de  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $T$  que, como se puede observar en las expresiones de las ecuaciones (2.1)-(2.6), son los que determinan unívocamente el estado tensional en el entorno de la grieta. A partir de dichos valores es posible entonces calcular las tensiones equivalentes en cada punto  $\sigma_{11}(r, \theta)$ ,  $\sigma_{22}(r, \theta)$  y  $\sigma_{12}(r, \theta)$  mediante la siguiente expresión compacta:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} \quad (4.2)$$

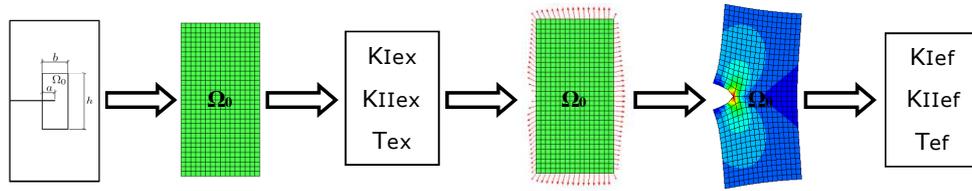
donde  $T$  es el  $T$ -Stress,  $\delta_{ij}$  es el símbolo de Kronecker y  $f_{ij}^I(\theta)$  y  $f_{ij}^{II}(\theta)$  son las funciones trigonométricas que tienen la expresión siguiente:

$$f_{ij}^I(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$f_{ij}^{II}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) & \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La idea base del estudio de un problema asintótico singular mediante el MEF es que se haga un recorte de un sólido en un entorno de la grieta. Una vez mallado el recorte mediante elementos finitos, se le aplican en sus lados las cargas equivalentes fijando unos valores exactos de  $K_{Iex}$ ,  $K_{IIex}$  y  $T_{ex}$  y calculando dichas tensiones mediante las ecuaciones expresadas por la ec. (4.2). A continuación se resuelve el problema mediante análisis por elementos finitos. Finalmente, a partir de la solución obtenida por el MEF, es posible postprocesar los resultados para calcular las integrales  $J_{ef}$  y  $J_{2ef}$  y, mediante las relaciones  $J_k$ -FIT vistas anteriormente (ecs. (2.87) y (2.88)), obtener los valores de de los FIT  $K_{Ief}$ ,  $K_{IIef}$  y, implementando el método de Eischen, también  $T_{ef}$ . Estos valores, calculados a partir de la solución obtenida por el MEF, se pueden comparar con los valores de partida fijados

( $K_{Iex}$ ,  $K_{IIex}$  y  $T_{ex}$ ) para estimar el error cometido en el cálculo. Este proceso se describe en el esquema que se muestra a continuación (Figura 4.3), donde se ha recortado una porción de dominio  $\Omega_0$  de una placa con grieta lateral:



**Figura 4.3. Proceso para el cálculo de parámetros en un problema asintótico o singular.**

Este planteamiento permite generar diferentes problemas (modo I, modo II, modo mixto) cuya solución exacta es conocida (al haber fijado los valores  $K_{Iex}$ ,  $K_{IIex}$  y  $T_{ex}$  para describir el estado tensional). Esto a su vez permite comparar la solución obtenida por el MEF y calcular el error exacto cometido en el cálculo.

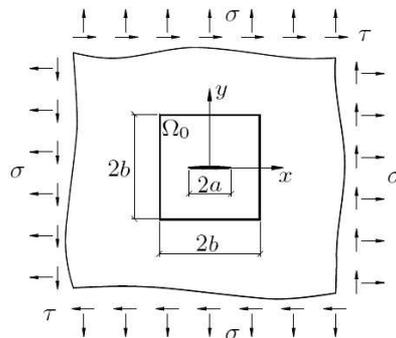
#### 4.2.2 Problema de Westergaard

Como se ha comentado en el apartado anterior, en el problema asintótico singular se ignoran los términos de orden superior en las ecuaciones que describen el campo de tensiones en el entorno de grieta, al ser los términos proporcionales a  $r^{-1/2}$  los dominantes. Esta aproximación es razonable y permite analizar problemas de la MFEL para establecer el error de cálculo cometido en los resultados obtenidos mediante un análisis por elementos finitos. Sin embargo, este planteamiento proporciona inevitablemente un campo de tensiones de partida no realista, que no representa el estado tensional realista en proximidad de una grieta de un cuerpo sometido a un cierto estado de carga (p.ej. modo I, modo II o modo mixto).

Por este motivo, también se ha planteado un problema de referencia basado en la solución analítica de Westergaard para una grieta en una placa infinita. Este problema tiene las siguientes ventajas:

- Como para el problema asintótico singular, es posible generar diferentes problemas (modo I, modo II, modo mixto), variando de manera oportuna los parámetros de entrada  $K_{Iex}$ ,  $K_{IIex}$  y  $T_{ex}$ .
- Permite modelar estados de modo I, modo II y modo mixto **con solución analítica exacta**.
- Las expresiones analíticas exactas para los campos de tensiones y desplazamientos en todos los puntos del dominio son conocidas.

En principio este ejemplo sigue presentando el inconveniente de que su dominio de definición es infinito. Para evitar modelar el dominio infinito, se ha considerado una porción finita del mismo en el entorno de grieta (Figura 4.4) y en su contorno se ha impuesto la distribución de tensiones correspondiente a la solución analítica de Westergaard (de forma similar al problema asintótico singular).



**Figura 4.4. Placa infinita sometida a tensiones uniformes  $\sigma$  (biaxiales) y  $\tau$  en el infinito con grieta de longitud  $2a$ . Porción finita de dominio  $\Omega_0$  modelable mediante EF.**

Tradicionalmente, la expresión explícita de los campos analíticos asociados a la solución de Westergaard en puntos alejados del extremo de grieta no ha presentado una especial utilidad y, de hecho, es difícil encontrar una referencia bibliográfica que incluya explícitamente las funciones de punto  $(x, y)$  que definen los campos analíticos de tensiones y desplazamientos para este problema. Debido a este inconveniente, Giner [11] tuvo que deducir dichos campos en su trabajo, presentando en su Tesis Doctoral las expresiones explícitas que obtuvo, y que también se proponen en esta tesis.

### Solución para el modo simétrico (modo I)

El planteamiento de Westergaard utiliza funciones analíticas de variable compleja  $Z(z)$ , con  $z = x + iy$ , y es aplicable a problemas de fractura donde la grieta de longitud  $2a$  ocupa un segmento rectilíneo del eje  $x$  (ver p.ej. Tada *et al.* [22])

Haciendo referencia a la Figura 4.4 y al sistema de coordenadas representado, la función de Westergaard para el problema biaxial cargado en  $x$  e  $y$  con una tensión biaxial uniforme en el infinito  $\sigma$  y con grieta situada en el segmento  $-a \leq x \leq a$  del eje  $x$  es:

$$Z_I(z) = \frac{z\sigma}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (4.5)$$

Se definen además  $Z'_I$  y  $\bar{Z}_I$  como:

$$Z'_I(z) = \frac{dZ_I}{dz} = \frac{a^2\sigma}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \quad (4.6)$$

$$\bar{Z}_I(z) = \int Z_I dz = \sigma\sqrt{z^2 - a^2} \quad (4.7)$$

Estas relaciones entre las funciones y sus derivadas satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann para funciones analíticas<sup>17</sup>. Se puede demostrar que los campos de tensiones vienen dados por:

$$\sigma_x^I = \text{Re } Z_I - y \text{Im } Z'_I \quad (4.8)$$

$$\sigma_y^I = \text{Re } Z_I + y \text{Im } Z'_I \quad (4.9)$$

$$\tau_{xy}^I = -y \text{Re } Z'_I \quad (4.10)$$

y los campos de desplazamientos  $u^I$  y  $v^I$  por:

---

<sup>17</sup> Las condiciones de Cauchy-Riemann para un función analítica  $Z = \text{Re } Z + i \text{Im } Z$  establecen que  $\text{Re } Z' = \partial \text{Re } Z / \partial x = \partial \text{Im } Z / \partial y$  y que  $\text{Im } Z' = \partial \text{Im } Z / \partial x = -\partial \text{Re } Z / \partial y$ .

$$2\mu u' = \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \bar{Z}_I - y \operatorname{Im} Z_I \quad (4.11)$$

$$2\mu v' = \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \bar{Z}_I - y \operatorname{Re} Z_I \quad (4.12)$$

donde  $\mu$  es el módulo de rigidez a cizalladura y la constante  $\kappa$  es la constante de Kolosov, definida en la ec. (2.14). Las ecs. (4.8)-(4.12) son únicamente válidas para el caso biaxial en el que la tensión aplicada en  $x$  e  $y$  es la misma. En cualquier otro caso, necesitan de la inclusión de ciertos términos constantes. Un análisis más detallado del caso más general se puede encontrar en Eftis *et al.* [6].

Se puede comprobar que las ecs. (4.8)-(4.10) satisfacen las preceptivas condiciones de contorno:

$$\sigma_x' = \sigma_y' = \sigma ; \tau_{xy}' = 0 \text{ cuando } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

$$\sigma_y' = 0 ; \tau_{xy}' = 0 \text{ cuando } y = 0, -a \leq x \leq a \quad (4.14)$$

Con el fin de obtener las expresiones explícitas para los campos de tensiones y desplazamientos en función de  $x$ ,  $y$  se utilizan las definiciones siguientes:

$$t = z^2 - a^2 = (x + iy)^2 - a^2 = (x^2 - y^2 - a^2) + i(2xy) = m + in \quad (4.15)$$

donde se ha definido  $m$  y  $n$  como:

$$m = \operatorname{Re} t = \operatorname{Re}(z^2 - a^2) = x^2 - y^2 - a^2 \quad (4.16)$$

$$n = \operatorname{Im} t = \operatorname{Im}(z^2 - a^2) = 2xy \quad (4.17)$$

Notar que  $m$ ,  $n$  son funciones de las coordenadas de punto  $x$ ,  $y$ . El conjugado de  $t$  se denotará por  $\bar{t} = m - in$ . El módulo de  $t$  y de  $\bar{t}$  será:

$$|t| = |\bar{t}| = \sqrt{m^2 + n^2} \quad (4.18)$$

Utilizando esta notación  $Z_I$  se puede escribir como

$$Z_I(z) = \frac{z\sigma}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{z\sigma}{\sqrt{t}} = \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}}(x + iy)\sqrt{|t|} \quad (4.19)$$

La raíz cuadrada de  $\bar{t}$  tiene dos soluciones:

$$\sqrt{\bar{t}} = \sqrt{m - in} = \begin{cases} \sqrt{|t|} \left[ \cos \frac{\phi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right] \\ \sqrt{|t|} \left[ \cos \frac{\phi + 2\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\phi + 2\pi}{2} \right] \end{cases} \quad (4.20)$$

donde:

$$\phi = \arg \bar{t} = \arg(m - in) \text{ con } \phi \in [-\pi, \pi] \quad (4.21)$$

Diversas comprobaciones realizadas por Giner [11] con las expresiones que siguen demuestran que la única solución de  $\sqrt{|t|}$  que tiene sentido físico en el semiplano derecho  $x \geq 0$  es la primera de la ec. (4.20) (denominada valor principal de la raíz). Esta solución es la única que satisface condiciones de continuidad de tensiones y que converge al estado biaxial puro en la lejanía de grieta. La solución con  $(\phi + 2\pi)$  es la válida para el semiplano  $x < 0$ . Los ejemplos numéricos analizados en esta tesis tomarán porciones del dominio  $\Omega_0$  en el semiplano  $x \geq 0$ , por lo que sustituyendo la solución correspondiente en la ec. (4.19) se tiene:

$$\operatorname{Re} Z_I = \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.22)$$

$$\operatorname{Im} Z_I = \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left( x \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + y \cos \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.23)$$

Un desarrollo similar para  $Z'_I$  da lugar a las siguientes expresiones para los campos de tensiones como funciones reales de  $x$ ,  $y$  (recordemos que  $m$ ,  $n$ ,  $|t|$  y  $\phi$  son funciones de  $x$ ,  $y$ ):

$$\sigma'_x = \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left[ \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) + y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.24)$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left[ \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) - y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \sin \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.25)$$

$$\tau'_{xy} = y \frac{a^2 \sigma}{|t|^2 \sqrt{|t|}} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.26)$$

Análogamente, calculando la parte real e imaginaria de  $\bar{Z}_I$ , los campos de desplazamientos exactos se pueden escribir como:

$$u' = \frac{\kappa-1}{4\mu} \sigma \sqrt{|t|} \cos \frac{\bar{\phi}}{2} - y \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left( x \sin \frac{\phi}{2} + y \cos \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.27)$$

$$v' = \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma \sqrt{|t|} \sin \frac{\bar{\phi}}{2} - y \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma}{\sqrt{|t|}} \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.28)$$

donde  $\bar{\phi}$  se define como:

$$\bar{\phi} = \arg t = \arg(m + in) \text{ con } \bar{\phi} \in [-\pi, \pi] \quad (4.29)$$

Con el fin de establecer restricciones de desplazamientos en los modelos de EF es de interés conocer los desplazamientos exactos  $u'$  y  $v'$  en lo ejes  $x$ ,  $y$ . Es sencillo demostrar que:

$$u' = \frac{\kappa-1}{4\mu} \sigma \sqrt{x^2 - a^2} ; v' = 0 \text{ si } |x| \geq a , y = 0 \quad (4.30)$$

$$u^I = 0 ; v^I = \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{si } |x| < a , y = 0 \quad (4.31)$$

$$u^I = 0 ; v^I = \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma \sqrt{y^2 + a^2} - \frac{\sigma}{2\mu} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + a^2}} \quad \text{si } x = 0 , \forall y \quad (4.32)$$

Por último, hay que recordar que el FIT para este problema en modo I es simplemente:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.33)$$

por lo que en todas las ecuaciones anteriores  $\sigma$  puede ser sustituido por  $K_I / \sqrt{\pi a}$ .

### Solución para el modo antisimétrico (modo II)

De forma totalmente análoga se puede definir la función de Westergaard para el problema de una placa infinita, con grieta situada en el segmento  $-a \leq x \leq a$  del eje  $x$ , y cargada en el infinito con una tensión tangencial uniforme  $\tau$  (ver Figura 4.4). Esta función es:

$$Z_I(z) = \frac{iz\tau}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (4.34)$$

Los campos de tensiones para este caso vienen dados por:

$$\sigma_x'' = 2 \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II}' \quad (4.35)$$

$$\sigma_y'' = y \operatorname{Im} Z_{II}' \quad (4.36)$$

$$\tau_{xy}'' = -\operatorname{Im} Z_{II} - y \operatorname{Re} Z_{II}' \quad (4.37)$$

siendo  $Z_{II}' = dZ_{II} / dz = \frac{ia^2\tau}{(z^2 - a^2)^{3/2}}$ .

Los campos de desplazamientos  $u''$  y  $v''$  vienen dados por:

$$2\mu u'' = \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II} \quad (4.38)$$

$$2\mu v'' = \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Im} \bar{Z}_{II} - y \operatorname{Re} Z_{II} \quad (4.39)$$

siendo  $\bar{Z}_{II} = \int Z_{II} dz = i\tau\sqrt{z^2 - a^2}$ .

Es sencillo comprobar que las ecs. (4.35)-(4.37) satisfacen las perceptivas condiciones de contorno:

$$\sigma_x'' = \sigma_y'' = 0 ; \tau_{xy}'' = 0 \text{ cuando } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (4.40)$$

$$\sigma_y'' = 0 ; \tau_{xy}'' = 0 \text{ cuando } y = 0, -a \leq x \leq a \quad (4.41)$$

Con las mismas definiciones y cambios de variable que para el caso de modo I, los campos de tensiones para el modo II pueden ser expresados como funciones reales de  $x, y$  (recordemos que  $m, n, |t|$  y  $\phi$  son funciones de  $x, y$ ):

$$\sigma_x'' = \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left[ 2 \left( y \cos \frac{\phi}{2} + x \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) - y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.42)$$

$$\sigma_y'' = y \frac{a^2 \tau}{|t|^2 \sqrt{|t|}} \left( m \cos \frac{\phi}{2} + n \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.43)$$

$$\tau_{xy}'' = \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left[ \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \right) + y \frac{a^2}{|t|^2} \left( m \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} - n \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (4.44)$$

Análogamente, los campos de desplazamientos exactos se pueden escribir como:

$$u'' = \frac{\kappa+1}{4\mu} \tau \sqrt{|t|} \sin \frac{\bar{\phi}}{2} + y \frac{1}{2\mu} \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left( x \cos \frac{\phi}{2} - y \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.45)$$

$$v'' = -\frac{\kappa-1}{4\mu} \tau \sqrt{|t|} \cos \frac{\bar{\phi}}{2} - y \frac{1}{2\mu} \frac{\tau}{\sqrt{|t|}} \left( y \cos \frac{\phi}{2} + x \sin \frac{\phi}{2} \right) \quad (4.46)$$

En cuanto a los desplazamientos exactos  $u''$  y  $v''$  a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  (útiles a la hora de imponer restricciones a los desplazamientos en los modelos de EF):

$$u'' = 0 ; v'' = \frac{\kappa-1}{4\mu} \tau \sqrt{x^2 - a^2} \text{ si } |x| \geq a , y = 0 \quad (4.47)$$

$$u'' = \frac{\kappa+1}{4\mu} \tau \sqrt{a^2 - x^2} ; v'' = 0 \text{ si } |x| < a , y = 0 \quad (4.48)$$

$$u'' = \frac{\kappa+1}{4\mu} \tau \sqrt{y^2 + a^2} + \frac{\tau}{2\mu} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + a^2}} ; v'' = 0 \text{ si } x = 0 , \forall y \quad (4.49)$$

Por último, es importante señalar que el FIT para este problema en modo II es simplemente:

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (4.50)$$

por lo que en todas las ecuaciones anteriores  $\tau$  puede ser sustituido por  $K_{II} / \sqrt{\pi a}$ .

### Solución para el modo mixto (modo I+II)

Debido a la linealidad del problema, cuándo la placa es cargada en modo mixto las tensiones equivalentes vendrán dadas por la suma de las tensiones asociadas a cada modo de carga, es decir:

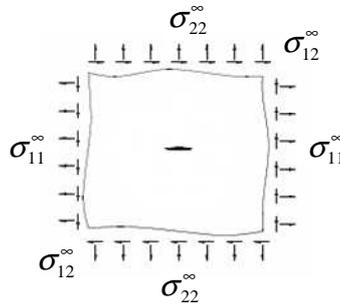
$$\sigma_x^{I+II} = \sigma_x^I + \sigma_x^{II} \quad (4.51)$$

$$\sigma_y^{I+II} = \sigma_y^I + \sigma_y^{II} \quad (4.52)$$

$$\tau_{xy}^{I+II} = \tau_{xy}^I + \tau_{xy}^{II} \quad (4.53)$$

### Inclusión del *T-Stress*

Como se ha citado anteriormente, las expresiones obtenidas por Giner [11] para las tensiones y los desplazamientos para el modo I del problema de Westergaard para una grieta en una placa infinita son únicamente válidas para el caso biaxial en el que la tensión  $\sigma$  aplicada en el infinito en  $x$  e  $y$  es la misma. Esto supone, aparentemente, una limitación a la hora de analizar problemas en los que el *T-Stress* sea no nulo.



**Figura 4.5. Problema de Westergaard con grieta en placa infinita: caso general con tensiones biaxiales no necesariamente iguales.**

Utilizando como referencia la Figura 4.5, la expresión del *T-Stress* para el problema de Westergaard general considerado (ver p.ej. Eischen [7]) es simplemente:

$$T = \sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty} \quad (4.54)$$

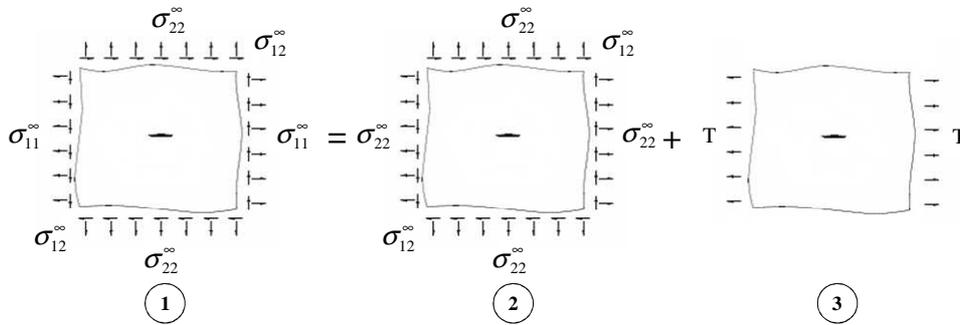
donde  $\sigma_{11}^{\infty}$  y  $\sigma_{22}^{\infty}$  son las tensiones aplicadas a la placa en el infinito.

Las hipótesis planteadas en el desarrollo de las ecs. (4.24)-(4.26) suponen que las ecuaciones únicamente sean válidas cuando  $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = \sigma$ , es decir cuando  $T = \sigma_{11}^{\infty} - \sigma_{22}^{\infty} = 0$ .

Sin embargo, debido a la linealidad del problema, es posible plantear una simple estrategia que permite superar este inconveniente con el fin de aplicar, con una ligera modificación, las ecs. (4.24)-(4.26) a problemas de Westergaard con  $T \neq 0$ . Considerando la Figura 4.6, un estado genérico de carga para el problema con grieta en placa infinita (definido por las tensiones aplicadas en el infinito  $\sigma_{11}^\infty$ ,  $\sigma_{22}^\infty$  y  $\sigma_{12}^\infty$ ) se puede descomponer como la superposición de dos estados:

- un estado de carga con tensión tangencial  $\tau = \sigma_{12}^\infty$  y tensiones biaxiales  $\sigma$  ambas idénticas y de valor igual a  $\sigma_{22}^\infty$  aplicadas en el infinito (estado 2);
- un estado de carga uniaxial en dirección  $x$  debido a una tensión  $T$  aplicada en el infinito (estado 3).

ya que de la ec. (4.54) se deduce que  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty + T$ .



**Figura 4.6. Problema de Westergaard con grieta en placa infinita: superposición de modos de carga debido a linealidad.**

Para el estado 2 se pueden expresar las tensiones utilizando las ecs. (4.51)-(4.53), resultando:

$$(\sigma_x)_2 = (\sigma_x^{I+II})_2 = (\sigma_x^I)_2 + (\sigma_x^{II})_2 \quad (4.55)$$

$$(\sigma_y)_2 = (\sigma_y^{I+II})_2 = (\sigma_y^I)_2 + (\sigma_y^{II})_2 \quad (4.56)$$

$$(\tau_{xy})_2 = (\tau_{xy}^{I+II})_2 = (\tau_{xy}^I)_2 + (\tau_{xy}^{II})_2 \quad (4.57)$$

mientras que para el estado 3 simplemente se tiene:

$$(\sigma_x)_3 = T \quad (4.58)$$

$$(\sigma_x)_3 = 0 \quad (4.59)$$

$$(\tau_{xy})_3 = 0 \quad (4.60)$$

Debido a la linealidad del problema, aplicando el principio de superposición resulta que en el estado 1 se tiene:

$$(\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_2 + (\sigma_x)_3 = (\sigma_x^I)_2 + (\sigma_x^{II})_2 + T \quad (4.61)$$

$$(\sigma_y)_1 = (\sigma_y)_2 + (\sigma_y)_3 = (\sigma_y^I)_2 + (\sigma_y^{II})_2 + 0 \quad (4.62)$$

$$(\tau_{xy})_1 = (\tau_{xy})_2 + (\tau_{xy})_3 = (\tau_{xy}^I)_2 + (\tau_{xy}^{II})_2 + 0 \quad (4.63)$$

y por lo tanto es suficiente añadir un término constante  $T$  en la ec. (4.24) para estudiar problemas de Westergaard con  $T$ -Stress no nulo.

El proceso de resolución del problema de Westergaard y la obtención de resultados mediante análisis por EF es similar a lo descrito para el problema asintótico singular (ver apartado 4.2.1), como se muestra en la Figura 4.7. Como se ha comentado anteriormente, para la resolución del problema de Westergaard tan sólo se ha tomado mitad de la porción finita de dominio  $\Omega_0$  en el entorno de grieta, ya que es posible modelar problemas de Westergaard en modo I, modo II y modo mixto considerando tan sólo mitad dominio y aplicando oportunas condiciones de contorno, como se verá en los apartados siguientes. Esto tiene además la ventaja de reducir drásticamente los grados de libertad del sistema y, en consecuencia, reducir el tiempo de cálculo requerido para resolver el problema mediante el MEF.

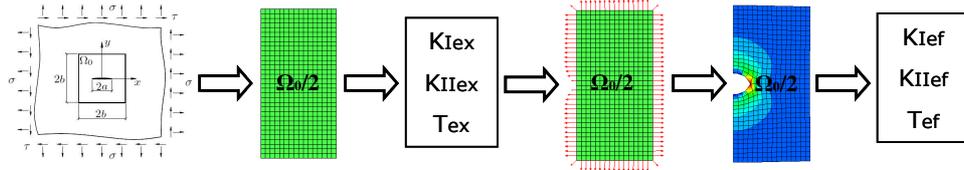


Figura 4.7. Proceso para el cálculo de parámetros en un problema de Westergaard.

### 4.3 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

En este subapartado se va a detallar como se ha abordado el estudio de los ejemplos numéricos que se van a presentar en este capítulo.

Haciendo referencia a la Figura 4.8, para estudiar los problemas de la MFEL descritos en el apartado 4.2 se ha utilizado un dominio  $\Omega_0$  constituido por una placa de ancho  $b = 4$ , largo  $l = 2b = 8$  y longitud de grieta  $a = 1$ . En problemas cargados en modo I también es posible estudiar media placa imponiendo condiciones de contorno de simetría (placa con  $b = l = 4$ , ver Figura 4.8). De todas maneras, el carácter paramétrico del programa permite estudiar otros dominios simplemente cambiando los parámetros de entrada de la geometría del problema.

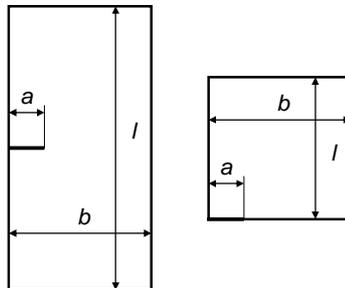


Figura 4.8. Dimensiones principales de las placas estudiadas: dominio completo (izda) y dominio para casos de simetría en modo I (dcha).

En cuanto al material, se supone elástico lineal isótropo y homogéneo, con módulo de elasticidad  $E = 10^7$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.333$ .

Para cada problema se ha analizado una secuencia de 6 mallas con refinamiento uniforme mediante elementos cuadriláteros lineales y cuadráticos. Se supone un estado de **deformación plana** y en consecuencia se tomará  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$  en la ec. (2.28) (el estudio de problemas en estado de tensión plana se puede hacer de manera análoga tomando el valor  $E' = E$  en la ec. (2.28)). Si se indica con  $N_x$  el número de elementos horizontales y  $N_y$  el número de elementos verticales, cada malla  $i$  presentará  $N_{x,i} \times N_{y,i}$ . En los problemas analizados en esta tesis se han utilizado 6 mallas ( $i=1,2,\dots,6$ ) cada una con  $N_{x,i} \times N_{y,i}$  elementos, siendo  $N_{x,i}$  y  $N_{y,i}$  respectivamente las componentes de los vectores:

$$\mathbf{N}_x = \{32 \quad 48 \quad 64 \quad 80 \quad 96 \quad 112\} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{N}_y = l \cdot \{8 \quad 12 \quad 16 \quad 20 \quad 24 \quad 28\} \quad (4.65)$$

siendo  $l$  la altura de la placa que vale  $l = 2b = 8$  en un dominio completo y  $l = b = 4$  en un dominio con propiedades de simetría. El tamaño del elemento de la malla  $i$ , denominado  $h_i$  (parámetro importante a la hora de estimar la convergencia en el error, como se verá más adelante), se puede entonces calcular como:

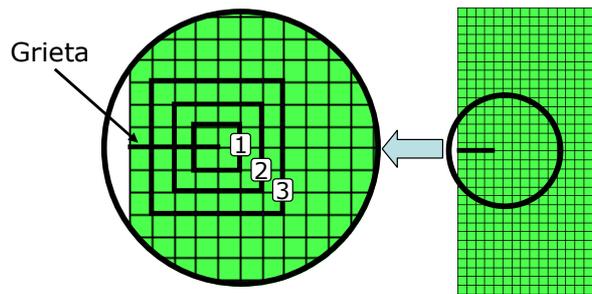
$$h_i = \frac{b}{N_{x,i}} \quad (4.66)$$

Como ya se comentó en apartados anteriores, el cálculo de las integrales de contorno se ha hecho a lo largo de caminos rectangulares concéntricos alrededor de la grieta. Para poder comparar los resultados obtenidos con los valores de referencia, es necesario antes establecer en cuál de todos los caminos disponibles se calcularán las integrales. Es inmediato observar que para una familia de mallas el número de caminos concéntricos

disponibles alrededor de la grieta dependerá del cociente  $a/b$  según la ecuación<sup>18</sup>:

$$\mathbf{N}_c = \frac{a}{b} \cdot \mathbf{N}_x - \mathbf{1} \quad (4.67)$$

con  $\mathbf{1} = \{1 \ 1 \ 1 \ \dots\}$ , de acuerdo con la dimensión del vector  $\mathbf{N}_x$ . Obviamente, una vez definidas las dimensiones  $b$  y  $a$  y el número de elementos horizontales de forma tal que la topología de la malla sea congruente con la geometría del problema, las componentes del vector  $\mathbf{N}_c$  serán necesariamente números enteros. Por ejemplo, en la Figura 4.9 se ha representado una placa de dimensiones  $b = 4$ ,  $l = 8$  y  $a = 1$ , mallada con  $N_x = 16$  elementos horizontales y  $N_y = 32$  elementos verticales. El cociente  $a/b$  vale  $1/4$  y se puede observar como el número de caminos disponibles es  $N_c = \frac{a}{b} \cdot N_x - 1 = \frac{1}{4} \cdot 16 - 1 = 3$ . En la Figura 4.9 se han indicado los caminos disponibles numerándolos a partir del más cercano a la grieta.



**Figura 4.9.** Ejemplo de caminos disponibles en una placa con grieta lateral con  $N_x=16$  elementos horizontales y un cociente  $a/b=1/4$ .

Para definir el número del camino de referencia en el que se calcularán las integrales, en el programa desarrollado se ha utilizado un

<sup>18</sup> La ecuación es válida para  $a/b \leq 0.5$ . En el caso de que  $a/b > 0.5$ , el número de caminos concéntricos disponibles será  $\mathbf{N}_c = \frac{a-b}{b} \cdot \mathbf{N}_x - \mathbf{1}$

parámetro  $C_{J,i}$  para cada malla  $i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ), definido como la componente  $i$  del vector:

$$\mathbf{C}_J = k \cdot \frac{a}{b} \mathbf{N}_x = k \cdot (\mathbf{N}_c + \mathbf{1}) \quad (4.68)$$

donde  $k$  es un parámetro que para estos ejemplos se ha fijado a  $k = \frac{3}{4}$ . Cabe señalar que  $\mathbf{C}_J$  tiene que estar compuesto por números enteros para garantizar que el camino escogido pase por los lados de los elementos, y eso dependerá de cómo se fije el parámetro  $k$ .

En los ejemplos numéricos considerados ( $a=1$ ,  $b=4$ ,  $k=3/4$  y con los valores escogidos para  $\mathbf{N}_x$ ),  $\mathbf{C}_J$  vale:

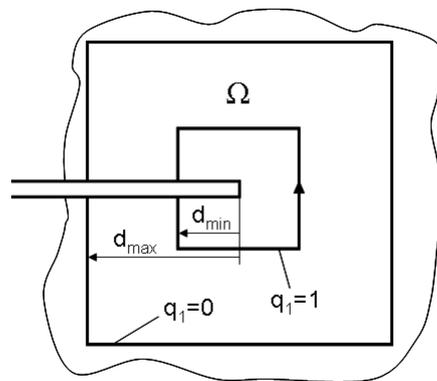
$$\mathbf{C}_J = \{6 \quad 9 \quad 12 \quad 15 \quad 18 \quad 21\} \quad (4.69)$$

garantizando así que el vector  $\mathbf{C}_J$  está compuesto por números enteros.

En conclusión, el vector  $\mathbf{C}_J$  indica, para cada malla, el número del camino rectangular (con la grieta en su centro), contado a partir del extremo de grieta, en el que se calcularán las integrales de contorno. Habiendo tomado en este caso  $k = \frac{3}{4}$ , se impone que las integrales de contorno se calculen en caminos que se encuentran a una distancia  $\frac{3}{4} \cdot a$  del extremo de grieta (también se podría por ejemplo tomar  $k = \frac{1}{2}$ , calculando así las integrales en caminos a una distancia  $\frac{1}{2} \cdot a$  del extremo de grieta). En el ejemplo de la Figura 4.9, resulta  $C_J = k \cdot \frac{a}{b} N_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = 3$ , es decir las integrales se calculan en el tercer camino que, como se puede observar, se encuentra exactamente a una distancia  $\frac{3}{4} \cdot a$  del extremo de grieta.

Esto permite que, en mallas con topologías diferentes, se puedan calcular las integrales de contorno en caminos situados siempre a la misma distancia del extremo de grieta. Esto a su vez permite que los resultados obtenidos con diferentes mallas sean comparables entre ellos, al haber sido siempre calculados a la misma distancia de la singularidad.

Para comparar resultados obtenidos en una misma malla implementando métodos distintos (integrales de contorno e integrales mediante método EDI) también es necesario que las integrales se calculen por el mismo camino. Como los caminos escogidos para el cálculo de las integrales de contorno son cuadrados, se ha decidido implementar una función  $q_1$  tipo Plateau (ver Figura 2.16) delimitada por dos caminos cuadrados para el cálculo de las integrales equivalentes de dominio (EDI). En la Figura 4.10 se muestra un recorte alrededor del extremo de grieta de una placa. En la placa se ha definido un dominio  $\Omega$  delimitado por un camino cuadrado interno (puesto a distancia  $d_{min}$  del extremo de grieta) y un camino cuadrado externo (puesto a distancia  $d_{max}$  del extremo de grieta), ambos concéntricos con el centro en el extremo de grieta. En ese dominio se puede definir una función  $q_1$  tipo Plateau como mostrado en la figura.



**Figura 4.10. Recorte alrededor de una grieta, dominio  $\Omega$  definido por dos caminos cuadrados y función  $q_1$  tipo Plateau definida en  $\Omega$ .**

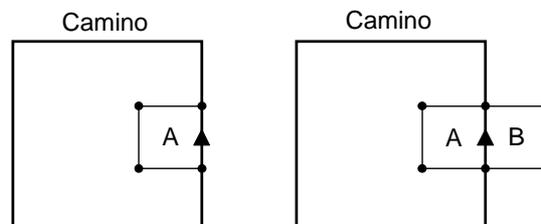
Para definir el contorno de  $\Omega$  para el cálculo de las integrales equivalentes de dominio se ha escogido:

$$d_{min} = 0.5 \cdot a \quad (4.70)$$

$$d_{\max} = k \cdot a = \frac{3}{4}a$$

Finalmente, para la implementación del método de Eischen, se han utilizado los valores  $\delta_1 = \frac{a}{6}$  y  $\delta_2 = \frac{a}{12}$  (ver ecs. (2.105)-(2.106)) propuestos en su trabajo (véase Eischen 1987 [7]), donde  $a$  representa la longitud de grieta. Un estudio de la influencia de la elección de estos valores sobre el valor de  $J_2$  se presenta en unos ejemplos numéricos presentados en el apartado 4.5.2.

Con respecto al cálculo concreto de las integrales  $J$  y  $J_2$ , siempre se han calculado dos valores para cada magnitud. Un primer valor de  $J$  y  $J_2$  se ha calculado a partir de los campos obtenidos en cada elemento interno al camino considerado, utilizando las ecs (2.59) y (2.61). Un segundo valor de  $J$  y  $J_2$  se ha obtenido utilizando la media de los campos calculados en dos elementos adyacentes (cuyo lado en común representa un tramo del camino) utilizando en cada elemento las ecs. (2.59) y (2.61) y luego aplicando en el lado en común la ec. (2.62) (ver Figura 4.11). Estos valores se indicarán con el subíndice “*av*”, correspondiente a *average* (valor medio). Como a partir de los valores de  $J$  y  $J_2$  se calculan los FIT  $K_I$  y  $K_{II}$  y el *T-Stress*  $T$ , también para cada una de estas magnitudes se tendrán dos valores (los valores obtenidos a partir de los valores  $J_{av}$  y  $J_{2av}$  también se indicarán con el subíndice “*av*”:  $K_{Iav}$ ,  $K_{IIav}$ ,  $T_{av}$ ). Cabe destacar que en las caras de grieta no es posible calcular las integrales utilizando la media de los campos de dos elementos adyacentes, al no existir estos físicamente. Por lo tanto, tan sólo se pueden utilizar los campos de un elemento para el cálculo de las integrales en las caras de grieta.



**Figura 4.11. Cálculo de las integrales de contorno: utilizando un elemento A interno al camino (izda) y utilizando 2 elementos A y B con un lado en común (dcha).**

En la Tabla 4.1 se indica la nomenclatura utilizada para las diferentes magnitudes que se han analizado y comparado en los ejemplos numéricos presentados en este capítulo:

Magnitud	Descripción
$J, J_{av}$	Integral $J$ calculada con método de contorno (subíndice 'av' si se ha utilizado el valor medio de los campos en el lado común).
$J_2, J_{2av}$	Integral $J_2$ calculada con método de contorno, implementando la metodología de Eischen (subíndice 'av' si se ha utilizado el valor medio de los campos en el lado común).
$J_{EDI}, J_{2EDI}$	Integrales $J$ y $J_2$ calculadas mediante método EDI ( $J_{2EDI}$ calculada mediante la metodología de Eischen en las caras de grieta).
$J_{Int}$	Integral $J$ calculada a partir de los FIT obtenidos mediante la integral de interacción I, implementando el método EDI.
$K_{II,Int}$	$K_{II}$ calculado mediante el método de la integral de interacción I, implementando el método EDI.
$K_I, K_{I,av}, K_{II}, K_{II,av}$	Valores de los FIT obtenidos a partir de las integrales $J$ y $J_2$ calculadas mediante métodos de contorno, implementando las relaciones FIT- $J_k$ (2.87)-(2.88) (subíndice 'av' si se han calculado a partir de los valores $J_{av}$ y $J_{2av}$ ).
$T, T_{av}$	$T$ -Stress calculado mediante el método de Eischen (ec. (2.108) o la ec. (2.119) según el tipo de problema, subíndice 'av' si se ha calculado a partir de $K_{II,av}$ y $J_{2av}$ ).
$K_{I,ex}, K_{II,ex}, T_{ex}, J_{ex}, J_{2ex}$	Valores exactos de las distintas magnitudes (datos de partida) impuestos en los ejemplos numéricos analizados.

**Tabla 4.1. Nomenclatura magnitudes de interés analizadas en los problemas estudiados.**

### Estudio de la convergencia en el error

El error en una variable genérica  $F$  se puede definir como la diferencia:

$$e_F = F_{ex} - F_{ef} \quad (4.71)$$

donde  $F_{ex}$  es el valor exacto de la variable  $F$  en el problema estudiado mientras que  $F_{ef}$  es la evaluación de  $F$  mediante análisis por Elementos Finitos.

Otra forma de expresar el error en la variable  $F$  es el error relativo en  $F$  (habitualmente expresado en %):

$$\eta_F = \frac{F_{ex} - F_{ef}}{F_{ex}} \quad (4.72)$$

$$\eta_{F\%} = \frac{F_{ex} - F_{ef}}{F_{ex}} \cdot 100 \quad (4.73)$$

Finalmente, otro parámetro de interés para el estudio de la convergencia del error es la velocidad de convergencia, definida como:

$$v_F = \frac{\left| \log e_{Fi} - \log e_{Fj} \right|}{\left| \log h_i - \log h_j \right|} = \frac{\left| \log \frac{e_{Fi}}{e_{Fj}} \right|}{\left| \log \frac{h_i}{h_j} \right|} \quad (4.74)$$

siendo  $i$  y  $j$  dos mallas analizadas y  $h_i$  y  $h_j$  los respectivos tamaños de elemento. Se puede observar que  $v_F$  representa la pendiente del tramo rectilíneo entre dos puntos en una gráfica  $(\eta_F, h)$  en escala logarítmica.

A continuación se demuestra que la velocidad de convergencia del error para  $J$  vale la unidad en refinamiento uniformes tipo  $h$  (es decir si se refina la malla uniformemente).

Si el refinamiento en la malla es  $h$ -uniforme, se puede demostrar que en un problema de EF el error de la solución en desplazamientos ( $\mathbf{u}$ ) en norma energética cumple

$$\|e_{\mathbf{u}}\| \leq C_1 h^{\min(p, \lambda)} \quad (4.75)$$

donde  $h$  es el tamaño del elemento,  $C_1$  es una constante que depende de las constantes elásticas del material, de la geometría del problema, del patrón de mado utilizado y del orden  $p$  del polinomio de interpolación (Szabó y Babuška [21]), y  $\lambda$  es el *orden de la singularidad* que en MFEL vale  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Como el grado del polinomio de interpolación es  $p=1$  para elementos lineales y  $p=2$  para elementos cuadráticos, siempre resulta

$$\|e_{\mathbf{u}}\| \leq C_1 h^{1/2} \quad (4.76)$$

Por otra parte, se puede demostrar que en general

$$\|e_{\mathbf{u}}\|^2 = \|\mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{ef}}\|^2 \approx \|\mathbf{u}_{\text{ex}}\|^2 - \|\mathbf{u}_{\text{ef}}\|^2 \quad (4.77)$$

siendo rigurosamente  $\|\mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_{\text{ef}}\|^2 = \|\mathbf{u}_{\text{ex}}\|^2 - \|\mathbf{u}_{\text{ef}}\|^2$  sólo en el caso en que, en el contorno  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$  del problema estudiado, no hayan fuerzas por uds. aplicadas. Además, la relación de la norma energética de  $\mathbf{u}$  con la energía de deformación  $U$  de un problema de EF es:

$$U = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \quad (4.78)$$

Si expresamos ahora el error en  $U$ , por las ecs. (4.76) y (4.78) y teniendo en cuenta la aproximación dada en la ec. (4.77) resulta

$$e_U = U_{\text{ex}} - U_{\text{ef}} = \frac{\|\mathbf{u}_{\text{ex}}\|^2}{2} - \frac{\|\mathbf{u}_{\text{ef}}\|^2}{2} \approx \frac{1}{2} \|e_{\mathbf{u}}\|^2 \leq \frac{1}{2} C_1^2 h = C_2 h \quad (4.79)$$

donde se ha sustituido  $C_1^2 = C_2$ .

Como en MFEL se verifica que la tasa de liberación de energía  $G$  vale  $G = \left| \frac{dU}{da} \right|$ , se cumple:

$$e_G = \frac{dU_{ex}}{da} - \frac{dU_{ef}}{da} = \frac{de_U}{da} \leq \frac{d(C_2 h)}{da} = C_3 h \quad (4.80)$$

y recordando que en MFEL  $J=G$ , resulta

$$e_G = e_J \leq C_3 h \quad (4.81)$$

En conclusión, se puede escribir la relación de proporcionalidad de los errores en las magnitudes  $G$ ,  $J$  y  $U$  y el error en desplazamientos en norma  $\|e_u\|$  energética:

$$e_G = e_J \propto e_U \approx \frac{1}{2} \|e_u\|^2 \leq C_3 h \quad (4.82)$$

Resulta evidente que la velocidad de convergencia en  $G$ ,  $J$  y  $U$  es la misma y, además, es el doble de la velocidad de convergencia del error en norma energética. Además, como el error en  $J$  es proporcional a  $h$ , resulta evidente que por la ec. (4.74) la velocidad de convergencia en  $J$  ( $v_J$ ) vale la unidad.

Además, cuando el refinamiento es  $h$ -uniforme, se puede demostrar que la velocidad de convergencia del error en  $K_I$  también vale la unidad en problemas en modo I ( $v_J = v_{K_I} = 1$  en modo I) y que la velocidad de convergencia del error en  $K_{II}$  también vale la unidad en problemas en modo II ( $v_J = v_{K_{II}} = 1$  en modo II). Si se interpreta el FIT como magnitud de interés, por la ec. (4.70) el error en  $K$  es

$$e_K = K_{ex} - K_{ef} \quad (4.83)$$

Suponiendo *un único modo de apertura de grieta* (modo I o modo II),  $K_{ex}$  y  $K_{ef}$  están relacionados con  $J_{ex}$  y  $J_{ef}$  a través de las expresiones

$$K_{ex} = \sqrt{E'J_{ex}} ; K_{ef} = \sqrt{E'J_{ef}} \quad (4.84)$$

Sustituyendo las expresiones de la ec. (4.84) en la ec. (4.83) resulta:

$$e_K = K_{ex} - K_{ef} = \sqrt{E'J_{ex}} - \sqrt{E'J_{ef}} = \sqrt{E'(J_{ef} + e_J)} - \sqrt{E'J_{ef}} \quad (4.85)$$

donde se ha expresado  $J_{ex} = J_{ef} + e_J$  utilizando la (4.70).

Teniendo en cuenta la definición de velocidad de convergencia dada en la ec. (4.74), la expresión (4.85) supone que la velocidad de convergencia en  $K$  es la misma que la velocidad de convergencia en  $J$ <sup>19</sup> (véase p.ej. Fuenmayor *et al.* 1997 [9]), y por tanto es la misma que la velocidad de convergencia en  $U$  y el doble de la velocidad de convergencia del error de desplazamientos en norma energética:

En conclusión, asumiendo un único modo de apertura de grieta podemos escribir:

$$e_U \propto e_J \propto e_{K_I} \leq C'h \text{ para el modo I} \quad (4.86)$$

$$e_U \propto e_J \propto e_{K_{II}} \leq C''h \text{ para el modo II} \quad (4.87)$$

siendo  $C'$  y  $C''$  dos constantes. Por lo tanto, la velocidad de convergencia de  $K_I$  en modo I y la de  $K_{II}$  en modo II tienen el mismo valor que la velocidad de convergencia en  $J$  (que, como se ha visto anteriormente, siempre vale la unidad).

#### 4.4 VALIDACIÓN PARCIAL DEL PROGRAMA: PROBLEMAS EN MODO I

En este apartado se presenta la validación parcial del programa aplicando las rutinas desarrolladas al cálculo de la integral  $J$  mediante integral de contorno. El objetivo es comparar los resultados obtenidos calculando  $J$  como integral de contorno con los valores obtenidos

---

<sup>19</sup> Sería la mitad si se definiese  $e_K = K_{ex} - K_{ef} = \sqrt{E'J_{ex} - E'J_{ef}}$ .

calculando  $J$  mediante métodos basados en integral de dominio equivalente (EDI). Los métodos EDI que se han implementado para la comparación son el método EDI clásico y el método EDI basado en la integral de interacción  $I$  (ver apartado 2.2.5), ya estudiados por Giner 2001 [11].

En primer lugar, para validar el programa se ha calculado la integral  $J$  mediante las rutinas desarrollada en esta tesis (que implementan un método de contorno). A partir de los valores obtenidos, se ha calculado el error relativo en  $J$  mediante la ec. (4.72) o la ec. (4.73). A continuación, se han comparado dichos valores con el error en  $J$  obtenido mediante los métodos de contorno descritos anteriormente. Además, se han calculado y comparado las velocidades de convergencia del error en  $J$ , y se ha comprobado que su valor sea la unidad (ver apartado 4.3). Finalmente, a partir de los valores de  $J$  calculados mediante el método de contorno, se ha calculado el valor del FIT  $K_I$ , y se ha comprobado que en modo I, como cabría esperar, la velocidad de convergencia sea la misma que  $J$ , es decir la unidad.

Se analizarán el problema asintótico singular y el problema de Westergaard en modo I implementando dos modelos: un modelo simétrico, en el que se aprovechan las propiedades de simetría de los problemas en modo I, y un modelo con dominio completo. Como se verá, los resultados son básicamente los mismos si se comparan los modelos de un mismo problema.

En ambos problemas estudiados (asintótico singular y de Westergaard) se han utilizado los siguientes datos de partida:

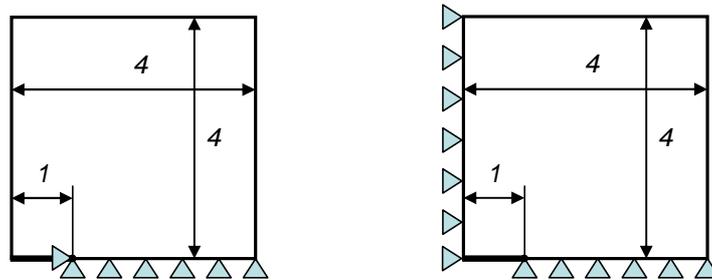
$$K_{lex} = 1 ; K_{llx} = 0 ; T = 0 \quad (4.88)$$

y por lo tanto, aplicando la ec. (2.82) y recordando que se ha puesto  $E = 10^7$  y  $\nu = 0.333$  (ver apartado 4.3), resulta:

$$J_{ex} = \frac{K_{lex}^2}{E'} + \frac{K_{llx}^2}{E'} = \frac{1 \cdot (1 - 0.333^2)}{10^7} = 8.8911100000 \cdot 10^{-8} \quad (4.89)$$

## 4.4.1 Problemas en modo I: modelo simétrico

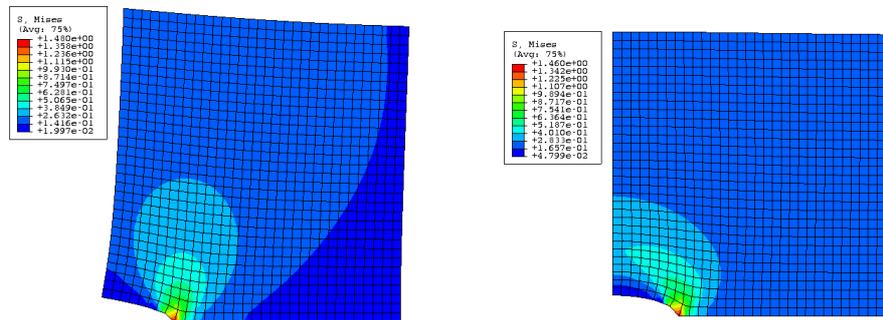
La Figura 4.12 muestra el modelo utilizado para estudiar un problema en modo I utilizando propiedades de simetría. Para ambos problemas (asintótico singular y de Westergaard) se ha modelado la porción de dominio  $x \in [0,4]$  e  $y \in [0,4]$  y se han aplicado las respectivas condiciones de simetría. Con respecto al problema asintótico singular, se ha aprovechado la simetría de geometría y cargas existente respecto al eje  $y$ , imponiendo condiciones de desplazamientos nulos en dirección  $y$ . Finalmente, se ha restringido el desplazamiento en dirección  $x$  del extremo de grieta. Con respecto al problema de Westergaard, se ha aprovechado la doble simetría de geometría y cargas que existe respecto al eje  $x$  e  $y$ , restringiendo los desplazamientos como indicado en la Figura 4.12. Finalmente, a partir de los datos del problema ( $K_{lex} = 1, a = 1$ ), se han impuesto respectivamente las tracciones correspondientes al campo asintótico singular (ec. (4.2)) y a la solución analítica de Westergaard (ecs. (4.24)-(4.26)) en los lados no restringidos (excepto caras de grieta).



**Figura 4.12. Modelos simétricos para estudio de problemas en modo I: restricciones para problema asintótico singular (izda) y para problema de Westergaard (dcha).**

Los modelos de ambos problemas se discretizaron mediante elementos cuadriláteros lineales y cuadráticos. En Figura 4.13 se muestra la primera malla de la familia descrita por las ecs. (4.64) y (4.65) para cada problema. A continuación se presentarán los resultados obtenidos para el error y la velocidad de convergencia de las magnitudes de interés que, para la validación del programa, serán la integral  $J$  y el FIT  $K_I$ . Se recuerda que, como se ha comentado en el apartado 4.3, la integral  $J$  (y también la integral  $J_2$ ) se calcula utilizando dos metodologías distintas de extracción de resultados en el lado de elemento que constituye un tramo del camino, con

lo cual tendremos un resultado ' $J$ ' y otro ' $J_{av}$ ' (y en consecuencia también dos resultados para el FIT, ' $K_I$ ' y ' $K_{Iav}$ ').



**Figura 4.13. Representación de la primera malla de los problemas analizados con dominio simétrico: deformada y distribución de tensiones de Von Mises del problema asintótico singular (izda) y del problema de Westergaard (dcha).**

### Resultados problema asintótico singular

En la Tabla 4.2 y la Tabla 4.3 se muestran los resultados obtenidos en el cálculo del error de las magnitudes de interés (en este caso la integral  $J$  y el FIT  $K_I$ ) a partir del postproceso de datos obtenidos del análisis por el MEF en el problema asintótico singular, implementando mallas de elementos lineales y cuadráticos de tamaño  $h$ . Se recuerda que las magnitudes  $J$  y  $J_{av}$  se han calculado mediante integral de línea,  $J_{EDI}$  se ha calculado mediante el método EDI y  $J_{Int}$  se ha obtenido a partir de los FIT calculados con la integral de interacción  $I$  (a su vez calculada mediante integral de dominio equivalente).

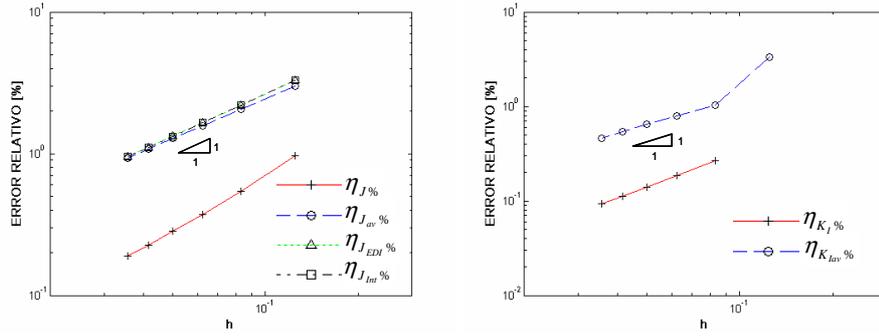
Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{K_I\%}$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}\%}$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	-0.964	2.981	3.299	3.276	1.302	3.293
2	8.33E-02	-0.545	2.066	2.207	2.197	-0.268	1.040
3	6.25E-02	-0.374	1.580	1.659	1.653	-0.186	0.793
4	5.00E-02	-0.283	1.278	1.329	1.325	-0.141	0.641
5	4.17E-02	-0.227	1.073	1.108	1.106	-0.112	0.539
6	3.57E-02	-0.189	0.925	0.951	0.949	-0.093	0.464

**Tabla 4.2.** Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo simétrico, mallado con elementos lineales.

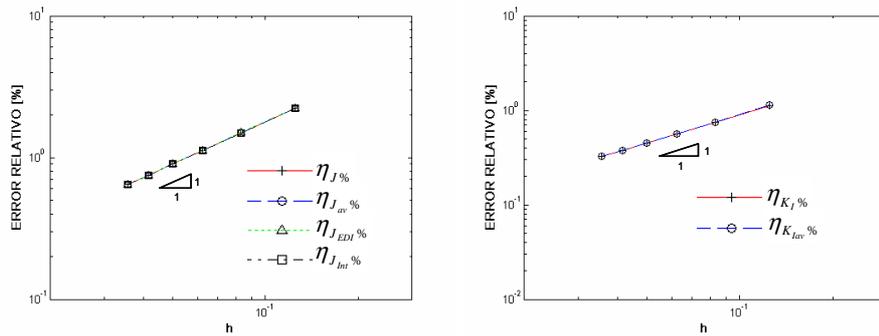
Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{K_I\%}$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}\%}$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	2.226	2.236	2.240	2.230	1.126	1.131
2	8.33E-02	1.494	1.497	1.499	1.494	0.750	0.751
3	6.25E-02	1.124	1.125	1.126	1.124	0.564	0.564
4	5.00E-02	0.901	0.901	0.902	0.900	0.451	0.452
5	4.17E-02	0.751	0.752	0.752	0.751	0.376	0.377
6	3.57E-02	0.644	0.645	0.645	0.644	0.323	0.323

**Tabla 4.3.** Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo simétrico, mallado con elementos cuadráticos.

Se observa en la Tabla 4.2 que el error en  $J$  ( $\eta_{J\%}$ ) calculado utilizando tan sólo la información obtenida de los elementos internos (cuyos lados componen el camino) es negativo, es decir el valor de  $J$  está sobrestimado. Por lo tanto, con el fin de dibujar su valor en función del tamaño de elemento  $h$  en una gráfica en escala logarítmica, se tomará su valor absoluto para cada malla. Además, el error en  $K_I$  ( $\eta_{K_I\%}$ ) para la malla 1 con elementos lineales (Tabla 4.2) es positivo, siendo negativo para las otras mallas. Por eso, se descartará el valor de la malla 1 y, para las otras mallas, se tomará el valor absoluto con el fin de dibujar su valor en función del tamaño de elemento  $h$  en una gráfica en escala logarítmica. Los valores obtenidos se muestran gráficamente en la Figura 4.14.



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.14. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I, modelo simétrico.**

Se puede observar que, con elementos lineales, el error en  $J$  (calculado con integral de línea sin promediar) siempre es menor (en valor absoluto) que el error en  $J_{av}$  (calculado con la integral de línea promediando), y además el método de contorno da mejores resultados que el método de dominio equivalente, al ser los errores en  $J_{ED1}$  y  $J_{Int}$  mayores en valor absoluto comparados con los errores en  $J$  y  $J_{av}$ . Sin embargo, cabe señalar que Giner 2001 [11] encontró un resultado diferente, ya que el error en  $J$  calculado con un método de dominio equivalente suele ser menor que el error en  $J$  calculado mediante integral de contorno. El resultado habitual tiene obviamente más sentido ya que:

- el método de dominio utiliza más información (los datos procedentes de todos los elementos del dominio de integración, no sólo los

cercanos al contorno), lo que ayuda a reducir el error en el cálculo (el método de dominio es más “global” que el método de contorno)

- la información procede también de elementos más alejados del extremo de grieta, donde los resultados son más precisos.

No obstante, cabe también señalar que los errores en  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$  y  $J_{Int}$  obtenidos utilizando elementos lineales son muy parecidos.

Finalmente, con elementos cuadráticos se observa que el error en todos los parámetros considerados es básicamente el mismo.

A partir de los valores de error, se han calculado las respectivas velocidades de convergencia. Las velocidades de convergencia obtenidas para el problema asintótico singular se muestran en la Tabla 4.4 y en la Tabla 4.5:

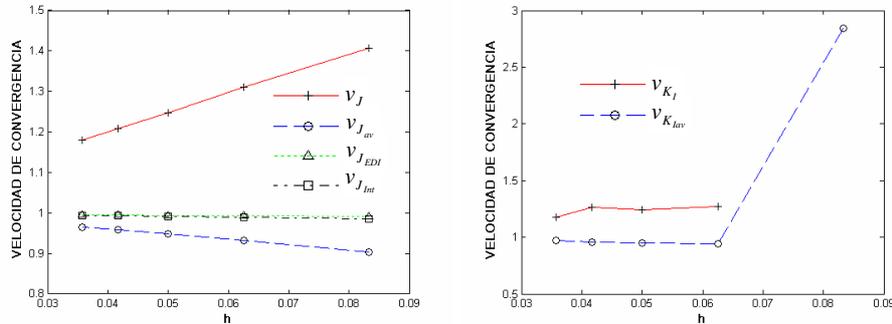
Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	1.407	0.904	0.991	0.986	-	2.842
3	6.25E-02	1.311	0.933	0.993	0.989	1.271	0.942
4	5.00E-02	1.248	0.949	0.994	0.991	1.245	0.953
5	4.17E-02	1.208	0.959	0.995	0.993	1.261	0.955
6	3.57E-02	1.179	0.966	0.996	0.994	1.174	0.968

**Tabla 4.4. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo simétrico, mallado con elementos lineales.**

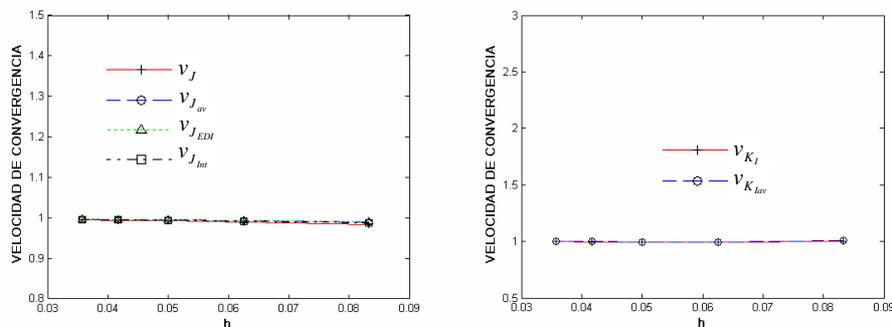
Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	0.983	0.990	0.991	0.988	1.002	1.009
3	6.25E-02	0.990	0.993	0.994	0.991	0.993	0.996
4	5.00E-02	0.993	0.995	0.995	0.993	0.995	0.997
5	4.17E-02	0.994	0.996	0.996	0.994	0.997	0.998
6	3.57E-02	0.995	0.996	0.997	0.995	0.997	0.998

**Tabla 4.5. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo simétrico, mallado con elementos cuadráticos.**

En las tablas (Tabla 4.4 y Tabla 4.5) se puede observar como el valor de las velocidades de convergencia tiende a la unidad para todas las magnitudes. Se representa la velocidad de convergencia frente a al tamaño de elemento en la Figura 4.15:



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.15. Velocidad de convergencia del error en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I, modelo simétrico.**

Como se puede observar, la velocidad de convergencia tiende a la unidad con todas las magnitudes bien con elementos lineales, bien con elementos cuadráticos. Para la magnitud  $J$  se observa que la diferencia en valor absoluto entre el valor exacto de la velocidad de convergencia (la unidad) y el valor calculado es generalmente mayor que para  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ . Dicha diferencia también es mayor para la magnitud  $K_I$  con respecto a la magnitud  $K_{Iav}$ .

Se verifica entonces que, como comentado en el apartado 4.3, en modo I la velocidad de convergencia en la integral  $J$  vale la unidad, y además la velocidad de convergencia en el FIT  $K_I$  es la misma.

### Resultados problema de Westergaard

De forma análoga a lo visto con el problema asintótico singular, en las tablas siguientes se presentan los errores en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$  (Tabla 4.6 y Tabla 4.7) para el problema de Westergaard modelado con dominio simétrico:

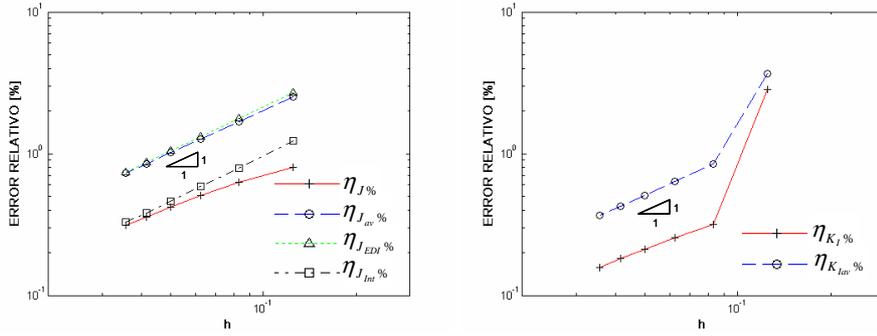
Malla	$h$	$\eta_J\%$	$\eta_{J_{av}}\%$	$\eta_{J_{EDI}}\%$	$\eta_{J_{Int}}\%$	$\eta_{K_I}\%$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}}\%$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	0.799	2.522	2.704	1.229	2.851	3.687
2	8.33E-02	0.629	1.688	1.767	0.793	0.318	0.849
3	6.25E-02	0.506	1.268	1.312	0.585	0.254	0.636
4	5.00E-02	0.421	1.015	1.044	0.464	0.211	0.509
5	4.17E-02	0.359	0.847	0.866	0.384	0.181	0.425
6	3.57E-02	0.313	0.726	0.741	0.328	0.158	0.364

**Tabla 4.6. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo simétrico, mallado con elementos lineales.**

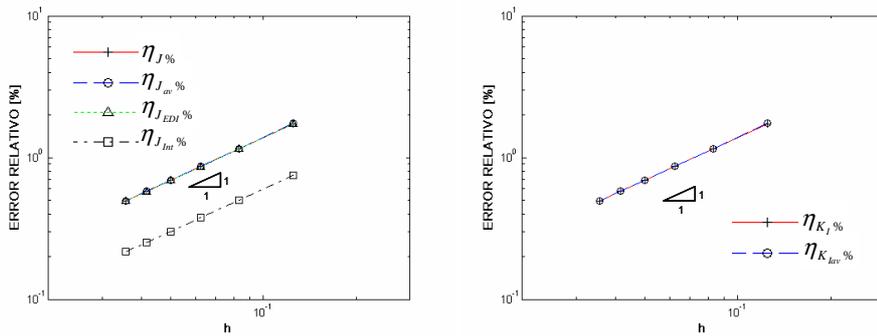
Malla	$h$	$\eta_J\%$	$\eta_{J_{av}}\%$	$\eta_{J_{EDI}}\%$	$\eta_{J_{Int}}\%$	$\eta_{K_I}\%$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}}\%$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	1.730	1.741	1.720	0.751	0.873	0.878
2	8.33E-02	1.155	1.158	1.148	0.502	0.580	0.581
3	6.25E-02	0.867	0.868	0.862	0.377	0.435	0.435
4	5.00E-02	0.693	0.694	0.690	0.302	0.347	0.348
5	4.17E-02	0.577	0.578	0.575	0.251	0.289	0.289
6	3.57E-02	0.495	0.495	0.493	0.216	0.248	0.248

**Tabla 4.7. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo simétrico mallado con elementos cuadráticos.**

A partir de estos valores, se han dibujado las gráficas del error relativo en función del tamaño de elemento  $h$  en la Figura 4.16:



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.16. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I, modelo simétrico.**

Se puede observar que, con elementos lineales, el error en  $J$  y  $J_{Int}$  es menor que el error en  $J_{av}$  y  $J_{EDI}$  y que el error en  $K_I$  es menor que el error en  $K_{Iav}$ . Con elementos cuadráticos se observa que el error en  $J_{Int}$  es menor que los demás, mientras que para el FIT el error coincide implementando las dos metodologías de cálculo (promediando y sin promediar).

A partir de los valores de error, se han calculado las respectivas velocidades de convergencia. Las velocidades de convergencia obtenidas para el problema de Westergaard se muestran en la Tabla 4.8 y la Tabla 4.9:

4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS

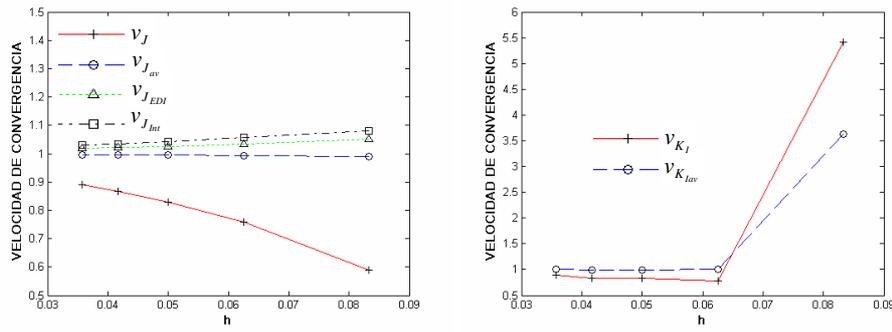
Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	0.589	0.991	1.050	1.080	5.409	3.623
3	6.25E-02	0.757	0.994	1.034	1.056	0.788	1.003
4	5.00E-02	0.828	0.995	1.026	1.043	0.829	0.998
5	4.17E-02	0.867	0.996	1.021	1.035	0.837	0.991
6	3.57E-02	0.891	0.997	1.018	1.030	0.895	0.999

**Tabla 4.8. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo simétrico, mallado con elementos lineales.**

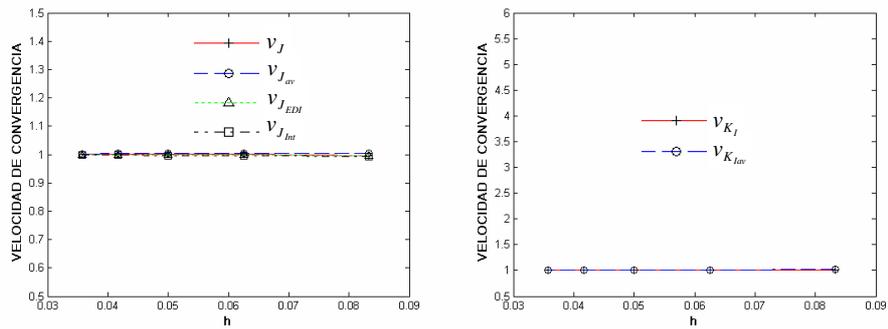
Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	0.996	1.004	0.996	0.994	1.010	1.018
3	6.25E-02	1.000	1.004	0.997	0.996	1.002	1.006
4	5.00E-02	1.001	1.003	0.998	0.997	1.004	1.006
5	4.17E-02	1.001	1.003	0.998	0.997	1.006	1.008
6	3.57E-02	1.001	1.003	0.998	0.998	1.003	1.004

**Tabla 4.9. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo simétrico, mallado con elementos cuadráticos.**

En las tablas (Tabla 4.8 y Tabla 4.9) se puede observar como el valor de las velocidades de convergencia tiende a la unidad para todas las magnitudes. Se representa la velocidad de convergencia frente al tamaño de elemento en la Figura 4.17:



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.17. Velocidad de convergencia del error en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{I_{av}}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo simétrico.**

Se observa que las velocidades de convergencia de todas las magnitudes tienden hacia la unidad o valores muy próximos a la unidad.

#### 4.4.2 Problemas en modo I: modelo con dominio completo

Como se ha visto en el apartado anterior, se ha validado el programa aplicando las rutinas al cálculo de las magnitudes de interés y los respectivos errores en modelos con propiedades de simetría. Los resultados obtenidos indican que el programa funciona adecuadamente. Sin embargo,

para poder analizar problemas en modo II o modo mixto, es necesario implementar modelos que no gozan de propiedades de simetría. Por eso, para poder aplicar las rutinas al cálculo de problemas en modo mixto, también fue necesario desarrollar modelos de elementos finitos con dominios completos respecto al plano de grieta. Así, en este apartado se presentan los resultados obtenidos aplicando las rutinas a problemas en modo I modelados mediante dominios completos respecto al plano de grieta, que luego también se utilizarán para el estudio de problemas en modo mixto.

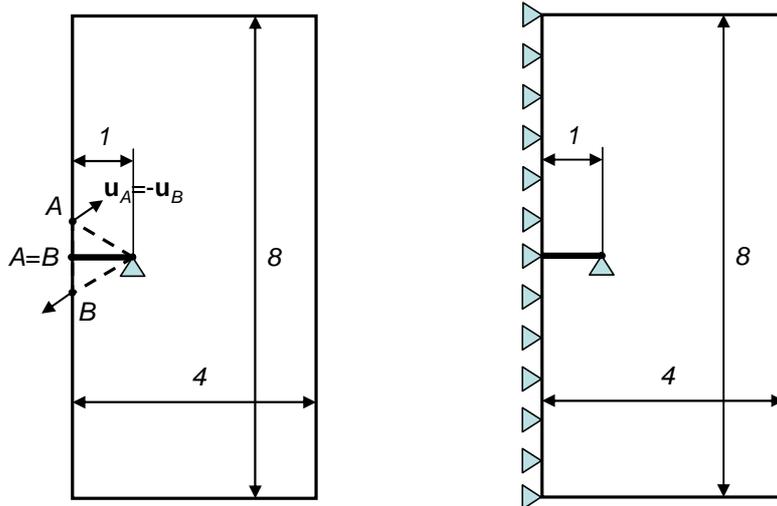
La Figura 4.18 muestra el modelo utilizado para estudiar un problema en modo I sin aprovechar de las propiedades de simetría. Para ambos problemas (asintótico singular y de Westergaard) se ha modelado la porción de dominio  $x \in [-4,4]$  e  $y \in [0,4]$ . Con respecto al problema asintótico singular, se han ligado los desplazamientos de los nodos extremos de las caras de grieta  $A$  y  $B$ , imponiendo ecuaciones tipo “constraint”:

$$\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B = \mathbf{0} \quad (4.90)$$

Además se ha restringido el desplazamiento del extremo de grieta en dirección  $x$ . La elección de utilizar ecuaciones tipo “constraint” en problemas en modo I es debida al hecho de que este tipo de restricción se aplicará también al caso más general de problemas en modo mixto.

Con respecto al problema de Westergaard, se ha aprovechado la simetría de geometría y cargas que existe respecto al eje  $y$ , restringiendo los desplazamientos en  $x$  del lado vertical como indicado en la Figura 4.18. Además, se ha restringido el desplazamiento del extremo de grieta en dirección  $y$ .

A partir de los datos del problema ( $K_{lex} = 1, a = 1$ ), se han impuesto respectivamente las tracciones correspondientes al campo asintótico singular (ec. (4.2)) y a la solución analítica de Westergaard (ecs. (4.24)-(4.26)) en los lados no restringidos (excepto caras de grieta).



**Figura 4.18. Modelos con dominio completo para estudio de problemas en modo I: restricciones para problema asintótico singular (izda) y para problema de Westergaard (dcha).**

Los modelos de ambos problemas se discretizaron mediante elementos cuadriláteros lineales y cuadráticos. En la Figura 4.19 se muestra la primera malla de la familia descrita por las ecs. (4.64) y (4.65) para cada problema. A continuación se presentarán los resultados obtenidos para el error y la velocidad de convergencia de las magnitudes de interés que, también en este caso, serán la integral  $J$  y el FIT  $K_I$ .

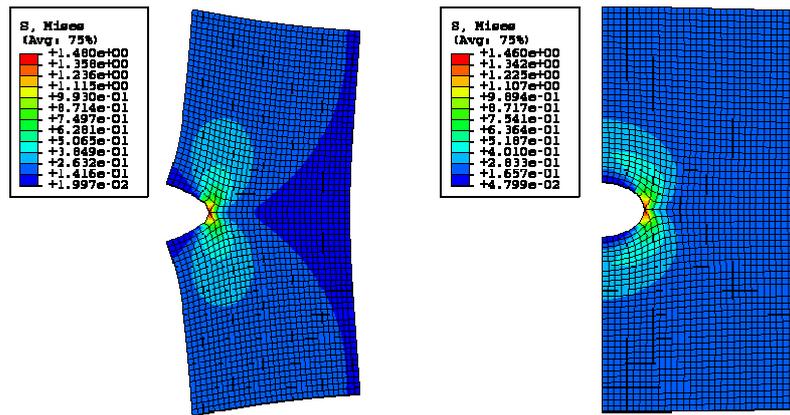


Figura 4.19. Representación de la primera malla de los problemas analizados con dominio completo: deformada y distribución de tensiones de von Mises del problema asintótico singular (izda) y del problema de Westergaard (dcha).

### Resultados problema asintótico singular

De manera análoga a lo visto con el modelo simétrico, se presentan los resultados de los errores en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$  (Tabla 4.10 y Tabla 4.11). Se recuerda que las magnitudes  $J$  y  $J_{av}$  se han calculado mediante integral de línea,  $J_{EDI}$  se ha calculado mediante el método EDI y  $J_{Int}$  se ha obtenido a partir de los FIT calculados mediante la integral de interacción  $I$  (a su vez calculada mediante integral de dominio equivalente).

Malla	$h$	$\eta_J\%$	$\eta_{J_{av}}\%$	$\eta_{J_{EDI}}\%$	$\eta_{J_{Int}}\%$	$\eta_{K_I}\%$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}}\%$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	-0.964	2.981	3.299	3.276	-0.481	1.502
2	8.33E-02	-0.545	2.066	2.207	2.197	-0.272	1.039
3	6.25E-02	-0.374	1.580	1.659	1.653	-0.187	0.793
4	5.00E-02	-0.283	1.278	1.329	1.325	-0.141	0.641
5	4.17E-02	-0.227	1.073	1.108	1.106	-0.113	0.538
6	3.57E-02	-0.189	0.925	0.951	0.949	-0.095	0.464

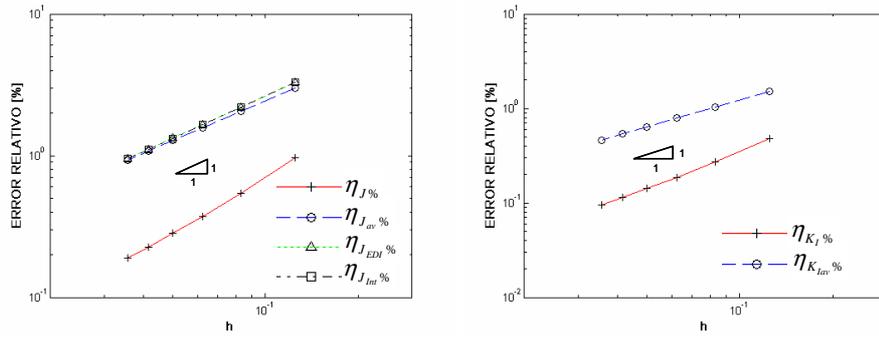
Tabla 4.10. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos lineales.

Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{K_I\%}$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}\%}$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	2.226	2.236	2.240	2.230	1.119	1.124
2	8.33E-02	1.494	1.497	1.499	1.494	0.750	0.751
3	6.25E-02	1.124	1.125	1.126	1.124	0.564	0.564
4	5.00E-02	0.901	0.901	0.902	0.900	0.451	0.452
5	4.17E-02	0.751	0.752	0.752	0.751	0.376	0.377
6	3.57E-02	0.644	0.645	0.645	0.644	0.323	0.323

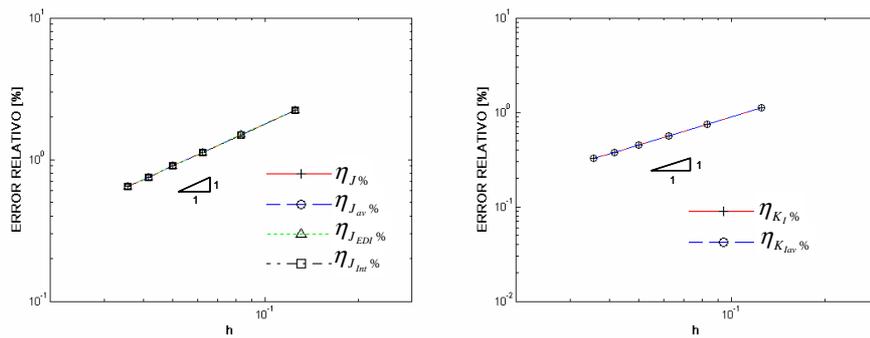
**Tabla 4.11. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos cuadráticos.**

Se observa que los errores en  $J$  y  $K_I$  con elementos cuadráticos son negativos. Por lo tanto, como se hizo en el apartado anterior, se tomará su valor positivo para poder dibujar las gráficas en escala logarítmica. Las gráficas del error relativo en función del tamaño de elemento  $h$  para el modo I modelado con dominio completo se muestran en la Figura 4.20:

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.20. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I, modelo con dominio completo.**

En las gráficas se puede observar que el error en  $J$  siempre es menor que los errores en  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$  utilizando elementos lineales. Por tanto, siempre con elementos lineales, el error en  $K_I$  es menor que el error en  $K_{Iav}$ . Finalmente, para elementos cuadráticos, se observa que los errores en las integrales y los errores en los FIT son básicamente los mismos al utilizar una metodología de cálculo u otra.

A partir de los valores del error, se han calculado las respectivas velocidades de convergencia que se muestran en la Tabla 4.12 y la Tabla 4.13:

Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	1.407	0.904	0.991	0.986	1.404	0.909
3	6.25E-02	1.311	0.933	0.993	0.989	1.309	0.937
4	5.00E-02	1.248	0.949	0.994	0.991	1.247	0.953
5	4.17E-02	1.208	0.959	0.995	0.993	1.207	0.962
6	3.57E-02	1.179	0.966	0.996	0.994	1.178	0.968

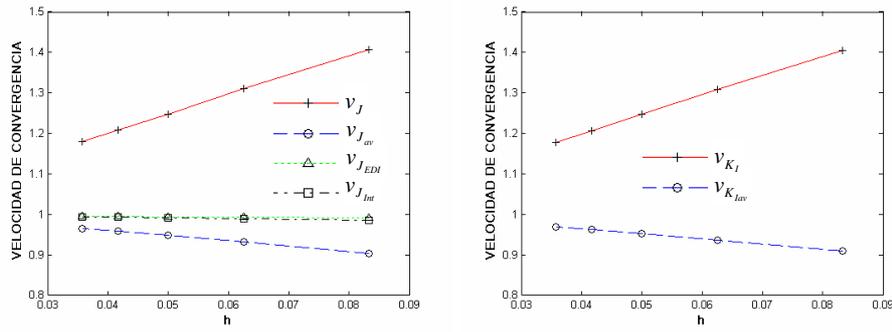
**Tabla 4.12. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	0.983	0.990	0.991	0.988	0.988	0.994
3	6.25E-02	0.990	0.993	0.994	0.991	0.993	0.996
4	5.00E-02	0.993	0.995	0.995	0.993	0.995	0.997
5	4.17E-02	0.994	0.996	0.996	0.994	0.996	0.998
6	3.57E-02	0.995	0.996	0.997	0.995	0.997	0.998

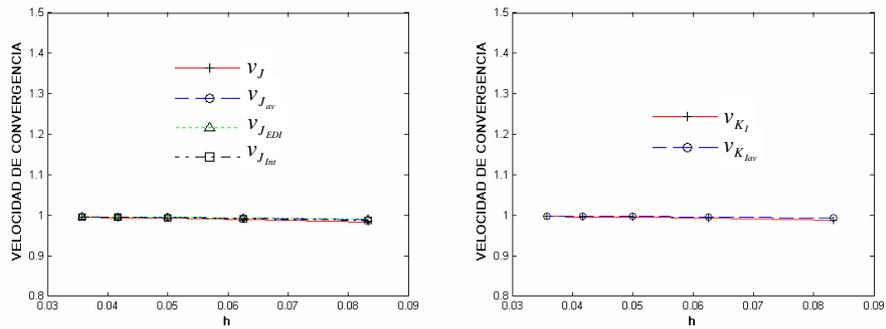
**Tabla 4.13. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos cuadráticos.**

En las tablas (Tabla 4.12 y Tabla 4.13) se puede observar como el valor de las velocidades de convergencia tiende a la unidad para todas las magnitudes. Se representa la velocidad de convergencia frente a al tamaño de elemento en la Figura 4.21:

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.21. Velocidad de convergencia del error en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema asintótico singular en modo I, modelo con dominio completo.**

Se observa que las velocidades de convergencia de todas las magnitudes tienden hacia la unidad o valores muy próximos a la unidad.

#### Resultados problema de Westergaard

De forma análoga a lo visto con el problema asintótico singular, en las tablas siguientes se presentan los errores en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$  (Tabla 4.14 y Tabla 4.15) para el problema de Westergaard modelado con dominio completo:

Malla	$h$	$\eta_J\%$	$\eta_{J_{av}}\%$	$\eta_{J_{EDI}}\%$	$\eta_{J_{Int}}\%$	$\eta_{K_I}\%$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}}\%$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	0.799	2.522	2.704	1.229	0.400	1.269
2	8.33E-02	0.629	1.688	1.767	0.793	0.315	0.847
3	6.25E-02	0.506	1.268	1.312	0.585	0.253	0.636
4	5.00E-02	0.421	1.015	1.044	0.464	0.211	0.509
5	4.17E-02	0.359	0.847	0.866	0.384	0.180	0.424
6	3.57E-02	0.313	0.726	0.741	0.328	0.157	0.364

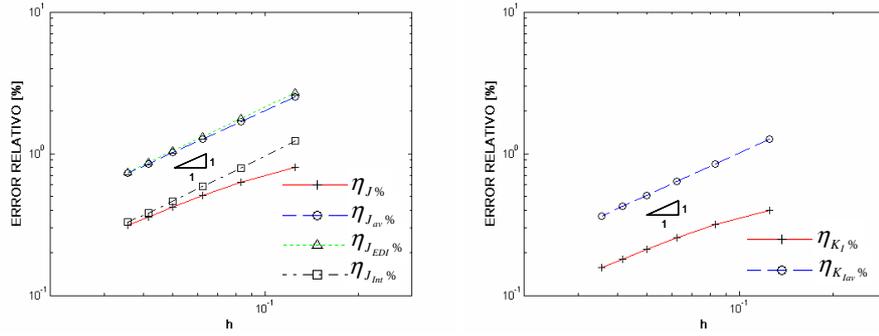
**Tabla 4.14. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$\eta_J\%$	$\eta_{J_{av}}\%$	$\eta_{J_{EDI}}\%$	$\eta_{J_{Int}}\%$	$\eta_{K_I}\%$ (via $J$ )	$\eta_{K_{Iav}}\%$ (via $J_{av}$ )
1	1.25E-01	1.730	1.741	1.720	0.751	0.869	0.874
2	8.33E-02	1.155	1.158	1.148	0.502	0.579	0.581
3	6.25E-02	0.867	0.868	0.862	0.377	0.434	0.435
4	5.00E-02	0.693	0.694	0.690	0.302	0.347	0.347
5	4.17E-02	0.577	0.578	0.575	0.251	0.289	0.289
6	3.57E-02	0.495	0.495	0.493	0.216	0.248	0.248

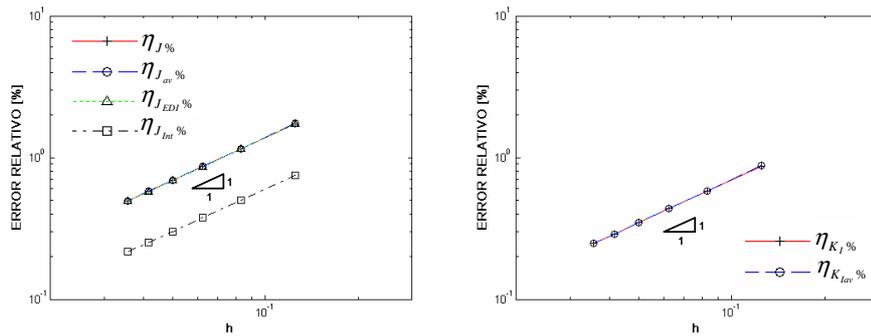
**Tabla 4.15. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos cuadráticos.**

A partir de estos valores, se han dibujado las gráficas del error relativo en función del tamaño de elemento  $h$  en la Figura 4.22

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.22. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I, modelo con dominio completo.**

Se puede observar que, con elementos lineales, el error en  $J$  y  $J_{Int}$  es menor que el error en  $J_{av}$  y  $J_{EDI}$  y que el error en  $K_I$  es menor que el error en  $K_{Iav}$ . Con elementos cuadráticos se observa que el error en  $J_{Int}$  es menor que los demás, mientras que para el FIT el error coincide implementando las dos metodologías de cálculo.

A partir de los valores de error, se han calculado las respectivas velocidades de convergencia. Las velocidades de convergencia obtenidas para el problema de Westergaard modelado con dominio completo se muestran en la Tabla 4.16 y la Tabla 4.17:

Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	0.589	0.991	1.050	1.081	0.590	0.996
3	6.25E-02	0.757	0.994	1.034	1.056	0.759	0.997
4	5.00E-02	0.828	0.995	1.026	1.043	0.829	0.998
5	4.17E-02	0.867	0.996	1.021	1.035	0.867	0.998
6	3.57E-02	0.891	0.997	1.018	1.030	0.892	0.999

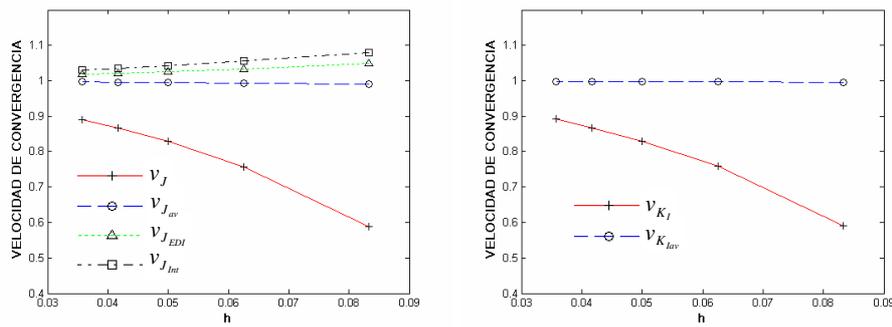
**Tabla 4.16. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$v_J$	$v_{J_{av}}$	$v_{J_{EDI}}$	$v_{J_{Int}}$	$v_{K_I}$	$v_{K_{Iav}}$
1	1.25E-01						
2	8.33E-02	0.996	1.004	0.996	0.994	1.000	1.008
3	6.25E-02	1.000	1.004	0.997	0.996	1.003	1.007
4	5.00E-02	1.001	1.003	0.998	0.997	1.003	1.005
5	4.17E-02	1.001	1.003	0.998	0.997	1.003	1.005
6	3.57E-02	1.001	1.003	0.998	0.998	1.003	1.004

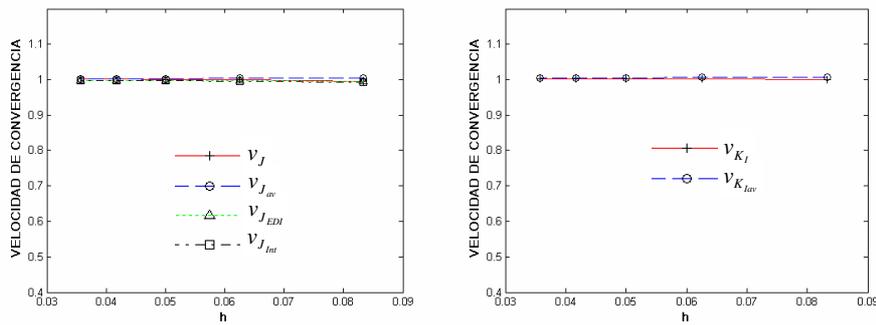
**Tabla 4.17. Velocidades de convergencia de  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{Iav}$ : problema de Westergaard en modo I con modelo con dominio completo, mallado con elementos cuadráticos.**

En las tablas (Tabla 4.16 y Tabla 4.17) se puede observar como el valor de las velocidades de convergencia tiende a la unidad para todas las magnitudes. Se representa la velocidad de convergencia frente al tamaño de elemento en la Figura 4.23:

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.23. Velocidad de convergencia del error en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $K_I$  y  $K_{I_{av}}$ : problema de Westergaard en modo I, modelo con dominio completo.**

Se observa en las figuras que las velocidades de convergencia de todas las magnitudes tienden hacia la unidad o valores muy próximos a la unidad.

Los resultados obtenidos en el problema de Westergaard y el problema asintótico singular implementando ambos modelos (simétrico y con dominio completo), indican que las rutinas desarrolladas calculan de manera correcta la integral  $J$  mediante el método de la integral de contorno.

## 4.5 APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA INTEGRAL $J_2$ : PROBLEMAS EN MODO MIXTO

En el apartado anterior se han aplicado las rutinas desarrolladas en esta tesis al cálculo de la integral  $J$  mediante integrales de contorno y se han comparado los resultados con los obtenidos implementando métodos de dominio equivalente (método EDI y método de la integral de interacción) con el fin de validar el programa. Los resultados obtenidos indican que las rutinas calculan de forma correcta la integral  $J$  a lo largo de caminos rectangulares concéntricos que pasan por los lados de los elementos. El siguiente paso consiste en adaptar las rutinas al cálculo de la integral  $J_2$ . Como se ha comentado en el apartado 4.1, esta adaptación consiste simplemente en:

- cambiar las variables de entrada de las rutinas (la componente  $n_1$  del vector  $\mathbf{n}$  normal al contorno por la componente  $n_2$ , y las derivadas  $\frac{\partial u_j}{\partial x_1}$  por  $\frac{\partial u_j}{\partial x_2}$  ( $j = 1,2$ ));
- extender las rutinas al cálculo de la integral en las caras de grieta, teniendo en cuenta que en el método de Eischen se calcula la integral hasta un punto distante del extremo de grieta de una cantidad  $\delta$  (ver apartado 2.2.4.2)

En los ejemplos numéricos presentados a continuación se analizarán el problema asintótico singular y el problema de Westergaard en modo mixto (con y sin *T-Stress* aplicado) con el objetivo de estudiar la convergencia del error con refinamiento  $h$ -uniforme.

La Figura 4.24 muestra el modelo utilizado para estudiar problemas en modo mixto (bien para problema de Westergaard, bien para problema asintótico singular). Para ambos problemas (asintótico singular y de Westergaard) se ha modelado la porción de dominio  $x \in [-4,4]$  e  $y \in [0,4]$ , y se han ligado los desplazamientos de los nodos extremos de las caras de grieta  $A$  y  $B$ , imponiendo ecuaciones tipo “constraint”:

$$\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B = \mathbf{0} \quad (4.91)$$

Además se ha restringido el desplazamiento del extremo de grieta en dirección  $x$ .

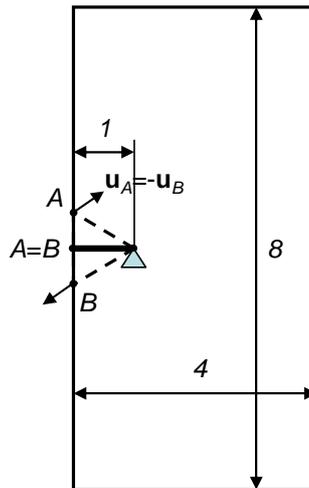


Figura 4.24. Modelos con dominio completo para estudio de problemas en modo mixto.

#### 4.5.1 Estudio de convergencia de problemas en modo mixto

##### 4.5.1.1 Problemas con $T$ -Stress nulo

Los modelos de ambos problemas se discretizaron mediante elementos cuadriláteros lineales y cuadráticos. En la Figura 4.25 se muestra la primera malla de la familia descrita por las ecs. (4.64) y (4.65) para cada problema. En ambos problemas estudiados se han utilizado los siguientes datos de partida:

$$K_{lex} = 1 ; K_{IIex} = 2 ; T = 0 \quad (4.92)$$

y por lo tanto, aplicando las ecs. (2.82) y (2.83), resulta:

$$J_{ex} = \frac{K_{lex}^2}{E'} + \frac{K_{IIex}^2}{E'} = \frac{(1+4) \cdot (1-0.333^2)}{10^7} = 4.4455550000 \cdot 10^{-7} \quad (4.93)$$

$$J_{2ex} = -2 \frac{K_{lex} K_{IIex}}{E'} = -2 \frac{1 \cdot 2 \cdot (1-0.333^2)}{10^7} = 3.5564440000 \cdot 10^{-7}$$

A partir de los datos del problema, se han impuesto respectivamente las tracciones correspondientes al campo asintótico singular (ec. (4.2)) y a la solución analítica de Westergaard (ecs. (4.24)-(4.26)) en los lados no restringidos (excepto caras de grieta).

A continuación se presentarán los resultados obtenidos para las magnitudes de interés que serán las integrales  $J$  y  $J_2$  y los FIT  $K_I$  y  $K_{II}$ . En las tablas de resultados no se volverá a presentar la velocidad de convergencia del error en  $J$ , al haberse comprobado su validez en los ejemplos numéricos anteriores. Los resultados obtenidos en el error de los FIT y de la integral  $J_2$  (calculados implementando el método de Eischen) no se prestan a ser representados en gráficas en escala logarítmica (al ser valores positivos y negativos) y por eso se representan en gráficas en escala lineal.

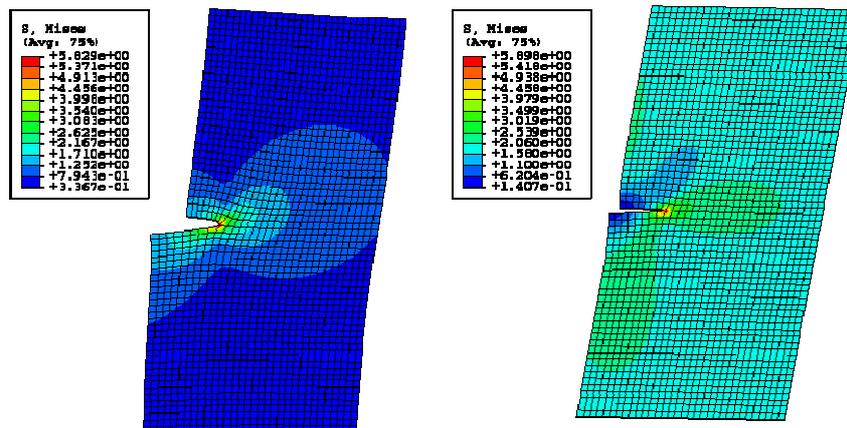


Figura 4.25. Representación de la primera malla de los problemas analizados en modo mixto: deformada y distribución de tensiones de von Mises del problema asintótico singular (izda) y del problema de Westergaard (dcha).

### Resultados problema asintótico singular

En este apartado se presentan los resultados de los errores en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  (Tabla 4.18 y Tabla 4.19) y en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$  (Tabla 4.20 y Tabla 4.21) para el problema asintótico singular en modo mixto con  $T$ -Stress nulo, respectivamente para elementos lineales y cuadráticos. Se recuerda que las magnitudes  $J$  y  $J_{av}$  se han calculado mediante integral de línea,  $J_{EDI}$  se ha calculado mediante el método EDI y  $J_{Int}$  se ha obtenido a partir de los FIT calculados mediante la integral de interacción  $I$  (a su vez calculada mediante integral de dominio equivalente). De forma análoga, las magnitudes  $J_2$  y  $J_{2av}$  se han calculado mediante integral de línea, mientras que la magnitud  $J_{2EDI}$  se ha calculado mediante el método EDI, calculando una integral de área y una integral de línea (en las caras de grieta). Finalmente,  $K_{II,Int}$  es el FIT calculado a partir de la integral de interacción  $I$  (a su vez calculada mediante integral de dominio equivalente).

Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{J_2\%}$	$\eta_{J_{2av}\%}$	$\eta_{J_{2EDI}\%}$
1	1.25E-01	-1.270	2.012	2.255	2.227	48.198	52.046	52.061
2	8.33E-02	-0.730	1.396	1.504	1.491	12.633	15.195	15.141
3	6.25E-02	-0.503	1.069	1.128	1.121	8.752	10.676	10.609
4	5.00E-02	-0.381	0.865	0.903	0.898	7.363	8.904	8.838
5	4.17E-02	-0.306	0.727	0.753	0.749	6.986	8.271	8.209
6	3.57E-02	-0.255	0.626	0.645	0.643	7.131	8.233	8.176

**Tabla 4.18.** Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos lineales.

Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{J_2\%}$	$\eta_{J_{2av}\%}$	$\eta_{J_{2EDI}\%}$
1	1.25E-01	1.550	1.555	1.524	1.510	19.984	19.993	19.997
2	8.33E-02	1.030	1.031	1.016	1.010	1.249	1.252	1.253
3	6.25E-02	0.770	0.771	0.762	0.759	-2.188	-2.187	-2.186
4	5.00E-02	0.615	0.615	0.610	0.607	-2.326	-2.325	-2.325
5	4.17E-02	0.512	0.512	0.508	0.506	-0.073	-0.072	-0.072
6	3.57E-02	0.438	0.438	0.435	0.434	0.233	0.233	0.234

**Tabla 4.19.** Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.

Malla	$h$	$\eta_{K_I}\%$ (v. $J, J_2$ )	$\eta_{K_{Iav}}\%$ (v. $J_{av}, J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II}}\%$ (v. $J, J_2$ )	$\eta_{K_{IIav}}\%$ (v. $J_{av}, J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II,Int}}\%$ (via $I$ )
1	1.25E-01	52.916	55.779	-10.021	-8.442	0.987
2	8.33E-02	16.044	17.766	-4.063	-3.126	0.660
3	6.25E-02	11.368	12.659	-2.951	-2.271	0.495
4	5.00E-02	9.619	10.657	-2.496	-1.962	0.397
5	4.17E-02	9.110	9.979	-2.338	-1.898	0.331
6	3.57E-02	9.252	10.001	-2.338	-1.964	0.284

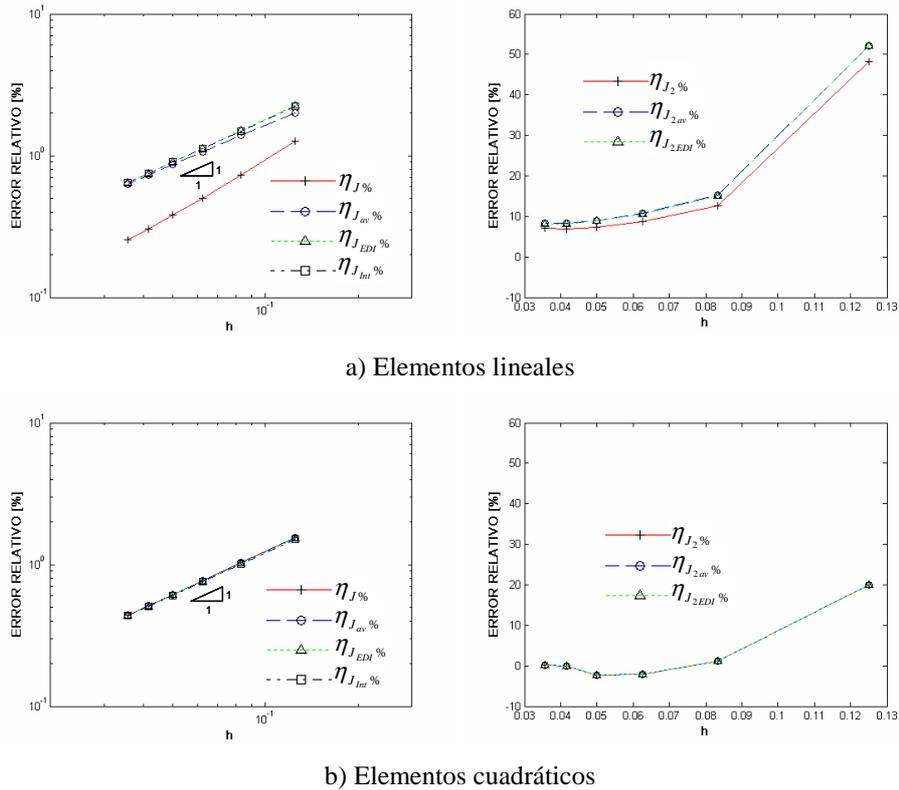
**Tabla 4.20.** Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos lineales.

Malla	$h$	$\eta_{K_I}\%$ (v. $J, J_2$ )	$\eta_{K_{Iav}}\%$ (v. $J_{av}, J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II}}\%$ (v. $J, J_2$ )	$\eta_{K_{IIav}}\%$ (v. $J_{av}, J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II,Int}}\%$ (via $I$ )
1	1.25E-01	23.105	23.112	-4.058	-4.056	0.667
2	8.33E-02	0.810	0.812	0.443	0.443	0.445
3	6.25E-02	-3.665	-3.664	1.425	1.425	0.334
4	5.00E-02	-3.715	-3.714	1.339	1.339	0.267
5	4.17E-02	-0.529	-0.528	0.453	0.453	0.223
6	3.57E-02	-0.055	-0.055	0.288	0.288	0.191

**Tabla 4.21.** Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.

Las gráficas de resultados se presentan en la Figura 4.26 y la Figura 4.27. Con el objetivo de representar los resultados del error en  $J$  en escala logarítmica, se ha considerado el valor absoluto de los errores en  $J$  para el caso con elementos lineales (tercera columna de la Tabla 4.18).

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS



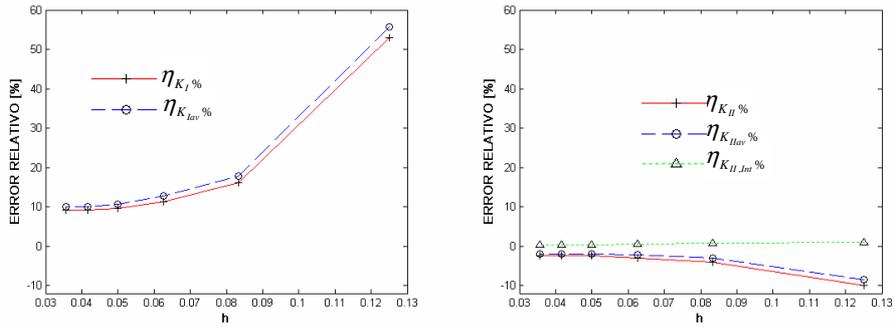
**Figura 4.26.** Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2ED1}$ : problema asintótico singular en modo mixto.

Como se puede observar en las gráficas de la Figura 4.26, con respecto a las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2ED1}$  se pueden hacer las siguientes consideraciones:

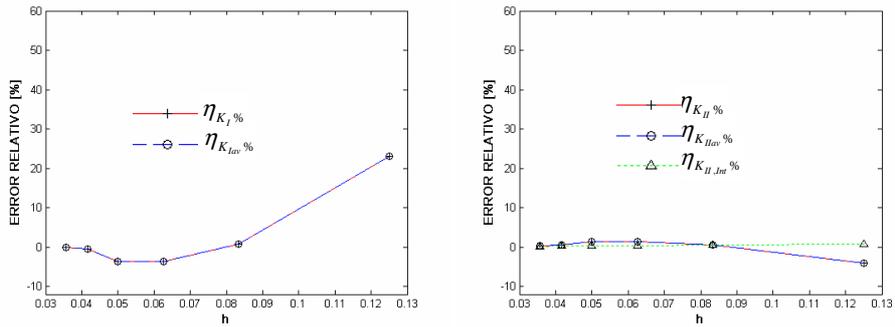
- La solución está convergiendo para la integral  $J$  calculada con distintos métodos (mediante integral de línea promediado y sin promediar, respectivamente  $J$  y  $J_{av}$ , y mediante integrales de área  $J_{ED1}$  y  $J_{Int}$ ).
- El error en la integral  $J_2$  calculada utilizando distintos métodos tiende a valores alrededor de 8% con elementos lineales. Utilizando elementos cuadráticos, el error tiende a estabilizarse alrededor de valores nulos. Se observa además que, para la integral  $J_2$ , el error obtenido mediante el método EDI  $J_{2ED1}$  y el error obtenido a partir de

la integral de contorno  $J_{2av}$  con elementos lineales son básicamente coincidentes. Esto tiene una explicación evidente: ya se había observado cómo los errores obtenidos mediante la rutina desarrollada para calcular la integral  $J$  de contorno son básicamente iguales a los calculados mediante el método EDI (ver p.ej. curvas de  $J_{av}$  y  $J_{EDI}$  en la Figura 4.20a o la Figura 4.22a). Por un lado, al extender la rutina al cálculo de la integral  $J_2$ , es esperable que los resultados sean también parecidos con respecto a la componente de la integral  $J_2$  calculada a lo largo de la curva  $\Gamma_3$  o en el dominio equivalente  $A^*$  de la Figura 2.15, según el método utilizado (contorno o dominio). Por otro lado, como el cálculo de la integral  $J_2$  a lo largo de las caras de grieta se hace mediante integral de contorno también cuando se implementa un método de dominio equivalente, es esperable que esto afecte en igual medida al resultado obtenido utilizando un método u otro.

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.27. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{I,av}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{II,av}$  y  $K_{II,Int}$ : problema asintótico singular en modo mixto.**

Como se puede observar en las gráficas de la Figura 4.27, con respecto a las magnitudes  $J_2$ ,  $J_{2av}$ ,  $J_{2EDI}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{II,av}$  y  $K_{II,Int}$  se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Con respecto al  $K_I$ , la solución no está convergiendo al valor exacto utilizando elementos lineales (el error se aproxima a un 10%), mientras que la solución de  $K_I$  se aproxima al valor exacto utilizando elementos cuadráticos. La diferencia con el cálculo del  $K_I$  en un problema en modo I es que en modo mixto el  $K_I$  se calcula a partir de las integrales  $J$  y  $J_2$ . Al ser la integral  $J_2$  calculada mediante un método aproximado (método de Eischen), esto influye también en el cálculo de  $K_I$  obtenido a partir de las relaciones  $J_k$ -FIT. De hecho, se

puede observar cómo las curvas del error en  $K_I$  siguen el mismo patrón de las curvas del error en  $J_2$  (ver Figura 4.26 y Figura 4.27).

- El error en  $K_{II}$  calculado mediante la integral de interacción de dominio proporciona resultados excelentes ya que el error converge hacia valores nulos. Si se implementa el método de Eischen, el error converge alrededor de un 2% (valor absoluto) con elementos lineales y alrededor de 0% con elementos cuadráticos.

### Resultados problema de Westergaard

De forma análoga a lo visto con el problema asintótico singular, en las tablas siguientes se presentan los errores en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  (Tabla 4.22 y Tabla 4.23) y en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$  (Tabla 4.24 y Tabla 4.25) para el problema de Westergaard en modo mixto con  $T-Stress$  nulo, respectivamente para elementos lineales y cuadráticos.

Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{J_2\%}$	$\eta_{J_{2av}\%}$	$\eta_{J_{2EDI}\%}$
1	1.25E-01	1.895	4.262	4.549	2.219	54.895	58.021	58.226
2	8.33E-02	1.401	2.884	3.011	1.488	14.637	16.751	16.800
3	6.25E-02	1.103	2.180	2.251	1.119	10.700	12.300	12.302
4	5.00E-02	0.907	1.752	1.797	0.897	9.004	10.291	10.276
5	4.17E-02	0.770	1.465	1.496	0.749	8.270	9.347	9.325
6	3.57E-02	0.669	1.258	1.281	0.642	8.225	9.151	9.126

**Tabla 4.22. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{J_2\%}$	$\eta_{J_{2av}\%}$	$\eta_{J_{2EDI}\%}$
1	1.25E-01	3.017	3.018	2.987	1.506	21.365	21.358	21.333
2	8.33E-02	2.010	2.010	1.995	1.008	2.107	2.106	2.095
3	6.25E-02	1.507	1.507	1.498	0.758	-1.517	-1.517	-1.523
4	5.00E-02	1.205	1.205	1.199	0.607	-1.811	-1.812	-1.815
5	4.17E-02	1.004	1.004	0.999	0.506	0.356	0.356	0.353
6	3.57E-02	0.860	0.860	0.857	0.434	0.592	0.592	0.590

**Tabla 4.23. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.**

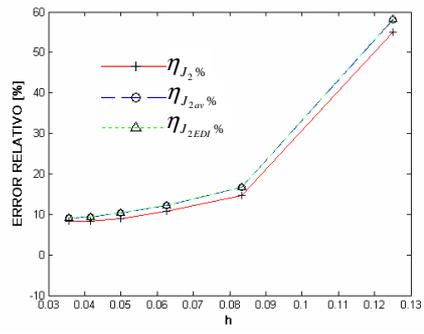
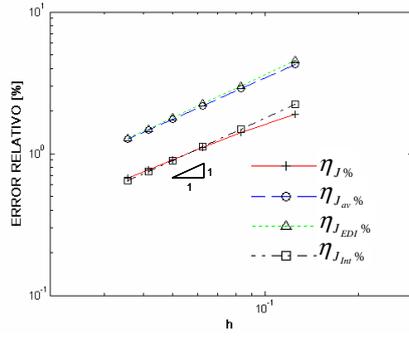
Malla	$h$	$\eta_{K_I\%}$ (v. $J$ , $J_2$ )	$\eta_{K_{Iav}\%}$ (v. $J_{av}$ , $J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II}\%}$ (v. $J$ , $J_2$ )	$\eta_{K_{IIav}\%}$ (v. $J_{av}$ , $J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II,Int}\%}$ (via $I$ )
1	1.25E-01	58.536	61.001	-8.781	-7.643	0.979
2	8.33E-02	17.117	18.708	-2.992	-2.408	0.656
3	6.25E-02	12.666	13.895	-2.251	-1.853	0.493
4	5.00E-02	10.750	11.753	-1.957	-1.657	0.395
5	4.17E-02	9.949	10.797	-1.865	-1.625	0.330
6	3.57E-02	9.963	10.696	-1.930	-1.730	0.283

**Tabla 4.24. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

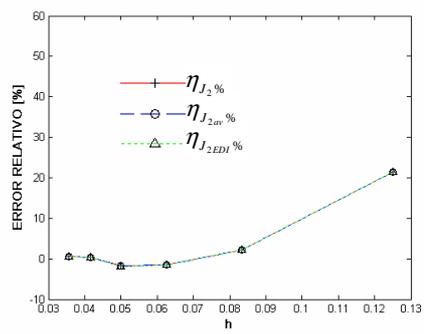
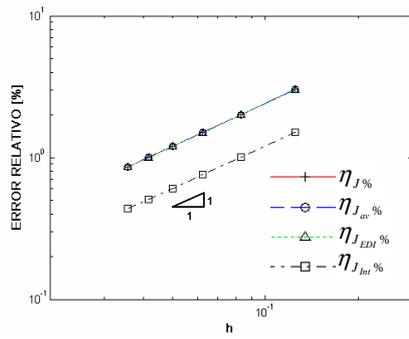
Malla	$h$	$\eta_{K_I\%}$ (v. $J$ , $J_2$ )	$\eta_{K_{Iav}\%}$ (v. $J_{av}$ , $J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II}\%}$ (v. $J$ , $J_2$ )	$\eta_{K_{IIav}\%}$ (v. $J_{av}$ , $J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II,Int}\%}$ (via $I$ )
1	1.25E-01	23.890	23.883	-3.318	-3.317	0.665
2	8.33E-02	1.141	1.139	0.978	0.978	0.445
3	6.25E-02	-3.402	-3.403	1.823	1.823	0.334
4	5.00E-02	-3.537	-3.537	1.667	1.667	0.267
5	4.17E-02	-0.369	-0.370	0.722	0.722	0.223
6	3.57E-02	0.071	0.071	0.521	0.521	0.191

**Tabla 4.25. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.**

A partir de estos valores, se han dibujado las gráficas del error relativo en función del tamaño de elemento  $h$  en la Figura 4.28 en la Figura 4.29.



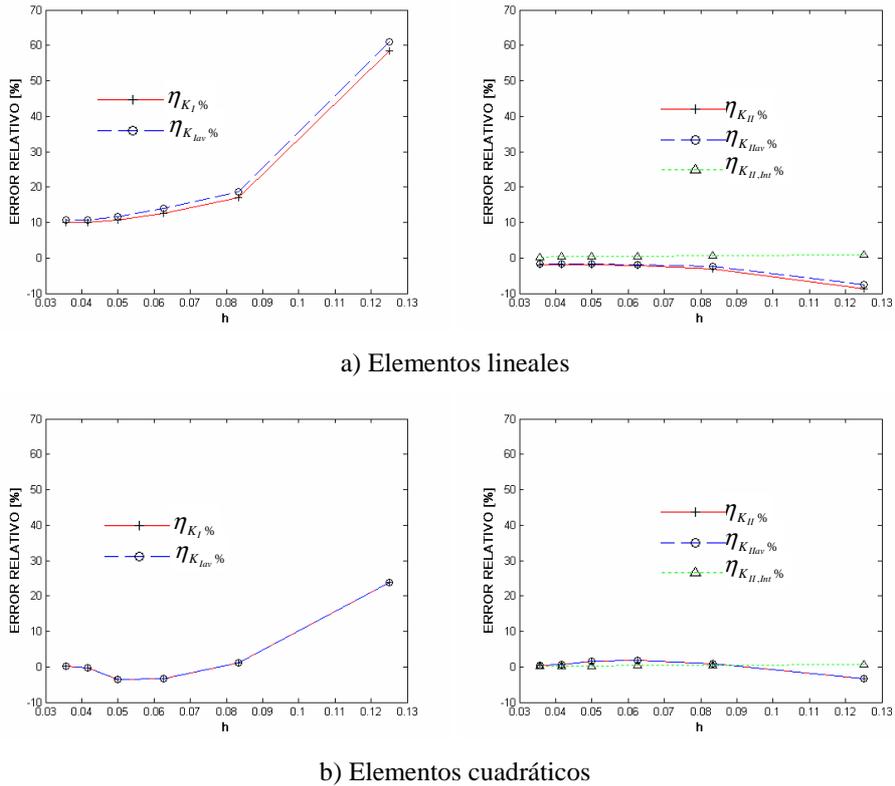
a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.28. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema de Westergaard en modo I, modelo con dominio completo.**

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS



**Figura 4.29. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema de Westergaard en modo mixto.**

Como se puede observar en las gráficas, el comportamiento del error en las distintas magnitudes es básicamente el mismo que en el caso asintótico singular y por lo tanto son válidas las mismas conclusiones.

#### Conclusiones sobre los problemas en modo mixto con $T = 0$

En conclusión, cuando se estudian problemas en modo mixto con  $T = 0$  implementando el método de Eischen para el cálculo de la integral  $J_2$ , los resultados obtenidos tienen errores aceptables si se utilizan elementos cuadráticos. Sin embargo, cabe señalar que en un problema en modo mixto en el que  $T = 0$ , la contribución a lo largo de las caras de grieta siempre es nula al resultar:

$$W^+ - W^- \propto K_{II} T \quad (4.94)$$

tanto para el problema asintótico singular (ec. (2.101)) como para el problema de Westergaard (ec. (2.111)). En los problemas analizados en estos apartados se ha calculado la contribución a lo largo de las caras de grieta aunque fuese teóricamente nula.

Por lo tanto, en un principio, para calcular la integral  $J_2$  cuando  $T=0$  es suficiente calcular tan sólo la contribución a lo largo del camino que empieza y acaba en las caras de grieta ( $\Gamma$  en la Figura 2.12), ya que la contribución a lo largo de las caras de grieta es una cantidad no nula tan sólo cuando  $T \neq 0$  (en modo mixto y en modo II).

Cabe finalmente señalar la robustez del cálculo de  $K_{II}$  implementando la integral de interacción de dominio. Como se puede observar, si se utilizan elementos del mismo orden, el error calculado es el mismo para el problema de Westergaard y para el problema asintótico singular.

En el siguiente apartado se estudiarán los mismos problemas estudiados en este apartado, pero con  $T \neq 0$ . Se verá como, al introducir *T-Stress* en las tensiones aplicadas y al adquirir relevancia las contribuciones en las caras de grieta por la ec. (4.94), los errores obtenidos en el cálculo resultan ser bastante elevados.

#### 4.5.1.2 Problemas con *T-Stress* no nulo

En los problemas que se presentan a continuación se han implementado como dato de partida los mismos FIT utilizados para los problemas anteriores (problemas en modo mixto con *T-Stress* nulo), y además se ha introducido *T-Stress* de valor  $T = 3$ .

Resumiendo, para el problema asintótico singular y para el problema de Westergaard estudiados se han utilizado los siguientes datos de partida:

$$K_{lex} = 1 ; K_{IIex} = 2 ; T = 3 \quad (4.95)$$

y por lo tanto, aplicando las ecs. (2.82) y (2.83), resulta:

$$\begin{aligned}
 J_{ex} &= \frac{K_{lex}^2}{E'} + \frac{K_{IIex}^2}{E'} = \frac{(1+4) \cdot (1-0.333^2)}{10^7} = 4.4455550000 \cdot 10^{-7} \\
 J_{2ex} &= -2 \frac{K_{lex} K_{IIex}}{E'} = -2 \frac{1 \cdot 2 \cdot (1-0.333^2)}{10^7} = 3.5564440000 \cdot 10^{-7}
 \end{aligned}
 \tag{4.96}$$

como para los problemas presentados en el apartado 4.5.1.1.

A partir de los datos del problema, se han impuesto respectivamente las tracciones correspondientes al campo asintótico singular (ec. (4.2)) y a la solución analítica de Westergaard (ecs. (4.24)-(4.26)) en los lados no restringidos (excepto caras de grieta).

A continuación se presentarán los resultados obtenidos para las magnitudes de interés que serán las integrales  $J$  y  $J_2$ , los FIT  $K_I$  y  $K_{II}$  y el  $T$ -Stress  $T$ .

### Resultados problema asintótico singular

En este apartado se presentan los resultados de los errores en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  (Tabla 4.26 y Tabla 4.27), en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$  (Tabla 4.28 y Tabla 4.29) y en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$  (Tabla 4.30 y Tabla 4.31) para el problema asintótico singular en modo mixto con  $T$ -Stress no nulo, respectivamente para elementos lineales y cuadráticos. Se recuerda que las magnitudes  $J$  y  $J_{av}$  se han calculado mediante integral de línea,  $J_{EDI}$  se ha calculado mediante el método EDI y  $J_{Int}$  se ha obtenido a partir de los FIT calculados mediante la integral de interacción  $I$  (a su vez calculada mediante integral de dominio equivalente). De forma análoga, las magnitudes  $J_2$  y  $J_{2av}$  se han calculado mediante integral de línea, mientras que la magnitud  $J_{2EDI}$  se ha calculado mediante el método EDI, calculando una integral de área y una integral de línea (en las caras de grieta). Finalmente,  $K_{II,Int}$  es el FIT calculado a partir de la integral de interacción  $I$  (a su vez calculada mediante integral de dominio equivalente),  $T$  el  $T$ -Stress calculado mediante el método de Eischen a partir de las integrales  $J$  y  $J_2$  (calculadas como integrales de línea) y  $T_{av}$  el  $T$ -Stress calculado mediante el método de Eischen a partir de las integrales  $J_{av}$  y  $J_{2av}$  (calculadas como integrales de línea)

Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{J_2\%}$	$\eta_{J_{2av}\%}$	$\eta_{J_{2EDI}\%}$
1	1.25E-01	-0.196	2.047	2.255	2.227	76.775	86.464	87.373
2	8.33E-02	-0.011	1.409	1.504	1.491	19.783	26.307	26.656
3	6.25E-02	0.041	1.077	1.128	1.121	18.713	23.634	23.796
4	5.00E-02	0.056	0.871	0.903	0.898	16.561	20.513	20.594
5	4.17E-02	0.060	0.730	0.753	0.749	12.496	15.797	15.838
6	3.57E-02	0.059	0.629	0.645	0.643	14.211	17.045	17.063

**Tabla 4.26. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$\eta_{J\%}$	$\eta_{J_{av}\%}$	$\eta_{J_{EDI}\%}$	$\eta_{J_{Int}\%}$	$\eta_{J_2\%}$	$\eta_{J_{2av}\%}$	$\eta_{J_{2EDI}\%}$
1	1.25E-01	1.569	1.574	1.524	1.510	85.422	85.458	85.596
2	8.33E-02	1.039	1.040	1.016	1.010	18.698	18.708	18.769
3	6.25E-02	0.775	0.776	0.762	0.759	9.309	9.314	9.348
4	5.00E-02	0.618	0.619	0.610	0.607	6.318	6.320	6.342
5	4.17E-02	0.514	0.514	0.508	0.506	9.361	9.362	9.377
6	3.57E-02	0.440	0.440	0.435	0.434	8.876	8.877	8.888

**Tabla 4.27. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.**

Malla	$h$	$\eta_{K_I\%}$ (v. $J$ , $J_2$ )	$\eta_{K_{Iav}\%}$ (v. $J_{av}$ , $J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II}\%}$ (v. $J$ , $J_2$ )	$\eta_{K_{IIav}\%}$ (v. $J_{av}$ , $J_{2av}$ )	$\eta_{K_{II,Int}\%}$ (via $I$ )
1	1.25E-01	79.157	87.749	-11.427	-10.484	0.987
2	8.33E-02	23.672	30.056	-5.094	-5.360	0.660
3	6.25E-02	22.468	27.338	-4.843	-5.097	0.495
4	5.00E-02	20.064	24.033	-4.382	-4.635	0.397
5	4.17E-02	15.424	18.832	-3.461	-3.738	0.331
6	3.57E-02	17.399	20.300	-3.860	-4.083	0.284

**Tabla 4.28. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$\eta_{K_I} \%$	$\eta_{K_{Iav}} \%$	$\eta_{K_{II}} \%$	$\eta_{K_{IIav}} \%$	$\eta_{K_{II,Int}} \%$
		(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )	(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )	(via $I$ )
1	1.25E-01	86.835	86.866	-10.727	-10.725	0.667
2	8.33E-02	21.935	21.946	-4.147	-4.149	0.445
3	6.25E-02	11.207	11.212	-2.137	-2.138	0.334
4	5.00E-02	7.650	7.652	-1.442	-1.443	0.267
5	4.17E-02	11.439	11.441	-2.347	-2.348	0.223
6	3.57E-02	10.904	10.905	-2.276	-2.277	0.191

**Tabla 4.29. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.**

Malla	$h$	$\eta_T \%$	$\eta_{T_{av}} \%$
		(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )
1	1.25E-01	-19.467	-20.486
2	8.33E-02	-1.016	-0.761
3	6.25E-02	-0.725	-0.482
4	5.00E-02	-0.884	-0.640
5	4.17E-02	-0.374	-0.106
6	3.57E-02	-0.980	-0.764

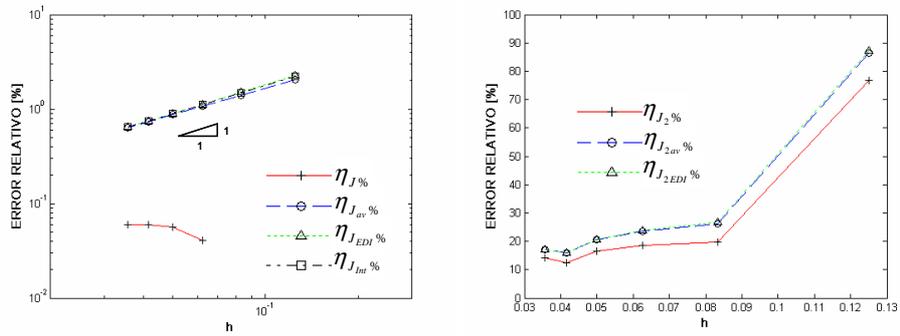
**Tabla 4.30. Errores en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$\eta_T \%$	$\eta_{T_{av}} \%$
		(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )
1	1.25E-01	-23.631	-23.633
2	8.33E-02	-0.277	-0.275
3	6.25E-02	1.413	1.413
4	5.00E-02	1.453	1.453
5	4.17E-02	0.250	0.250
6	3.57E-02	0.046	0.046

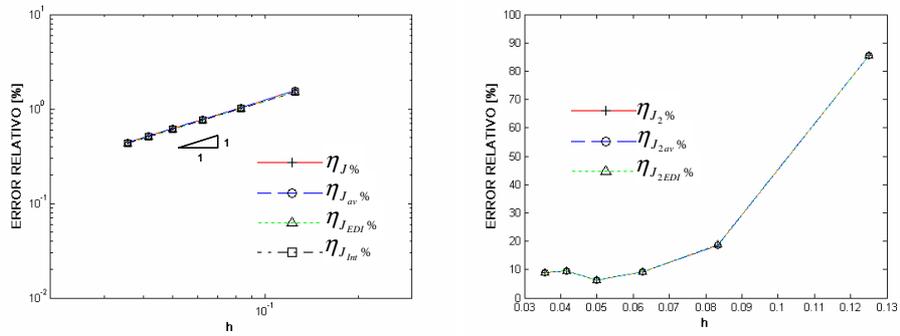
**Tabla 4.31. Errores en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$ : problema asintótico singular en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.**

Las gráficas de resultados se presentan en la Figura 4.30, la Figura 4.31 y la Figura 4.32. Como para los problemas analizados en el apartado 4.5.1.1, los resultados se presentarán en gráficas en escala logarítmica tan

solo para los resultados de la integral  $J$ . Se descartarán los primeros dos resultados obtenidos con elementos lineales para la magnitud  $J$  (tercera columna de la Tabla 4.26), al ser estos negativos.



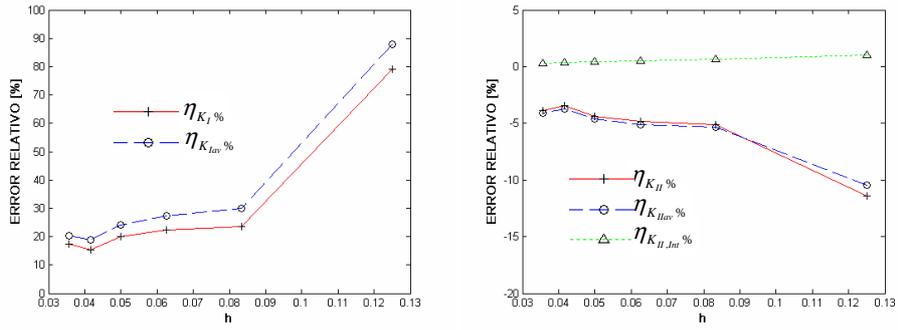
a) Elementos lineales



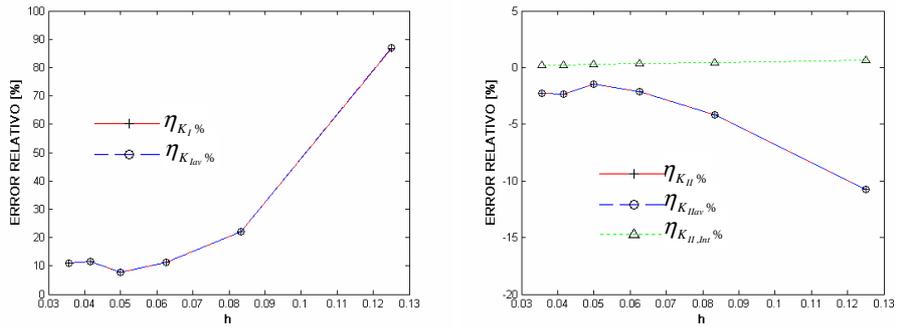
b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.30. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema asintótico singular en modo mixto.**

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS

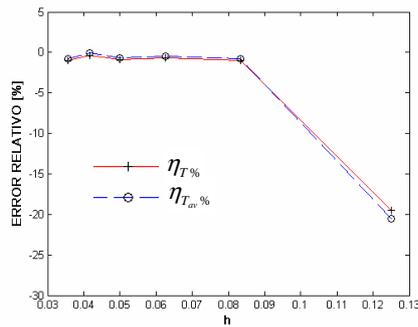


a) Elementos lineales

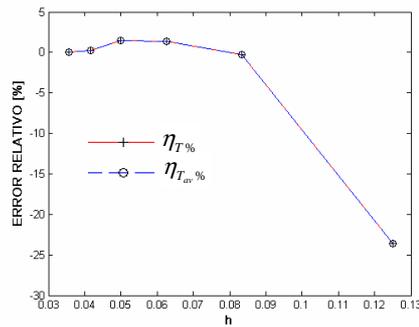


b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.31. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema asintótico singular en modo mixto.**



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.32. Errores relativos en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$ : problema asintótico singular en modo mixto.**

Se puede observar cómo, al ser ahora  $T \neq 0$  (y en consecuencia al ser no nula la contribución a la integral  $J_2$  en las caras de grieta, donde la precisión es menor), los errores en la integral  $J_2$  (y en  $K_{II}$  calculado a partir de  $J_2$ ) son en general mayores si se comparan con el problema asintótico singular con  $T = 0$ . Por ejemplo, con elementos cuadráticos y  $T = 0$  se alcanzan errores en  $K_{II}$  del orden 0.3% implementando mallas muy finas (ver p.ej. Figura 4.27b), mientras que cuando  $T \neq 0$  el error es del orden 2% (ver Figura 4.31b). Con respecto  $J_2$ , se pasa desde errores alrededor de cero para mallas muy finas con elementos cuadráticos y  $T = 0$  (Figura 4.26b), a errores del orden del 10% con la misma malla y  $T \neq 0$  (Figura 4.30b).

Con respecto al cálculo de  $T$ , se observa que el error converge a valores próximos a cero; este hecho es debido con mucha probabilidad a una cancelación de errores al utilizar la ec. (2.108) ya que, para calcular  $T$ :

- se calcula la diferencia  $\bar{J}_{2,2} - \bar{J}_{2,1}$  utilizando las ecs. (2.105) y (2.106);
- se utiliza la ec. (2.107) para calcular  $J_2$ , y a continuación se utiliza la ec. (2.88) para calcular  $K_{II}$ ;
- se hace el cociente entre la diferencia  $\bar{J}_{2,2} - \bar{J}_{2,1}$  y  $K_{II}$ . Al hacer esta operación, el error se cancela ya que es aproximadamente del mismo orden para  $\bar{J}_{2,2} - \bar{J}_{2,1}$  y para  $K_{II}$ .

Finalmente, cabe señalar la precisión excelente en el cálculo de  $K_{II}$  al implementar la integral de interacción de dominio.

**Resultados problema de Westergaard**

De forma análoga a lo visto con el problema asintótico singular, en las tablas siguientes se presentan los errores en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  (Tabla 4.32 y Tabla 4.33), en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$  (Tabla 4.34 y Tabla 4.35) y en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$  (Tabla 4.36 y Tabla 4.37) para el problema de Westergaard en modo mixto con  $T$ -Stress no nulo, respectivamente para elementos lineales y cuadráticos.

Malla	$h$	$\eta_J\%$	$\eta_{J_{av}}\%$	$\eta_{J_{EDI}}\%$	$\eta_{J_{Int}}\%$	$\eta_{J_2}\%$	$\eta_{J_{2av}}\%$	$\eta_{J_{2EDI}}\%$
1	1.25E-01	2.755	4.274	4.549	2.219	83.608	93.142	94.533
2	8.33E-02	1.982	2.887	3.011	1.488	20.824	27.262	27.847
3	6.25E-02	1.545	2.183	2.251	1.119	20.369	25.234	25.540
4	5.00E-02	1.263	1.754	1.797	0.897	18.078	21.988	22.168
5	4.17E-02	1.068	1.466	1.496	0.749	13.494	16.764	16.878
6	3.57E-02	0.925	1.259	1.281	0.642	15.250	18.060	18.135

**Tabla 4.32. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$\eta_J\%$	$\eta_{J_{av}}\%$	$\eta_{J_{EDI}}\%$	$\eta_{J_{Int}}\%$	$\eta_{J_2}\%$	$\eta_{J_{2av}}\%$	$\eta_{J_{2EDI}}\%$
1	1.25E-01	3.022	3.027	2.987	1.506	89.741	89.777	89.979
2	8.33E-02	2.014	2.015	1.995	1.008	19.817	19.828	19.918
3	6.25E-02	1.509	1.509	1.498	0.758	10.144	10.149	10.199
4	5.00E-02	1.206	1.207	1.199	0.607	6.946	6.949	6.981
5	4.17E-02	1.005	1.005	0.999	0.506	10.042	10.044	10.066
6	3.57E-02	0.861	0.861	0.857	0.434	9.485	9.486	9.502

**Tabla 4.33. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{EDI}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.**

Malla	$h$	$\eta_{K_I} \%$	$\eta_{K_{Iav}} \%$	$\eta_{K_{II}} \%$	$\eta_{K_{IIav}} \%$	$\eta_{K_{II,Int}} \%$
		(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )	(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )	(via $I$ )
1	1.25E-01	85.098	93.728	-10.001	-9.343	0.979
2	8.33E-02	23.817	30.421	-3.929	-4.541	0.656
3	6.25E-02	23.535	28.555	-4.140	-4.647	0.493
4	5.00E-02	21.121	25.219	-3.859	-4.320	0.395
5	4.17E-02	15.985	19.524	-2.965	-3.430	0.330
6	3.57E-02	18.097	21.104	-3.476	-3.858	0.283

**Tabla 4.34. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

Malla	$h$	$\eta_{K_I} \%$	$\eta_{K_{Iav}} \%$	$\eta_{K_{II}} \%$	$\eta_{K_{IIav}} \%$	$\eta_{K_{II,Int}} \%$
		(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )	(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )	(via $I$ )
1	1.25E-01	90.674	90.706	-10.002	-10.000	0.665
2	8.33E-02	22.678	22.689	-3.700	-3.701	0.445
3	6.25E-02	11.735	11.740	-1.802	-1.803	0.334
4	5.00E-02	8.016	8.019	-1.163	-1.163	0.267
5	4.17E-02	11.941	11.942	-2.156	-2.156	0.223
6	3.57E-02	11.363	11.364	-2.119	-2.119	0.191

**Tabla 4.35. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{Iav}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{IIav}$  y  $K_{II,Int}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.**

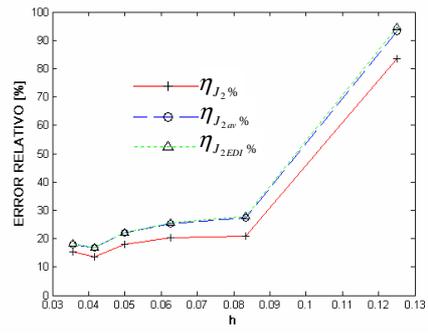
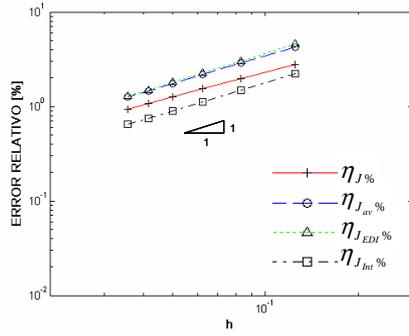
Malla	$h$	$\eta_T \%$	$\eta_{T_{av}} \%$
		(v. $J, J_2$ )	(v. $J_{av}, J_{2av}$ )
1	1.25E-01	-24.741	-25.491
2	8.33E-02	-2.388	-1.789
3	6.25E-02	-2.056	-1.561
4	5.00E-02	-2.049	-1.597
5	4.17E-02	-1.266	-0.812
6	3.57E-02	-1.853	-1.479

**Tabla 4.36. Errores en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos lineales.**

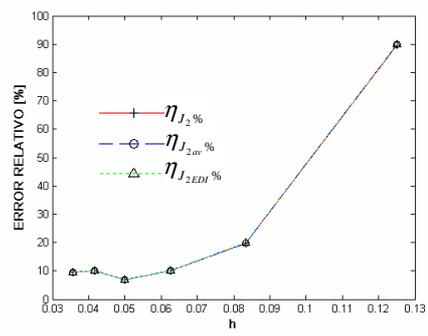
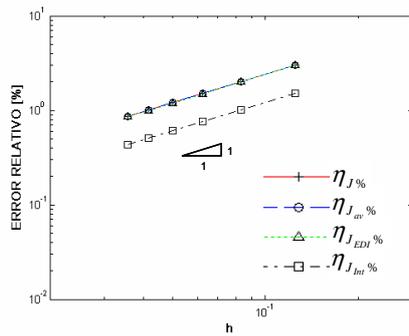
Malla	$h$	$\eta_T\%$ (v. $J, J_2$ )	$\eta_{T_{av}}\%$ (v. $J_{av}, J_{2av}$ )
1	1.25E-01	-27.443	-27.446
2	8.33E-02	-1.054	-1.052
3	6.25E-02	0.934	0.935
4	5.00E-02	1.108	1.108
5	4.17E-02	-0.168	-0.168
6	3.57E-02	-0.338	-0.338

**Tabla 4.37.** Errores en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$ : problema de Westergaard en modo mixto, mallado con elementos cuadráticos.

Las gráficas de resultados se presentan en la Figura 4.33, la Figura 4.34 y la Figura 4.35. Como para los problemas analizados en el apartado 4.5.1.1, los resultados se presentarán en gráficas en escala logarítmica tan solo para los resultados de la integral  $J$ .



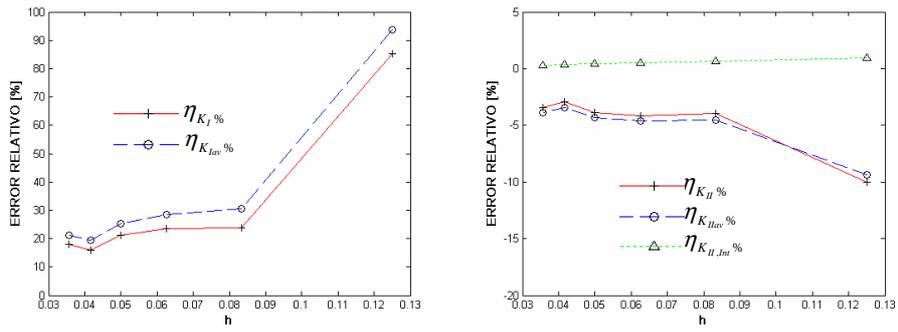
a) Elementos lineales



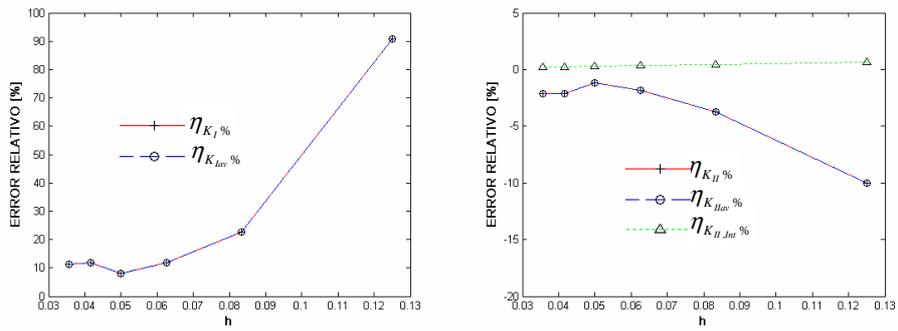
b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.33. Errores relativos en las magnitudes  $J$ ,  $J_{av}$ ,  $J_{ED1}$ ,  $J_{Int}$ ,  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2ED1}$ : problema de Westergaard en modo mixto.**

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS Y RESULTADOS OBTENIDOS

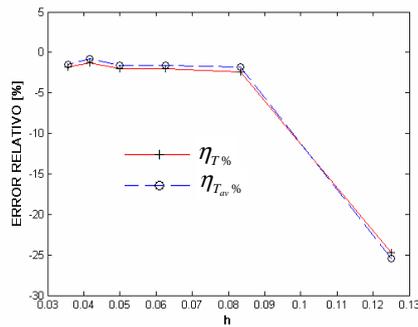


a) Elementos lineales

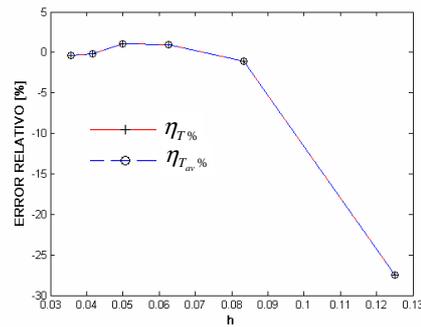


b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.34. Errores relativos en las magnitudes  $K_I$ ,  $K_{I,av}$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{II,av}$  y  $K_{II,Int}$ : problema de Westergaard en modo mixto.**



a) Elementos lineales



b) Elementos cuadráticos

**Figura 4.35. Errores relativos en las magnitudes  $T$  y  $T_{av}$ : problema de Westergaard en modo mixto.**

Las observaciones que se pueden extraer a partir de las gráficas de resultados para el problema de Westergaard en modo mixto con  $T \neq 0$  son básicamente las mismas que se obtuvieron para el problema asintótico singular con  $T \neq 0$ .

### **Conclusiones sobre los problemas en modo mixto con $T \neq 0$**

En conclusión, cuando se estudian problemas en modo mixto con  $T \neq 0$  implementando el método de Eischen para el cálculo de la integral  $J_2$ , los errores en el cálculo de  $J_2$  (y en consecuencia de  $K_{II}$ ) son mayores que en el caso con  $T = 0$ . En la literatura científica no existe un estudio explícito sobre la convergencia del método, como afirman Legrain *et al.* 2008 [15]. Estos autores estudiaron la convergencia del método para un problema con  $K_{lex} = 1$ ,  $K_{IIex} = 1$ ,  $T = 2$  utilizando una malla con grados de libertad enriquecidos. Encontraron que el valor de  $J_2$  no converge al valor exacto, registrando errores relativos del orden de un 10% en la magnitud  $J_2$ . Estos resultados están en línea con los órdenes de magnitud de los errores relativos observados en los ejemplos numéricos expuestos en los apartados anteriores. Los autores concluyen que la no convergencia del valor de la integral  $J_2$  calculada con el método de Eischen se puede atribuir a:

- imprecisiones debidas a la solución de los campos obtenida mediante el método de los elementos finitos;

- términos espurios proporcionales a  $r^{-1}$  que no desaparecen durante la integración a lo largo de las caras de grieta. El método de Eischen y las ecuaciones que lo rigen se plantean a partir del salto de la energía de deformación elástica en las caras de grieta, que para el problema de Westergaard y para el problema asintótico singular es proporcional a  $r^{-1/2}$  (ver p.ej. ec. (2.101)). Sin embargo, mientras que el salto de la energía de deformación elástica es proporcional a  $r^{-1/2}$ , la energía de deformación elástica también incluye términos proporcionales a  $r^{-1}$ . A la hora de implementar el método, lo que se hace en realidad es integrar en cada cara de grieta la energía de deformación elástica, y luego sumar las contribuciones de cada cara para calcular el salto. En este punto, la integración incompleta (debido a que se integra la energía hasta llegar a una distancia  $\delta$  del extremo de grieta) puede dar lugar términos espurios residuos de orden  $r^{-1}$  que no se cancelan cuándo se suman las contribuciones de cada cara de grieta, lo que genera imprecisiones en el cálculo global de la integral  $J_2$ .

Finalmente, cabe señalar que el método de la integral de interacción de dominio demuestra una fiabilidad y una robustez excelente para el cálculo de  $K_{II}$  en problemas en modo mixto 2D, al no verse esto afectado por la presencia o menos del *T-Stress*, como en vez pasa al utilizar el método de Eischen.

#### 4.5.2 Influencia del parámetro $\delta$ en el método de Eischen

En los problemas analizados hasta ahora en este capítulo se han utilizado los valores  $\delta_1 = a/6$  y  $\delta_2 = a/12$  (con  $a$  longitud de grieta) escogidos por Eischen [7] para el cómputo de las respectivas integrales aproximadas  $\bar{J}_{2,1}$  y  $\bar{J}_{2,2}$ , cuyo cálculo conduce a la obtención del valor de la integral  $J_2$  implementando la ec. (2.107) (para problema asintótico singular) o la ec. (2.117) (para problema de Westergaard). Sin embargo, Eischen [7] no justificó en su trabajo la elección de dichos valores, ni llevó a cabo

estudios para establecer la influencia de estos parámetros en el error cometido en el cómputo de la integral  $J_2$ .

En este apartado se estudiará el problema de Westergaard en modo mixto en el que se han fijado los valores de los FIT y del  $T$ -Stress, y se estudiará el error en  $J_2$  al variar los parámetros  $\delta_1$  y  $\delta_2$ .

El modelo utilizado es lo que se muestra en la Figura 4.24, y se ha discretizado mediante una malla de elementos cuadráticos con:

$$N_x = 48 \quad (4.97)$$

$$N_y = 96 \quad (4.98)$$

Los datos de partida utilizados son los siguientes:

$$K_{lex} = 1 ; K_{llex} = 2 ; T = 3 \quad (4.99)$$

y por lo tanto, aplicando las ecs. (2.82) y (2.83), resulta:

$$J_{ex} = \frac{K_{lex}^2}{E'} + \frac{K_{llex}^2}{E'} = \frac{(1+4) \cdot (1-0.333^2)}{10^7} = 4.4455550000 \cdot 10^{-7} \quad (4.100)$$

$$J_{2ex} = -2 \frac{K_{lex} K_{llex}}{E'} = -2 \frac{1 \cdot 2 \cdot (1-0.333^2)}{10^7} = 3.5564440000 \cdot 10^{-7}$$

A partir de los datos del problema, se han impuesto las tracciones correspondientes a la solución analítica de Westergaard (ecs. (4.24)-(4.26)) en los lados no restringidos (excepto caras de grieta).

El estudio se ha hecho manteniendo constante el valor  $\delta_2 = a/12$  y, para cada malla, se ha escogido el parámetro  $\delta_1$  de forma tal que siempre sea  $\delta_1 > \delta_2$ . Los valores de  $\delta_1$  impuestos en cada cálculo han sido:

$$\delta_1 = a \cdot \{0.10 \quad 0.15 \quad 0.20 \quad 0.25 \quad 0.30 \quad 0.35 \quad 0.40 \quad 0.45 \quad 0.50 \quad 0.55 \quad 0.60 \quad 0.65\} \quad (4.101)$$

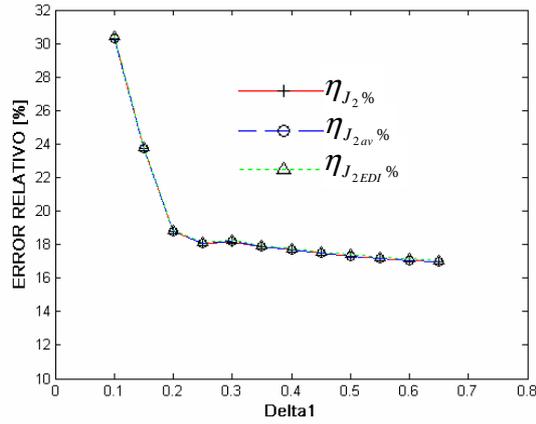
y se ha tomado  $a=1$ .

En la Tabla 4.41 se muestran los errores obtenidos en las magnitudes  $J_2$  y  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  al variar del valor  $\delta_1$  para el problema considerado. Se recuerda que las magnitudes  $J_2$  y  $J_{2av}$  se han calculado mediante integral de línea, mientras que la magnitud  $J_{2EDI}$  se ha calculado mediante el método EDI, calculando una integral de área y una integral de línea (en las caras de grieta).

Malla	$\delta_1$	$\delta_2$	$\eta_{J_2}\%$	$\eta_{J_{2av}}\%$	$\eta_{J_{2EDI}}\%$
1	1.00E-01	8.33E-02	30.313	30.324	30.397
2	1.50E-01	8.33E-02	23.721	23.732	23.805
3	2.00E-01	8.33E-02	18.753	18.763	18.836
4	2.50E-01	8.33E-02	18.063	18.074	18.147
5	3.00E-01	8.33E-02	18.169	18.180	18.253
6	3.50E-01	8.33E-02	17.874	17.884	17.957
7	4.00E-01	8.33E-02	17.672	17.683	17.755
8	4.50E-01	8.33E-02	17.479	17.489	17.562
9	5.00E-01	8.33E-02	17.317	17.327	17.400
10	5.50E-01	8.33E-02	17.185	17.196	17.269
11	6.00E-01	8.33E-02	17.059	17.070	17.143
12	6.50E-01	8.33E-02	16.960	16.970	17.043

**Tabla 4.38. Variación del error en  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  al variar del parámetro  $\delta_1$ : problema de Westergaard con elementos cuadráticos.**

Los resultados obtenidos en los errores de las distintas magnitudes se han dibujado en función del parámetro  $\delta_1$  en la Figura 4.36:



**Figura 4.36. Error relativo en las magnitudes  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  para el problema de Westergaard con elementos cuadráticos analizado con  $\delta_1$  variable y  $\delta_2=a/12$ .**

Se observa cómo el error disminuye rápidamente para valores  $0.1 < \delta_1 < 0.2$ , alcanzando valores alrededor de 17% para  $\delta_1 = 0.65$ .

Si ahora se fija el valor de  $\delta_1$ , por ejemplo  $\delta_1 = 0.65$ , es posible también estudiar cómo evoluciona el error al variar el parámetro  $\delta_2$ , siendo  $\delta_2 < \delta_1$ . Manteniendo constante  $\delta_1$ , se estudia el mismo problema variando  $\delta_2$  con los siguientes valores:

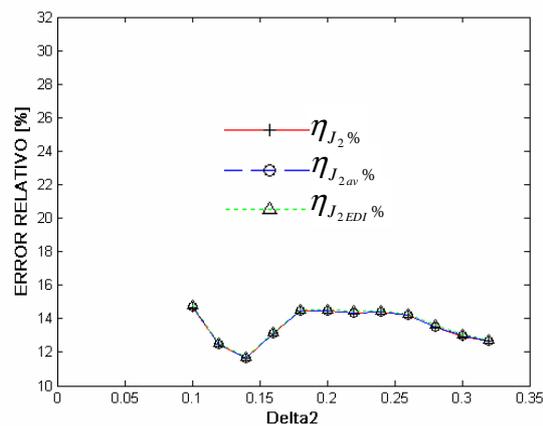
$$\delta_2 = a \cdot \{0.10 \ 0.12 \ 0.14 \ 0.16 \ 0.18 \ 0.20 \ 0.22 \ 0.24 \ 0.26 \ 0.28 \ 0.30 \ 0.32\} \quad (4.102)$$

En la Tabla 4.42 se muestran los errores obtenidos en las magnitudes  $J_2$  y  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  al variar del valor  $\delta_1$  para el problema considerado:

Malla	$\delta_1$	$\delta_2$	$\eta_{J_2} \%$	$\eta_{J_{2av}} \%$	$\eta_{J_{2EDI}} \%$
1	6.50E-01	1.00E-01	14.695	14.706	14.779
2	6.50E-01	1.20E-01	12.464	12.475	12.548
3	6.50E-01	1.40E-01	11.647	11.658	11.731
4	6.50E-01	1.60E-01	13.129	13.140	13.212
5	6.50E-01	1.80E-01	14.454	14.465	14.537
6	6.50E-01	2.00E-01	14.459	14.470	14.543
7	6.50E-01	2.20E-01	14.360	14.370	14.443
8	6.50E-01	2.40E-01	14.375	14.385	14.458
9	6.50E-01	2.60E-01	14.185	14.196	14.268
10	6.50E-01	2.80E-01	13.524	13.534	13.607
11	6.50E-01	3.00E-01	12.954	12.965	13.038
12	6.50E-01	3.20E-01	12.663	12.674	12.747

**Tabla 4.39.** Variación del error en  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  al variar del parámetro  $\delta_2$ : problema de Westergaard con elementos cuadráticos.

Los resultados obtenidos en los errores de las distintas magnitudes se han dibujado en función del parámetro  $\delta_2$  en la Figura 4.37:



**Figura 4.37.** Error relativo en las magnitudes  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  para el problema de Westergaard con elementos cuadráticos analizado con  $\delta_1=0.65$  y  $\delta_2$  variable.

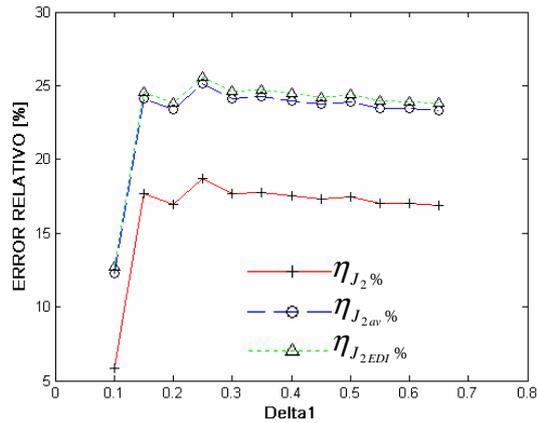
Se observa que, en el rango de valores considerados, el error en las distintas magnitudes tiene un mínimo en alrededor de  $\delta_2 = 0.14$ , aunque la variación no es muy significativa.

Sin embargo, el comportamiento es diferente si se estudia el mismo problema implementando elementos lineales. Los resultados obtenidos al variar de  $\delta_1$  manteniendo  $\delta_2$  constante se presentan en la Tabla 4.43.

Malla	$\delta_1$	$\delta_2$	$\eta_{J_2}\%$	$\eta_{J_{2av}}\%$	$\eta_{J_{2EDI}}\%$
1	1.00E-01	8.33E-02	5.806	12.244	12.723
2	1.50E-01	8.33E-02	17.651	24.089	24.568
3	2.00E-01	8.33E-02	16.927	23.365	23.844
4	2.50E-01	8.33E-02	18.694	25.132	25.611
5	3.00E-01	8.33E-02	17.681	24.119	24.598
6	3.50E-01	8.33E-02	17.788	24.226	24.705
7	4.00E-01	8.33E-02	17.541	23.979	24.458
8	4.50E-01	8.33E-02	17.297	23.735	24.214
9	5.00E-01	8.33E-02	17.464	23.902	24.381
10	5.50E-01	8.33E-02	17.028	23.465	23.944
11	6.00E-01	8.33E-02	16.994	23.432	23.911
12	6.50E-01	8.33E-02	16.875	23.313	23.792

**Tabla 4.40. Variación del error en  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  al variar del parámetro  $\delta_1$ : problema de Westergaard con elementos lineales.**

Los resultados obtenidos en los errores de las distintas magnitudes se han dibujado en función del parámetro  $\delta_1$  en la Figura 4.38:



**Figura 4.38.** Error relativo en las magnitudes  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  para el problema de Westergaard con elementos lineales analizado con  $\delta_1$  variable y  $\delta_2=a/6$ .

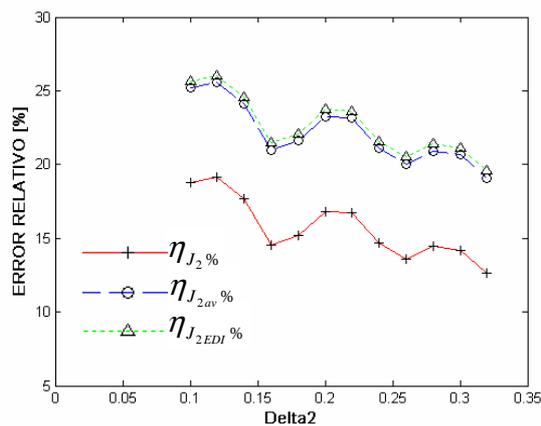
Se observa entonces que, al aumentar el parámetro  $\delta_1$  manteniendo constante el parámetro  $\delta_2 = a/12$ , el error aumenta hasta alcanzar valores alrededor de un 17% para  $J_2$  y un 23% para  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ .

Si por ejemplo se fija el valor  $\delta_1 = 0.65$  como se ha hecho en el ejemplo precedente, es posible ver el comportamiento del error al variar del parámetro  $\delta_2$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.44:

Malla	$\delta_1$	$\delta_2$	$\eta_{J_2} \%$	$\eta_{J_{2av}} \%$	$\eta_{J_{2EDI}} \%$
1	6.50E-01	1.00E-01	18.752	25.190	25.669
2	6.50E-01	1.20E-01	19.111	25.549	26.028
3	6.50E-01	1.40E-01	17.661	24.098	24.577
4	6.50E-01	1.60E-01	14.565	21.003	21.482
5	6.50E-01	1.80E-01	15.163	21.601	22.080
6	6.50E-01	2.00E-01	16.803	23.241	23.720
7	6.50E-01	2.20E-01	16.707	23.145	23.624
8	6.50E-01	2.40E-01	14.661	21.099	21.578
9	6.50E-01	2.60E-01	13.620	20.058	20.537
10	6.50E-01	2.80E-01	14.468	20.906	21.385
11	6.50E-01	3.00E-01	14.206	20.644	21.123
12	6.50E-01	3.20E-01	12.666	19.104	19.583

**Tabla 4.41. Variación del error en  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  al variar del parámetro  $\delta_2$ : problema de Westergaard con elementos cuadráticos.**

Los resultados obtenidos en los errores de las distintas magnitudes se han dibujado en la Figura 4.39 en función del parámetro  $\delta_2$ :



**Figura 4.39. Error relativo en las magnitudes  $J_2$ ,  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$  para el problema de Westergaard con elementos lineales analizado con  $\delta_1=0.65$  y  $\delta_2$  variable.**

Se observa entonces que, al aumentar el parámetro  $\delta_2$  manteniendo constante el parámetro  $\delta_1 = 0.65$ , el error disminuye en el rango de valores

$\delta_2$  considerados hasta alcanzar valores alrededor de un 12% para  $J_2$  y un 19% para  $J_{2av}$  y  $J_{2EDI}$ .

En conclusión, la variación del error en el cálculo de la integral  $J_2$  depende de la elección de los parámetros  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Estos parámetros dependen a su vez de diferentes factores, como por ejemplo el orden del elemento utilizado o también la geometría del problema (ratio longitud de grieta/ancho de placa). En conclusión, su optimización para minimizar el error cometido dependerá del tipo de problema a estudiar.



## 5 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

### Resumen del capítulo:

*En este capítulo se recogen las principales conclusiones extraídas de los capítulos anteriores y se enumeran posibles desarrollos futuros que continúan la línea de investigación en la que se enmarca la Tesis aquí presentada.*

### 5.1 CONCLUSIONES

En el capítulo anterior se presentaron mediante diversas tablas y gráficas los resultados procedentes de los siguientes ejemplos numéricos:

- los ejemplos numéricos en modo I, utilizados para validar el programa;
- los ejemplos numéricos en modo mixto, a los que se ha aplicado el método de Eischen para el cálculo de la integral  $J_2$  (y de los FIT utilizando las relaciones  $J_k$ -FIT) y del  $T$ -Stress.

Las conclusiones que se pueden extraer de todos los cálculos realizados y del desarrollo de esta Tesis son las siguientes:

- El cálculo de la integral  $J_2$  requiere en general el cómputo del salto de energía de deformación elástica a lo largo de las caras de grieta. Sin embargo, el salto es proporcional al producto  $K_{II} \cdot T$  (ver apartado 2.2.4.2); por lo tanto, la contribución al cómputo de la integral a lo largo de las caras de grieta es no nula tan solo cuándo

$K_{II} \neq 0$  y  $T \neq 0$ . En cualquier otro caso, dicha contribución es nula y tan sólo cuenta la contribución calculada a lo largo del camino que empieza en una cara de grieta y acaba en la otra.

- Con elementos lineales, el error obtenido en  $J$  y  $J_2$  calculadas como integrales de línea es en general menor si se promedian los valores de los campos procedentes de dos elementos adyacentes (a lo largo de los caminos concéntricos). Sin embargo, con elementos cuadráticos, el error es básicamente coincidente utilizando ambos métodos (promediando y sin promediar).
- Los errores obtenidos en el cálculo de  $J_2$  (y en consecuencia de  $K_{II}$ ) cuando  $T \neq 0$  son mayores que en el caso con  $T = 0$ . Esto se debe, por un lado, a las imprecisiones propias del método de los elementos finitos y por otro lado a la presencia de términos espurios proporcionales a  $r^{-1/2}$ , que no desaparecen cuando se calcula la contribución a lo largo de las caras de grieta (Legrain *et al.* 2008 [15], ver apartado 4.5.1.2). Sin embargo, según los autores, es posible que el cálculo de la contribución a  $J_2$  en las caras de grieta mediante el método propuesto por Eischen conduzca a una pérdida de convergencia.
- El error obtenido en el cálculo del *T-Stress* converge a valores próximos a cero. Como ya se ha comentado en el apartado 4.5.1.2, esto se debe probablemente a una cancelación del error al implementar las fórmulas del método de Eischen.
- La calidad de los resultados se ve afectada por la elección de los parámetros  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Su valor óptimo puede depender bien del problema (tipología, geometría, etc.), bien del orden de los elementos de la malla.

## 5.2 DESARROLLOS FUTUROS

Las posibles áreas de trabajo que se proponen como continuación de la línea de investigación en la que se enmarca esta Tesis son las siguientes:

- Estudio de convergencia del método de Eischen implementando elementos con grados de libertad enriquecidos en las cercanías del extremo de grieta en problemas en modo mixto 2D.
- Análisis más detallado de la influencia de la elección de los valores  $\delta_1$  y  $\delta_2$  del método de Eischen en el error cometido en el cálculo aproximado de  $J_2$ .
- Aplicación y estudio de convergencia de otros métodos para el cálculo de  $J_2$  (p.ej. Legrain *et al.* 2008 [15]) en problemas en modo mixto 2D de la MFEL.
- Ampliación del desarrollo para el cálculo de  $J_2$  y del  $T$ -Stress a aplicaciones que modelen la propagación de grieta, teniendo en cuenta la influencia del  $T$ -Stress en la dirección de propagación.
- Ampliación del desarrollo para el cálculo de  $J_2$  en problemas en modo mixto 2D para el cálculo de problemas en modo mixto 3D.



## 6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Atluri SN. "Energetic Approaches and Path-Independent Integrals". *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, volumen 2 de *Computational Methods in Mechanics*, capítulo 5, págs. 121-165. North-Holland (Elsevier Science), Amsterdam, 1986.
- [2] Budiansky B, Rice JR. Conservation laws and energy-release rates. *J. Appl. Mech.* 1973;40:201-203.
- [3] Chang JH, Pu LP. Finite Element calculation of Energy Release Rate prior to crack kinking in 2-D Solids. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1996;39(17):3033-3046.
- [4] Chen FHK, Shield RT. Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 1977;28:1-22.
- [5] Cherepanov GP. *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw-Hill, Nueva York, 1979. Traducido del ruso por De Wit R y Cooley W.
- [6] Eftis J, Subramonian N, Liebowitz H. Crack border stress and displacement equations revisited. *Engrg. Fracture Mech.* 1977;9:189-210.
- [7] Eischen JW. An improved method for computing the  $J_2$  integral. *Eng. Fract. Mech.* 1987;26(5):691-700.
- [8] Eshelby JD. The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity* 1975;5(3-4):321-335.
- [9] Fuenmayor FJ, Domínguez J, Giner E, Oliver JL. Calculation of the stress intensity factor and estimation of its error by a shape sensitivity analysis. *Fatigue Fract. Engrg. Mater. Struct.* 1997;20(5):813-828.
- [10] Gdoutos EE. *Fracture Mechanics: an Introduction*. Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, 1993.
- [11] Giner, E. *Estimación del error de discretización en el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones mediante Elementos Finitos*. Tesis Doctoral,

Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2001.

- [12] Hinton E, Campbell JS. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1974;8(3):461-480.
- [13] Kim J, Paulino GH. T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method. *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* 2003;192(11-12):1463-1494.
- [14] Knowles JK, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1972;44(3):187-211.
- [15] Legrain G, Moës N, Verron E. Robust and direct evaluation of  $J_2$  in linear elastic fracture mechanics with the X-FEM. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2008;76(10):1471-1488.
- [16] Li FZ, Shih CF, Needleman A. A comparison of methods for calculating energy release rate. *Eng. Fract. Mech.* 1985;21(2):405-421.
- [17] Nakamura T, Shih CF, Freund LB. Computational methods based on an energy integral in dynamic fracture. *Int. J. Fracture* 1985;27:229-243.
- [18] Rice JR. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 1968;35:379-386.
- [19] Shih CF, Asaro RJ. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I - Small scale yielding. *J. Appl. Mech.* 1988;55:299-316.
- [20] Shih CF, Moran B, Nakamura T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *Int. J. Fracture*, 1986;30:79-102.
- [21] Szabó B, Babuška I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1991.

- [22] Tada H, Paris PC, Irwin GC, editores. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Paris Productions, Inc., St. Louis, Missouri, 2<sup>a</sup> edición, 1985.
- [23] Tong J. T-stress and its implications for crack growth. *Eng. Fract. Mech.* 2002;69(12), 1325-1337.
- [24] Williams ML. On the Stress Distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* 1957;24:109-114.
- [25] Woo KS, Hong CH, Shin YS. An extended equivalent domain integral method for mixed mode fracture problems by the  $p$ -version of FEM. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1998;42(5):857-884.