

Document downloaded from:

<http://hdl.handle.net/10251/142775>

This paper must be cited as:

De Rosario Martínez, H. (2010). Cinemática de la flexión del tronco en postura sedente. Aproximación basada en el eje instantáneo de rotación [Tesis doctoral no publicada]. Universitat Politècnica de València. <https://doi.org/10.4995/Thesis/10251/142775>



The final publication is available at

Copyright Universitat Politècnica de València

Additional Information



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA

Departamento de Física Aplicada  
Instituto de Biomecánica de Valencia

# **Cinemática de la flexión del tronco en postura sedente. Aproximación basada en el eje instantáneo de rotación**

**Tesis doctoral**

**Presentada por:**  
Helios De Rosario Martínez

**Director:**  
Álvaro Page del Pozo

Valencia, 2010



*A Beatriz.*



## Resumen

En esta tesis doctoral se presenta el desarrollo de una investigación sobre la cinemática del tronco en la postura sedente, aplicada a la definición de un modelo biomecánico del movimiento de flexo-extensión, y al estudio de la relación entre el movimiento del tronco y los mecanismos de reclinación de las sillas de trabajo.

Esta investigación parte de una nueva forma de caracterizar los movimientos del cuerpo humano. Se ha utilizado una notación vectorial unificada para estudiar las velocidades y los desplazamientos finitos. El principal elemento de estudio ha sido el eje instantáneo de rotación, que describe las características geométricas del movimiento y sirve para interpretar cómo se encuentran articulados los segmentos corporales. El procedimiento de análisis se basa en fórmulas explícitas, que permiten una estimación matemática de los errores instrumentales y controlar su magnitud, aspecto crítico a la hora de calcular los ejes instantáneos de rotación.

El tronco se ha modelado como una cadena cinemática formada por dos cuerpos rígidos (pelvis y tórax) que se mueven respecto al asiento. No se ha impuesto ningún tipo de restricción previa al modelo, dejándole libertad para que el movimiento se describiese a sí mismo.

Se ha llevado a cabo una serie de experimentos para validar la teoría que da base a la metodología, cuantificar los errores que afectaban a las medidas, y estudiar el movimiento del tronco en relación con una serie de sillas de oficina. Se ha definido un modelo biomecánico de la flexión del tronco en la postura sedente sin respaldo, que presenta un eje de rotación de la pelvis más elevado que el de modelos previos y una rotación secuencial de las vértebras lumbares. Además se ha estudiado experimentalmente la cinemática de los mecanismos de sillas reclinables y cómo se altera el movimiento del tórax al sentarse en ellas.

Los resultados obtenidos aportan una nueva visión sobre el movimiento humano en general y el de la postura sedente en particular, y también contribuyen al desarrollo de nuevas ideas sobre el diseño de sillas y su relación con la movilidad del tronco.



## Resum

En aquesta tesi doctoral es presenta el desenvolupament d'una investigació sobre la cinemàtica del tronc en la postura sedent, aplicada a la definició d'un model biomecànic del moviment de flexo-extensió, i a l'estudi de la relació entre el moviment del tronc i els mecanismes de reclinació de les cadires de treball.

Aquesta investigació parteix d'una nova forma de caracteritzar els moviments del cos humà. S'ha utilitzat una notació vectorial unificada per a estudiar les velocitats i els desplaçaments finits. El principal element d'estudi ha estat l'eix instantani de rotació, que descriu les característiques geomètriques del moviment i serveix per a interpretar com es troben articulats els segments corporals. El procediment d'anàlisi es basa en fórmules explícites, que permeteixen una estimació matemàtica dels errors instrumentals i controlar la seva magnitud, aspecte crític a l'hora de calcular els eixos instantanis de rotació.

El tronc s'ha modelat com una cadena cinemàtica formada per dos cossos rígids (pelvis i tòrax) que es mouen respecte al seient. No s'ha imposat cap tipus de restricció prèvia al model, deixant llibertat per a que el moviment es descriu a si mateix.

S'ha dut a terme una sèrie d'experiments per a validar la teoria que dona base a la metodologia, quantificar els errors que afectaven a les mesures, i estudiar el moviment del tronc en relació amb una sèrie de cadires d'oficina. S'ha definit un model biomecànic de la flexió del tronc en la postura sedent sense respall, que presenta un eix de rotació de la pelvis més elevat que el considerat per models previs i una rotació seqüencial de les vèrtebres lumbars. A més s'ha estudiat experimentalment la cinemàtica dels mecanismes de cadires reclinales i com s'altera el moviment del tòrax al seure-hi.

Els resultats obtinguts aporten una nova visió sobre el moviment humà en general i el de la postura sedent en particular, i també contribueixen al desenvolupament de noves idees sobre el disseny de cadires i la seva relació amb la mobilitat del tronc.





## Abstract

This PhD Thesis presents a research on trunk kinematics in seated posture, applied to defining a biomechanical model of the flexion-extension movement, and exploring the relationship between the trunk movement and the mechanisms of reclining work chairs.

This research starts from a new way of characterizing human body movements. The proposed method uses a unified vector notation to analyze velocities as well as finite displacements. The main parameter was the instantaneous axis of rotation, which describes the geometric characteristics of movement, and may be used to interpret how body segments are joined. The analysis is based on explicit formulas, which allow a mathematical estimation of instrumental errors and controlling their size, which is critical in the calculation of the instantaneous axis.

The trunk was modeled as a kinematic chain consisting of two rigid bodies (pelvis and thorax) that move relative to the seat. No restrictions were imposed on the movement beforehand, so that this free model let the movement describe itself.

We conducted a series of experiments to validate the theory that supported the methodology, to quantify the errors that affected the measures, and to study the trunk movement in relation to a variety of office chairs. These experiments yielded a biomechanical model of trunk flexion in seated posture, that showed a rotation axis of the pelvis higher than former models, and a sequential rotation of lumbar vertebrae. We also studied experimentally the kinematics of reclining chairs mechanisms, and how they altered the movement of the thorax when subjects sat on them.

The results of this research provide a new insight on human movement in general, and about seated posture in particular, and they also contribute to developing new ideas about the design of chairs and their relation to trunk mobility.



## Agradecimientos

Tres veces tres son las claves que han sustentado el camino de esta tesis doctoral:

A nivel institucional: los Planes Nacionales de I+D coordinados entre la UPV y el IBV, *Nuevos Modelos Biomecánicos Basados en Sistemas No Paramétricos* (DPI2003-07883-C02-02), *Generación de Criterios para el Desarrollo de Modelos Biomecánicos Articulares a partir de Datos Antropométricos Funcionales* (DPI2006-14722-C02-02) y *Modelado cinemático y dinámico del movimiento de los tejidos blandos* (DPI2009-13830-C02-02). Son éstos los proyectos que han dado la oportunidad de llevar a cabo la investigación, y han facilitado el intercambio de conocimientos en análisis de mecanismos y en biomecánica, necesario para el éxito del trabajo.

En el entorno profesional: los compañeros del IBV que han dirigido mi trabajo a lo largo de estos años, especialmente Álvaro, Rosa y José. Su rigor científico y su ejemplo me han enseñado a ser exigente con las tareas, escrupuloso en los procedimientos y perspicaz en los análisis.

Y en lo más personal: mi familia, las personas que me ha acompañado en la vida, las que lo hacen ahora y las que vendrán. Porque ellas me han dado los recursos, el apoyo y el tiempo que he necesitado para hacer esta tesis, y también una razón para terminarla.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Estructura del trabajo . . . . .	3
<b>2. Revisión bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1. Postura sedente y movimiento del tronco . . . . .	5
2.2. Modelos biomecánicos . . . . .	10
2.2.1. Modelos del cuerpo humano . . . . .	10
2.2.2. Aplicación al tronco . . . . .	12
2.3. Técnicas instrumentales . . . . .	13
2.3.1. Técnicas generales para la medida de los movimientos humanos . . . . .	13
2.3.2. Técnicas empleadas para medir el movimiento tronco . .	16
2.4. Principios del análisis cinemático . . . . .	19
2.4.1. Desplazamientos finitos . . . . .	19
2.4.2. Desplazamientos infinitesimales . . . . .	23
2.4.3. Ejes articulares. Aplicaciones biomecánicas . . . . .	25
2.4.4. Sistemas de referencia anatómicos . . . . .	28
2.5. Errores en fotogrametría . . . . .	31
2.5.1. Errores instrumentales . . . . .	32
2.5.2. Errores de medida . . . . .	39
2.6. Conclusiones . . . . .	44
<b>3. Objetivos y plan de trabajo</b>	<b>47</b>
<b>4. Material y métodos</b>	<b>51</b>
4.1. Introducción . . . . .	51
4.2. Desarrollo teórico . . . . .	52

4.2.1.	Análisis cinemático instantáneo . . . . .	52
4.2.2.	Análisis de desplazamientos finitos . . . . .	55
4.2.3.	Composición de movimientos . . . . .	60
4.2.4.	Promediado funcional . . . . .	65
4.2.5.	Estimación de los errores cinemáticos . . . . .	69
4.2.6.	Diseño experimental para minimizar los errores . . . . .	86
4.3.	Desarrollo experimental . . . . .	88
4.3.1.	Herramientas de medida y análisis . . . . .	88
4.3.2.	Experimento 1: Validación de la teoría de propagación de errores . . . . .	90
4.3.3.	Experimento 2: Control del error aleatorio . . . . .	96
4.3.4.	Experimento 3: Control de los artefactos . . . . .	99
4.3.5.	Experimento 4: Flexión del tronco . . . . .	103
4.3.6.	Experimento 5: Caracterización de sillas . . . . .	106
4.3.7.	Experimento 6: Efecto de la silla sobre el tronco . . . . .	113
<b>5.</b>	<b>Resultados</b>	<b>115</b>
5.1.	Experimento 1: Validación de la teoría . . . . .	115
5.1.1.	Error de posición . . . . .	115
5.1.2.	Error de velocidad . . . . .	116
5.1.3.	Errores en el torsor cinemático . . . . .	118
5.1.4.	Error en el EIR . . . . .	120
5.2.	Experimento 2: Control del error aleatorio . . . . .	126
5.3.	Experimento 3: Control de los artefactos . . . . .	128
5.4.	Experimento 4: Flexión del tronco . . . . .	130
5.5.	Experimento 5: Caracterización de sillas . . . . .	134
5.6.	Experimento 6: Efecto de la silla . . . . .	137
<b>6.</b>	<b>Discusión</b>	<b>141</b>
6.1.	Método de análisis cinemático . . . . .	141
6.2.	Control de los errores experimentales . . . . .	145
6.3.	Modelo biomecánico del tronco . . . . .	147
6.4.	Caracterización y efecto de las sillas . . . . .	152
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>159</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>

<b>A. Procedimientos matemáticos</b>	<b>183</b>
A.1. Suavizado y diferenciación de variables . . . . .	183
A.1.1. Principios del ajuste polinómico local . . . . .	183
A.1.2. Parámetros del suavizado . . . . .	185
A.1.3. Error de las medidas suavizadas . . . . .	187
A.1.4. Error de las velocidades . . . . .	188
A.2. Propiedades del cuerpo y el torsor virtual . . . . .	189
A.2.1. Interpretación geométrica del cuerpo virtual y configura- ciones singulares . . . . .	189
A.2.2. Relación entre desplazamientos finitos e infinitesimales .	191
A.2.3. Error de los métodos indirectos . . . . .	194
A.3. Propagación de errores aleatorios . . . . .	196
A.3.1. Definiciones generales . . . . .	196
A.3.2. Naturaleza del campo de velocidades aleatorio . . . . .	198
A.3.3. Suma de vectores aleatorios . . . . .	201
A.4. Ajuste de ciclos . . . . .	202
A.4.1. Ajuste por regresión local . . . . .	202
A.4.2. Ajuste por interpolación y promediado . . . . .	204
 <b>B. Artículos publicados</b>	 <b>213</b>





# Índice de figuras

2.1. Curvaturas características de la columna vertebral . . . . .	6
2.2. «Diseños ergonómicos» de sillas de trabajo . . . . .	9
2.3. Modelos biomecánicos de articulaciones . . . . .	11
2.4. Regiones de la columna vertebral . . . . .	12
2.5. Desplazamientos finitos . . . . .	20
2.6. Desplazamiento finito en forma helicoidal . . . . .	22
2.7. Campo de velocidades . . . . .	24
2.8. Sistemas de coordenadas de la ISB para la cadera . . . . .	30
2.9. Referencias anatómicas del tronco . . . . .	31
2.10. Vergencia de dos cámaras . . . . .	34
2.11. Ejemplo de regresión polinómica local . . . . .	36
2.12. Medida tridimensional con dos cámaras . . . . .	38
3.1. Esquema de objetivos . . . . .	49
4.1. Cuerpo y desplazamientos virtuales . . . . .	57
4.2. IHA de la suma de dos movimientos . . . . .	61
4.3. EIR de la suma de movimientos planos . . . . .	62
4.4. Desplazamientos finitos relativos . . . . .	63
4.5. Composición de desplazamientos finitos . . . . .	64
4.6. Ejemplo de promediado funcional . . . . .	65
4.7. Error en desplazamientos finitos . . . . .	78
4.8. Error en el EIR . . . . .	79
4.9. Error de representación del EIR . . . . .	83
4.10. Aumento de la inercia en un sistema de marcadores . . . . .	87
4.11. Sistemas de marcadores usados en los experimentos . . . . .	89
4.12. Sistema de marcadores del Experimento 1 . . . . .	91
4.13. Sistema de referencia del Experimento 1 . . . . .	92

4.14. Columnas de marcadores en el Experimento 1 . . . . .	92
4.15. Montaje del Experimento 2 . . . . .	97
4.16. Experimento 3 . . . . .	100
4.17. Sujeto en el Experimento 4 . . . . .	104
4.18. EIR del movimiento relativo . . . . .	107
4.19. Sillas utilizadas en el Experimento 5 . . . . .	108
4.20. Sistemas de marcadores en el Experimento 5 . . . . .	109
4.21. Control del artefacto por giro en el Experimento 5 (1) . . . . .	111
4.22. Control del artefacto por giro en el Experimento 5 (2) . . . . .	112
5.1. Distribución de los errores de posición . . . . .	117
5.2. Error en la velocidad angular . . . . .	120
5.3. Error en la velocidad del centroide . . . . .	121
5.4. Distribución de los errores en el $\overline{\text{EIR}}$ . . . . .	123
5.5. Error en el EIR perpendicular a $\overrightarrow{GH}$ . . . . .	124
5.6. Relación entre los vectores unitarios de $\delta\overrightarrow{GH}_2(t)$ y $\overrightarrow{GH}(t)$ . . . . .	125
5.7. Efecto de la excentricidad sobre el error del EIR . . . . .	126
5.8. Ejemplo de la posición de los EIR en el movimiento del tronco . . . . .	132
5.9. Vista transversal del EIR del movimiento relativo (lumbar) . . . . .	133
5.10. Desplazamiento longitudinal del EIR lumbar . . . . .	134
5.11. EIR de las sillas . . . . .	136
5.12. Ángulos asiento-respaldo de las sillas S1 y S6 . . . . .	138
5.13. Efecto de las sillas sobre el EIR torácico . . . . .	139
6.1. Distribución de las velocidades en la pelvis . . . . .	149
6.2. Interpretación del desplazamiento del EIR lumbar . . . . .	150
6.3. Modelos mecánicos de las sillas . . . . .	153
6.4. Composición de movimientos en un respaldo flexible. . . . .	154
6.5. Interpretación de la cinemática del tronco en sillas reclinables . . . . .	156
A.1. Ejemplo de la ponderación con una función <i>kernel</i> . . . . .	184
A.2. Relación geométrica entre el cuerpo virtual y el real . . . . .	190
A.3. Delimitación de semicírculos . . . . .	207
A.4. Ejemplo de interpolación y promediado geométrico . . . . .	207

# Índice de tablas

4.1. Antropometría de los participantes en el Experimento 4 . . . . .	104
4.2. Variables medidas en el Experimento 4 . . . . .	107
4.3. Variables medidas en el Experimento 5 . . . . .	113
4.4. Antropometría de los sujetos del Experimento 6 . . . . .	114
4.5. Variables medidas en el Experimento 6 . . . . .	114
5.1. Prueba T para el error de posición . . . . .	116
5.2. Descomposición espectral de la matriz del error de posición . . . . .	116
5.3. Pruebas estadísticas para los errores de velocidades . . . . .	119
5.4. Prueba T aplicada al error normalizado del torsor cinemático . . . . .	119
5.5. Regresión lineal del error en la velocidad angular . . . . .	120
5.6. Regresión lineal del error en la velocidad del centroide . . . . .	121
5.7. Error en el EIR del Experimento 1 . . . . .	122
5.8. Prueba T aplicada al error normalizado del EIR . . . . .	122
5.9. Regresión lineal del error en $\delta\vec{GH}_1$ . . . . .	122
5.10. Regresión lineal del error en $\delta\vec{GH}_2$ . . . . .	125
5.11. Errores de posición y velocidad tras el suavizado . . . . .	127
5.12. Errores en orientación ( $\delta\alpha$ ) y posición ( $\delta GH$ ) en el EIR . . . . .	127
5.13. Velocidad angular de los posibles artefactos . . . . .	129
5.14. Velocidad en el centroide de los posibles artefactos . . . . .	129
5.15. Discrepancias entre EIR debidas al posible artefacto . . . . .	130
5.16. Resultados del Experimento 4 . . . . .	131
5.17. Resultados del Experimento 5 . . . . .	135
5.18. Resultados del Experimento 6 . . . . .	138
5.19. Comparación entre sillas en el Experimento 6 . . . . .	140



# Símbolos y abreviaturas

$\delta \vec{f}$	error del vector $\vec{f}$
$\Delta \vec{R}_{vA}$	desplazamiento virtual absoluto del punto $A$
$\Delta \vec{r}_{vA}$	desplazamiento virtual del punto $A$ relativo al centroide $G$
$\phi$	ángulo de rotación
$\lambda$	autovalor de una matriz; en el caso de $J_G$ , uno de los momentos de inercia principales
$\Sigma$	matriz de covarianzas
$\sigma$	desviación típica
$\vec{\Omega}$	vector de Rodrigues asociado a una rotación
$\vec{\omega}$	velocidad angular
$A$	matriz antisimétrica asociada al producto vectorial de un vector
AMP	altura mediana del EIR pélvico (experimento 4)
AMR	altura mediana del EIR relativo-lumbar (experimento 4)
AMT	altura mediana del EIR torácico (experimento 4)
CLFR	correlación lineal de la posición longitudinal del EIR vs. ángulo lumbar (experimento 4)
$d$	traslación a lo largo del eje de rotación
DEA	desviación típica del EIR del asiento (experimento 5)

DERA	desviación típica del EIR asiento/respaldo (experimento 5)
DER	desviación típica del EIR del respaldo (experimento 5)
EIR	eje instantáneo de rotación
FHA	<i>finite helical axis</i> , eje helicoidal finito
G	centroide de un conjunto de marcadores
gdlf	grados de libertad funcionales
gdl	grados de libertad
H	punto del eje de rotación
IHA	<i>instantaneous helical axis</i> , eje helicoidal instantáneo
$J_G$	tensor de inercias
MD	distancia mediana del EIR lumbar a la espalda (experimento 4)
MEA	posición mediana del EIR del asiento (experimento 5)
MERA	posición mediana del EIR asiento/respaldo (experimento 5)
MER	posición mediana del EIR del respaldo (experimento 5)
MET	mediana de la posición del EIR del tórax (experimento 6)
PLFR	pendiente de la relación entre la posición longitudinal del EIR y el ángulo lumbar (experimento 4)
PRA	pendiente de la relación de ángulos respaldo/asiento (experimento 5)
$\vec{R}_A$	vector de posición absoluta del punto A
$\vec{r}_A$	radio desde el centroide G al punto A
RET	rango de la posición del EIR del tórax (experimento 6)
RFP	rango de flexo-extensión de la pelvis (experimento 4)
RFR	rango de flexo-extensión relativo-lumbar (experimento 4)
RFT	rango de flexo-extensión del tórax (experimento 4)
RIA	rango de inclinación del asiento (experimento 5)

RIR	rango de inclinación del respaldo (experimento 5)
RL	rango de la posición longitudinal del EIR lumbar (experimento 4)
RMS	<i>root mean square</i> , raíz de la media de cuadrados, o media cuadrática
$\vec{R}_{vA}$	posición virtual del punto $A$ asociada a un desplazamiento finito
$\vec{r}_{vA}$	posición virtual del punto $A$ relativa al centroide $G$ , asociada a un desplazamiento finito
$t$	tiempo
$\vec{u}$	vector unitario del eje de rotación
$\vec{v}_A$	velocidad del punto $A$





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

La postura sedente es una de las adoptadas más frecuentemente en nuestra sociedad, a la que en este sentido le resulta muy apropiado el calificativo de *sedentaria*. Se trata de una postura que domina en mayor o menor medida gran parte de las tareas que realizamos de forma cotidiana. Es por ello que parte de la actividad investigadora en el Instituto de Biomecánica de Valencia (IBV) se encuentra estrechamente relacionada con la postura sedente. Ésta ha sido objeto de muchos estudios vinculados con los entornos de trabajo, incluyendo el sector del mueble (y más concretamente el mobiliario de oficina), y también con el ámbito de la automoción y los medios de transporte, donde la mayor parte de la actividad se realiza sobre un asiento.

Además de su evidente interés desde el punto de vista de la ergonomía, la postura sedente también supone un prometedor campo de trabajo científico. Es interesante observar la persistente asociación del verbo *sentar* y todo su campo léxico con la idea de inmovilidad. No en vano su ancestro latino *sedēre* (del que procede a través del latín vulgar *sedentāre*) se refería al estado general de permanecer fijo en un lugar, más que a la postura o conjunto de posturas que entendemos como «estar sentado». No es de extrañar, por tanto, que la postura sedente se haya estudiado tradicionalmente desde una perspectiva esencialmente estática, observando fotografías para medir los ángulos que forman los miembros del cuerpo, radiografías de la columna vertebral, o lecturas medias de transductores para conocer las cargas físicas que soporta la persona.

Sin embargo esto ya no es así. Hoy en día está ampliamente aceptada la idea de que uno de los aspectos cruciales de la ergonomía en la postura sedente es, de hecho, su movilidad. Por eso la búsqueda del confort y la salud postural en el diseño de sillas ya no se limita a adecuar las dimensiones del producto a la diversidad antropométrica de los usuarios, o a procurar un apoyo estable de todas las partes del cuerpo. Ahora también se buscan soluciones dinámicas que estimulen el movimiento, el riego sanguíneo, la nutrición de los discos intervertebrales, etc.

Es en este aspecto en el que se encuentran grandes oportunidades de avance científico, pues a pesar de la evolución en el enfoque, los análisis de la postura sedente siguen utilizando métodos que más bien pertenecen al dominio de los estudios estáticos; métodos que están, digámoslo así, muy *asentados* en la comunidad científica. Por poner un par de ejemplos, si la postura se ha parametrizado tradicionalmente en función de los ángulos de la columna, la ciencia aprovecha las nuevas tecnologías para medirlos de forma continua, pero habitualmente el análisis de resultados se sigue centrando en el mismo parámetro: los ángulos medios, sus rangos de variación, etc. Las variables derivadas (velocidades, aceleraciones...) se estudian con mucha menos frecuencia. Asimismo, el análisis de los esfuerzos estáticos al nivel de la tercera o quinta vértebra lumbar, donde más lesiones se dan por cargas posturales, ha dado como herencia modelos biomecánicos de una sola articulación fija, utilizados luego para el análisis de unos movimientos que son en realidad mucho más complejos.

La evolución del enfoque en los estudios de la postura sedente permite apreciar, por contraste, el relativo estancamiento metodológico, pero no es éste el único campo de la biomecánica en el que ocurre algo semejante. La cinemática es por sí misma una parte limitada de la mecánica, que estudia el movimiento de los cuerpos pero prescinde de las fuerzas que lo producen. No obstante en muchos estudios sobre el movimiento humano se suele reducir más aún su aplicación. En el ámbito de la biomecánica, para un análisis cinemático no se pide más que medir la posición de las partes del cuerpo durante el movimiento, *por dónde y en qué posturas* se ha movido cada miembro lo largo del tiempo. Las características instantáneas del movimiento, que explican *cómo* se efectúa el movimiento en cada momento, son una información valiosa pero también problemática, pues su cálculo se ve mucho más afectado por los errores de medida, el eterno enemigo de todo investigador. Así pues, según el caso es lícito y aceptado prescindir de dicha información.

Evidentemente, quienes estudian máquinas y mecanismos también se enfrentan a los errores de medida. Sin embargo en este campo la cinemática instantánea no es una parte que se pueda obviar, por lo que es de mucho interés

observar qué estrategias se siguen para resolver este problema. Diríase que la Mecánica, como madre de la Biomecánica, es una fuente valiosa a la que su hija puede visitar, aunque ésta lleve tiempo emancipada y tenga una larga vida propia. No se trata sólo de un recurso útil, sino esencial: para hablar de cómo procurar una adecuada movilidad del tronco en la postura sedente, primero se debe conocer la naturaleza del movimiento humano en esa postura, igual que se ha tenido que medir a las personas para definir las dimensiones de las sillas. Se trata, sin duda, de un razonamiento obvio. Y sin embargo son pocos los estudios que han abordado esta cuestión en profundidad.

Por estas razones el movimiento de la postura sedente se introdujo como uno de los objetos de estudio en una serie de proyectos de investigación sobre modelos biomecánicos, llevados a cabo en el IBV de forma coordinada con la Universidad Politécnica de Valencia (UPV): *Nuevos Modelos Biomecánicos Basados en Sistemas No Paramétricos* (Plan Nacional I+D, DPI2003-07883-C02-02), y *Generación de Criterios para el Desarrollo de Modelos Biomecánicos Articulares a partir de Datos Antropométricos Funcionales* (DPI2006-14722-C02-02), con continuación presente en el proyecto *Modelado cinemático y dinámico del movimiento de los tejidos blandos* (DPI2009-13830-C02-02, coordinado también con el Hospital Clínico Universitario de Valencia).

En esta investigación el método científico y los conocimientos en Teoría de Máquinas y Mecanismos hacen de perfectos aliados de los intereses técnicos y ergonómicos de la Biomecánica. La estrecha y necesaria relación entre ambas disciplinas se ha aprovechado para mejorar las metodologías de análisis de movimientos humanos. El principio que ha regido la investigación es estudiar los parámetros cinemáticos de forma abierta, según las leyes generales de la mecánica; sin obligar a que cada uno de los elementos que constituyen el método forme parte de un atributo anatómico, y haciendo la interpretación biomecánica al final del proceso.

De este modo se han buscado técnicas de análisis que aporten una visión más completa de cómo se mueve una articulación. Cómo se flexiona y extiende el tronco en la postura sedente es, en particular, el objeto de estudio en esta tesis doctoral, aunque las herramientas desarrolladas para ello forman parte de un todo mayor, orientado al análisis de cualquier otra parte del cuerpo humano.

## 1.2. Estructura del trabajo

En la revisión bibliográfica que da pie a la investigación (capítulo 2) se da una visión histórica de los estudios sobre la postura sedente, y se presenta el

estado actual de la ciencia en materia de modelos biomecánicos en general, instrumentos y técnicas de análisis cinemático, y sobre el importante problema de los errores.

A la luz de los antecedentes revisados se ha detectado una serie de oportunidades para avanzar en el conocimiento, que se han definido como objetivos de investigación en el capítulo 3. En este capítulo también se presenta el plan de trabajo definido para resolver los problemas planteados.

El capítulo 4 describe al detalle el trabajo realizado, que se divide en dos grandes bloques. En primer lugar se ha desarrollado una metodología para el análisis cinemático que busca la simplicidad matemática en los cálculos. Esta metodología difiere de las técnicas habituales en el campo de la biomecánica; parte en su lugar de analogías mecánicas y de transformaciones geométricas, que permiten formular las relaciones entre parámetros cinemáticos con operaciones lineales y ecuaciones explícitas. Este desarrollo, al margen de su interés teórico, presenta una ventaja práctica crucial para el éxito de la investigación: la posibilidad de hacer una estimación a nivel analítico de los errores en los parámetros cinemáticos, lo cual permite controlarlos de forma eficaz, con el uso de conceptos sobre estadística multivariante.

El segundo bloque de trabajo ha sido la ejecución de seis experimentos, cuyos resultados se presentan en el capítulo 5. Los tres primeros tenían como objetivo validar la metodología propuesta, y los tres últimos medir la flexión del tronco con distintas configuraciones de la postura sedente: sobre un asiento plano sin respaldo ni otras restricciones, o bien sobre sillas de trabajo, que también fueron caracterizadas cinemáticamente.

A partir de esos resultados, en el capítulo 6 se discuten las ventajas y limitaciones de la metodología de análisis y se hace una interpretación del modelo biomecánico obtenido, así como de la relación entre el diseño de las sillas y la movilidad del tronco. Las principales conclusiones quedan sintetizadas a continuación, en el capítulo 7.

El trabajo concluye con dos apéndices: uno dedicado a los procedimientos matemáticos empleados (a un nivel de detalle mayor que el expuesto en el capítulo 4), y otro con las publicaciones en revistas y congresos científicos que han resultado de esta investigación.

## Capítulo 2

# Revisión bibliográfica

### 2.1. Postura sedente y movimiento del tronco

Los estudios biomecánicos de la postura sedente se remontan a los comienzos de la Ergonomía como disciplina científica. Desde una perspectiva histórica, como la aportada en la revisión de Harrison et al. (1999), se pueden destacar dos grandes periodos: una primera fase centrada en los estudios posturales, y una segunda más orientada a los aspectos funcionales. Esta última perspectiva, basada en la búsqueda del confort más que en el mero cuidado de la salud, comenzó a imponerse hacia el segundo tercio del siglo XX, aunque ambas aproximaciones han coexistido siempre y lo siguen haciendo hoy.

En las primeras décadas, desde la obra seminal de Staffel (1884) hasta entrada la década de 1960, el énfasis se puso sobre el concepto de la «postura ideal», en base a consideraciones antropométricas, teorías biomecánicas sobre las acciones musculares y de los ligamentos en función de la postura, observaciones sobre el comportamiento y el confort manifestado por los usuarios, y sobre todo estudios radiográficos. Estos últimos proporcionaron la evidencia científica que demostraba los cambios en la forma de la columna vertebral debidos a la postura.

Ya en los primeros estudios la curvatura de la columna en la postura eriguida de pie se utilizaba como referencia para definir las posturas saludables. En sedestación la pelvis suele encontrarse inclinada hacia atrás, lo cual provoca la flexión de la columna y reduce la lordosis lumbar, pudiéndose llegar a adoptar una curvatura cifótica (véase la figura 2.1). Los modelos mecáni-

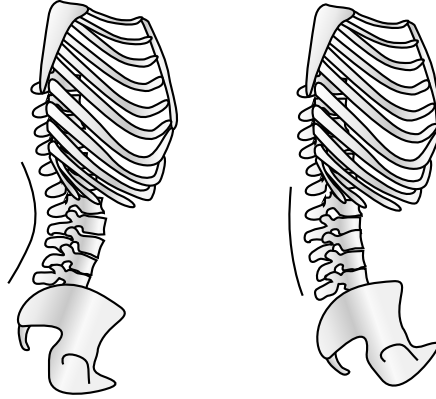


Figura 2.1: Curvaturas características de la columna vertebral. En la postura de pie (figura de la izquierda), la zona lumbar que une el tórax y la pelvis suele formar una curva cóncava desde un punto de vista externo (lordosis). En la postura sedente (derecha), la rotación de la pelvis «arrastra» las vértebras lumbares, reduciéndose la lordosis y pudiendo llegar a presentarse una curvatura convexa (cifosis).

cos del cuerpo humano predecían un desplazamiento del centro de gravedad hacia delante, y en consecuencia un desequilibrio en las tensiones musculares. Este fenómeno se ha considerado tradicionalmente una de las causas del dolor lumbar asociado a la postura sedente (Kendall et al., 1952; Keegan, 1953), lo cual ha sido la base para las recomendaciones de adoptar una postura sedente con la pelvis poco inclinada y el tronco erguido, con una lordosis lumbar «normal». Esta idea se aceptó de forma generalizada hasta mediados del siglo XX (Kroemer, 1994), y también se ha mantenido en las décadas posteriores, aunque las técnicas y metodologías de estudio más modernas han matizado o criticado algunas de las conclusiones tradicionales.

En la segunda mitad del siglo XX se dio una nueva aproximación al estudio de la postura sedente, basada en procedimientos más repetibles y fiables para realizar evaluaciones del confort y el dolor, y nuevas técnicas como la electromiografía (EMG) y los transductores de presión intradiscal (Harrison et al., 1999). Esto ha permitido recoger datos empíricos en sujetos vivos de los fenómenos fisiológicos que hasta el momento eran principalmente materia de teorías biomecánicas o experimentos *in vitro*, como el esfuerzo muscular o la presión en los discos intervertebrales. El muy citado estudio de Nachemson (1966) mostró que entre un amplio conjunto de posturas, casi todas provoca-

ban una presión intradiscal en la zona lumbar mayor que la postura de pie, con la salvedad de las posturas tumbadas, e incluyendo las sentadas sin apoyo. Sin embargo, también se pudo verificar que el apoyo proporcionado por el respaldo en posturas reclinadas compensa el aumento de carga sobre la columna que la flexión del tronco provoca, y que este efecto es tanto más notable cuanto más inclinado está el tronco hacia atrás (Andersson et al., 1974). Los estudios indirectos mediante estadiometría (medida de la variación transitoria en la estatura) también han demostrado que la reducción de estatura con el paso de las horas, y por lo tanto la presión intradiscal, es menor con el uso del respaldo (Eklund & Corlett, 1984).

Éstos y otros resultados han dado lugar a una larga discusión sobre el papel de la configuración de la columna en la ergonomía de la postura sedente, y a estrategias opuestas en el diseño de asientos «ergonómicos». Una de las estrategias es la abanderada por el estudio de Mandal (1976), que popularizó el uso de sillas de trabajo (especialmente para trabajos de manipulación) con asiento inclinable hacia delante. El diseño de este tipo de sillas tenía el objetivo de favorecer una postura con un ángulo de cadera más abierto (comparada por el autor con la postura de montar a caballo), en la que la pelvis estuviera menos inclinada y se redujese la flexión lumbar. Con la misma finalidad, pero aportando un apoyo en las rodillas para prevenir el deslizamiento provocado en esa postura, también se extendió el uso de las llamadas *kneeling chairs*. Este modelo alternativo conseguía aumentar más la lordosis lumbar y favorecer la postura erguida, aunque la valoración subjetiva del usuario resultaba peor para largos periodos de uso (Bendix et al., 1988). La otra estrategia consiste en descargar el peso del tronco apoyándolo sobre un respaldo reclinable, que ha de inclinarse ligeramente hacia detrás y suele presentar una curvatura convexa a la altura lumbar (el «apoyo lumbar») para favorecer la lordosis. Este tipo de asientos son los más habituales en entornos de oficina, y una de las finalidades de su diseño es estimular la movilidad (Kroemer, 1994; Reinecke & Hazard, 1994). En cualquier caso, se ha observado que la postura adoptada en sedestación no queda determinada por el tipo de asiento utilizado, sino que depende principalmente de la tarea realizada (Bendix et al., 1988; Hsiao & Keyserling, 1991; Graf et al., 1993). Esto también es aplicable a los efectos fisiológicos atribuidos a la postura: en términos de estadiometría se ha observado que permanecer sentado mientras se realizan tareas de oficina produce la misma reducción de estatura que trabajar de pie en una cadena de montaje, mientras que permanecer sentado manteniendo una conversación no provoca tal reducción de estatura (Leivseth & Drerup, 1997).

Ahora bien, la controversia científica no se ciñe a las soluciones para cumplir los criterios ergonómicos, sino que también afecta a los principios mismos



en los que se basan dichos criterios. Como contrapartida a las consecuencias negativas asociadas a la cifosis lumbar se ha afirmado que los discos intervertebrales están mejor preparados para soportar la presión en su región anterior (la parte comprimida en cifosis), y que en dicha posición se reduce la carga de las articulaciones entre las apófisis vertebrales, lo cual supone una ventaja fisiológica para la cifosis moderada (Adams & Hutton, 1985; Graf et al., 1993). Asimismo, en términos subjetivos se ha encontrado una relación directa entre lordosis lumbar y discomfort postural (Vergara & Page, 2002). A esto hay que añadir que los estudios más modernos sobre la presión intradiscal arrojan resultados semejantes para posturas tanto de pie como sentadas, entre 0.5 y 0.6 MPa, en contraste con los 1.24 MPa obtenidos para la postura sedente en los estudios de mediados del siglo XX, lo cual se atribuye a limitaciones instrumentales y en las muestras de sujetos de los experimentos antiguos (Claus et al., 2008). Y los mismos autores que llaman la atención sobre esa cuestión también discuten la utilidad práctica del concepto de la postura ideal, ante la evidencia de que las personas no suelen ser capaces de reproducir la llamada «lordosis corta» (ligera cifosis torácico-lumbar con lordosis lumbar) que se recomienda habitualmente en los manuales de ergonomía (Claus et al., 2009).

En la actualidad no se aboga tanto por la adopción de una postura sedente «correcta» como por una adecuada movilidad, que facilite los cambios posturales únicamente con la acción del cuerpo, a lo cual se le ha dado el nombre de *dynamic sitting*, i.e. «sedestación dinámica» (Graf et al., 1993; Festervoll, 1994; Kroemer, 1994; Faiks & Reinecke, 1998). Se ha comprobado que mantenerse sentado durante más de una hora aumenta la rigidez de la columna en la región lumbar (Beach et al., 2005), mientras que el movimiento continuo del tronco facilita la nutrición y renovación de los fluidos en los discos intervertebrales, a través de un proceso de bombeo producido por los ciclos de compresión y descompresión (Graf et al., 1993; Reinecke & Hazard, 1994). Cabe matizar, sin embargo, que los grandes cambios posturales pueden ser una manifestación del discomfort, siendo los «micromovimientos» breves y de alta frecuencia los que se asocian a una reducción del mismo (Vergara & Page, 2002).

La sedestación dinámica es una estrategia postural que se da de forma natural (Branton & Grayson, 1967; Callaghan & McGill, 2001). Pero también se ha postulado que las sillas han de facilitar el movimiento, no sólo para evitar los esfuerzos estáticos y prevenir el discomfort (van Dieën et al., 2001; de Looze et al., 2003), sino también para mejorar la ejecución de las tareas (Corlett, 2006). Este principio de movilidad postural en sedestación ha sido utilizado para evaluar los distintos diseños de asiento con resultados dispares: algunos estudios afirman que la inclinación hacia delante en la parte anterior del

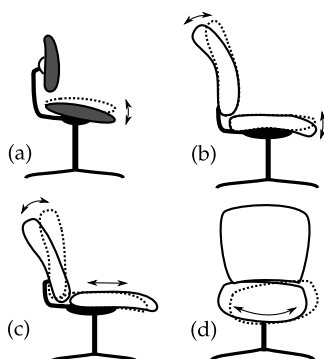


Figura 2.2: Algunos conceptos de «diseño ergonómico» para las sillas de trabajo: (a) silla de asiento inclinable hacia delante; (b) silla flexible; (c) silla con asiento deslizante; (d) silla de asiento rotatorio.

asiento facilita la movilidad (Graf et al., 1993), mientras otros rebaten la supuesta ventaja en ese sentido de las sillas inclinadas (Jensen & Bendix, 1992). Otras soluciones propuestas pasan por el uso de estructuras flexibles que cedan a los movimientos del cuerpo (Festervoll, 1994), y diseños más innovadores, a saber: formas alternativas de articular las partes de la silla, como el deslizamiento horizontal del asiento sincronizado con la inclinación del respaldo (Suzuki et al., 1994), e incluso sistemas neumáticos o motorizados que producen un empuje cíclico sobre la zona lumbar (Reinecke & Hazard, 1994) o una rotación del asiento en el plano horizontal (van Deursen et al., 2000; Lengsfeld et al., 2000). La figura 2.2 muestra algunos ejemplos de estos diseños.

El interés suscitado por la sedestación dinámica es alto, pero lamentablemente la base para las soluciones proporcionadas por la industria no tiene detrás tanta investigación científica como los estudios sobre la postura. Los criterios ergonómicos para facilitar la movilidad en la postura sedente han de basarse en el conocimiento de cómo se mueve el tronco de forma natural cuando una persona está sentada (Faiks & Reinecke, 1998). En las siguientes secciones se presenta una revisión detallada de los modelos y métodos empleados en el campo del análisis de movimientos para estudiar el movimiento del cuerpo humano en general, y del tronco en particular. La información recogida servirá para establecer los conocimientos que se han publicado sobre el movimiento del tronco en la postura sedente, y las carencias que existen a

la luz de otras aplicaciones de los movimientos humanos, lo cual sentará las bases sobre las que se desarrolla el resto de la investigación.

## 2.2. Modelos biomecánicos

### 2.2.1. Modelos del cuerpo humano

El movimiento del cuerpo humano es muy complejo, y para su estudio es habitual definir *a priori* un modelo en base al cual establecer las variables que se desean medir. La forma de analizar los movimientos humanos depende de la complejidad del modelo. Los más sencillos, y en consecuencia más empleados, son los modelos basados en cadenas de sólidos articulados. En estos modelos el cuerpo se fracciona en segmentos que se consideran rígidos (normalmente estos segmentos se corresponden con partes en torno a huesos o estructuras óseas), que se enlazan entre sí formando una cadena abierta.

Los modelos de cadenas articuladas pueden utilizarse para estudios de partes concretas del cuerpo (de miembros inferiores, superiores, columna, extremidades, etc.) o para estudios del movimiento del cuerpo completo. Para estos últimos los modelos están compuestos por un número de segmentos que suele variar entre diez (Ormonet et al., 2005) y veintiuno (Unuma et al., 1995), aunque también se encuentran modelos intermedios entre catorce y dieciséis segmentos (Kingma et al., 1996; Ambrósio et al., 2001; Herda et al., 2001), y en aplicaciones de animación por ordenador se pueden usar modelos aún más complejos (figura 2.3). En los estudios detallados de partes del cuerpo los modelos suelen ser más sencillos, pero pueden llegar a un nivel de complejidad comparable. Por ejemplo, Zhang et al. (2003) realizaron un estudio en el que se consideraban quince articulaciones de la mano.

Los enlaces utilizados habitualmente entre cada dos segmentos son pares con un centro de rotación fijo, y por lo tanto presentan un máximo de tres grados de libertad (gdl) por cada articulación, y a menudo menos. En un modelo de cadena abierta con  $N$  segmentos (y por lo tanto  $N - 1$  articulaciones), el número de grados de libertad con este tipo de articulaciones sería como máximo de  $3N + 3$  (añadiendo 6 gdl por el movimiento del cuerpo en conjunto). No obstante, el uso de articulaciones con menos de 2 gdl hace que el número de grados de libertad suela quedar bastante por debajo de este máximo.

Kinzel & Gutkowsky (1983) revisaron los distintos modelos de articulaciones empleados en los estudios de movimientos humanos, incluyendo pares superiores. De este estudio se puede destacar la tipología de articulaciones utilizadas normalmente en función de la parte del cuerpo estudiada:

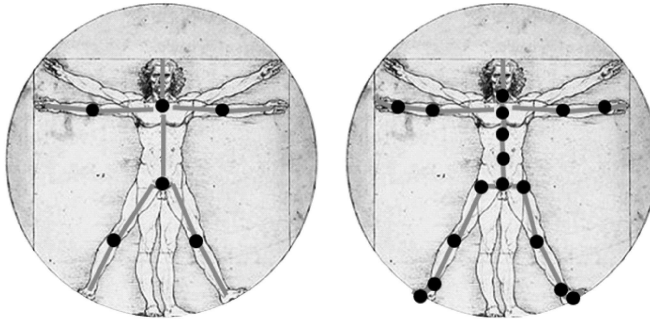


Figura 2.3: Modelos de Ormoneit et al. (2005) y Unuma et al. (1995).

- Las «bisagras» o pares de revolución de 1 gdl (rotación alrededor de un eje fijo), utilizadas a menudo por su simplicidad para la mayoría de articulaciones, en estudios de gestos específicos.
- Las rótulas esféricas de 3 gdl (rotación alrededor de un punto fijo), utilizadas habitualmente para cadera, hombro, codo, muñeca, rodilla y tobillo.
- Las rótulas esféricas de 2 gdl, que son simplificaciones de las anteriores con un sentido de rotación restringido, utilizadas para las mismas articulaciones.
- Los pares planos de 3 gdl (movimiento libre paralelo a un plano), empleados para el movimiento de rodilla, hombro, codo, columna, tobillo, mandíbula y articulación radio-ulnar.
- Pares de movimiento general de 6 gdl (sin restricción), utilizados ocasionalmente para la rodilla, mandíbula, muñeca, columna y hombro, aunque son difíciles de medir y describir.

En los últimos años se han impulsado los estudios de movimientos humanos sin modelo (*model-free*). Este innovador enfoque se utiliza con medidas de formas, siluetas y superficies del cuerpo humano, las cuales se segmentan en partes empleando información anatómica de tipo muy general, como el número de miembros del cuerpo humano, su tamaño relativo, y de qué modo se conectan (Corazza et al., 2006; Mündermann et al., 2006).

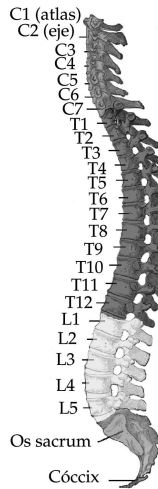


Figura 2.4: Regiones de la columna vertebral.

### 2.2.2. Aplicación al tronco

La columna vertebral está formada por 24 vértebras móviles, más los cuerpos vertebrales fusionados del sacro y el cóccix. Las vértebras móviles son naturalmente las que articulan el movimiento del tronco, y se dividen en tres regiones (figura 2.4):

- La región cervical, compuesta por siete vértebras desde la base del cráneo hasta el tórax (C1-C7).
- La región torácica, compuesta por doce vértebras de las que parten las costillas (T1-T12). La caja torácica formada por las costillas aporta a esta zona un cierto grado de rigidez, mayor que en las regiones superior e inferior de la columna.
- La región lumbar, compuesta por cinco vértebras que unen el tórax con la pelvis (L1-L5).

Cada par de vértebras se encuentra unido por un disco intervertebral (salvo las del sacro y el cóccix) y una serie de ligamentos. Todo este conjunto posee una complejidad mecánica considerable, por lo que no existe un modelo ideal para todas las aplicaciones. El modelo matemático de Schultz &

Galante (1970) considera cada una de las vértebras móviles de forma individual, lo cual da lugar a 144 coordenadas (24 vértebras  $\times$  6 coordenadas de posición y orientación), restringidas por ecuaciones no lineales. Se trata de un modelo estático que busca el equilibrio mecánico (suma de energías nula). Sin embargo la complejidad de este modelo es tal que en la práctica se ha abandonado en favor de otras aproximaciones, entre las que se pueden destacar los modelos de elementos finitos (King, 1984).

No obstante, salvo que el objetivo sea específicamente el análisis de las cargas u otros detalles a nivel vertebral, se suele optar por modelos mucho más simplificados. La mayoría de modelos de tronco consideran, además de la pelvis, únicamente de uno a tres segmentos, a saber: el tórax, o bien las líneas de la columna y los hombros, o el tronco superior e inferior más un segmento lumbar (Leardini et al., 2009). En los trabajos aplicados a la ergonomía en postura sedente de hecho predominan los modelos que consideran el tronco como un solo cuerpo articulado con la pelvis, fijándose la articulación correspondiente al nivel de L3 (Eklund & Corlett, 1986; Serber, 1994) o L5 (Hsiao & Keyserling, 1991; Goossens & Snijders, 1995; Kayis & Hoang, 1999).

La conveniencia de fijar la articulación teórica tiene su origen en los modelos posturales estáticos, cuya finalidad es estimar el momento de fuerzas soportado por dichas vértebras (Eklund et al., 1983), ya que es en torno a ellas donde se suelen localizar el dolor y las lesiones lumbares, aunque modelos semejantes aparecen aplicados a tareas tan poco estáticas como levantar pesos (de Looze et al., 1992). Sin embargo, a la hora de analizar el movimiento resulta una restricción artificiosa, que no se encuentra validada por estudios que establezcan el lugar donde se encuentra realmente el eje de rotación en términos cinemáticos.

## **2.3. Técnicas instrumentales**

### **2.3.1. Técnicas generales para la medida de los movimientos humanos**

Existen distintas tecnologías para la medición de los movimientos humanos, cuya utilidad depende de las condiciones en las que se haga el estudio. Las diversas opciones han sido revisadas, por ejemplo, por Ladin (1995) o Winter (2009). En grandes rasgos, las técnicas instrumentales más usadas para medir el movimiento humano se pueden clasificar en las siguientes familias:

1. Técnicas de visión o fotogrametría: basadas en la grabación secuencial de imágenes de las partes del cuerpo estudiadas, y la detección en las

mismas de puntos o formas características, mediante técnicas de tratamiento de imágenes. La ubicación de dichos puntos y formas en el espacio 3-D se consigue con una adecuada calibración de la correspondencia entre medidas de la imagen y medidas del espacio, y normalmente mediante la grabación simultánea desde varias direcciones para tener una visión estereoscópica. Este tipo de medidas se suele realizar con el apoyo técnico de marcadores reflectantes iluminados por focos infrarrojos, o bien con marcadores activos (LEDs), colocados en los puntos o zonas del cuerpo cuya posición se desea medir, para generar en las imágenes «puntos iluminados» fáciles de aislar y detectar mediante los algoritmos de tratamiento de imágenes. Este tratamiento puede llegar a ser muy complejo dependiendo del número de marcadores a detectar (o si no se utilizan marcadores), y del grado de automatización programado (detección de los puntos únicamente en la imagen o cálculo simultáneo de su posición 3-D, seguimiento de los marcadores de forma individualizada o combinada, etc.). Por lo tanto, las medidas se suelen procesar *a posteriori* tras las sesiones de medida, y pueden requerir una intervención humana importante, aunque hoy en día existen incluso «cámaras inteligentes» con procesadores incorporados (Bösemann, 2005), que proporcionan directamente la información métrica en lugar de (o complementariamente a) las imágenes.

2. Goniómetros: se trata de instrumentos que miden el ángulo, en uno o más ejes, entre dos piezas rígidas que se ajustan a las dos partes en torno a una articulación; por ejemplo en mano y antebrazo para medir el movimiento de la muñeca, en fémur y tibia para la rodilla, etc. Aunque antiguamente esto se hacía de forma visual hoy en día los goniómetros están sensorizados con potenciómetros, lo cual hace que su tamaño sea mucho más reducido, y que emitan directamente una señal eléctrica con la información a tiempo real del ángulo medido. A este tipo de goniómetros también se les llama «electrongoniómetros» para distinguirlos de los tradicionales. Las medidas proporcionadas por este tipo de instrumentos no están referidas a un sistema absoluto externo, sino que son medidas anatómicas, relativas a la postura de referencia para la que se ha calibrado el instrumento. Es decir, un goniómetro no informa directamente del ángulo formado entre un miembro del cuerpo y los ejes de coordenadas del laboratorio, sino de la diferencia entre el ángulo que forman los segmentos en la postura de referencia y en cualquier otro instante. Aunque estos sensores requieren cierto cableado, existen eficaces sistemas de telemetría que permiten limitar la cantidad de cables

empleados a los imprescindibles para enviar las señales eléctricas a un emisor portátil.

3. Sensores electromagnéticos: estos instrumentos están formados por un emisor de ondas electromagnéticas que se fija en un punto del laboratorio, más uno o varios receptores ubicados en las partes del cuerpo a medir. El receptor proporciona una señal en función de la intensidad y el gradiente del campo electromagnético captado, lo cual a su vez depende de la distancia y la orientación en la que se encuentra respecto al emisor. Este tipo de sensores mide en coordenadas absolutas, referidas al sistema externo definido por el emisor, y un solo receptor puede proporcionar información tanto de su posición como de su orientación respecto al sistema de coordenadas. Por lo tanto resultan especialmente aptos para caracterizar el movimiento de cuerpos sólidos con pocos sensores fijados al cuerpo. Como contrapartida, el número de sensores que se pueden usar es limitado, y las medidas son extremadamente sensibles a las fuentes de ruido electromagnético, que pueden deformar el campo y distorsionar los resultados, sin que la causa sea perceptible a los sentidos mientras se efectúa la medición. Por lo tanto, las condiciones del laboratorio han de ser muy controladas.
4. Sensores inerciales: consisten en transductores que se fijan a las partes del cuerpo y emiten señales eléctricas en función de los fenómenos físicos que actúan sobre ellos con el movimiento. La principal diferencia con los otros sensores radica en que los inerciales son sensibles a los efectos dinámicos del movimiento. El instrumento de este tipo más habitual es el acelerómetro, que mide el efecto de las fuerzas de inercia sobre el material del sensor, en uno o varios ejes. En condiciones estáticas o de velocidad homogénea e invariante, un acelerómetro produce una señal constante por el efecto de la gravedad. Si se tara a cero para eliminar este efecto, la señal del variará en función de la inclinación y las aceleraciones durante el movimiento. Esta propiedad se puede aprovechar para utilizarlos a modo de inclinómetros. En la última década también se ha ampliado el uso de giróscopos en biomecánica para medir velocidades angulares (Mayagoitia et al., 2002), gracias a los avances en su miniaturización. Los sensores inerciales son especialmente útiles para medir con fiabilidad las derivadas temporales del movimiento, y evitar de este modo los graves efectos del ruido sobre las mismas (véase la sección 2.5). Sin embargo, la integración necesaria para calcular posiciones a partir de estos datos introduce efectos de deriva, y en caso



de impactos o grandes aceleraciones hasta la pequeña masa de los sistemas miniaturizados puede causar artefactos. Por lo tanto, para hacer análisis de movimientos completos los sensores inerciales han de ser combinados con otros tipos. De hecho existen soluciones comerciales que combinan sistemas de múltiples sensores en un traje integrado, con los cables canalizados para facilitar la instrumentación.

Todas las técnicas mencionadas están destinadas a medir variables geométricas o cinemáticas del movimiento en sí mismo, pero según el estudio también puede interesar información sobre las fuerzas de acción y reacción que producen el movimiento. Por esa razón a menudo se combinan con otro tipo de medidas. Así, las fuerzas externas se miden con instrumentos como las plataformas de fuerza o sensores de presión, la actividad muscular con electromiografía (EMG), y el consumo metabólico con calorimetría (Cappozzo et al., 2005).

### 2.3.2. Técnicas empleadas para medir el movimiento tronco

Como se ha comentado en la sección 2.1, los estudios más antiguos sobre la biomecánica del tronco se basaban en la observación de radiografías, que se pueden encuadrar dentro de la familia de técnicas de visión, aunque dichos estudios eran estáticos, muy centrados en los ángulos de la columna y no analizaban aspectos relacionados con el movimiento. Más adelante, ese tipo de medidas se combinaron con registros de las fuerzas internas a través de EMG y transductores de presión, o indirectamente mediante estadiometría.

Como es natural, a la hora de analizar los movimientos del tronco existe una tendencia a seguir aplicando las mismas técnicas o adaptaciones de las mismas. Muchos estudios sobre el movimiento del tronco utilizan secuencias de radiografías (Pearcy & Bogduk, 1988; Amevo et al., 1991; Harvey & Hukins, 1998; Kaneoka et al., 1999; Frobin et al., 2002; Sprigle et al., 2002; McCane et al., 2006), en algunos casos desde distintas direcciones simultáneas (estereoradiografías) para poder analizar el movimiento de las vértebras en las tres dimensiones (Plamondon et al., 1988; Stokes, 1995). No obstante las radiografías resultan demasiado invasivas y se encuentran limitadas en el número de imágenes que se pueden tomar en una sesión (Amevo et al., 1991; Bogduk & Mercer, 2000), lo cual restringe la utilidad de esta técnica para el analizar movimientos. El marcado carácter clínico de los trabajos tradicionales sobre la biomecánica del tronco también ha dado lugar a muchos experimentos *in vitro* con fragmentos de cadáveres, que permiten observar y manipular la columna con mayor libertad (a través tanto de radiografías como con

otros instrumentos), y obtener así resultados muy detallados y precisos, aunque evidentemente no pueden revelar todas las cualidades del movimiento natural en el ser vivo (Panjabi et al., 1981; Goel et al., 1984; Haher et al., 1992; Kettler et al., 2004; Mansour et al., 2004; Rousseau et al., 2006; Wachowski et al., 2009).

En mayor o menor medida, las técnicas instrumentales más comunes para los estudios *in vivo* también se han usado para analizar el movimiento del tronco, tomando medidas al nivel de la piel. Por una parte está la forma habitual de fotogrametría con imágenes de vídeo, también llamada «videogrametría» (Gruen, 1997) para distinguirla de las técnicas de visión que utilizan otros registros gráficos, como los mencionados rayos X, fluoroscopia (Gerber et al., 2006) o resonancias magnéticas (König & Vitzthum, 2001). En contraste con los minuciosos análisis de radiografías, los estudios del tronco basados en vídeos suelen presentar metodologías poco sofisticadas. Algunos analizan las imágenes de una forma meramente visual, buscando sólo cambios de postura cualitativos (Jensen & Bendix, 1992) o midiendo los ángulos de la espalda de forma aproximada (Mandal, 1991; Graf et al., 1993). Los estudios que usan las técnicas de fotogrametría con marcadores para tomar medidas más precisas también suelen limitarse a analizar los ángulos de la espalda y su variación, tanto si se centran en la postura sedente (Riley & Bader, 1988; Faiks & Reinecke, 1998) como en otros casos (Schache et al., 2002; Giorelli et al., 2004). El movimiento detallado del tronco considerando los 6 grados de libertad posibles se ha estudiado para la zona cervical en relación con lesiones de cuello (Woltring et al., 1994; Öhberg et al., 2003) y para la zona lumbar en contextos generales (Cerveri et al., 2004), pero hay una carencia al respecto en relación con la postura sedente.

Las demás técnicas instrumentales también se han utilizado para medir el movimiento del tronco. Hay estudios sobre la postura del tronco y su movimiento en sedestación, especialmente de la zona lumbar, realizados con digitalizadores tridimensionales (Black et al., 1996), inclinómetros (Bridger et al., 1992), goniómetros (Kasahara et al., 2008) o instrumentos semejantes basados en galgas extensiométricas —llamados «lordosímetros» (Reinecke et al., 1994) o «raquímetros» (Vergara & Page, 2000)—, con sensores electromagnéticos (Callaghan & McGill, 2001; Lee & Wong, 2002; Sprigle et al., 2002), de ultrasonidos (Hsiao & Keyserling, 1991), acelerómetros (Wong & Wong, 2008) y giróscopos (Lee et al., 2003). La ventaja de estos sensores sobre la fotogrametría es que, si están suficientemente miniaturizados, pueden emplearse para medir aun en sillas con respaldo, soslayando así el problema de ocultación de los marcadores, que es el mayor inconveniente de la fotogrametría (Chiari et al., 2005). Como contrapartida muchos de ellos (inclinómetros, giróscopos

pos, electrogoniómetros y montajes semejantes) sólo pueden dar información angular. Sin embargo, como se ha comentado en el caso de los estudios de fotogrametría, la mayoría de los estudios se centran precisamente en ese tipo de resultados, posiblemente por la importancia que generalmente se ha dado a la curvatura de la columna sobre otro tipo de variables biomecánicas, y la preponderancia de los modelos basados en articulaciones fijas, para los que únicamente es necesario determinar las rotaciones (véase la sección 2.2.2). De hecho, incluso los estudios citados con sensores electromagnéticos, que proporcionan datos tanto sobre su orientación como de su posición en el espacio, analizan únicamente la información relativa a las flexiones y giros de la columna.

En el estudio que se plantea en el presente trabajo las técnicas de fotogrametría resultan especialmente idóneas. El objetivo es obtener información cinemática del movimiento relativo entre dos segmentos del cuerpo, dado un movimiento «libre» con 6 gdl. Para ello es necesario obtener en cada instante datos precisos tanto de los cambios de posición como de orientación de los segmentos del cuerpo, pero como se ha comentado, la mayoría de sensores sólo proporcionan información parcial. Un sensor electromagnético en cada una de las partes del cuerpo proporcionaría la información necesaria. Sin embargo las variables cinemáticas que se desea estudiar son especialmente sensibles a los errores instrumentales (véase la sección 2.5.1.2), por lo que es conveniente tener información redundante además de precisa, y el problema de las interferencias cobra mayor importancia.

Por el contrario, la fotogrametría permite usar un número de marcadores tan alto como se esté dispuesto a asumir en términos de coste computacional, y cuya posición relativa es conocida en cada instante con la precisión del propio sistema de medida. En estudios de movimientos que revisten una gran complejidad los sistemas basados en imagen son los únicos que pueden capturar toda la información (Winter, 2009). La fotogrametría de hecho es considerada en términos generales una de las técnicas más idóneas (Chiari et al., 2005), contando con diversas ventajas frente a las demás (Ladin, 1995): la instrumentación presenta pocas restricciones mecánicas al movimiento, es generalmente poco invasiva, no es sensible al ruido electromagnético del entorno y no presenta problemas de deriva temporal de la medida. Además, el hecho de que el objeto de análisis sea un video permite una inspección visual directa de la medida, lo cual presenta una importante ventaja de cara al control de los experimentos: los resultados de las mediciones, aunque finalmente se traduzcan a variables matemáticas para su procesado, pueden ser observados, con lo cual es mucho más fácil detectar fallos o problemas, tanto en el desarrollo del experimento como en el procesado de las imágenes.

## 2.4. Principios del análisis cinemático

### 2.4.1. Desplazamientos finitos

Existen numerosos modelos matemáticos para analizar el movimiento de los cuerpos rígidos a partir de los datos obtenidos en experimentos con fotogrametría. Cappozzo et al. (2005) han realizado una revisión exhaustiva sobre la materia.

Los algoritmos más habituales son los que se basan en describir el movimiento como un desplazamiento finito respecto a una posición inicial, expresado mediante una matriz de rotación  $M$  ( $3 \times 3$ , ortogonal) y un vector de traslación  $\vec{s}$  ( $3 \times 1$ ). Cada una de estas entidades matemáticas representa un aspecto distinto del movimiento. La matriz caracteriza el cambio de orientación del cuerpo respecto a los ejes del sistema de coordenadas. El vector caracteriza la traslación solidaria al cuerpo de un punto arbitrario del espacio, y depende tanto del movimiento experimentado como del punto escogido. Si se toma como punto de referencia el origen del sistema de coordenadas ( $O$ ), la siguiente ecuación determina la traslación de cualquier otro punto del cuerpo, como resultado de aplicar el desplazamiento finito en cuestión:

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = M\vec{R}_1 + \vec{s}_o, \quad (2.1)$$

donde  $\vec{s}_o$  representa que el vector de traslación se ha definido para  $O$ , y  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$  son los radios desde  $O$  de la posición inicial y final, respectivamente, del punto escogido.

Utilizar el origen de coordenadas como punto de referencia es útil para la composición de desplazamientos, lo cual requiere utilizar una referencia común a todos los movimientos. Pero a efectos prácticos, para analizar el movimiento individual de un cuerpo resulta más conveniente tomar un punto conocido solidario al cuerpo. De ese modo, al conocer su posición en cada instante, se conoce también su traslación, con lo cual el parámetro  $\vec{s}$  queda inmediatamente determinado. A menudo se toma como punto de referencia el centro geométrico del conjunto de marcadores,  $G$ , cuyo radio  $\vec{R}_G$  se calcula como la media aritmética de las posiciones de los marcadores, y cuya traslación asociada ( $\vec{s}_G = \vec{R}_{G2} - \vec{R}_{G1}$ ) es también la media de las traslaciones individuales.

El uso de un punto de referencia solidario al cuerpo y conocido permite separar el problema de la traslación del de la rotación. En un primer paso se calculan las posiciones (y por tanto la traslación) del punto en cuestión, como se ha comentado, y luego se procede al cálculo de  $M$ . Para resolver este

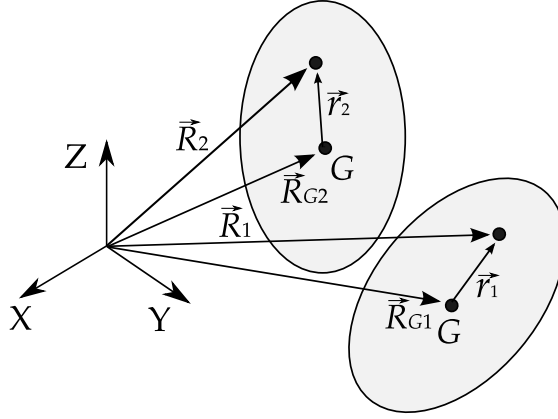


Figura 2.5: Posición de los puntos de un cuerpo en relación al origen de coordenadas y un punto de referencia fijo al cuerpo ( $G$ ).

segundo problema la posición de los puntos del cuerpo no se expresa con sus radios desde el origen de coordenadas, sino de forma relativa al punto de referencia escogido (figura 2.5). Por ejemplo, si se utiliza el centroide  $G$  el vector de posición relativa del punto es

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_G. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.1) expresada en función de  $\vec{r}$  permite prescindir del término de traslación:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) - (\vec{R}_{G2} - \vec{R}_{G1}) = M\vec{r}_1. \quad (2.3)$$

El cálculo de  $M$ , sin embargo, no es un problema tan trivial como el de la traslación. La ecuación (2.3) se puede resolver fácilmente usando la información de tres puntos no alineados (Beggs, 1966). Sin embargo, dicha aproximación produce resultados imprecisos en condiciones experimentales, en las que la medida de la posición de los puntos tiene un error asociado (Gupta & Chutakanonta, 1998). En tales casos es necesario utilizar información redundante, con un número de marcadores mayor, lo cual da lugar a un problema no lineal. La solución de este problema implica el uso de procesos de optimización numérica como los propuestos por Spoor & Veldpauw (1980), Angeles

(1986a), Veldpaus et al. (1988), Söderkvist & Wedin (1993), Challis (1995), Shifflett & Laub (1995), Gupta & Chutakanonta (1998) o Vithani & Gupta (2004).

Por otra parte, aunque la representación de los desplazamientos finitos (y la rotación en particular) a través de matrices es muy habitual en el campo de la biomecánica, existen muchas otras formas de representarlos, que se han desarrollado a lo largo de los dos últimos siglos en el campo de las máquinas y los mecanismos. Se puede encontrar una revisión histórica de las distintas formulaciones teóricas en Dai (2006). Las rotaciones tienen 3 gdl, por lo que las representaciones más clásicas se basan en vectores en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Una de las más populares consiste en los ángulos de Euler, aunque éstos dependen de la secuencia supuesta del movimiento y no son unívocos (Baker, 2003), y además no existe una estructura algebraica equivalente para representar la traslación, al contrario que en otras notaciones (Dai, 2006).

Otra representación en  $\mathbb{R}^3$  consiste en los parámetros de Rodrigues, que se basan en el teorema de Chasles, a saber: que cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido, tanto finito como infinitesimal, puede reproducirse en forma de una rotación alrededor de un eje en el espacio más una traslación a lo largo del mismo eje, lo que se conoce en la literatura como *screw* ('tornillo'). La fórmula de Rodrigues para un *screw* (Bottema & Roth, 1990) especifica que la traslación de un punto viene determinada por

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \vec{u} \times (\vec{R}_2 + \vec{R}_1 - 2\vec{H}) + d\vec{u}, \quad (2.4)$$

donde  $\phi$  es el ángulo de giro del *screw*,  $\vec{u}$  es el vector unitario que define la dirección del eje de rotación,  $d$  es la traslación del *screw* en esa dirección y el vector  $\vec{H}$  identifica un punto cualquiera del eje (véase la figura 2.6). Existen diversas fórmulas y algoritmos explícitos para transformar una matriz de rotación en los correspondientes parámetros de Rodrigues y viceversa. Se pueden encontrar, por ejemplo, en Kinzel et al. (1972), Spoor & Veldpaus (1980), Woltring (1994) o Chèze et al. (1998).

Si se está analizando sólo la rotación, por ejemplo cuando se trabaja con vectores de posición relativos a un punto fijo del cuerpo, la fórmula de Rodrigues se simplifica a

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \vec{u} \times (\vec{r}_2 + \vec{r}_1). \quad (2.5)$$

La tangente del «ángulo mitad»  $\phi/2$  que aparece en la fórmula de Rodrigues puede resultar un elemento poco intuitivo, aunque constituye un elemento esencial en la parametrización de las rotaciones y es la representación

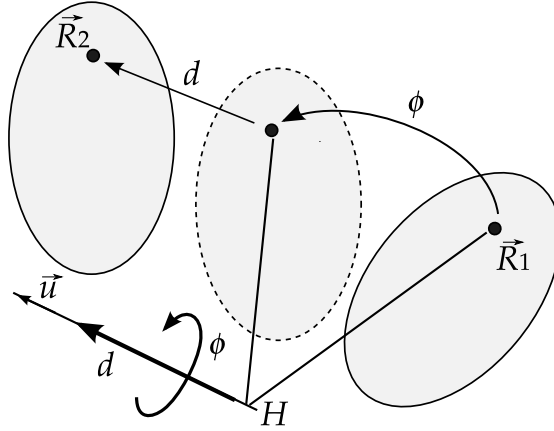


Figura 2.6: Desplazamiento finito en forma de *screw*: el punto  $\vec{R}_1$  pasa a la posición  $\vec{R}_2$  a través de un giro  $\phi$  en torno al eje paralelo a  $\vec{u}$  que pasa por  $\vec{H}$  más una traslación  $d$  paralela al mismo.

más elegante de la rotación pura (Dai, 2006). Asimismo, la presencia de la posición final ( $\vec{r}_2$ ) en ambos términos de la ecuación hace que su aplicación para reproducir rotaciones (una vez conocidos los parámetros de Rodrigues) no sea explícita, al contrario que (2.3). Para salvar estas complicaciones se suele utilizar una formulación alternativa de (2.5):

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \sin(\phi)\vec{u} \times \vec{r}_1 + (1 - \cos(\phi))\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}_1). \quad (2.6)$$

Existen diversas variaciones de los parámetros de Rodrigues, aunque en definitiva todas ellas expresan el mismo fenómeno. Por ejemplo el «vector de orientación» (*attitude vector*), paralelo a  $\vec{u}$  y cuyo módulo es el ángulo de giro  $\phi$  (Woltring, 1994). Tal ángulo de giro puede combinarse con un «paso» (*pitch*)  $p$  para determinar el desplazamiento  $d$  a lo largo del eje, de modo que  $d = p \cdot \phi$ ; de forma análoga se define el «pseudo-paso», *quasi-pitch*,  $q$ -*pitch* o *quatch* en relación al parámetro de Rodrigues (Hunt & Parkin, 1995):

$$q = \frac{(d/2)}{\tan(\phi/2)}. \quad (2.7)$$

También se han desarrollado notaciones más sofisticadas para los desplazamientos finitos, basadas en nuevos tipos de álgebra como los cuaterniones

de Hamilton (Ude, 1999; de Leo & Rotelli, 2003), los ángulos duales de Study (Keler, 2000) y combinaciones de ambos conceptos (Daniilidis, 1999), entre otras. En la revisión de Dai (2006) se puede encontrar una relación exhaustiva de las distintas formulaciones. Según la aplicación que se haga del análisis de movimientos, dichas notaciones pueden ofrecer ventajas, aunque las aplicaciones directas de los métodos más sencillos basados en la formulación Rodrigues son idénticas a las de otros métodos más modernos (Williams & Fyfe, 2010).

### 2.4.2. Desplazamientos infinitesimales

El análisis de los movimientos humanos no se limita a estudiar la configuración de las partes del cuerpo respecto a una postura de referencia, sino también cómo varía dicha configuración. En la teoría cinemática estos dos problemas se distinguen como el análisis de los *desplazamientos* y el análisis cinemático *instantáneo*, respectivamente (Bottema & Roth, 1990). En el campo de la biomecánica, donde predominan los estudios del primer tipo, es menos frecuente que se haga esa distinción teórica. En algunos casos se habla de *geometría cinemática* para referirse al análisis de los desplazamientos, y de *cinemática diferencial* en lugar de instantánea (Zatsiorsky, 1998). En el problema instantáneo o diferencial se estudian las derivadas temporales de los desplazamientos finitos, por lo que puede considerarse un caso particular de los mismos, en el que la magnitud del desplazamiento es infinitesimal.

La formulación habitual de este problema se basa en la ecuación vectorial del campo antisimétrico de velocidades (Annequin & Boutigny, 1973):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}, \quad (2.8)$$

donde  $\vec{v}_A, \vec{v}_B$  son las velocidades del cuerpo en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente,  $\vec{AB}$  es el vector que define la separación en el espacio entre  $A$  y  $B$ , y  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular del cuerpo. En términos de un *screw* infinitesimal ( $\phi \rightarrow 0$ ), cuyo eje de giro sea perpendicular al vector unitario  $\vec{u}$  y en el que la derivada del ángulo de giro sea  $\dot{\phi}$ ,

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{u}. \quad (2.9)$$

Estas fórmulas se pueden obtener como derivadas de las que definen los desplazamientos finitos. Por ejemplo, si (2.8) se reinterpreta con  $A$  como el origen de coordenadas ( $O$ ) y  $B$  como un punto conocido del cuerpo (siendo  $\vec{AB} = \vec{R}$ ), dicha fórmula es exactamente la derivada de la ecuación (2.1),



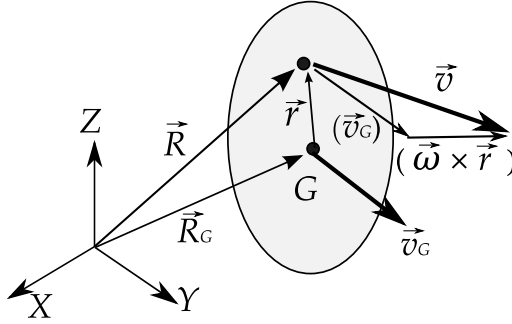


Figura 2.7: Relación entre velocidades de distintos puntos en un sólido

donde la velocidad en el origen  $\vec{v}_o$  se correspondería con el desplazamiento del origen  $\vec{s}_o$  y el producto vectorial  $\vec{\omega} \times \vec{R}$  derivaría de la multiplicación matricial  $\dot{\mathbf{M}}\vec{R}$  cuando el desplazamiento es infinitesimal ( $\vec{R}_1 \approx \vec{R}_2$ , y  $\mathbf{M}$  es la matriz identidad  $\mathbf{I}_3$ ). Esta relación entre el producto vectorial y el matricial se debe a que, bajo las condiciones descritas, al ser  $\mathbf{M}$  ortogonal ( $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}_3$ ) se cumple que  $\dot{\mathbf{M}} + (\dot{\mathbf{M}})^T = \mathbf{0}_3$ , es decir que la derivada de  $\mathbf{M}$  es una matriz antisimétrica:

$$\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

con lo que, tal como se ha comentado,  $\dot{\mathbf{M}}\vec{R} = \vec{\omega} \times \vec{R}$  para  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ .

Por otra parte, si como referencia se escoge un punto conocido del cuerpo (por ejemplo el centroide  $G$ ), la parte de traslación del análisis cinemático queda inmediatamente resuelta y se puede separar del problema de la rotación, como también ocurre en los desplazamientos finitos. En un primer paso se calcula la velocidad en el punto de referencia ( $\vec{v}_G$  si se utiliza el centroide), y luego se analiza la velocidad angular (figura 2.7):

$$\vec{v} - \vec{v}_G = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.11)$$

siendo  $\vec{r}$  el vector que identifica cualquier punto del cuerpo en relación con el centroide, como se define en (2.2).

La ecuación (2.11) equivale a las derivadas de las fórmulas que determinan la rotación en los desplazamientos finitos, (2.3) en notación matricial y

(2.5) con los parámetros de Rodrigues. En relación con la segunda, es inmediato observar que  $\vec{\omega}$  se corresponde con la derivada de  $2 \cdot \tan(\phi/2)\vec{u}$  para  $\phi = 0$  (cuando  $\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2$ ), lo cual coincide con la definición presentada en (2.9).

El problema cinemático instantáneo, hallar la velocidad angular del cuerpo y la velocidad lineal del punto escogido, se transforma bajo esta perspectiva en derivar los parámetros de rotación y traslación de los desplazamientos finitos. Esta aproximación se emplea a menudo en biomecánica (Woltring et al., 1994). Como se ha comentado anteriormente, aunque el análisis de las traslaciones es trivial, calcular las rotaciones implica la resolución de un problema no lineal, por lo que las complicaciones presentes en el análisis de desplazamientos finitos se «heredan» en el caso infinitesimal si se aborda con la perspectiva comentada. Sin embargo, las restricciones no lineales (condiciones de ortogonalidad y términos trigonométricos) no se encuentran presentes en las fórmulas de los desplazamientos infinitesimales, por lo que el análisis de velocidades en realidad es un problema intrínsecamente lineal. Así pues, también existen técnicas explícitas para calcular los parámetros cinemáticos independientemente del problema de la posición, que no requieren algoritmos de optimización aunque estén sobredeterminados (Vithani & Gupta, 2004; Page et al., 2007).

En condiciones experimentales, el escollo principal es el cálculo de las derivadas de las posiciones de los marcadores. Inevitablemente, las medidas experimentales de la posición llevan asociadas cierto error que se amplifica al derivar, y resulta necesario minimizar. Esta cuestión y las posibles técnicas para resolverla se abordan en la sección 2.5.

### 2.4.3. Ejes articulares. Aplicaciones biomecánicas

Como ya se ha comentado, según el teorema de Chasles todo desplazamiento, finito o infinitesimal, puede describirse como un *screw* alrededor y a lo largo de un eje definido en el espacio. Este eje recibe diversos nombres según la aplicación. En movimientos planos se conoce como eje o centro «de rotación», mientras que en el caso más general, que implica un posible desplazamiento a lo largo del eje, se le llama «de tornillo» o «helicoidal» (*screw* o *helical axis*). Todo desplazamiento finito entre dos posiciones de un cuerpo en el espacio lleva asociado un «eje finito helicoidal» (*Finite Helical Axis* o FHA). Su posición se puede definir a partir de los parámetros de Rodrigues (véase la ecuación 2.4). Por ejemplo, si  $\Delta\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$  define la traslación del punto  $\vec{R}_1$  a  $\vec{R}_2$ , el radio  $\vec{R}_1\vec{H}$  desde  $\vec{R}_1$  al FHA queda determinado del siguiente modo (Chèze et al., 1998):

$$\overrightarrow{R_1 H} = \frac{\Delta \vec{R}}{2} - \frac{d\vec{u}}{2} + \frac{\vec{u} \times \Delta \vec{R}}{2 \tan(\phi/2)}. \quad (2.12)$$

Sin embargo, esta abstracción matemática sólo se corresponde con una realidad física cuando el movimiento se realiza sólo alrededor de un eje fijo. De lo contrario el FHA representa un eje teórico en torno al cual se podría dar un movimiento que desplazase el cuerpo entre las posiciones inicial y final observadas, aunque el movimiento real no coincidiría necesariamente con él. Ahora bien, para dos posiciones infinitesimalmente adyacentes sí existe un eje de movimiento *real*, que es el límite del FHA cuando la rotación tiende a cero, y se distingue como «eje instantáneo helicoidal» (*Instantaneous Helical Axis* o IHA, cfr. Mansour et al., 2004).

Dado un campo vectorial que cumpla la condición de antisimetría definida para las velocidades de un cuerpo rígido en (2.8), existe siempre un lugar geométrico en el que el valor de este campo es mínimo. En el caso de los desplazamientos infinitesimales, este lugar geométrico es el mencionado IHA, donde la velocidad del cuerpo es mínima. Siempre que haya una velocidad angular no nula, el IHA converge en una línea recta, la velocidad del cuerpo en este eje es paralela al mismo, y las velocidades en todos los demás puntos «giran» en torno a él. El vector radio  $\overrightarrow{OH}$  desde un punto  $O$  hasta el eje central del campo (el IHA) viene definido por la siguiente fórmula (Annequin & Boutigny, 1973):

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_o}{|\vec{\omega}|^2}. \quad (2.13)$$

La ubicación de los ejes del movimiento es un dato muy importante en la teoría de máquinas y mecanismos, campo en el que se han desarrollado distintas técnicas para calcularla (Angeles, 1986b; Sommer III, 1992; Shiflett & Laub, 1995; Vithani & Gupta, 2004). Por analogía, la posición y el desplazamiento de los ejes en los que se articula el movimiento también se utilizan frecuentemente en biomecánica, como una forma intuitiva y práctica de caracterizar las articulaciones del cuerpo humano (Kinzel et al., 1972; Kinzel & Gutkowski, 1983). Pero a pesar de tales analogías, las articulaciones de las máquinas y las del cuerpo humano son esencialmente diferentes. Las primeras son habitualmente lo que se conoce como «pares inferiores», formados por superficies en contacto continuo que restringen el movimiento relativo entre cada pareja de piezas. Las articulaciones de los modelos biomecánicos a menudo se simplifican a modo de rótulas fijas, como se ha comentado en 2.2. Sin embargo, en realidad rara vez responden a ese modelo. En la mayoría

de casos el movimiento relativo está restringido por los ligamentos y otros cuerpos flexibles entre las estructuras óseas, por lo que la posición del eje no obedece a una característica geométrica tan clara como en las barras de un mecanismo.

Aun así, la localización de los ejes cinemáticos tiene un lugar relevante en muchos estudios biomecánicos. El lugar ocupado por los ejes de los movimientos humanos tiene que ver con la estabilidad de los segmentos anatómicos (Hafer et al., 1992) y determina cómo actúan las fuerzas musculares (Percy & Bogduk, 1988). Además la forma característica en la que se mueven los miembros del cuerpo depende esencialmente de por dónde pasan dichos ejes, de tal modo que localizaciones anormales de los mismos pueden estar asociadas a lesiones (White III & Panjabi, 1990).

Debido a estas razones existen múltiples estudios de movimientos humanos que abordan el análisis de los ejes. Una de las articulaciones más estudiadas desde este punto de vista es la cadera. Al contrario que la mayoría de las articulaciones humanas, la cadera se asemeja excepcionalmente a una rótula esférica. Por lo tanto existe un punto en el que convergen los distintos IHA que pueden tener lugar durante el movimiento. A este punto se le da el nombre de «centro de la articulación de la cadera» (*Hip Joint Center* o HJC). Hay numerosos modelos predictivos para determinar la posición de este punto en relación a las marcas anatómicas (véanse, por ejemplo, los diez métodos revisados por Kirkwood et al., 1999), pero son menos precisos que los métodos funcionales basados en analizar el movimiento observado de la pelvis y el fémur (Kang, 2004; Piazza et al., 2004). Se pueden encontrar otros análisis con métodos funcionales en Bush & Gutowski (2003), Camomilla et al. (2006) o Leardini et al. (1999a), por ejemplo. Métodos semejantes también se han empleado para controlar el centro de rotación de rodillas implantadas (Karlsson et al., 1997; Gerber et al., 2006), aunque en condiciones normales los giros de la rodilla tienen una naturaleza más compleja (Öberg, 1983).

La aproximación basada en centros de rotación o ejes finitos también se aplica por simplificación a articulaciones como la muñeca (Woltring et al., 1985), los dedos de la mano (Zhang et al., 2003), el tobillo (Demarais et al., 2002) o el miembro superior en general (Nussbaum & Zhang, 2000). En relación con el movimiento del tronco, también abundan los estudios radiográficos o *in vitro* (como se ha explicado en la sección 2.3.2) que analizan los ejes de rotación entre pares de vértebras del cuello (Amevo et al., 1991; Kaneoka et al., 1999) o la zona lumbar (Percy & Bogduk, 1988; Hafer et al., 1992; Zhang & Xiong, 2003; Kettler et al., 2004; McCane et al., 2006). También se encuentra, de forma excepcional, algún estudio que evalúa los centros de ro-

tación intervertebrales mediante fotogrametría convencional (Cerveri et al., 2004).

El eje instantáneo se ha analizado en rodillas no implantadas (Muller, 1993; Wolf & Degani, 2007), en el tobillo (Leardini et al., 1999b), el hombro (Dempster, 1955) y la muñeca (Patterson et al., 1998), así como en el cuello (Woltring et al., 1994). También se ha analizado en la columna vertebral completa (Wachowski et al., 2009) o específicamente en la zona lumbar (Mansour et al., 2004; Rousseau et al., 2006), pero estos estudios parten de radiografías o muestras *in vitro*, con las limitaciones que eso conlleva.

A pesar de la variedad de estudios citados, todavía hay bastante que avanzar en el estudio de los ejes articulares en el campo de la biomecánica. A la variabilidad intrínseca que existe en los movimientos naturales, y las limitaciones comentadas en relación con los estudios del tronco, hay que añadir que los errores de medida y de derivación se magnifican de manera exponencial al realizar los cálculos especificados en (2.12) o (2.13). Esto puede llevar a resultados erráticos tanto en el cálculo de ejes finitos (Woltring et al., 1985; Crisco et al., 1994) como sobre todo en los infinitesimales (Woltring et al., 1994). Además, la nomenclatura en biomecánica no está exenta de ambigüedades. El término «instantáneo» se utiliza a menudo para referirse a los ejes del desplazamiento *finito* de un cuerpo en una secuencia de posiciones distintas (respecto a otra de referencia), enfatizándose así que el eje se calcula específicamente para la posición observada en cada instante; este uso se puede observar, por ejemplo, en Percy & Bogduk (1988), Amevo et al. (1991), Crisco et al. (1994), Bogduk et al. (1995) o Demarais et al. (2002). Sin embargo, este uso fue criticado como «inapropiado» por Woltring et al. (1994), debido a su confusión con el IHA asociado a los desplazamientos infinitesimales, tal como se ha presentado anteriormente.

#### 2.4.4. Sistemas de referencia anatómicos

##### 2.4.4.1. Sistemas de coordenadas normalizados

Para caracterizar la cinemática del cuerpo humano, especialmente si se estudia la posición de los ejes articulares, es necesario definir sistemas de referencia locales ligados a puntos conocidos del cuerpo. Estos sistemas se suelen definir a partir de marcadores ubicados sobre puntos característicos palpables de la anatomía (*anatomical landmarks*), normalmente prominencias óseas; pero también se pueden definir a partir de información morfológica sobre las partes del cuerpos, bien obtenida mediante fotogrametría, bien con otra técnica, como escáneres de cuerpo (Cappozzo et al., 2005). La obtención

de algunos puntos, como los centros de rotación de las articulaciones, es en sí misma el objeto de algunos análisis de movimientos, como se ha comentado en la sección 2.4.3.

Las referencias anatómicas se definen específicamente para cumplir los requisitos de repetibilidad intra- e inter-sujetos, de modo que los resultados (ángulos, ubicación de las articulaciones, etc.) se puedan dar en sistemas de referencia consistentes y comparables entre estudios. La necesidad de compartir y contrastar resultados de estudios ha dado lugar a procedimientos y prácticas comunes, que han cristalizado en recomendaciones como la de la International Society of Biomechanics (ISB) para la definición de sistemas de referencias anatómicas, usada con modelos basados en pares inferiores (Wu et al., 2002, 2005).

Esta recomendación se basa en la definición de sendos sistemas de coordenadas cartesianas (CCS, por *Cartesian Coordinate Systems*) para cada uno de los dos segmentos adyacentes de una articulación, y otro sistema de coordenadas de la articulación (JCS, por *Joint Coordinate System*), en el cual se expresan los parámetros del movimiento. Los ejes de los CCS se definen por marcas anatómicas palpables o por rayos X; el JCS se define con un origen fijo entre los dos segmentos en el punto que se considere el centro de rotación, más dos ejes solidarios a cada uno de los segmentos adyacentes, estando el tercer eje «flotante» determinado por la condición de ortogonalidad (figura 2.8).

Las mayores ventajas de este criterio normalizado para presentar los resultados se dan en los estudios dirigidos al ámbito médico, dado que los ejes de los JCS se aproximan a los planos frontal, transversal y sagital del cuerpo (Cappozzo et al., 2005), y es más fácil comunicar las rotaciones en lenguaje clínico cuando se usan ejes solidarios a los segmentos corporales (Wu et al., 2005). Entre sus inconvenientes se encuentra que estos sistemas están definidos para expresar rotaciones de los segmentos en ángulos de Euler o Cardan, que presentan los ya comentados problemas de ambigüedad (Baker, 2003), y que si se usan modelos en los que los segmentos no se articulan en puntos fijos, la definición y la interpretación de los JCS pierde su eficacia.

#### 2.4.4.2. Sistemas de referencia del tronco

Así como el análisis de movimientos del miembro inferior (y la marcha en particular) es objeto de una larga y abundante producción científica, ya se ha visto que el movimiento del tronco, y más concretamente el del tronco en la postura sedente, es un terreno sólo parcialmente explotado. Por lo tanto no existe a estas alturas un uso normalizado de sistemas de referencia que cubra las necesidades generales de este campo de investigación.

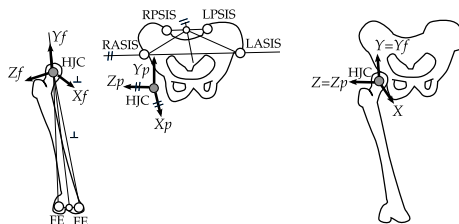


Figura 2.8: Definición de los sistemas de coordenadas para la cadera, según Wu et al. (2002). El CCS de la pelvis queda determinado por las rectas y planos que forman los marcadores de las crestas ilíacas superiores anteriores (ASIS) y posteriores (PSIS), y tiene su origen el centro de articulación de la cadera (HJC). El CCS del fémur queda asimismo determinado por las rectas y planos entre el HJC y los epicóndilos femorales (FE), y tiene su origen en el HJC. El JCS tiene el mismo origen que los CCS de cada segmento, su eje Z es el del CCS de la pelvis, su eje Y es el del CCS del fémur, y su eje X es el eje «flotante».

La recomendación de la ISB para los sistemas de referencia de la columna proporciona definiciones al nivel de cada vértebra (Wu et al., 2002), por lo que no resulta práctica para representar el tronco de forma general. En una reciente revisión Leardini et al. (2009) observaron que los sistemas de coordenadas anatómicos y técnicos empleados en los estudios del tronco son muy dispares, y propusieron una serie de puntos anatómicos de referencia para cada parte (figura 2.9):

- C7 para la zona cervical.
- Acrómions derecho e izquierdo (RA, LA, respectivamente) para los hombros.
- T2, T8 y T10 para el tórax por la parte posterior, más la escotadura supraesternal y la apófisis xifoides (extremos superior e inferior del esternón, identificados respectivamente como IJ y PX) para la parte anterior.
- L5 para la zona lumbar.
- Crestas ilíacas anteriores (RASIS, LASIS) y posteriores (RPSIS, LPSIS) más la segunda vértebra sacral (SACRUM) para la pelvis.

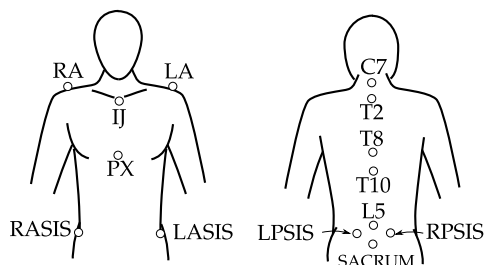


Figura 2.9: Puntos de anatómicos de referencia para el tronco, según la propuesta de Leardini et al. (2009)

Un aspecto importante para que un sistema de referencia sea útil es que la localización de los puntos anatómicos que lo definen sea fiable y repetible. Algunos de los puntos citados son fáciles de determinar por palpación. Para la localización de las vértebras más inciertas son de utilidad las proporciones métricas publicadas por Vergara et al. (2006).

## 2.5. Errores en fotogrametría

Como toda técnica, la fotogrametría está sujeta a un error de medida cuyo control es imprescindible para asegurar la validez de los resultados. El efecto de estos errores es una desviación entre las variables cinemáticas obtenidas en el análisis y las características reales del movimiento que se desea medir. El movimiento relativo resultante se puede clasificar en función de su naturaleza (Cappozzo et al., 1997):

- Movimientos aparentes, debidos a defectos de los medios instrumentales por los cuales las coordenadas tridimensionales reconstruidas no se corresponden con las de los puntos observados.
- Movimientos reales, debidos a que algunos de los puntos observados (normalmente puntos superficiales sobre la piel del sujeto) son distintos de aquéllos que realmente se desea medir (muy a menudo puntos internos, pertenecientes a las estructuras óseas).

En los siguientes apartados se comentan las fuentes de estos errores, su efecto sobre los resultados y cómo se pueden controlar.



## 2.5.1. Errores instrumentales

### 2.5.1.1. Magnitud y clasificación de los errores instrumentales

El primer tipo de error comentado, que da lugar a movimientos aparentes, tiene como origen las limitaciones de la técnica instrumental. Una característica de estos errores es que habitualmente se encuentran a escala con el tamaño del espacio que se está midiendo: mientras más pequeño es el espacio observado por las cámaras, las fuentes de error instrumental pueden tener efectos de menor magnitud, y por lo tanto el error absoluto también es más pequeño. Por esta razón, al definir el error instrumental de fotogrametría es conveniente hacer también referencia al tamaño del espacio de trabajo, o expresarlo en términos relativos. Un criterio habitual es formular el error como una fracción de la diagonal del espacio de trabajo, asumiendo que este espacio sea un prisma de base rectangular (Pedotti & Ferrigno, 1995).

Chiari et al. (2005) revisaron una serie de estudios sobre la magnitud del error instrumental en diversos sistemas de fotogrametría. Según esta revisión, la magnitud típica del error atribuido por los fabricantes es del orden de 1:3000 (o lo que es lo mismo, aproximadamente 0,33 mm para un volumen de 1 m de diagonal). Sin embargo, en los experimentos de validación de los errores instrumentales, realizados sobre volúmenes de 900 mm de diagonal, se obtuvieron errores cuya media variaba entre los 0,48 y los 11,6 mm (aproximadamente de 1:1900 a 1:80), y con una desviación típica desde 0,53 mm hasta 4,2 mm (de 1:1700 a 1:200). Dicha revisión también señala que en los sistemas de análisis de movimiento configurados para grabar en volúmenes reducidos se pueden medir desplazamientos muy pequeños (del orden de 0,1 mm) con gran exactitud.

En cuanto al control de los errores instrumentales, la calidad de un sistema de fotogrametría se define en términos de «precisión» (*precision*) y «exactitud» (*accuracy*) de la medida (Allard et al., 1995; Pedotti & Ferrigno, 1995). La precisión es la repetibilidad del sistema la hora de tomar varias veces una misma medida. El error asociado a la falta de precisión es de tipo aleatorio, con media nula y no predecible; se suele cuantificar mediante parámetros estadísticos como la desviación típica o el valor eficaz (Allard et al., 1995). Este error aleatorio puede tener lugar por el ruido electrónico en la generación de las imágenes, la «fluctuación» de los marcadores (la imprecisión con la que los marcadores se convierten en puntos de la imagen), el proceso de digitalización que transforma la imagen de los marcadores en valores numéricos de su posición, o la deformación en la imagen del marcador debida al efecto de

velocidad, el ocultamiento parcial, o la superposición con otros marcadores o brillos accidentales (Chiari et al., 2005).

La exactitud es la fidelidad con la que la medida proporcionada por el sistema reproduce la posición real de los puntos observados, al margen del error aleatorio señalado arriba. El error asociado a la falta de exactitud es de tipo sistemático, dado que se repite para distintas mediciones del mismo elemento. Estos errores sistemáticos se deben a defectos de la calibración, bien por el uso de un modelo que no represente fielmente el comportamiento de las cámaras, o por una estimación de los parámetros de calibración inadecuada. Su magnitud depende del tamaño del campo de medida y de la posición del punto medido (Chiari et al., 2005).

### 2.5.1.2. Errores aleatorios

Como se ha comentado anteriormente, el valor de los errores aleatorios no es predecible, pero es posible estimar su orden de magnitud mediante parámetros estadísticos. Este tipo de error en la posición de un marcador se puede describir normalmente como una variable aleatoria, que sigue una distribución estadística centrada en cero, y con una dispersión determinada.

Esta dispersión dependerá de diversos factores, incluyendo las características del marcador y su posición. Los marcadores cuya proyección en las imágenes de las cámaras ocupa un mayor espacio, por ejemplo, darán lugar a una menor fluctuación en la determinación de su centro cuando el área del marcador se analiza por umbralización (Pedotti & Ferrigno, 1995). Por lo tanto, mientras más grandes sean los marcadores y más cerca estén de las cámaras, si se encuentran correctamente enfocados la magnitud esperada del error aleatorio en su posición será menor para las mismas condiciones de iluminación y visibilidad.

Por otra parte, en general el error aleatorio será anisótropo. Es decir, que en cada dirección de los ejes del sistema de referencia ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), la magnitud esperada del error aleatorio en la posición de un marcador será distinta. La forma de describir esta naturaleza del error matemáticamente es mediante una matriz de covarianzas (Härdle & Simar, 2007; véase también una explicación más exhaustiva en el apéndice A.3):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{xz}^2 & \sigma_{yz}^2 & \sigma_{zz}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

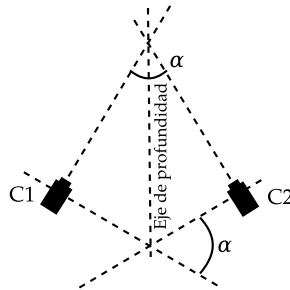


Figura 2.10: Sistema de dos cámaras (C1 y C2) visto en el plano paralelo a los dos ejes focales. Dichas líneas se cruzan formando el llamado ángulo de vergencia ( $\alpha$ ). El eje de profundidad es la recta que forma un ángulo mínimo ( $\alpha/2$ ) con cada uno de los ejes focales de las cámaras.

Los elementos en la diagonal de  $\Sigma$  son las varianzas del error en las direcciones de los ejes del sistema de referencia. Los otros elementos son las covarianzas, que cuantifican la dependencia que hay entre los errores en dos direcciones. Si el error actúa de forma simétrica e independiente en las distintas direcciones del espacio la matriz de covarianzas puede reducirse a un único parámetro escalar. Estas circunstancias no son las más habituales, aunque son asumidas a menudo por simplificación.

La anisotropía del error aleatorio se ha estudiado ampliamente para los sistemas con dos cámaras, en los que hay un eje de «profundidad» que forma un ángulo mínimo con los ejes focales de las dos cámaras. En estos sistemas el error en la dirección de este eje (error de profundidad) es típicamente mayor que en las otras dos (figura 2.10)

El error de profundidad se reduce al aumentar el ángulo de vergencia, alcanzándose un error mínimo para una configuración de  $90^\circ$ , aunque dicha configuración puede ofrecer problemas de visibilidad simultánea de los marcadores y un campo de visión limitado (Pedotti & Ferrigno, 1995), y también hay otros aspectos que afectan al error de profundidad como la resolución de las cámaras o la longitud focal (Rivera-Rios et al., 2005). No existe, por lo tanto, una configuración óptima de las cámaras en términos generales (Sahabi & Basu, 1996). No obstante, un criterio recomendado consiste en situar las cámaras a  $60^\circ$ , aunque una vergencia de  $30^\circ$  puede ser suficiente para obtener una buena tasa de error (Thornton et al., 1998).

Los errores de naturaleza aleatoria se amplifican considerablemente al calcular las derivadas de las posiciones, lo cual haría inviable cualquier análisis

sis de velocidades. Afortunadamente, la misma naturaleza aleatoria permite realizar un análisis estadístico sobre la información registrada y estimar las trayectorias más verosímiles de los marcadores, asumiendo ciertas hipótesis sobre la forma de la trayectoria real o las características del error. Existen numerosos métodos de filtrado o suavizado de funciones dirigidos a eliminar errores aleatorios, algunos de los más populares revisados por Woltring (1995). Las metodologías para el análisis funcional de datos (Ramsay & Silverman, 1997) también han proporcionado técnicas para definir trayectorias y sus derivadas a partir de datos con ruido aleatorio.

En biomecánica suelen emplearse los llamados «métodos no paramétricos» de suavizado. Reciben este nombre en oposición a los métodos paramétricos, que asumen una forma predefinida de la función objetivo en todo el rango de medida (un polinomio de grado  $n$ , una senoide, etc.), determinada por una serie de coeficientes o parámetros. Los métodos paramétricos únicamente son útiles para problemas mecánicos muy concretos; los movimientos humanos, por el contrario, siguen patrones que no se pueden comparar a una función sencilla. Por lo tanto en este campo se usan técnicas de análisis que no presuponen una estructura definida en el rango de medida completo.

Los métodos más usados son los basados en filtros paso-bajo, series de Fourier, bases de *splines* y polinomios. Los filtros y las series de Fourier son técnicas derivadas del tratamiento de señales. Analizan las variables en el dominio frecuencial, tratando las trayectorias como una suma de infinitas funciones periódicas de distinta frecuencia. Son métodos sencillos para eliminar el ruido de las señales, que asumen que el error aleatorio está enteramente constituido por las funciones de más alta frecuencia, ya que éste varía de forma indefinida entre fotograma y fotograma, y que el movimiento humano queda comprendido por las funciones de baja frecuencia.

Sin embargo estos procedimientos fueron inventados para señales de naturaleza periódica, lo cual no es una hipótesis realista en general (Chiari et al., 2005): por ejemplo, en biomecánica y especialmente en movimiento deportivo, hay cambios bruscos en el contenido en frecuencia de las señales cinemáticas, debido a la transición entre componentes de baja y alta frecuencia a lo largo del tiempo. En estos casos la selección de una frecuencia de corte no puede proporcionar una estimación insesgada de las trayectorias, y especialmente de sus derivadas, pudiéndose dar importantes «fenómenos de Gibb», es decir falsas oscilaciones a lo largo del registro (Woltring, 1992).

Entre las alternativas para evitar este problema se encuentran los métodos que utilizan el dominio temporal (Giakas et al., 2000): realizan un filtrado adaptativo en los dominios del tiempo y de la frecuencia, y posteriormente calculan las derivadas de la señal filtrada por diferencias finitas. El inconveniente

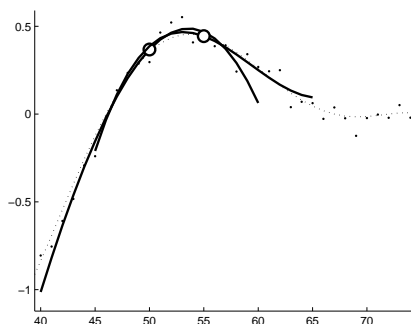


Figura 2.11: Ejemplo de regresión polinómica local. La línea discontinua es una función a partir de la cual se han generado las observaciones (puntos), introduciendo un error aleatorio de media nula. Las dos líneas continuas representan los polinomios de tercer grado que estiman el comportamiento de la función generadora, alrededor de los puntos  $x = 50$  y  $x = 55$ . Los círculos son los valores de dichos polinomios en los puntos correspondientes. Se puede observar que, aunque los polinomios se desvían de la función original en los puntos alejados, proporcionan una buena aproximación local al comportamiento de la misma.

niente de algunos de estos métodos, como la descomposición en wavelets o la función Wigner, es su complejidad para aplicarlos de forma automatizada. Una alternativa que soluciona este problema son las técnicas basadas en el análisis singular del espectro (Alonso et al., 2005). Este método descompone la señal original en una serie de componentes independientes con peso decreciente, y aísla de forma automática aquellas que se corresponden con el ruido.

Otra técnica destacable es la regresión local polinómica (Fan & Gibels, 1996), que se aplica enteramente en el dominio temporal. Esta técnica consiste en calcular, para cada uno de los instantes registrados, un polinomio de grado  $n$  que se ajuste a los datos de su entorno. El ajuste consiste en una regresión lineal por mínimos cuadrados, en la que el valor de los residuos se pondera con un peso que va disminuyendo según el instante al que pertenece el residuo se aleja del instante para el que se hace la regresión (figura 2.11).

La regresión polinómica local presenta una serie de puntos fuertes (Cleveland & Loader, 1996): se adapta bien a los problemas de desviación en los puntos del contorno y en las regiones con mucha curvatura, es fácil de entender, interpretar y programar para procesos de cálculo rápidos, su simplicidad

permite definir variaciones del método para trabajar con modelos muy distintos, el cálculo de las derivadas es directo (a partir de los coeficientes de los polinomios para cada punto), no requiere las condiciones de suavidad y regularidad de otros métodos, y la estimación tiene una respuesta lineal.

### 2.5.1.3. Errores sistemáticos y calibración de las cámaras

Los errores instrumentales de tipo sistemático tienen su origen principalmente en los defectos de la calibración. La fotogrametría se basa en las relaciones geométricas que existen entre la ubicación de un punto en el espacio tridimensional ( $\vec{p} = (x, y, z)^T$ ) y sus proyecciones bidimensionales en las imágenes de las cámaras ( $\vec{p}'_c = (u_c, v_c)^T$ ). En términos generales estas relaciones se pueden expresar mediante una serie de ecuaciones:

$$\vec{p}'_c = g(\vec{p}, \vec{\kappa}_c, \vec{\zeta}_c), \quad (2.15)$$

donde  $\vec{\kappa}_c$  representa una serie de parámetros intrínsecos de cada cámara (distancia focal, punto de la imagen en donde se proyecta el centro óptico, características de la lente...), y  $\vec{\zeta}_c$  son unos parámetros extrínsecos (con 6 gdl) que definen la relación en el espacio entre el sistema de coordenadas en el que se define  $\vec{p}$  y el sistema de coordenadas de la imagen en el que se define  $\vec{p}'_c$ . Si la forma de (2.15) es conocida, con los datos de las imágenes se puede reconstruir la posición que ocupan en el espacio los puntos vistos por las cámaras (figura 2.12).

Una calibración ideal implicaría definir un modelo matemático de la función  $g$  que describiese de forma perfecta el proceso con el que la luz reflejada se proyecta en las imágenes, y obtener con absoluta exactitud los valores de los parámetros  $\vec{\kappa}_c$  y  $\vec{\zeta}_c$ . Existe un modelo de proyección cónica generalmente válido para las cámaras estenopeicas (*pin-hole cameras*), cuya formulación se puede encontrar por ejemplo en Gruen (1997) o Pedotti & Ferrigno (1995). Pero a menudo no se utiliza exactamente ese modelo matemático, sino la variación del mismo que se define en la técnica DLT (*Direct Linear Transformation*) expuesta por Abdel-Aziz & Karara (1971). La DLT expresa la ley de proyección cónica en forma de un problema lineal cuya solución mínimo-cuadrática se calcula de forma explícita, lo cual es la razón de la popularidad de esta técnica. Ahora bien, este método introduce un grado de libertad ficticio, de modo que el modelo se ve alterado. Por otra parte, debido a las imperfecciones o defectos de alineación en las lentes, en la práctica puede aparecer un efecto de distorsión en la imagen respecto al mencionado modelo proyectivo. Este problema se suele abordar corrigiendo las ecuaciones de la proyección

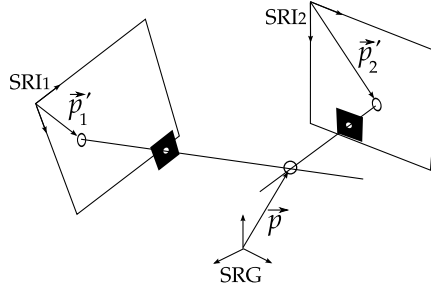


Figura 2.12: Medida tridimensional con dos cámaras. En la imagen de cada cámara hay un punto proyectado ( $\vec{p}'_1$  y  $\vec{p}'_2$ , sobre los sistemas de referencia SRI<sub>1</sub> y SRI<sub>2</sub>, respectivamente). El modelo proyectivo define, en el sistema de referencia global (SRG), una recta que pasa por cada punto y el foco de la correspondiente cámara (representados por los orificios de los rectángulos negros). El punto en el SRG más cercano a ambas rectas es el punto  $\vec{p}$  reconstruido en 3D. En un caso ideal, las dos rectas han de cortarse en el punto que ha creado las proyecciones.

cónica con un modelo complementario de la distorsión. Este modelo toma la forma de unas ecuaciones polinómicas (Ahmed & Farag, 2005), que proporcionan una aproximación al modo en que la luz se refracta desviándose de la proyección cónica. Pero el efecto de la distorsión puede no ajustarse exactamente a las ecuaciones empleadas, lo cual ya introduce una fuente de error en el modelo.

Sin embargo la mayor fuente de error en la calibración se debe al cálculo de los parámetros de las cámaras. Su definición correcta requiere procedimientos de optimización no lineal, con una buena solución inicial y una distribución cuidadosa de las vistas usadas para la calibración, pues de otro modo es fácil llegar a soluciones incorrectas (Chiari et al., 2005). Uno de los métodos clásicos es el de «ajuste en bloque» (*bundle adjustment*) (Allard et al., 1995). Actualmente son más habituales las técnicas de autocalibración como el SMAC (Woltring, 1980) o el método de Zhang (2000), que utilizan imágenes en movimiento de un patrón rígido de puntos, cuadros u otras figuras.

Por otra parte, cualquiera que sea la técnica empleada, las imágenes que se utilizan para calcular los parámetros de calibración se encuentran afectadas por un nivel de ruido inevitable, que también afecta a los resultados. Koppapapu & Corke (2004) observaron que este ruido influye de forma especialmente importante en los parámetros extrínsecos de las cámaras, sobre todo

en la orientación de las cámaras, así como en la proyección del punto focal en las imágenes y en el factor de escala que define el tamaño de los píxeles.

Los errores a causa de la calibración provocan que las ecuaciones formuladas en (2.15) estén determinadas incorrectamente. Como consecuencia, la función inversa que reconstruye la posición tridimensional de un punto a partir de sus imágenes también incorporará un error, que dependerá del punto en cuestión. Si  $\vec{p}_r$  define la posición reconstruida por fotogrametría del punto cuya coordenadas reales son  $\vec{p}$ , se tendrá que

$$\vec{p}_r = \vec{p} + \vec{\varepsilon}(\vec{p}). \quad (2.16)$$

El error por calibración será por lo tanto una función vectorial definida en el espacio calibrado, del tipo  $\vec{\varepsilon}(\vec{p})$ . La forma de esta función depende de tantos factores como la calibración misma, pero generalmente encontrará los valores más pequeños en los puntos del espacio cuyas proyecciones se encuentren centradas en las imágenes de las cámaras (donde la distorsión es mínima), y en el entorno de los puntos utilizados para calibrar las cámaras. Wood & Marshall (1986) encontraron que fuera del espacio determinado por los puntos de control, el error por calibración utilizando la técnica DLT es entre un 50 % y un 100 % mayor que dentro de dicho espacio.

Existen distintas técnicas dirigidas a comprobar la magnitud de los errores de calibración, algunas de las cuales han sido revisadas por Chiari et al. (2005). Estas técnicas graban las posiciones de marcadores en objetos rígidos que desplazan por del espacio calibrado, y comprueban en qué medida varían las distancias entre los marcadores a lo largo del recorrido. Los datos resultantes de estas pruebas también pueden utilizarse para corregir las calibraciones mediante las técnicas de autocalibración.

### 2.5.2. Errores de medida

Los resultados de un estudio pueden verse alterados, al margen de los errores instrumentales, por la existencia de una interposición entre los marcadores y los puntos que realmente se pretende identificar con ellos. En este caso el problema consiste en que se está midiendo un movimiento real, pero distinto del que se desea analizar. Estos errores de observación pueden clasificarse en dos categorías:

- Artefactos de movimiento, debidos a que el material interpuesto entre el elemento observado y el que se desea medir se deforma y se desliza. Estos artefactos se dan a menudo a causa de los tejidos blandos del



cuerpo humano (piel y tejidos internos), cuando se desea medir el movimiento de un hueso a partir de marcadores superficiales.

- Desplazamientos de los sistemas de referencia, debidos a la determinación incorrecta de las marcas anatómicas que los definen.

Además, ambos tipos de errores tienen consecuencias a la hora de localizar los ejes articulares del cuerpo. A continuación se comentarán las causas y efectos de estos errores, y las técnicas empleadas para reducirlos.

### 2.5.2.1. Artefactos por tejidos blandos

A los artefactos por el movimiento de los tejidos blandos se les atribuye ser la limitación más importante para avanzar en el análisis de los movimientos humanos (Andriacchi & Alexander, 2000). Por más que se mejore la precisión y la exactitud con la que se mide la posición de los puntos de una imagen, si existe un movimiento relativo incontrolado entre dichos puntos y el objeto que se desea estudiar, el error en la medida será siempre por lo menos de la magnitud de dicho movimiento.

Este artefacto tiene dos componentes: un deslizamiento en bloque de todo el conjunto de marcadores superficiales respecto al hueso o la estructura interna que se quiere medir, y una deformación de la superficie sobre la que están los marcadores. Esta deformación se puede prevenir utilizando estructuras rígidas de marcadores, en lugar de colocarlos individualmente sobre la piel. Aun en presencia de deformación, su efecto sobre los resultados se reducen en gran parte cuando se impone la condición de cuerpo rígido en el análisis. Pero hay gran parte del efecto de los artefactos, especialmente el movimiento relativo en bloque, que sigue estando presente.

Existen otras técnicas que tienen la finalidad de reducir con mayor eficacia los errores debidos a los artefactos, algunas de las cuales han sido revisadas detalladamente por Leardini et al. (2005).

Una de las más básicas consiste en la «solidificación» de sistemas con más de tres marcadores (Chèze et al., 1995). Se asume que la deformación de la superficie en la que están ubicados los marcadores es heterogénea, existiendo unos marcadores cuya posición experimenta una deformación mayor que otros. El método consiste en obtener analíticamente, para cada segmento, el subconjunto de tres marcadores no alineados que mejor representan el movimiento rígido. Los resultados con esta técnica no superan sustancialmente al método de reducción de deformación por mínimos cuadrados, aunque sí facilita la detección de fotogramas en los que se magnifique el error por causas accidentales.

Una desventaja de la técnica de solidificación es que para cada segmento establece dos categorías de marcadores: los tres «mejores» y todos los demás, y únicamente aprovecha la información del primer conjunto, descartando así parte de los datos registrados. La técnica del conjunto de puntos (*point cluster technique*, Andriacchi et al., 1998; Alexander & Andriacchi, 2001) también da más importancia a los marcadores cuyo movimiento es más coherente con el de un cuerpo rígido, pero aprovecha toda la información registrada. Esta técnica se basa en una analogía mecánica: a cada uno de los marcadores se le asocia una masa arbitraria, y el desplazamiento de cada segmento se calcula a través de la transformación geométrica del tensor de inercias. La característica de la técnica del *point cluster* es que la asignación de masas a los marcadores se hace buscando la mínima variación de los momentos de inercia principales entre fotogramas sucesivos. Con ello se proporciona un peso mayor a los marcadores que más contribuyen a mantener el valor de los momentos de inercia principales; es decir, los más coherentes con el movimiento rígido.

El modelo de superficie flexible (*pliant surface modelling*, Ball & Pierrynowski, 1998) sigue la estrategia opuesta a las técnicas anteriores: en lugar de reducir la importancia de la parte no rígida de los movimientos, asume una deformación de la superficie con 6 gdl, que aumenta a 12 los gdl del movimiento del cuerpo completo. El movimiento se parametriza mediante una matriz de transformación afín, que no sólo define una rotación y una traslación, sino también un escalado y una cizalladura.

La calibración dinámica (Lucchetti et al., 1998) consiste en calibrar los artefactos, es decir, medir las deformaciones de los sistemas de marcadores durante movimientos controlados, y componer con ella una «tabla de artefactos». La magnitud de estos artefactos se sustrae del movimiento registrado durante la medida experimental, en función de la fase del ciclo del movimiento. Este método tiene la limitación de que, para aplicarlo, el movimiento que se realiza ha de ser como el realizado durante la calibración de los artefactos.

Siguiendo una estrategia similar, la calibración múltiple de las marcas anatómicas (Cappozzo et al., 1995) tiene como objetivo reducir el error producido por los artefactos debido al desplazamiento y deformación de los sistemas de referencia anatómicos. La calibración de los sistemas de coordenadas se hace con los miembros en la posición inicial y final del movimiento que se desea medir, y la configuración de dicho sistema para cada instante se calcula por interpolación.

Y también está la técnica de optimización global (Lu & O'Connor, 1999, 2000), que se basa en minimizar los mínimos cuadrados del movimiento que no es coherente con el modelo articular definido para los segmentos estudiados (véase la sección 2.2). Este método cuenta con la ventaja de que es efectivo

para reducir el efecto del movimiento en bloque de los marcadores, no sólo la deformación, aunque obliga a utilizar un modelo de articulación predefinido.

En cualquier caso, ninguna de estas técnicas elimina de manera absoluta el efecto de los artefactos. En la mencionada revisión sobre este tema (Leardini et al., 2005) se señala la magnitud del efecto por artefactos en algunas medidas biomecánicas del miembro inferior. Por ejemplo, se ha documentado que los artefactos en los movimientos de las piernas producen traslaciones de los marcadores de hasta 40 mm. En el movimiento de la rodilla esto produce errores de orientación de hasta 28° en los ejes anatómicos, según la dirección del gesto, y un error en el rango de rotación que puede variar entre el 10 % (para la flexión-extensión) y el 100 % (para la rotación interna).

#### **2.5.2.2. Error en los sistemas de referencia anatómicos**

Como se ha señalado en la sección 2.4.4, en la mayoría de estudios se definen sistemas de referencia locales ligados a puntos conocidos del cuerpo, en base a los cuales se expresan los resultados de los análisis. Es importante que la determinación de estos sistemas de referencia sea repetible, para que los resultados entre estudios y los de distintas medidas en un mismo estudio sean comparables. Sin embargo, como en cualquier otro procedimiento que implica una medida, existe un error asociado a la determinación de las marcas anatómicas que definen estos sistemas de referencia.

En una revisión sobre esta materia, della Croce et al. (2005) distinguieron entre el error debido a la identificación de marcas anatómicas subcutáneas por palpación y el asociado a las marcas internas, cuya determinación se hace por métodos indirectos. En el primer caso los autores señalaron tres causas principales del error: (a) el hecho de que las marcas anatómicas no son realmente puntos, sino superficies a veces grandes e irregulares; (b) la interposición de tejidos blandos de espesor variable entre la marca anatómica y el punto en el que se ubica el marcador; y (c) la variabilidad en los procedimientos de identificación por palpación de las marcas anatómicas. El error de determinación de las marcas por palpación fue estudiado por della Croce et al. (1999) para puntos del miembro inferior, quienes obtuvieron una variabilidad intra-examinador desde 4,8 mm hasta 21,0 mm, y entre examinadores desde 11,8 mm hasta 24,7 mm. Los amplios rangos de variabilidad se deben a que algunos puntos anatómicos son identificables con mayor repetibilidad que otros. Los menores errores se daban para la prominencia de la tuberosidad tibial, y los mayores para la cresta ilíaca superior.

Las medidas de error proporcionadas dan un orden de magnitud de la traslación que pueden sufrir los sistemas de referencia anatómicos. Pero el

desplazamiento de las marcas anatómicas también da lugar a una rotación de los sistemas, que en la revisión comentada se estima entre  $0,9^\circ$  y  $9,4^\circ$ .

La traslación de un sistema de referencia provoca que todos los puntos referidos en el mismo se vean igualmente desplazados, pero no afecta a la medida de sus desplazamientos ni a las distancias o ángulos formados por los puntos del mismo sistema. Estas medidas sí pueden verse afectadas, en cambio, si los puntos que las determinan están referidos en sistemas distintos.

De modo similar, la rotación de los sistemas de referencia hace que todos los puntos se encuentren girados alrededor del origen, lo cual tampoco afecta a su posición relativa o a la magnitud de los desplazamientos, aunque sí a la parametrización de estas variables en los ejes y planos anatómicos que definen los sistemas de referencia. Al medir rotaciones este problema puede ser especialmente importante si se expresan en ángulos de Euler o Cardan, debido al efecto cruzado entre ejes, ya que las rotaciones no son conmutativas (Woltring, 1994).

En la revisión de della Croce et al. (2005) se comentan dos estrategias para reducir el problema de la definición de los sistemas de referencia anatómicos: (a) minimizar la incertidumbre de la posición de las marcas anatómicas, con instrucciones rigurosas sobre cómo hacer la palpación o utilizando técnicas de identificación con imágenes; y (b) reducir el efecto de dicha incertidumbre, definiendo los sistemas de referencia de manera que su orientación sea robusta ante pequeñas variaciones de los puntos empleados para su determinación. Una forma de conseguir este segundo objetivo es utilizar puntos anatómicos separados, de manera que las imprecisiones en su localización tengan un efecto pequeño sobre los ejes de coordenadas.

### 2.5.2.3. Errores en la localización de las articulaciones

El error en la posición de las articulaciones es considerado por della Croce et al. (2005) como un tipo de error en la ubicación de los puntos anatómicos, que es tratado junto a los errores en la localización de las marcas subcutáneas ya comentados. El aspecto que diferencia ambos casos es que los centros de articulación son marcas internas, para cuya determinación existen métodos predictivos y métodos funcionales, pero no se pueden localizar directamente por palpación.

Los métodos predictivos se basan en modelos anatómicos para estimar la posición del centro articular en función de la posición conocida de otros puntos del cuerpo. El error asociado a estos métodos está directamente relacionado con el error en la localización de los puntos predictores, el cual se puede ver aumentado o reducido según el modelo de predicción. En la revi-

sión de della Croce et al. (2005) se señalan errores típicos de entre 21 y 23 mm para este tipo de métodos.

Los métodos funcionales se basan en analizar el movimiento de los segmentos del cuerpo articulados, y calcular su centro o eje (véase la sección 2.4.3). En este caso el error vendrá condicionado por el de la medida del movimiento, en el que los artefactos por los tejidos blandos tienen un papel mayor. Existen importantes discrepancias en la magnitud estimada de este error; della Croce et al. (2005) indican que la determinación del centro de la cadera por métodos funcionales tiene un error en torno a los 12 mm. En un estudio con datos generados artificialmente (no aplicados a ninguna articulación concreta) Crisco et al. (1994) hallaron errores entre 4 y 24 mm para el centro de rotación en un movimiento plano. Pero en un análisis del IHA cervical Woltring et al. (1994) obtuvieron un error de ubicación entre 2 y 6,5 mm dependiendo del suavizado de datos (y 50,6 mm sin suavizar), lo cual es un resultado sorprendentemente pequeño comparado con los otros estudios sobre ejes finitos, y aún más considerando los problemas que añade el cálculo de velocidades necesario para definir el IHA.

Woltring et al. (1985), Crisco et al. (1994) y Page et al. (2007) han analizado cómo la distribución de los marcadores afecta al error en la determinación de los ejes articulares. En grandes rasgos, para minimizar dicho error conviene maximizar el número de marcadores y la separación entre ellos, así como distribuirlos de modo que estén bastante separados del eje del movimiento, pero manteniendo el centro del conjunto cercano al eje. Además, al analizar el FHA el error aumenta indefinidamente cuando el ángulo de giro  $\phi$  se aproxima a 0 ó  $2\pi$ . Esto es un aspecto importante a considerar si se usa el FHA como aproximación al IHA, ya que el ángulo  $\phi$  entre dos posiciones consecutivas ha de ser pequeño para que la aproximación sea válida, pero si no es bastante grande se obtienen resultados con mucho ruido, salvo que se realice un suavizado adecuado a los datos (Woltring et al., 1994).

## 2.6. Conclusiones

Los hechos que se han comentado en los apartados anteriores describen el panorama actual de la ciencia en relación con los estudios cinemáticos de la postura sedente. De forma resumida se pueden destacar las siguientes claves:

- Los estudios ergonómicos sobre la postura sedente han estado tradicionalmente centrados en análisis estáticos sobre la forma de la columna, siendo su objetivo buscar la posición del tronco y los miembros en la

que la columna adopta su configuración «ideal». El criterio para definir la postura óptima se ha basado, desde mediados del siglo XX, principalmente en minimizar la presión en los discos intervertebrales, como una de las causas primordiales a las que se atribuye el dolor lumbar. Sin embargo aún hoy existe controversia sobre algunos de los aspectos fundamentales, como las ventajas de la lordosis lumbar o las características que se deberían primar en el diseño de las sillas.

- Otro aspecto ergonómico al que se le reconoce una importancia vital es la movilidad de la postura. Existe un consenso sobre los beneficios de mover frecuentemente las extremidades y el tronco mientras se está sentado. Entre estos beneficios se cuenta la nutrición de los discos intervertebrales, que contrarresta los efectos perjudiciales de la presión, y un menor nivel de disconfort. En acorde con esto, durante las últimas décadas han surgido conceptos de diseño de sillas con el objetivo de facilitar los movimientos y cambios de postura.
- Los estudios biomecánicos sobre el movimiento en la postura sedente, que deberían ser la base para el diseño de las sillas orientadas a tal fin, están generalmente limitados al análisis de rangos y frecuencias de las variables angulares, probablemente por influencia de los estudios estáticos tradicionales. Los modelos de tronco revisados emplean una sola articulación fija al nivel de las vértebras L3 o L5, lo que asimismo procede de los estudios que analizan momentos estáticos sobre los discos lumbares.
- Hay una notable escasez de trabajos que estudien cómo afectan las características mecánicas de las sillas al movimiento del tronco. Entre los trabajos encontrados que comparan los aspectos ergonómicos de distintas sillas, ninguno aborda con profundidad un análisis cinemático. Para este tipo de análisis es preciso disponer de modelos biomecánicos abiertos, que no restrinjan las posibilidades de movimiento de los segmentos corporales. Existen aproximaciones al análisis de los movimientos humanos «sin modelo» (*model-free*), pero los estudios en este campo están principalmente orientados a la marcha, en la que hay amplios rangos de movimiento y los ejes articulares se mueven poco respecto a la anatomía.
- No se ha encontrado literatura previa que estudie el movimiento del tronco en postura sedente de forma integral, considerando tanto la rotación como la traslación. Los trabajos sobre el tronco que contemplan los

6 gdl del movimiento pertenecen principalmente al ámbito clínico, no el ergonómico, y se centran en los movimientos entre pares de vértebras para la detección de posibles anomalías. Dichos trabajos suelen emplear fragmentos *in vitro* para definir los modelos y medidas radiográficas para analizar los movimientos *in vivo*, lo cual limita las aplicaciones de sus métodos.

- Uno de los parámetros cinemáticos fundamentales para definir el movimiento completo (rotación + traslación) entre dos segmentos rígidos es la ubicación de los ejes de rotación (o *screw*, en el caso general). Éste es un problema clásico en la teoría de máquinas y mecanismos, que ha florecido en los estudios biomecánicos desde finales de la década de 1980. Para algunas aplicaciones clásicas de la biomecánica, como el análisis de la marcha o del movimiento de las extremidades en general, se ha encontrado en la fotogrametría una de las técnicas instrumentales más apropiadas.
- El análisis de los ejes articulares en biomecánica presenta diversas oportunidades de investigación en general. Muchos de los estudios se centran en el análisis de los «ejes finitos» asociados al desplazamiento de los segmentos corporales entre una postura de referencia y cualquier otra. Sin embargo dichos ejes son parámetros teóricos que sólo representan el centro real del movimiento en el caso de articulaciones fijas. Para describir los verdaderos centros articulares en cada momento se deben emplear «ejes instantáneos», a partir del problema cinemático diferencial. Por otra parte el cálculo de los ejes se ve gravemente influido por los errores de medida, a los que han de añadirse los errores de diferenciación en el caso de los ejes instantáneos. Esta cuestión ha sido estudiada en algunos trabajos con resultados dispares.

Estas conclusiones revelan la necesidad de desarrollar una forma avanzada de estudiar la cinemática articular; una metodología que evite las limitaciones de las técnicas convencionales basadas en el análisis de posiciones, en las que los procedimientos numéricos no permiten hacer un control eficaz de los errores. Con estas herramientas se debe emprender la definición de un modelo biomecánico del tronco en la postura sedente, y también estudiar la relación entre el movimiento de las sillas y el del tronco. Las articulaciones de este modelo no deben estar condicionadas por los resultados de los estudios basados en posturas estáticas, sino que han de definirse en función del movimiento realmente observado.

## Capítulo 3

# Objetivos y plan de trabajo

La revisión bibliográfica expuesta en el capítulo anterior pone de manifiesto la carencia de modelos cinemáticos adecuados para la postura sedente, más allá de los análisis sobre variaciones en los ángulos de la columna y los modelos basados en articulaciones fijas. Por otra parte, se ha visto que los estudios sobre el diseño de sillas suelen limitarse a la comparación entre posturas según la silla empleada, no habiéndose encontrado trabajos que estudien la relación entre el movimiento de los mecanismos (asiento, respaldo o sincronización entre los dos) y el del tronco del usuario. El presente trabajo aborda estos dos problemas:

1. Conocer con precisión el movimiento del tronco en la postura sedente a partir de las variables cinemáticas relevantes, prescindiendo de restricciones impuestas por el modelo cinemático.
2. Aplicar el conocimiento generado al estudio de las relaciones entre el movimiento de las sillas de trabajo reclinables y el del tronco.

Del amplio espectro de movimientos que puede realizar el tronco se ha escogido el de flexo-extensión, que es el que presenta un mayor rango sobre el cual medir, y a su vez el principal movimiento del tronco facilitado por los mecanismos móviles de las sillas de trabajo. El tronco humano se ha modelado como una cadena de dos segmentos rígidos: la pelvis y la caja torácica, de tal modo que los principales parámetros cinemáticos estudiados son sus ejes instantáneos de rotación y el del movimiento relativo entre los dos. Estos ejes son los lugares geométricos en los que se minimizan las velocidades del movimiento, y siguiendo una analogía mecánica, los que determinan cómo y



dónde se tendría que articular una cadena de piezas rígidas para reproducir el movimiento humano. El estudio se ha planteado sin definir de antemano el lugar que han de ocupar los ejes, dejando que sea el propio movimiento el que los determine.

Tal estudio proporcionará conocimiento sobre aspectos biomecánicos que no habían sido analizados en detalle con anterioridad, así como una base científica en la que se puede apoyar el diseño de sillas desde una perspectiva ergonómica.

Estos objetivos generales llevan asociados los siguientes objetivos particulares, para cada uno de los cuales se ha definido una acción:

1. *Definir un procedimiento de análisis cinemático.* La mencionada carencia de modelos cinemáticos de la postura sedente va de la mano de ciertas limitaciones en las técnicas de análisis de movimientos humanos en general. En consecuencia se ha desarrollado un método de análisis de movimientos basado en los principios generales de la cinemática. Las características del movimiento se han planteado como campos vectoriales, partiendo del análisis instantáneo y definiendo el análisis de los desplazamientos finitos por analogía con el anterior. Los cálculos a realizar en ambos casos son explícitos, al contrario que en los métodos convencionales.
2. *Conocer y controlar los errores instrumentales.* Para resolver el importante problema de los errores, que afecta especialmente al cálculo de los ejes del movimiento, se ha planteado una teoría matemática basada en el cálculo diferencial y la estadística multivariante. Esto ha sido posible gracias al carácter explícito del método de análisis cinemático. A través de la teoría se han definido unos criterios de diseño para los conjuntos de marcadores, que minimicen el error instrumental en el cálculo cinemático.
3. *Validar el planteamiento teórico.* Dado que el procedimiento de análisis y control de errores propuesto no es parte de los métodos habituales en los estudios sobre movimientos humanos, ha sido necesario probar experimentalmente su validez. Esto se ha hecho a través de un experimento con un mecanismo cuyo movimiento ha sido controlado, para comparar la magnitud de los errores medidos con los teóricos.
4. *Obtener un modelo biomecánico de la flexión y extensión del tronco.* La medición precisa del movimiento parte del cumplimiento de los objetivos anteriores, pero también requiere un diseño experimental correcto y validado. Se ha definido y realizado un experimento con sujetos, más dos

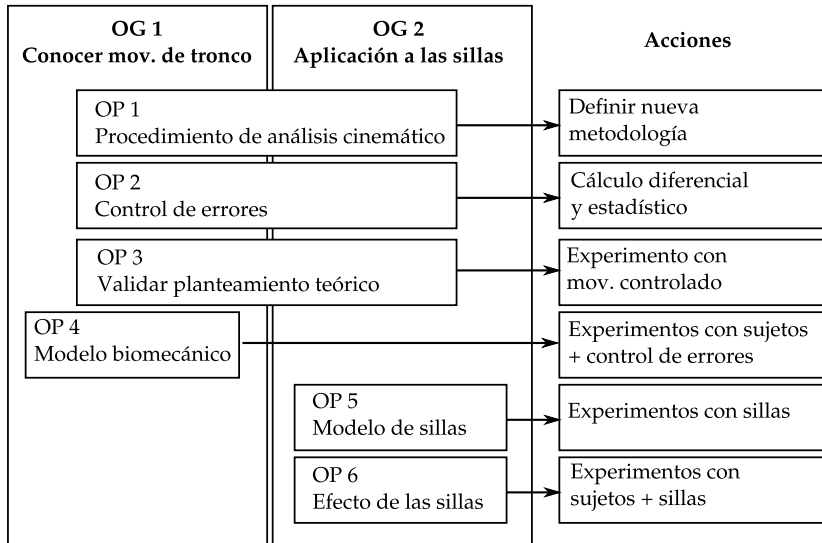


Figura 3.1: Esquema de objetivos generales (OG), objetivos particulares (OP) y acciones asociadas.

pruebas previas para controlar el orden de magnitud de los errores instrumentales y de los artefactos.

5. *Comparar el movimiento natural del tronco con los mecanismos de las sillas.* Esto se ha logrado caracterizando cinemáticamente un conjunto de sillas, aplicando el mismo método que para medir el movimiento del tronco.
6. *Comprobar el efecto de los mecanismos de sillas sobre el movimiento del tronco.* Para cumplir este objetivo se ha medido el movimiento del tronco de sujetos sentados en dos sillas suficientemente distintas, comparando los resultados entre ellas y con el movimiento «libre» sobre una superficie sin respaldo.

La figura 3.1 presenta de forma esquemática las relaciones entre estos objetivos y las acciones que conforman el plan de trabajo.



# Capítulo 4

## Material y métodos

### 4.1. Introducción

El eje instantáneo de la flexión del tronco, que es el objeto principal de la presente investigación, resulta ser un parámetro cinemático muy sensible a los errores de medida. Los métodos de análisis clásicos en biomecánica presentan importantes limitaciones, que los hacen poco aptos para este problema. El principal obstáculo se encuentra en la naturaleza misma de la mayoría de estudios biomecánicos: la tendencia predominante de los análisis cinemáticos se limita al problema de los desplazamientos, lo cual deja de lado cualquier cálculo de parámetros instantáneos. En parte debido a esto, la resolución del problema instantáneo, cuando se aborda, suele hacerse con técnicas derivadas del planteamiento para los desplazamientos finitos. Estas técnicas emplean algoritmos de optimización en los que la relación entre las medidas directas y el resultado final es inextricable, y esto dificulta el control de los errores, que como se ha dicho son un aspecto crítico del problema a resolver.

Esta situación hace necesario un enfoque nuevo, que aproveche el conocimiento presente en otras áreas de conocimiento relacionadas, más una validación de los métodos para su aplicación biomecánica. Este capítulo dedicado a las metodologías presenta, por tanto, dos grandes bloques:

1. La primera sección está dedicada al desarrollo de los métodos de análisis cinemático y al control de errores. Las técnicas presentadas se basan principalmente en la teoría de máquinas y mecanismos, el cálculo diferencial y la estadística multivariante. Algunos pormenores matemáticos de esta metodología se presentan con más detalle en el apéndice A. Es-

te planteamiento teórico, aunque ha sido utilizado para estudiar el movimiento del tronco, realmente es generalizable a cualquier otra articulación, y aun a otras aplicaciones más allá de la biomecánica. Por lo tanto, para un mayor provecho del mismo, se presenta en términos generales como una metodología para analizar el movimiento de cuerpos rígidos cualesquiera.

2. La segunda sección expone la parte experimental de la investigación, formada por seis experimentos. Los tres primeros tuvieron como objetivo validar la teoría sobre la propagación y el control de errores, así como el método de análisis de flexión del tronco utilizado en el experimento principal, que se realizó en cuarto lugar. Los dos últimos experimentos consistieron en unas medidas para caracterizar la mecánica de un grupo de sillas de trabajo, y la influencia de las mismas sobre la cinemática del tronco en postura sedente.

Los movimientos estudiados, tanto en el tronco como en las sillas, eran esencialmente de tipo plano. Por lo tanto, aunque se midieron y analizaron sus 6 gdl, se esperaba que la rotación tuviera una dirección predominante y la traslación fuese despreciable en dicha dirección. Es por ello que, en lugar de hablar de «ejes helicoidales», en esta sección y en lo que sigue del trabajo se hará referencia más propiamente a los «ejes de rotación». El interés se centró particularmente en los aspectos de la cinemática instantánea. Por lo tanto el objeto principal del estudio fue la trasposición al movimiento plano del concepto que en la literatura recibe el nombre de *Instantaneous Helical Axis* (IHA), y que a efectos del presente trabajo se llamará «Eje Instantáneo de Rotación» (EIR).

## 4.2. Desarrollo teórico

### 4.2.1. Análisis cinemático instantáneo

La aproximación más habitual al problema cinemático, por ser quizá la más intuitiva, parte del análisis de los desplazamientos finitos y aborda el cálculo de velocidades por diferenciación. Ahora bien, a pesar de que las leyes de la cinemática instantánea son intrínsecamente lineales, no ocurre lo mismo con los desplazamientos finitos. Emplear estos últimos como medio para el cálculo de velocidades requiere, por lo tanto, usar algoritmos de optimización cuando se emplean más de tres puntos. Esto introduce errores numéricos y oscurece el efecto que puedan tener los errores de medida sobre los

parámetros cinemáticos (véase el comentario al respecto en la sección 2.4.1). Por esta razón se ha seguido un procedimiento distinto, que parte del análisis de velocidades en base a una analogía mecánica: las ecuaciones lineales que relacionan los momentos lineales y angulares de un cuerpo rígido en movimiento se usan para expresar la relación entre velocidades de traslación y rotación, respectivamente.

Las medidas de fotogrametría proporcionan la posición en el espacio de un conjunto de marcadores  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ) para cada instante. Dichos instantes dependerán de la frecuencia de muestreo de las cámaras, pero se puede asumir que ésta será lo suficientemente alta como para tener un registro casi continuo. De este modo se podrá definir, para cada marcador  $i$ , una función continua  $\vec{R}_i(t)$  con su posición dependiendo de  $t$ , y una función  $\vec{v}_i(t)$  con su velocidad, calculada como la derivada temporal de  $\vec{R}_i(t)$ . Las derivadas se calculan por un proceso de suavizado, para el que se ha escogido el ajuste polinómico local de grado cúbico, con un ancho de banda calculado para conseguir el suavizado óptimo (véase el apéndice A.1 para más detalles). Además, para cada marcador se debe definir una masa  $m_i$ , siendo  $m$  la masa sumada de todos los marcadores. El criterio para definir esta masa es arbitrario: puede ser igual para todos los marcadores, determinarse según características geométricas del marcador, o cualquier otro.

El problema cinético planteado toma como punto de referencia el centro de gravedad del sólido a estudiar (en este caso un conjunto de marcadores). Por lo tanto será necesario definir en cada instante la posición de dicho centro  $G$ , así como la posición de cada marcador respecto a ese punto, tal como está descrito en la sección 2.4.1:

$$\vec{R}_G(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i(t)}{m}. \quad (4.1)$$

$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}_i(t) - \vec{R}_G(t). \quad (4.2)$$

A partir de estos datos se puede calcular, para cada marcador, una cantidad de movimiento y un momento cinético respecto a  $G$ :

$$\vec{p}_i(t) = m_i \vec{v}_i(t). \quad (4.3)$$

$$\vec{L}_{Gi}(t) = \vec{r}_i(t) \times \vec{p}_i(t). \quad (4.4)$$

Por otra parte, las leyes del movimiento de sólidos establecen una relación análoga entre la cantidad de movimiento y el momento cinético de un cuerpo rígido, y los vectores de su torsor cinemático (Annequin & Boutigny, 1973):

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}_G(t), \quad (4.5)$$

$$\vec{L}_G(t) = J_G(t)\vec{\omega}(t), \quad (4.6)$$

siendo  $J_G(t)$  el tensor de inercia del conjunto de marcadores respecto a  $G$ , que se calcula a partir de las posiciones de los marcadores según la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} J_G(t) &= I_3 \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i(t) \cdot \vec{r}_i(t) - \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i(t) \otimes \vec{r}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La cantidad de movimiento  $\vec{p}(t)$  del conjunto de marcadores es la suma de las cantidades de movimiento individuales  $\vec{p}_i(t)$  de cada marcador. Aplicando este principio a (4.5) se puede calcular la velocidad  $\vec{v}_G(t)$  del centro de gravedad de los marcadores mediante una media ponderada:

$$\vec{v}_G(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i(t)}{m}. \quad (4.8)$$

Por otra parte, el momento cinético total del conjunto de marcadores  $\vec{L}_G(t)$  también es la suma de los momentos cinéticos individuales  $\vec{L}_{G_i}(t)$  de cada marcador, aplicando lo cual a (4.6) se puede calcular la velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  del sistema de marcadores, a través de una mera multiplicación matricial:

$$\vec{\omega}(t) = J_G^{-1}(t) \sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_i(t) \times \vec{v}_i(t)). \quad (4.9)$$

El cálculo de  $\vec{\omega}(t)$  según (4.9) requiere que la matriz  $J_G(t)$  definida en (4.7) sea invertible. Esta condición se cumplirá siempre que el sistema de marcadores esté formado por al menos tres marcadores no alineados.

Mediante este algoritmo queda definido el torsor cinemático en el centroide de  $\{\vec{\omega}(t), \vec{v}_G(t)\}$ . La velocidad  $\vec{v}_G(t)$  dependerá, obviamente, de la posición del centroide  $\vec{R}_G(t)$ , a su vez dependiente de las masas asignadas. En el caso más sencillo, si se escoge una distribución de masas homogénea ( $m_i = m_j$ ,  $\forall i, j$ ), se pueden obviar los coeficientes  $m_i$  de todas las ecuaciones anteriores y sustituir la masa total  $m$  por el número de marcadores  $n$ , haciendo coincidir el centro de gravedad con el centro geométrico.

Una vez conocido el torsor cinemático en el centroide, se puede calcular cuál es el punto  $H$  del EIR más próximo a él, mediante la fórmula (2.13) que ya se ha expuesto en la revisión bibliográfica:

$$\overrightarrow{GH}(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \times \vec{v}_G(t)}{|\vec{\omega}(t)|^2}. \quad (4.10)$$

Otros parámetros que se pueden definir del EIR es su dirección, determinada por el vector unitario  $\vec{u}$ :

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{\omega}(t)}{|\vec{\omega}(t)|}. \quad (4.11)$$

Además, en el caso general de que el movimiento no fuera una rotación pura y el campo de velocidades tuviera una componente en la dirección del eje, se podría calcular la magnitud de dicha velocidad en el eje ( $v_H$ ), o el «paso»  $p_s$  del *screw* o torsor infinitesimal:

$$v_H(t) = \frac{\vec{\omega}(t) \cdot \vec{v}_G(t)}{|\vec{\omega}(t)|}. \quad (4.12)$$

$$p_s(t) = \frac{v_H(t)}{|\vec{\omega}(t)|} = \frac{\vec{\omega}(t) \cdot \vec{v}_G(t)}{|\vec{\omega}(t)|^2}. \quad (4.13)$$

En el análisis de la flexión del tronco, que es un problema esencialmente plano,  $\vec{u}(t)$  tendrá una sola dirección y el campo de velocidades será perpendicular a ella, por lo que  $v_H(t)$  y  $p_s(t)$  tendrán un valor despreciable. Así pues, el único parámetro relevante del EIR será el vector  $\overrightarrow{GH}(t)$ , que junto a  $\vec{R}_G(t)$  determinará la posición del eje en cada momento.

#### 4.2.2. Análisis de desplazamientos finitos

Como ya se ha comentado, el análisis de la rotación en los desplazamientos finitos se hace habitualmente mediante métodos numéricos, pues no tiene



un carácter lineal que dé lugar directamente a fórmulas explícitas como las expuestas para el caso infinitesimal.

Ahora bien, presentando juntas la fórmula de Rodrigues para la rotación esférica y la fórmula del campo de velocidades —ya vistas en (2.5) y (2.8)—, se puede comprobar una gran semejanza formal entre ellas:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \vec{u} \times (\vec{r}_2 + \vec{r}_1). \quad (4.14)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \quad (4.15)$$

Esto permite definir un campo antisimétrico *relacionado* con el campo de desplazamientos finitos, aunque no sea el mismo, y un procedimiento de cálculo explícito, análogo al usado para el análisis de velocidades, que en este caso dará valor a los parámetros de Rodrigues. Para ello se introducen a continuación los conceptos de «cuerpo virtual» y «desplazamientos virtuales», comparables a los «semidesplazamientos» o *quatched screws* introducidos por Hunt & Parkin (1995). Esta idea también ha sido retomada recientemente por Williams & Fyfe (2010), que dan a estos conceptos los nombres de *midpoints* y *midpoint-displacement vectors*, respectivamente.

Tal como se ha expuesto para el problema instantáneo, se parte de un conjunto de marcadores  $i = 1, 2, \dots, n$ , con  $n \geq 3$ , a cada uno de los cuales se les puede asociar una masa  $m_i$  para ponderar su importancia en el cálculo, y cuya posición inicial viene determinada por  $\vec{R}_{i1}$ . El centroide  $G$  y la posición de los marcadores respecto a él en la configuración inicial son  $\vec{R}_{G1}$  y  $\vec{r}_{i1}$ , definidos según (4.1) y (4.2), respectivamente. Tras un desplazamiento finito en forma de sólido rígido los vectores correspondientes pasan a tomar los valores  $\vec{R}_{i2}$ ,  $\vec{R}_{G2}$  y  $\vec{r}_{i2}$  (figura 4.1).

A la hora de analizar este desplazamiento lo más intuitivo y habitual es plantear las fórmulas que definen la transformación de los vectores  $\vec{X}_1$  a  $\vec{X}_2$  (siendo  $\vec{X}$  un vector cualquiera). Pero lo que define la fórmula de Rodrigues de modo explícito es una transformación entre sumas y diferencias de ellos. Para aprovechar estas relaciones se define un «cuerpo virtual», en el que los marcadores se encuentran en el punto medio entre  $\vec{R}_{i1}$  y  $\vec{R}_{i2}$ :

$$\vec{R}_{vi} = \frac{\vec{R}_{i2} + \vec{R}_{i1}}{2}. \quad (4.16)$$

Éste es el punto de referencia usado a menudo en la teoría de máquinas y mecanismos para analizar los desplazamientos finitos (Hunt & Parkin, 1995;

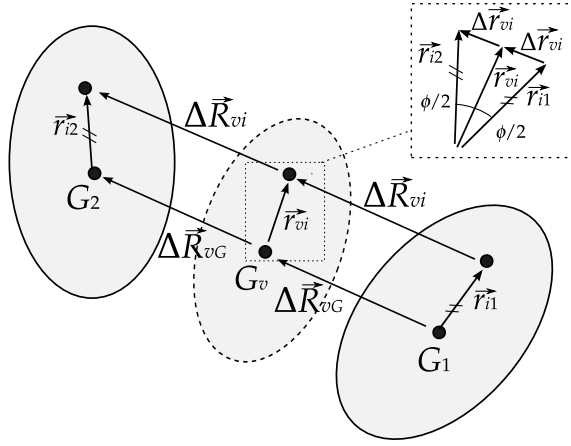


Figura 4.1: Resolución del problema de desplazamientos finitos. Los desplazamientos virtuales definidos sobre el cuerpo virtual intermedio forman un campo antisimétrico, cuyo gradiente es proporcional a  $\tan(\phi/2)$ ; véase el detalle en el extremo superior derecho.

Parkin, 1997b,a; Huang, 2000). También ha sido usado por Woltring et al. (1985) en el ámbito de la biomecánica, aunque esta aproximación ha sido poco seguida en estudios posteriores.

Por otra parte se define un «desplazamiento virtual» para cada marcador, que es la mitad del desplazamiento observado:

$$\Delta \vec{R}_{vi} = \frac{\vec{R}_{i2} - \vec{R}_{i1}}{2}. \quad (4.17)$$

A partir de estas fórmulas se derivan directamente las definiciones del «centro de gravedad virtual» ( $G_v$ ) y las posiciones y desplazamientos virtuales en relación al mismo:

$$\vec{R}_{vG} = \frac{\vec{R}_{G2} + \vec{R}_{G1}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_{vi}}{m}, \quad (4.18)$$

$$\vec{r}_{vi} = \frac{\vec{r}_{i2} + \vec{r}_{i1}}{2} = \vec{R}_{vi} - \vec{R}_{vG}, \quad (4.19)$$

$$\Delta \vec{r}_{vi} = \frac{\vec{r}_{i2} - \vec{r}_{i1}}{2} = \Delta \vec{R}_{vi} - \Delta \vec{R}_{vG}. \quad (4.20)$$

Si en la fórmula de Rodrigues para desplazamientos esféricos (4.14) se dividen ambos términos por dos, se obtiene una ecuación que relaciona de forma explícita los vectores que se han definido como  $\vec{r}_{vi}$  y  $\Delta \vec{r}_{vi}$ :

$$\frac{\vec{r}_{i2} - \vec{r}_{i1}}{2} = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \vec{u} \times \frac{\vec{r}_{i2} + \vec{r}_{i1}}{2}. \quad (4.21)$$

Finalmente la ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.21) se pueden combinar para definir la fórmula de un campo antisimétrico:

$$\Delta \vec{R}_{vi} = \Delta \vec{R}_{vG} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{vi}, \quad (4.22)$$

donde  $\vec{\Omega}$  es el llamado vector de Rodrigues:

$$\vec{\Omega} = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \vec{u} = \Omega \vec{u}. \quad (4.23)$$

Dada la identidad formal entre (4.22) y la fórmula del campo de velocidades (4.15), se desprende que el método de cálculo del torsor cinemático instantáneo puede ser empleado para obtener los parámetros de los desplazamientos finitos, utilizando las siguientes equivalencias:

- A las posiciones instantáneas reales,  $\vec{R}_i(t)$ ,  $\vec{R}_G(t)$ ,  $\vec{r}_i(t)$ , les corresponden las posiciones virtuales  $\vec{R}_{vi}$ ,  $\vec{R}_{vG}$ ,  $\vec{r}_{vi}$ , respectivamente.
- A las velocidades  $\vec{v}_i(t)$ ,  $\vec{v}_G(t)$  les corresponden los desplazamientos virtuales  $\Delta \vec{R}_{vi}$ ,  $\Delta \vec{R}_{vG}$ .
- A la velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  le corresponde el vector de Rodrigues  $\vec{\Omega}$ .
- A la matriz de inercias  $J_G(t)$  le corresponde una matriz de inercias virtual  $J_{vG}$ , calculada a partir de  $\vec{r}_{vi}$  tal como está definido en (4.7).

También se puede calcular un «eje virtual» análogo al IHA, que de hecho coincidirá con el FHA del desplazamiento:

$$\overrightarrow{G_v H} = \frac{\vec{\Omega} \times \Delta \vec{R}_{vG}}{\Omega^2}, \quad (4.24)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{\Omega}}{\Omega}. \quad (4.25)$$

Y el «paso virtual» definido de forma análoga a (4.13) será igual al «pseudopaso» definido según Hunt & Parkin (1995):

$$q = \frac{\vec{\Omega} \cdot \Delta \vec{R}_{vG}}{\Omega^2} = \frac{|\Delta \vec{R}_{vH}|}{\Omega} = \frac{(d/2)}{\tan(\phi/2)}. \quad (4.26)$$

De este modo se consigue un método de cálculo explícito, sin necesidad de algoritmos de optimización, de los parámetros  $\vec{\Omega}$  y  $\Delta \vec{R}_{vG}$  que definen los desplazamientos finitos. Para facilitar la interpretación de las variables, en el campo de la biomecánica se tiende a evitar el parámetro de Rodrigues  $\tan(\phi/2)$ . En la propuesta de Woltring (1994) para representar la orientación de las articulaciones humanas se hace uso del «vector orientación»  $\vec{\phi}$ , semejante al vector de Rodrigues  $\vec{\Omega}$ , pero cuyo módulo es directamente el ángulo  $\phi$ . Habida cuenta de que en los estudios biomecánicos se suele utilizar la matriz de rotación  $M$  para representar los desplazamientos finitos según (2.1), el mencionado trabajo proporciona una fórmula para obtener  $M$  a partir de  $\vec{\phi}$ . Pero dicha fórmula se puede adaptar para hacerla función de  $\vec{\Omega}$ , obteniéndose una ecuación aún más directa (Betsch et al., 1998):

$$M = I_3 + 2 \frac{A(\vec{\Omega}) + A^2(\vec{\Omega})}{1 + \Omega^2}, \quad (4.27)$$

donde  $A$  representa la matriz antisimétrica asociada a un vector:

$$A(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \vec{\xi} \times \vec{i} & \vec{\xi} \times \vec{j} & \vec{\xi} \times \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_z & \xi_y \\ \xi_z & 0 & -\xi_x \\ -\xi_y & \xi_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Del mismo modo (2.6) sirve para calcular explícitamente la rotación de cualquier vector  $\vec{r}_1$  a través de operaciones vectoriales con los parámetros  $\phi$  y  $\vec{u}$ , sin tener que recurrir a matrices. Pero la misma ecuación puede expresarse como función de  $\vec{\Omega}$ :

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2 \frac{\vec{\Omega} \times \vec{r}_1 + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_1)}{1 + \Omega^2}. \quad (4.29)$$

Para añadir el término de traslación al resultado de esta rotación únicamente hay que sumar el desplazamiento de  $G$ , cuya determinación es inmediata, siendo su valor  $\Delta \vec{R}_G = 2\Delta \vec{R}_{vG}$ :

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_{i2} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \Delta \vec{R}_G. \quad (4.30)$$

Para más propiedades matemáticas del concepto del «cuerpo virtual», y una exploración más detallada de la relación entre desplazamientos finitos e infinitesimales en base a los métodos presentados para su análisis, puede consultarse el apéndice A.2.

### 4.2.3. Composición de movimientos

#### 4.2.3.1. Desplazamientos infinitesimales

El movimiento estudiado en este trabajo es la flexión del tronco respecto a la pelvis. La fotogrametría no proporciona directamente datos sobre el mismo, sino del movimiento de cada uno de los segmentos respecto al sistema de coordenadas del laboratorio. Así pues, para analizar la cinemática de la articulación entre tronco y pelvis es necesario realizar una composición de movimientos.

En el caso infinitesimal el cálculo del movimiento relativo se reduce a una diferencia, gracias al carácter lineal del campo de velocidades. Ahora bien, el término de velocidad de traslación tiene que estar referido a un mismo punto para realizar esta operación, por lo que si se ha empleado el algoritmo descrito en la sección 4.2.1 primero hay que realizar un cambio al tursor. Un punto de referencia conveniente puede ser el origen de coordenadas  $O$ . Concretamente, si  $\{\vec{\omega}^T(t), \vec{v}_G^T(t)\}$  es el tursor cinemático asociado al tórax y  $\{\vec{\omega}^P(t), \vec{v}_G^P(t)\}$  es el tursor cinemático asociado a la pelvis, primero se calculan las velocidades de traslación correspondientes en  $\bar{O}$ :

$$\vec{v}_o^T(t) = \vec{v}_G^T(t) - \vec{\omega}^T(t) \times \vec{R}_G^T(t), \quad (4.31)$$

$$\vec{v}_o^P(t) = \vec{v}_G^P(t) - \vec{\omega}^P(t) \times \vec{R}_G^P(t), \quad (4.32)$$

y a continuación se realizan las restas para calcular el tursor cinemático relativo:

$$\vec{\omega}^R(t) = \vec{\omega}^T(t) - \vec{\omega}^P(t), \quad (4.33)$$

$$\vec{v}_o^R(t) = \vec{v}_o^T(t) - \vec{v}_o^P(t). \quad (4.34)$$

A partir del tursor  $\{\vec{\omega}^R(t), \vec{v}_o^R(t)\}$  se pueden calcular los demás parámetros del movimiento relativo, como el lugar geométrico ocupado por el IHA. Se puede destacar, no obstante, que su posición viene determinada por unas

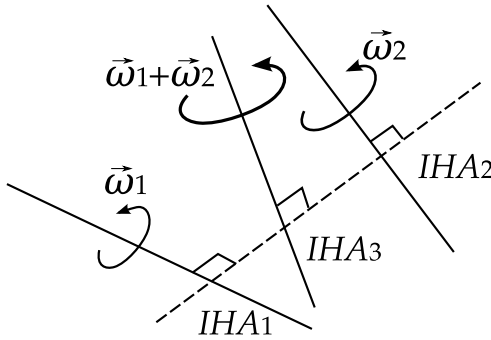


Figura 4.2: IHA de dos campos de velocidades y su suma. La línea discontinua representa la recta que corta perpendicularmente a los tres ejes.

restricciones geométricas, comentadas en detalle por Ball (1998) para todo tipo de campos torsoriales, y recogidas para el caso cinemático por Keler (2000) a través del álgebra dual. Una de estas restricciones es que, dado un par de campos de velocidades y el campo que resulta de sumarlos, existirá una recta que corta perpendicularmente a sus tres respectivos ejes (figura 4.2). Además existirá una relación entre los ángulos formados por los ejes, las distancias que los separan y la magnitud de las velocidades angulares y de traslación a lo largo de los ejes. Estas relaciones se simplifican para el movimiento plano (todos los ejes son paralelos entre sí y perpendiculares al plano del movimiento). En tal caso, las proyecciones de los ejes sobre el plano del movimiento forman un trío de puntos alineados, lo que se conoce por el teorema de Aronhold-Kennedy (Bottema & Roth, 1990), y las distancias entre dichos puntos están relacionadas según las siguientes igualdades (véase la figura 4.3):

$$\frac{\omega_1}{H_2H_3} = \frac{\omega_2}{H_3H_1} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{H_2H_3 + H_3H_1}. \quad (4.35)$$

Las magnitudes en los numeradores y denominadores de (4.35) se consideran con signo positivo o negativo según el sentido de las velocidades angulares y las separaciones entre los ejes. Así pues, si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tienen igual signo, lo mismo ocurrirá con las distancias  $H_2H_3$  y  $H_3H_2$ , y viceversa. Dicho de otro modo, si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tienen el mismo sentido, el punto  $H_3$  se encontrará en un punto intermedio entre  $H_1$  y  $H_2$ , mientras que si tienen signo contrario,  $H_3$

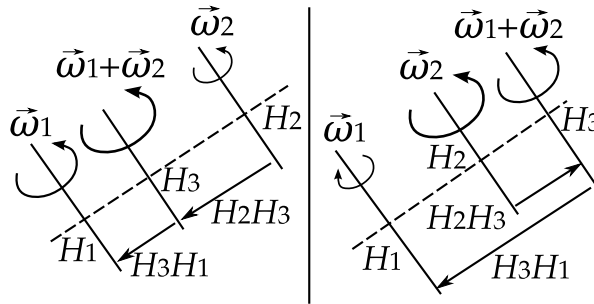


Figura 4.3: Relación geométrica entre los EIR de un movimiento plano. A la izquierda, si las velocidades angulares sumadas ( $\omega_1$  y  $\omega_2$ ) tienen el mismo signo, también lo tienen las distancias de  $H_2$  a  $H_3$  y de  $H_3$  a  $H_1$  (en ese sentido), por lo que el EIR del movimiento resultante ( $H_3$ ) se encontrará entre los otros dos ( $H_1$  y  $H_2$ ). A la derecha, si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tienen signos opuestos, también las distancias serán opuestas, por lo que  $H_3$  estará a un extremo.

se ubicará fuera del segmento. En cualquier caso  $H_3$  estará más cerca del eje cuya velocidad angular sea mayor. Si  $\omega_1 = \omega_2$ , el EIR de la suma estará justo en medio de los otros dos. En el caso singular en que  $\omega_1 = -\omega_2$ , la suma obviamente da un campo con velocidad angular nula, sin EIR determinado.

#### 4.2.3.2. Desplazamientos finitos

Los parámetros que definen un desplazamiento finito son una abstracción teórica que describe cómo podría haberse movido un cuerpo desde una posición inicial a una final. Pero en realidad existen infinitas formas en las que dicho movimiento podría haberse realizado, problema que se manifiesta claramente cuando se trata de definir un «desplazamiento finito relativo». La figura 4.4 representa la pelvis y el tórax como dos cuerpos rígidos ( $P$  y  $T$ , respectivamente), que se han movido desde la posición 1 a la posición 2. El problema de definir el desplazamiento provocado por la articulación lumbar consistiría en averiguar qué movimiento habría de realizar el tórax para que, añadiéndolo al movimiento observado de la pelvis ( $P_{1 \rightarrow 2}$ ), se obtenga como resultado el desplazamiento total del tórax ( $T_{1 \rightarrow 2}$ ). Sin embargo se puede apreciar que esta respuesta depende de «cuándo» se considere que el movimiento relativo tiene lugar. Si se supone que primero se efectúa  $P_{1 \rightarrow 2}$ , el tórax pasa por virtud de ese movimiento a ocupar la posición intermedia

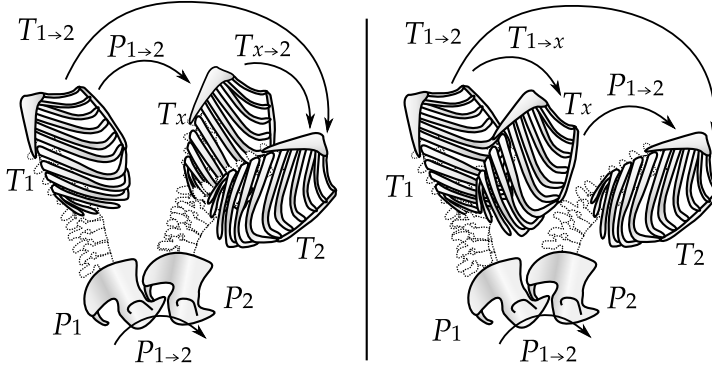


Figura 4.4: Dos alternativas para definir el desplazamiento relativo del cuerpo  $T$  (tórax) respecto al cuerpo  $P$  (pelvis). En el caso representado a la izquierda el desplazamiento relativo ( $T_{x \rightarrow 2}$ ) se realiza después del desplazamiento  $P_{1 \rightarrow 2}$  aplicado a ambos cuerpos, que deja al tórax en la posición  $T_x$ . En el caso de la derecha el desplazamiento relativo ( $T_{1 \rightarrow x}$ ) es el primer movimiento, al cual sucede  $P_{1 \rightarrow 2}$ , que deja a ambos cuerpos en su posición final.

$T_x$ , siendo el movimiento buscado  $T_{x \rightarrow 2}$  (figura 4.4 izquierda). Por el contrario, si se supone que el movimiento relativo del tórax antecede a  $P_{1 \rightarrow 2}$ , la incógnita será  $T_{1 \rightarrow x}$  (figura 4.4 derecha). Por la falta de conmutatividad de los desplazamientos finitos,  $T_{1 \rightarrow x} \neq T_{x \rightarrow 2}$ . También se podría considerar que el movimiento relativo ocurre a medio camino de  $P_{1 \rightarrow 2}$ , dando lugar a infinitud de posibles soluciones, aunque aquí sólo se considerarán esos dos posibles escenarios.

A la luz de lo visto, para calcular un desplazamiento finito relativo es necesario definir de antemano cuál es la secuencia de movimientos con la que se desea trabajar. En función de la secuencia escogida la solución será distinta. La figura 4.5 representa una composición de desplazamientos general, en la que un cuerpo (como podría ser el tórax en el ejemplo anterior) pasa de la posición 1 a la 2 por medio de la posición  $x$ . Del movimiento completo son datos conocidos tanto el término de rotación como la traslación de un punto de referencia, que será  $G$  si se ha utilizado el método descrito en 4.2.2. Además, de uno de los dos movimientos parciales se conoce el término de rotación, más la traslación de otro punto, llamémosle  $F$ , que puede ser el centroide del segundo cuerpo involucrado. Dando nombre a las variables, esto significa que



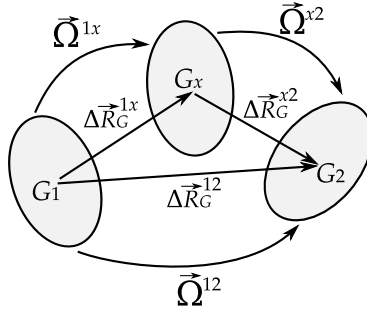


Figura 4.5: Composición de desplazamientos finitos.

$\{\vec{\Omega}^{12}, \Delta \vec{R}_G^{12}\}$  es uno de los *screws* conocidos, además de  $\{\vec{\Omega}^{1x}, \Delta \vec{R}_F^{1x}\}$  o bien  $\{\vec{\Omega}^{x2}, \Delta \vec{R}_F^{x2}\}$ .

El término de traslación y el de rotación se pueden calcular por separado. Para el primero es inmediato observar que, tal como muestra la figura 4.5

$$\Delta \vec{R}_G^{12} = \Delta \vec{R}_G^{1x} + \Delta \vec{R}_G^{x2}. \quad (4.36)$$

Como ya se ha visto  $\Delta \vec{R}_G^{12}$  es un dato conocido, pero del movimiento del otro cuerpo no se sabe el desplazamiento en  $G$ , sino en el punto  $F$ . Por lo tanto, para hacer la suma primero es necesario «convertir» ese desplazamiento al correspondiente en  $G$ . Esto se puede hacer a partir de los demás parámetros disponibles, mediante (4.29) y (4.30):

$$\Delta \vec{R}_G^{1x} = \Delta \vec{R}_F^{1x} + 2 \frac{\vec{\Omega}^{1x} \times \overrightarrow{F_1 G_1} + \vec{\Omega}^{1x} \times (\vec{\Omega}^{1x} \times \overrightarrow{F_1 G_1})}{1 + (\Omega^{1x})^2}. \quad (4.37)$$

$$\Delta \vec{R}_G^{x2} = \Delta \vec{R}_F^{x2} + 2 \frac{\vec{\Omega}^{x2} \times \overrightarrow{F_2 G_2} - \vec{\Omega}^{x2} \times (\vec{\Omega}^{x2} \times \overrightarrow{F_2 G_2})}{1 + (\Omega^{x2})^2}. \quad (4.38)$$

Con esto el cálculo de la traslación relativa queda inmediatamente resuelto, despejando (4.36).

La composición de rotaciones se hace a menudo mediante multiplicaciones de las matrices de rotación, pero también existe una fórmula para componer directamente los vectores de Rodrigues (Betsch et al., 1998):

$$\vec{\Omega}^{12} = \vec{\Omega}^{1x} \oplus \vec{\Omega}^{x2} = \frac{\vec{\Omega}^{1x} + \vec{\Omega}^{x2} - \vec{\Omega}^{1x} \times \vec{\Omega}^{x2}}{1 - \vec{\Omega}^{1x} \cdot \vec{\Omega}^{x2}}. \quad (4.39)$$

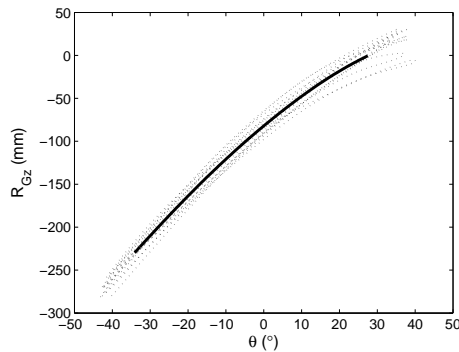


Figura 4.6: Ejemplo de promediado funcional de una variable (coordenada Z del centroide) en función de la variable de par  $\theta$ . Los bucles en línea gris discontinua representan las repeticiones cíclicas de la variable; la línea continua negra representa la trayectoria media.

Esta operación (que no es conmutativa) se puede realizar de forma circular cambiando el signo de las rotaciones que convengan, de modo que la rotación relativa responderá a una de las siguientes fórmulas, según cuál sea la incógnita:

$$\vec{\Omega}^{1x} = \frac{\vec{\Omega}^{12} - \vec{\Omega}^{x2} + \vec{\Omega}^{12} \times \vec{\Omega}^{x2}}{1 + \vec{\Omega}^{12} \cdot \vec{\Omega}^{x2}}. \quad (4.40)$$

$$\vec{\Omega}^{x2} = \frac{-\vec{\Omega}^{1x} + \vec{\Omega}^{12} + \vec{\Omega}^{1x} \times \vec{\Omega}^{12}}{1 + \vec{\Omega}^{1x} \cdot \vec{\Omega}^{12}}. \quad (4.41)$$

#### 4.2.4. Promediado funcional

La ubicación calculada del EIR puede presentar una variabilidad importante, pues tal como se desarrolla a continuación, en la sección 4.2.5, errores pequeños de medida o instrumentales pueden reflejarse en grandes errores en el EIR. En tanto estos errores no se repitan de forma sistemática cada vez que se repite el movimiento, una forma de atenuarlos consiste en medir varios ciclos del movimiento, y obtener una «trayectoria promedio» del mismo (figura 4.6).

Una estrategia adecuada para realizar este promediado es la basada en los *grados de libertad funcionales* (gdlf). Este concepto ha sido introducido en

los últimos años para referirse a un subconjunto reducido de los grados de libertad posibles, que incluye un número mínimo de variables necesarias para reproducir el movimiento tal cual se realiza en la realidad (Li, 2006; Li & Tang, 2007). Ésta es una idea muy útil en el ámbito de la biomecánica, ya que los distintos movimientos que pueden efectuar las articulaciones humanas suelen realizarse de forma coordinada: aunque una articulación pueda moverse con 6 gdl, tal como se analiza con los métodos empleados, la ejecución de los movimientos se realiza en la práctica con menos gdlf. Muchos movimientos humanos tienen un único gdlf, pudiéndose explicar con una sola variable, incluso tratándose de articulaciones complejas como el hombro o el cuello (Page et al., 2008a,b, 2009b,c, 2010).

Si dado un movimiento cualquiera se verifica la hipótesis de que tiene 1 gdlf, al promediar entre ciclos se reducen las variaciones espurias que se dan de un ciclo a otro, y el resultado que se obtiene es más próximo al movimiento teórico que subyace en todos los ciclos. Esto no elimina, sin embargo, los errores que se repitan sistemáticamente en todos los ciclos, como los artefactos por tejidos blandos.

Siguiendo esta filosofía, en los experimentos realizados en este trabajo se midieron movimientos que se realizaban cíclicamente, de tal modo que cada registro consistía en un conjunto de repeticiones seguidas. En algunos análisis se llevó a cabo un promediado entre los ciclos de acuerdo al siguiente procedimiento:

1. Cálculo en el dominio temporal de los parámetros cinemáticos de interés para cada movimiento: los parámetros de posición  $\vec{\Omega}(t)$ ,  $\vec{R}_G(t)$ , las velocidades  $\vec{\omega}(t)$ ,  $\vec{v}_G(t)$ , y el vector  $\vec{GH}(t)$  del EIR para cada cuerpo y para el movimiento relativo. Por simplicidad, en los siguientes pasos cualquier variable de posición se denominará  $q(t)$ , y su derivada  $\dot{q}(t)$  será la variable que le corresponde de velocidades, ya que en el movimiento plano se cumple que

$$\dot{\vec{\Omega}}(t) = \frac{\vec{\omega}(t)}{2}, \quad (4.42)$$

$$\dot{\vec{R}}_G(t) = \vec{v}_G(t). \quad (4.43)$$

Es importante observar que la ecuación (4.42) es cierta para el movimiento plano, pero no en otros casos, para los cuales la relación entre  $\dot{\vec{\Omega}}(t)$  y  $\vec{\omega}(t)$  es distinta. Puede consultarse el apéndice A.2.2 para más detalles al respecto.

2. Obtención de la variable de par asociada al gdlf. Tratándose de movimientos esencialmente planos, se tomó como variable más representativa el ángulo de rotación principal  $\theta(t)$ . Éste era la componente perpendicular al plano principal del vector orientación asociado al movimiento de mayor amplitud. Por ejemplo, al estudiar la flexión del tronco, se tomó el vector orientación  $\vec{\phi}(t)$  del tórax, tal como se ha definido en la sección 4.2.2; expresado en grados:

$$\vec{\phi}(t) = 2 \tan^{-1}(\Omega(t)) \frac{180}{\pi} \frac{\vec{\Omega}(t)}{\Omega(t)}. \quad (4.44)$$

A continuación se obtuvo la dirección promedio de  $\vec{\phi}(t)$ , expresada como un vector unitario  $\vec{u}$ , y  $\theta(t)$  se definió como la proyección de  $\vec{\phi}(t)$  sobre  $\vec{u}$ :

$$\theta(t) = \vec{\phi}(t) \cdot \vec{u}. \quad (4.45)$$

Al tratarse de un movimiento plano, en este caso se cumplía que  $\theta(t)$  era semejante al módulo de  $\vec{\phi}(t)$ , pero con signo positivo o negativo según la dirección del movimiento; es decir que  $\vec{\phi}(t) = \theta(t)\vec{u}$ .

3. Transformación de todos los parámetros cinemáticos del dominio temporal al geométrico ( $q(t) \mapsto q(\theta)$ ,  $\dot{q}(t) \mapsto \dot{q}(\theta)$ ). Esto se consigue numéricamente reordenando la variable  $\theta(t)$  con un criterio ascendente respecto a sí misma, y aplicando la misma secuencia de reordenación al resto de parámetros. Con esta reordenación, la «primera» observación de cualquier variable transformada ya no se corresponde con el menor valor de  $t$ , sino con el mínimo valor de  $\theta$ , etc.
4. Ajuste de las variables de posición  $q(\theta)$  para eliminar la variabilidad debida a las diferencias entre ciclos, dejando únicamente la debida al supuesto gdlf. Este proceso da lugar a unas variables «promedio»  $\bar{q}(\theta)$ , cuyas derivadas en el dominio geométrico han de ajustarse a las medidas en el dominio temporal, según la siguiente relación:

$$\dot{q}(\theta) = \frac{dq(\theta(t))}{dt} \sim \frac{d\bar{q}(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (4.46)$$

Esta operación se puede realizar a través de un ajuste polinómico local utilizando  $\theta$  como variable independiente, semejante al proceso de

suavizado de variables (véase el apéndice A.1). La diferencia con el suavizado que se usa para eliminar el ruido de la señal es el criterio de selección de ancho de banda óptimo, ya que la variabilidad local de  $q(\theta)$  no es debida en este caso a un ruido aleatorio. Otra opción es segregar  $q(\theta)$  en distintos ciclos y calcular un promedio aritmético. Los detalles de ambas opciones se presentan en el apéndice A.4.

5. Comprobar la validez de  $\theta$  como único gdlf. En los primeros artículos que tratan el concepto de grados de libertad funcionales se utiliza el análisis de componentes principales para determinar el número de gdlf presentes en el movimiento (Li, 2006; Li & Tang, 2007). Sin embargo esta técnica puede sobreestimar la variabilidad del movimiento cuando la coordinación entre los gdl naturales no es lineal (Page et al., 2008b, 2009c). Para estos casos se propone comprobar la bondad de  $\bar{q}(\theta)$  y su derivada geométrica respecto a los datos observados, a través de un coeficiente de correlación no lineal.
6. Cálculo del EIR promedio a partir de los correspondientes parámetros cinemáticos, a través de la fórmula (4.10). Este procedimiento es más adecuado que promediar las trayectorias medidas del EIR, ya que su relación con las variables del movimiento no es lineal, y un promedio directo de dichas trayectorias no aseguraría que el movimiento reconstruido representase adecuadamente el observado (Page et al., 2009c).

Con este procedimiento, los parámetros de posición  $\vec{\Omega}(t)$ ,  $\vec{R}_G(t)$  se convierten en unas funciones que sólo dependen de la variable de par  $(\vec{\Omega}(\theta), \vec{R}_G(\theta))$ . De este modo la cinemática articular queda planteada como una característica geométrica, independiente del tiempo. Sus derivadas en el dominio geométrico son unas velocidades «normalizadas»,  $\vec{\omega}_n(\theta)$ ,  $\vec{v}_{Gn}(\theta)$ , que modelan las velocidades «reales» (las derivadas temporales), aunque para obtener éstas hay que añadir  $\dot{\theta}(t)$  como factor, según se expone en (4.46).

La ubicación del EIR, sin embargo, no viene condicionada por ninguna función del tiempo, a pesar de que la ecuación (4.10) utiliza derivadas temporales. Esto es así porque las componentes temporales están compensadas en el numerador y el denominador de la fórmula; de este modo el EIR también resulta ser una característica netamente geométrica (que sólo depende de la variable de par):

$$\overrightarrow{GH}(\theta) = \frac{\vec{\omega}_n(\theta) \times \vec{v}_{Gn}(\theta)}{|\vec{\omega}_n(\theta)|^2}. \quad (4.47)$$

### 4.2.5. Estimación de los errores cinemáticos

Los procedimientos de análisis presentados dan lugar a soluciones explícitas en el cálculo de los parámetros cinemáticos, a partir de la información proporcionada por la fotogrametría. Esta propiedad, además de reducir el coste computacional, permite comprobar de modo igualmente explícito cómo repercute en la solución la introducción de pequeñas variaciones en los datos de entrada. Es decir, permite calcular fórmulas de la propagación de errores, desde los datos de entrada hasta el resultado del análisis.

Este principio ha sido utilizado por Woltring et al. (1985) para calcular la magnitud del error en el cálculo de desplazamientos finitos, realizado a través de matrices, cuando los errores son únicamente de tipo aleatorio, insesgados e isotropos, y los puntos también están distribuidos de forma homogénea en el espacio. En este trabajo se amplía la teoría para aplicarla al cálculo vectorial de desplazamientos tanto finitos como infinitesimales, y para una variedad más amplia de errores y configuraciones de marcadores.

En términos generales, tomemos una función vectorial de  $n$  dimensiones cualquiera, llamada  $\vec{f}$ , que pueda calcularse explícitamente a partir de las variables  $x_1, x_2 \dots x_m$ , que conforman el vector  $m$ -dimensional  $\vec{x}$ . Entonces, si la medida  $\vec{x}$  se ve afectada por un error  $\delta\vec{x}$ , en el cálculo de  $\vec{f}$  se dará un error  $\delta\vec{f}$  cuyo efecto de primer orden se puede aproximar del siguiente modo:

$$\delta\vec{f} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \delta\vec{x} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \delta\vec{x}, \quad (4.48)$$

siendo  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}$  el jacobiano de la función  $\vec{f}(\vec{x})$ .

Este principio puede aplicarse de forma secuencial para calcular los errores resultantes al componer funciones. Del mismo modo, la regla de la cadena puede emplearse para calcular el error de las derivadas de funciones:

$$\delta\dot{\vec{f}} = \left( \frac{df_1}{dt} \dots \frac{df_n}{dt} \right)^T \approx \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \delta\dot{\vec{x}}. \quad (4.49)$$

Para operaciones lineales como productos escalares o vectoriales no es necesario recurrir a expresiones matriciales, pues se puede comprobar que

$$\frac{\partial(\vec{a} \cdot \vec{x})}{\partial \vec{x}} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial(\vec{a} \times \vec{x})}{\partial \vec{x}} \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}. \quad (4.51)$$

De este modo, en los siguientes apartados se desarrollan las fórmulas de los errores en los parámetros cinemáticos en función de los errores instrumentales, que servirán para conocer las condiciones experimentales en las que los errores resultantes quedan minimizados. En todos los casos se considera que los errores son pequeños en relación con el orden de magnitud de las medidas, de manera que pueden despreciarse los efectos de orden cuadrático o superior.

#### 4.2.5.1. Error de posición

La información de partida está constituida por las posiciones  $\vec{R}_i(t)$  de los marcadores (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ) en distintos instantes de tiempo  $t$ . Dichas medidas tendrán un error asociado que en adelante se identificará como  $\delta \vec{R}_i(t)$ .

En la sección 2.5 se han comentado los distintos tipos de errores que pueden afectar a las posiciones medidas por fotogrametría:

- Errores instrumentales, que a su vez pueden dividirse en errores aleatorios (identificados por la matriz de covarianzas  $\Sigma$ ) y sistemáticos, producidos principalmente por la calibración y parametrizables como una función de la posición de los marcadores,  $\vec{\epsilon}(\vec{R})$ .
- Errores de medida, que pueden venir dados por una identificación poco precisa de los marcadores anatómicos o, sobre todo, por artefactos de los tejidos blandos.

En esta parte del trabajo se estudia cómo controlar los errores *a priori*, creando unas condiciones de medida que permitan minimizar su magnitud, desde un punto de vista matemático. Este tipo de control es posible para los errores instrumentales, que tienen un modelo matemático definido. Los errores de medida necesitan ser controlados de otro modo, tal como se ha presentado en la sección 2.5.2. Por lo tanto  $\delta \vec{R}_i(t)$  se analizará como la suma de la parte aleatoria y la sistemática del error instrumental:

$$\delta \vec{R}_i(t) = \delta \vec{R}_{i\Sigma}(t) + \delta \vec{R}_{iR}(t), \quad (4.52)$$

donde  $\delta \vec{R}_{i\Sigma}(t)$  es la parte parametrizable como un error aleatorio, y la diferencia con él será esencialmente el error sistemático de calibración,

$$\delta\vec{R}_{iR}(t) \cong \vec{\epsilon}(\vec{R}_i(t)). \quad (4.53)$$

La metodología de análisis seguida introduce un proceso de suavizado de las variables, que se aplica a las medidas para reducir el error aleatorio y calcular derivadas. Tal como queda comentado en el apéndice A.1, dedicado a esta técnica, al suavizar las posiciones  $\vec{R}_i(t)$  se puede considerar que el error aleatorio  $\delta\vec{R}_{i\Sigma}(t)$ , definido por la matriz de covarianzas  $\Sigma_i(t)$ , se convierte en otro del mismo tipo cuyas covarianzas  $\Sigma_{si}(t)$  son proporcionales a las primeras (y de menor magnitud). La parte sistemática del error,  $\delta\vec{R}_{iR}(t)$ , se verá inalterada por el suavizado.

Las posiciones relativas al centroide,  $\vec{r}_i(t)$ , tendrán un error  $\delta\vec{r}_i(t)$  correlacionado con  $\vec{R}_i(t)$ , aunque condicionado por el error en el resto de marcadores de tal modo que, por definición,  $\sum_i \delta\vec{r}_i(t) = 0$ .

#### 4.2.5.2. Error de las velocidades

El método directo para calcular los parámetros cinemáticos instantáneos, descrito en la sección 4.2.1, requiere conocer no sólo la posición de los marcadores en cada instante, sino también su velocidad  $\vec{v}_i(t)$ , que llevará asociada un término de error  $\delta\vec{v}_i(t)$ .

Las velocidades son las derivadas de primer orden de la posición y su cálculo depende del proceso de suavizado, cuyo efecto sobre las medidas se comenta detalladamente en el apéndice A.1. El error resultante en las velocidades también podrá dividirse en una parte aleatoria y otra sistemática:

$$\delta\vec{v}_i(t) = \delta\vec{v}_{i\Sigma}(t) + \delta\vec{v}_{iR}(t). \quad (4.54)$$

En el apéndice A.1 se muestra matemáticamente que los errores aleatorios se magnifican cuando aumenta el orden de derivación, aunque generalmente se podrá seguir asumiendo que el error es pequeño respecto al orden de magnitud de la señal. En cuanto a la parte sistemática del error, así como  $\delta\vec{R}_i(t)$  depende únicamente de la posición del marcador  $\vec{R}_i(t)$ ,  $\delta\vec{v}_{iR}(t)$  dependerá de su velocidad  $\vec{v}_i(t)$ . Aplicando (4.49),

$$\delta\vec{v}_{iR}(t) = \frac{\partial\vec{\epsilon}}{\partial\vec{r}_i(t)}\vec{v}_i(t). \quad (4.55)$$

Así pues, el error sistemático  $\delta\vec{v}_{iR}(t)$  será linealmente proporcional a la velocidad misma del marcador. Para movimientos lentos el error será menor en términos absolutos y viceversa; pero en términos relativos la razón



señal/error será constante e igual al gradiente local del error de posición. En esto se diferencia del error de origen aleatorio,  $\delta\vec{v}_{i\Sigma}(t)$ , que se magnifica respecto al correspondiente error de posición. En definitiva, si las partes aleatoria y sistemática del error de posición tienen un orden de magnitud semejante ( $\delta\vec{R}_i \sim \delta\vec{R}_{iR} \sim \delta\vec{R}_{i\Sigma}$ ), el error de velocidad de origen aleatorio oscurecerá el causado por los defectos de calibración:

$$\delta\vec{v}_{i\Sigma}(t) \gg \delta\vec{v}_{iR}(t) \Rightarrow \delta\vec{v}_i(t) \approx \delta\vec{v}_{i\Sigma}(t). \quad (4.56)$$

#### 4.2.5.3. Error en el torsor cinemático<sup>1</sup>

##### Fórmulas generales

Cuando el torsor cinemático  $\{\vec{\omega}, \vec{v}_G\}$  se calcula a partir de las variables  $\vec{R}_i, \vec{v}_i$  como se ha explicado en la sección 4.2.1, el error resultante se puede calcular a partir de  $\delta\vec{R}_i, \delta\vec{v}_i$ .

La fórmula (4.8), que define la velocidad en el centroide  $\vec{v}_G$ , da lugar a la siguiente definición de su error:

$$\delta\vec{v}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \delta\vec{v}_i}{m}. \quad (4.57)$$

Así pues, se puede observar que el error  $\delta\vec{v}_G$  de velocidad de traslación es una media de los errores de velocidad de los marcadores  $\delta\vec{v}_i$ , ponderados por las masas asignadas  $m_i$ . De esta definición se desprende que  $\delta\vec{v}_G$  siempre será menor que el mayor  $\delta\vec{v}_i$ . Pero además puede ser incluso menor que cualquier  $\delta\vec{v}_i$ , si los errores de velocidad de los marcadores se compensan mutuamente.

En cuanto al error en la velocidad angular, a partir de (4.9) se puede deducir que

$$\begin{aligned} \delta\vec{\omega} = & J_G^{-1} \sum_i^n (m_i \vec{r}_i \times \delta\vec{v}_i) + J_G^{-1} \sum_i^n (m_i \delta\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ & - J_G^{-1} \delta J_G J_G^{-1} \sum_i^n (m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i). \end{aligned} \quad (4.58)$$

<sup>1</sup>En lo que sigue de esta sección se trabaja sobre las variables cinemáticas en un instante cualquiera, y en las operaciones realizadas la variable  $t$  no tiene relevancia. Por lo tanto la notación de las funciones  $f(t)$  se simplifica a  $f$  para mayor claridad de las fórmulas más complejas.

Si se desarrolla el sumatorio del segundo término de esta expresión, teniendo en cuenta que la suma de  $\delta\vec{r}_i$  es nula, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_i^n (m_i \delta\vec{r}_i \times \vec{v}_i) &= \sum_i^n (m_i \delta\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) \\ &= \vec{\omega} \sum_i^n (m_i \delta\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \sum_i^n (m_i (\vec{\omega} \cdot \delta\vec{r}_i) \vec{r}_i).\end{aligned}\quad (4.59)$$

El primer sumando resultante tiene que ver con la «expansión» o «compresión» aparente del cuerpo, y el segundo con la «cizalladura» aparente en la dirección de  $\vec{\omega}$ . Algo semejante ocurre con el tercer término de (4.58), que depende de  $\delta\mathbf{J}_G$ , y por tanto de  $\delta\vec{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ .

$$\delta\mathbf{J}_G = \sum_{i=1}^n m_i \begin{pmatrix} 2y_i \delta y_i + 2z_i \delta z_i & -x_i \delta y_i - y_i \delta x_i & -x_i \delta z_i - y_i \delta z_i \\ -x_i \delta y_i - y_i \delta x_i & 2x_i \delta x_i + 2z_i \delta z_i & -y_i \delta z_i - z_i \delta y_i \\ -x_i \delta z_i - y_i \delta z_i & -y_i \delta z_i - z_i \delta y_i & 2x_i \delta x_i + 2y_i \delta y_i \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

En este caso son los elementos diagonales los que se relacionan con la «expansión» o «compresión» aparente, mientras que los demás elementos de la matriz se relacionan con la «cizalladura». En definitiva, si los errores instrumentales no deforman el cuerpo o esta deformación se compensa de algún modo, el único término relevante de (4.58) será el primero, y por lo tanto se podrá asumir la siguiente aproximación:

$$\delta\vec{\omega} \approx \mathbf{J}_G^{-1} \sum_i^n (m_i \vec{r}_i \times \delta\vec{v}_i). \quad (4.61)$$

Esta expresión sólo depende de los errores de velocidad, que además se componen de forma lineal, lo cual simplifica los cálculos. Cuando los errores sistemáticos no son muy grandes se puede despreciar el efecto de las deformaciones simétricas aparentes, lo cual hará válida esta aproximación. En ella  $\mathbf{J}_G^{-1}$  tiene un efecto multiplicador o reductor según la magnitud de sus valores propios, que son a su vez la inversión de los autovalores de  $\mathbf{J}_G$  (los momentos de inercia principales). Esto significa que mientras más separados estén los marcadores entre sí, aumentando así sus momentos de inercia, más se reducirá el tamaño del error  $\delta\vec{\omega}$ .

El error del torsor cinemático es a su vez otro torsor  $\{\delta\vec{\omega}, \delta\vec{v}_G\}$ , al cual se le puede asociar un campo antisimétrico de errores de velocidad. Existirá,

por lo tanto, un eje en el espacio en el que este campo de errores de velocidad tenga una magnitud mínima. El lugar geométrico del este eje dependerá de los valores de  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$ , mediante las mismas fórmulas que determinan el eje del campo «real».

### Error aleatorio del torsor

Cuando el error sistemático de posición no es muy grande, y por lo tanto el error de velocidades está dominado por las fuentes aleatorias, los vectores  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$  proceden de realizar operaciones lineales sobre  $\delta\vec{v}_i$ , que se aproximan a variables aleatorias de media nula. Por lo tanto los vectores resultantes también serán variables aleatorias, que podrán describirse con sus respectivas matrices de covarianzas.

La forma en la que los errores de tipo aleatorio se propagan como resultado de operaciones lineales está descrita de forma completa en el apéndice A.3. Para los propósitos de esta sección basta considerar que si las imágenes de los marcadores no interfieren entre sí, el error de origen aleatorio afectará de forma independiente a cada marcador; y cuando dos vectores aleatorios independientes  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  se combinan linealmente, la matriz de covarianzas de la operación obedece a la siguiente ley (siendo  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_b$  las matrices de covarianzas de los vectores mencionados, y  $A$ ,  $B$  dos matrices —no aleatorias— cualesquiera):

$$\text{Var}(A\vec{a} + B\vec{b}) = A\Sigma_a A^T + B\Sigma_b B^T. \quad (4.62)$$

Para describir la magnitud del error en el torsor se utilizarán las matrices de covarianzas  $\Sigma_\omega$ ,  $\Sigma_{vG}$ , que dependerán de las que caracterizan los errores de velocidad de cada marcador,  $\Sigma_{vi}$ . En particular, la matriz de covarianzas de  $\delta\vec{v}_G$  será

$$\Sigma_{vG} = \text{Var}(\delta\vec{v}_G) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i^2 \Sigma_{vi}}{m^2}. \quad (4.63)$$

La fórmula (4.63) implica que  $\Sigma_{vG}$  es menor que la media de  $\Sigma_{vi}$  (denótese por  $\bar{\Sigma}_v$ ). Esto se aprecia más claramente en la forma que toma la ecuación si se asignan las mismas masas a los  $n$  marcadores:

$$\Sigma_{vG} = \frac{\sum_{i=1}^n \Sigma_{vi}}{n^2} = \frac{\bar{\Sigma}_v}{n}. \quad (4.64)$$

En cuanto a las covarianzas de  $\delta\vec{\omega}(t)$ , teniendo en cuenta la definición de (4.61),

$$\Sigma_{\omega} \approx \text{Var}(\delta\vec{\omega}) = J_G^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n m_i^2 \mathbf{A}_{ri} \Sigma_{vi} \mathbf{A}_{ri}^T \right] J_G^{-1}, \quad (4.65)$$

donde  $\mathbf{A}_{ri}$  es la matriz antisimétrica asociada al producto vectorial de  $\vec{r}_i$ , tal como se ha definido en (4.28).

La expresión (4.65) adopta una forma mucho más sencilla en el caso particular de que los errores  $\delta\vec{v}_i$  sean isótropos; es decir, cuando existe un escalar  $\sigma_v$  tal que

$$\Sigma_{vi} = \sigma_v^2 \mathbf{I}_3. \quad (4.66)$$

En este caso,

$$\sum_{i=1}^n m_i^2 \mathbf{A}_{ri} \Sigma_{vi} \mathbf{A}_{ri}^T = \sigma_v^2 \sum_{i=1}^n m_i^2 \mathbf{A}_{ri} \mathbf{A}_{ri}^T. \quad (4.67)$$

Por otra parte el tensor de inercias descrito en (4.7) puede definirse en función de  $\mathbf{A}_{ri}$ :

$$J_G = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{A}_{ri}^2. \quad (4.68)$$

Y al ser  $\mathbf{A}_{ri}$  matrices antisimétricas ( $\mathbf{A}_{ri}^T = -\mathbf{A}_{ri}$ ), aplicando este principio a (4.68) y sustituyendo en (4.67) y (4.65), finalmente resulta:

$$\Sigma_{\omega} \approx \sigma_v^2 J_G^{-1}. \quad (4.69)$$

A partir de (4.69) resulta inmediato comprobar que el error  $\delta\vec{\omega}$  estará modulado por los momentos de inercia del sistema de marcadores, como se ha comentado antes. Esto se aprecia aún más claramente si se considera un sistema de referencia cuyos ejes estén alineados con los ejes de inercia principales del conjunto de marcadores. En tal caso,

$$J_G = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (4.70)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son los autovalores de  $J_G$ , es decir los momentos de inercia principales del conjunto de marcadores. En este sistema de referencia (4.69) se simplifica a

$$\Sigma_{\omega} = \text{diag}(\sigma_{\omega_1}^2, \sigma_{\omega_2}^2, \sigma_{\omega_3}^2) = \text{diag}\left(\frac{\sigma_v^2}{\lambda_1}, \frac{\sigma_v^2}{\lambda_2}, \frac{\sigma_v^2}{\lambda_3}\right). \quad (4.71)$$

Finalmente cabe analizar cómo afecta el error cinemático aleatorio al campo de velocidades en general. El taylor-error  $\{\delta\vec{\omega}, \delta\vec{v}_G\}$  genera un campo antisimétrico de velocidades que también es aleatorio, por lo que no se puede saber con certeza su efecto. Sin embargo, bajo ciertas condiciones la región en la que el error se minimiza con una mayor probabilidad se encuentra en torno al centroide del sistema de marcadores. La demostración de este principio se presenta en el apéndice A.3.2, donde se hace un análisis más detallado sobre cómo se propagan los errores aleatorios de forma general. Las condiciones en las que esto ocurre son las siguientes:

- Fuente aleatoria del error: el error del taylor-error cinemático está dominado por los errores de velocidad, de origen aleatorio.
- Independencia entre marcadores: el error de velocidad en cada marcador no influye sobre el error de los otros marcadores.
- Equilibrio en la dispersión de los errores: los errores de velocidad de los distintos marcadores tienen matrices de covarianzas semejantes, o su valor es proporcional y se compensa con las masas asignadas de modo que  $m_i^2 \Sigma_{vi}$  se puede considerar una matriz constante.

Las dos primeras se cumplen siempre que la calibración no tenga defectos importantes y los marcadores no interfieran entre sí en las imágenes. La magnitud del error aleatorio en cada marcador depende, además de los parámetros de suavizado, de factores tales como el tamaño del marcador, su visibilidad, iluminación y enfoque, tal como se ha comentado en la sección 2.5.1.2. Por lo tanto, si estas condiciones son semejantes para todos los marcadores se podrá asumir que los errores son homogéneos. En cualquier caso, salvo que haya un desequilibrio muy importante en los errores, el mínimo error de velocidad del campo se encontrará en una región cercana a  $G$ .

#### 4.2.5.4. Error de los desplazamientos finitos

El cálculo de los desplazamientos finitos se ha descrito en la sección 4.2.2, donde el término de traslación se ha determinado directamente a partir del desplazamiento del centroide  $G$ , y la rotación se ha resuelto por el procedimiento del «cuerpo virtual».

El error en la traslación es una media ponderada de los errores de posición de los marcadores en los instantes inicial y final:

$$\delta\Delta\vec{R}_G = \delta\vec{R}_{G2} - \delta\vec{R}_{G1} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\delta\vec{R}_{i2} - \delta\vec{R}_{i1})}{m}. \quad (4.72)$$

Los errores en cada instante pueden compensarse mutuamente si están correlacionados positivamente, o tener un efecto aditivo en el caso contrario.

Con el método de análisis propuesto, la rotación queda determinada por el vector de Rodrigues  $\vec{\Omega}$ . Sin embargo no es conveniente definir el error de rotación directamente a través de su incremento  $\delta\vec{\Omega}$ . El módulo de este vector es  $\tan(\phi/2)$ , que no se comporta de manera lineal respecto a la magnitud del giro (el ángulo  $\phi$ ), por lo que errores que dieran lugar a discrepancias semejantes en la rotación (valores de  $\delta\phi$  parecidos) podrían reflejarse en valores de  $\delta\vec{\Omega}$  muy dispares. Concretamente, se puede apreciar que

$$\frac{\partial |\vec{\Omega}|}{\partial \phi} \delta\phi = \frac{1 + \Omega^2}{2} \delta\phi. \quad (4.73)$$

Una forma más adecuada de representar el error de la rotación es mediante las rotaciones diferenciales  $\delta\vec{\Phi}_1$ ,  $\delta\vec{\Phi}_2$  asociadas al error de origen en la posición inicial y final, respectivamente, que compuestas con la rotación «real»  $\vec{\Omega}$  darían lugar a la rotación observada,  $\vec{\Omega} + \delta\vec{\Omega}$  (figura 4.7). Estos términos son el error de unas rotaciones  $\vec{\Phi}_1$ ,  $\vec{\Phi}_2$  que nominalmente tienen valor nulo, por lo que su módulo sí se comporta de forma lineal respecto a  $\phi$ :

$$\frac{\partial |\vec{\Phi}_1|}{\partial \phi} \delta\phi = \frac{\partial |\vec{\Phi}_2|}{\partial \phi} \delta\phi = \frac{\delta\phi}{2}. \quad (4.74)$$

A continuación se hace el desarrollo para el error  $\delta\vec{\Phi}_2$ , debido a los errores de origen finales  $\delta\vec{r}_{i2}$ ; se obvia el desarrollo para  $\delta\vec{\Phi}_1$ , que es análogo a éste.

Para estimar el error en el vector de Rodrigues  $\vec{\Omega}$  que define cualquier rotación se puede partir de la fórmula que lo relaciona con el momento cinético y la matriz de inercia virtuales, análoga a (4.6) para los desplazamientos infinitesimales:

$$J_{vG}\vec{\Omega} = \vec{L}_{vG} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{vi} \times \Delta\vec{v}_{vi}. \quad (4.75)$$

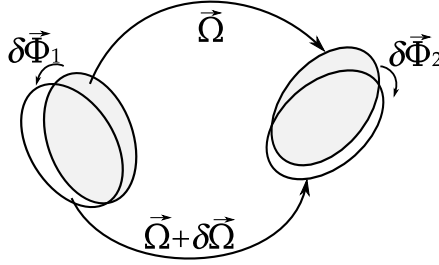


Figura 4.7: Las rotaciones diferenciales  $\delta\vec{\Phi}_1$ ,  $\delta\vec{\Phi}_2$  representan en forma de vector de Rodrigues los errores de rotación asociados a la posición inicial y final, respectivamente. Al componerse con la rotación «real»  $\vec{\Omega}$  dan lugar a otro término  $\delta\vec{\Omega}$ , mediante operaciones no lineales.

En el caso que nos ocupa, el vector  $\vec{\Omega}$  de la ecuación (4.75) se corresponde con la rotación  $\vec{\Phi}_2$  desde la posición final, cuyo valor en ausencia de errores sería nulo. Para esa rotación nula, el cuerpo virtual coincide con el real ( $\vec{r}_{vi} = \vec{r}_{i2}$ ,  $J_{vG} = J_{G2}$ ), y los desplazamientos virtuales son igualmente nulos ( $\Delta\vec{r}_{vi} = 0$ ). Derivando (4.75) con estos valores en función de  $\vec{r}_{i2}$ ,

$$J_{G2}\delta\vec{\Phi}_2 \approx \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i2} \times \delta\Delta\vec{r}_{vi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i2} \times \delta\vec{r}_{i2}. \quad (4.76)$$

Y despejando la ecuación se obtiene:

$$\delta\vec{\Phi}_2 \approx \frac{1}{2} J_{G2}^{-1} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i2} \times \delta\vec{r}_{i2}. \quad (4.77)$$

Es inmediato comprobar que la rotación diferencial asociada a la posición inicial tiene una fórmula análoga:

$$\delta\vec{\Phi}_1 \approx \frac{1}{2} J_{G1}^{-1} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i1} \times \delta\vec{r}_{i1}. \quad (4.78)$$

Esta solución es prácticamente idéntica a la fórmula (4.61) para el error en la velocidad angular, sustituyendo el error de velocidad por  $\delta\vec{r}_{i1}$  o  $\delta\vec{r}_{i2}$ , y añadiendo el factor  $1/2$ . Por lo tanto, para unos errores de origen dados, los aspectos que influyen sobre el error de velocidad angular son los mismos que influyen sobre el error en las rotaciones finitas.

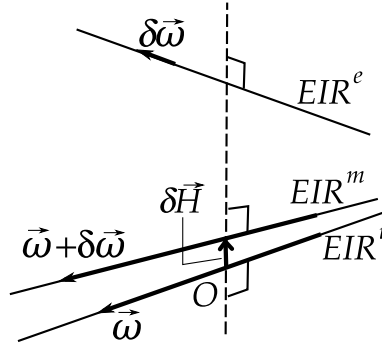


Figura 4.8: Error en el EIR.

Si se desea, el efecto de  $\delta\vec{\Phi}_1$  y  $\delta\vec{\Phi}_2$  sobre  $\vec{\Omega}$  se puede calcular derivando la composición de rotaciones correspondiente, tal como se muestra en la figura 4.7. Desarrollando dicha derivada a partir de la fórmula (4.39),

$$\begin{aligned} \delta\vec{\Omega} &\approx \frac{\partial((-\vec{\Phi}_1 \oplus \vec{\Omega}) \oplus \vec{\Phi}_2)}{\partial\vec{\Phi}_1} \delta\vec{\Phi}_1 + \frac{\partial((-\vec{\Phi}_1 \oplus \vec{\Omega}) \oplus \vec{\Phi}_2)}{\partial\vec{\Phi}_2} \delta\vec{\Phi}_2 = \\ &= (\delta\vec{\Phi}_2 - \delta\vec{\Phi}_1) + (\vec{\Omega} \cdot (\delta\vec{\Phi}_2 - \delta\vec{\Phi}_1))\vec{\Omega} - \vec{\Omega} \times (\delta\vec{\Phi}_2 + \delta\vec{\Phi}_1). \end{aligned} \quad (4.79)$$

#### 4.2.5.5. Error en el EIR

Debido al error cinemático el EIR del movimiento medido será distinto del real. Concretamente será el eje del campo de velocidades debido a la suma del torsor cinemático real y el torsor de errores.

Tal como se ha expuesto en la sección 4.2.3, al sumar dos campos de velocidades los EIR de los campos que se suman comparten una perpendicular común con el EIR del campo resultante. Esto queda representado en la figura 4.8 para la suma del campo de velocidades teórico (cuyo eje se denota como  $EIR^t$ ) y el campo de errores (cuyo eje es  $EIR^e$ ), que da lugar al campo medido (con  $EIR^m$  como eje).

Para errores pequeños  $EIR^m$  será naturalmente muy parecido a  $EIR^t$ . Su discrepancia se puede formular en términos de un error en el vector unitario del eje,  $\delta\vec{u}$ , más una separación entre los dos ejes,  $\delta\vec{H}$ .



### Error en la orientación

Derivando la fórmula (4.11) en función de  $\vec{\omega}$  y despreciando los términos diferenciales de orden cuadrático o superior, se deduce que

$$\delta\vec{u} \approx \frac{\delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} - \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \left( \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \times \left( \frac{\delta\vec{\omega} \times \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right). \quad (4.80)$$

El producto vectorial entre los vectores unitarios de  $EIR^t$  y  $EIR^m$  será un vector paralelo a su común perpendicular, con módulo igual al seno del ángulo formado entre ellos (para ángulos pequeños, este módulo será aproximadamente igual al ángulo en radianes):

$$\delta\alpha\vec{n} \approx \vec{u} \times (\vec{u} + \delta\vec{u}) = \vec{u} \times \delta\vec{u} = \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2}. \quad (4.81)$$

En (4.81) se observa que el error de orientación del EIR es proporcional a la componente del error  $\delta\vec{\omega}$  perpendicular a  $\vec{\omega}$ , e inversamente proporcional al módulo de  $\vec{\omega}$ . Así pues, el error en la orientación del eje será tanto menor cuanto mayor sea la velocidad angular.

### Separación entre los ejes

La separación entre  $EIR^t$  y  $EIR^m$  es la distancia  $\delta\vec{H}$  que hay entre sus respectivos puntos de corte con la recta perpendicular a ambos. Este vector será el resultado de derivar la fórmula (2.13) cuando el punto resultante sea precisamente la intersección de  $EIR^t$  con dicha perpendicular común. Al realizar esta operación, despreciando de nuevo los términos diferenciales de orden cuadrático o superior,

$$\delta\vec{OH} \approx \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{v}_o}{|\vec{\omega}|^2} + \frac{\delta\vec{\omega} \times \vec{v}_o}{|\vec{\omega}|^2} - 2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_o}{|\vec{\omega}|^2} \left( \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right). \quad (4.82)$$

Para conseguir que  $\delta\vec{OH}$  sea la mínima separación  $\delta\vec{H}$  que buscamos, supongamos a efectos teóricos que el valor exacto del error cinemático es conocido, y por lo tanto se puede calcular el lugar geométrico de  $EIR^e$ . Considérese entonces que  $O$  es el punto del  $EIR^t$  que se encuentra a la mínima distancia de  $EIR^e$ , y por tanto en la perpendicular común a ambos ejes (véase la figura 4.8).

Como en este supuesto  $O$  pertenece a  $EIR^t$ , en movimientos de rotación pura como el que nos ocupa  $\vec{v}_o = 0$ , ya que  $O$  es un punto del eje de rotación;

en el caso más general será un vector paralelo al eje, y el factor de escala entre  $\vec{v}_o$  y  $\vec{\omega}$  será el paso  $p_s$  definido en (4.13). Por otra parte,  $\delta\vec{v}_o$  puede obtenerse del error de velocidad en cualquier otro punto. Para que el resultado pueda interpretarse en términos de las relaciones geométricas entre los ejes de rotación, tomemos un punto  $E$  del  $EIR^e$ , en el que el error de velocidad  $\delta\vec{v}_E$  es mínimo. Entonces  $\delta\vec{v}_o$  será

$$\delta\vec{v}_o = \delta\vec{v}_E + \vec{OE} \times \delta\vec{\omega}. \quad (4.83)$$

Aplicando estos principios (4.82) daría lugar a la distancia mínima entre  $EIR^t$  y  $EIR^m$ :

$$\delta\vec{H} = \delta\vec{OH} \approx \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{v}_E}{|\vec{\omega}|^2} + \frac{\vec{\omega} \times (\vec{OE} \times \delta\vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} + \frac{\delta\vec{\omega} \times \vec{v}_o}{|\vec{\omega}|^2}. \quad (4.84)$$

En (4.84) se observan tres términos del error, todos ellos en la dirección perpendicular a  $EIR^t$ ,  $EIR^m$  y  $EIR^e$ :

$$\delta\vec{H}_1 = \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{v}_E}{|\vec{\omega}|^2}. \quad (4.85)$$

$$\delta\vec{H}_2 = \frac{\vec{\omega} \times (\vec{OE} \times \delta\vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} = \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{OE}. \quad (4.86)$$

$$\delta\vec{H}_3 = \frac{\delta\vec{\omega} \times \vec{v}_o}{|\vec{\omega}|^2} = p_s \frac{\delta\vec{\omega} \times \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} = -p_s \delta\alpha \vec{n}. \quad (4.87)$$

El primer término,  $\delta\vec{H}_1$ , es directamente proporcional al error mínimo de velocidad  $\delta\vec{v}_E$ , e inversamente proporcional a la velocidad angular. Para minimizarlo será necesario reducir los errores de velocidad del campo cinemático (por ejemplo aumentando el número de marcadores), si bien su efecto también se reducirá cuando aumente la velocidad angular del sistema.

En el segundo término,  $\delta\vec{H}_2$ , aparece  $\vec{OE}$  multiplicado por un factor proporcional al error  $\delta\vec{\omega}$  en la dirección de  $\vec{\omega}$ . En consecuencia este término se reduce cuando el  $EIR^e$  está cerca de  $EIR^t$  (cuando  $\vec{OE}$  es pequeño). Si se puede tener cierto control sobre el campo de errores o la ubicación del eje de rotación, es recomendable hacer coincidir los puntos de error de velocidad mínimo con el EIR. Por ejemplo, si el error cinemático es de naturaleza fundamentalmente aleatoria, se demuestra en el apéndice A.3.2 que el lugar geométrico en el que se puede esperar un error mínimo es en torno al centroide

de los marcadores; por lo tanto conviene configurar el sistema de marcadores de modo que se encuentre centrado alrededor del eje del movimiento.

El tercer término  $\delta\vec{H}_3$  es proporcional al ángulo formado entre  $EIR^t$  y  $EIR^m$ , así como al paso del campo cinemático. En movimientos de rotación pura ( $p_s = 0$ ) esta componente del error no tiene relevancia.

Para esta explicación teórica de  $\delta\vec{H}$  se ha hecho un cálculo de  $\delta\vec{v}_o$  basado en el error del punto  $E$  en el  $EIR^e$ . Sin embargo este punto es en general desconocido, por lo que es más práctico emplear un punto bien determinado, como el centroide  $G$ . Para las estimaciones que se realizan en este trabajo, por lo tanto, se utilizará una fórmula equivalente a (4.84), pero referida a los valores en  $G$  y en la que se omite el término relacionado con el paso helicoidal, por trabajarse con rotaciones puras:

$$\delta\vec{H} \approx \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{v}_G}{|\vec{\omega}|^2} + \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{OG}. \quad (4.88)$$

### Error de representación

En la práctica el punto donde el  $EIR^t$  y el  $EIR^m$  están más próximos es desconocido. Por lo tanto el punto que define el eje no es el definido como  $O$  en la figura 4.8, sino el más cercano a  $G$ , que llamaremos  $H_G$ , y que viene definido por la fórmula (4.10). Su incremento diferencial debido al error cinemático no será la distancia mínima  $\delta\vec{H}$ , sino el vector  $\delta\vec{GH}$  que resulta de aplicar (4.82) utilizando  $\delta\vec{v}_G$  y  $\vec{v}_G$ .

La figura 4.9 representa la relación entre los errores en la ubicación del EIR según la situación de  $G$  respecto a  $O$ . Entre  $\vec{v}_G$  y  $\vec{v}_o$  hay una diferencia igual al producto vectorial  $\vec{\omega} \times \vec{OG}$ . Asimismo, entre los errores de velocidad  $\delta\vec{v}_G$  y  $\delta\vec{v}_o$  la diferencia es  $\delta\vec{\omega} \times \vec{OG}$ . Como la fórmula (4.82) es lineal respecto a  $\vec{v}_o$  y  $\delta\vec{v}_o$ ,

$$\begin{aligned} \delta\vec{GH} - \delta\vec{H} &= \frac{\vec{\omega} \times (\delta\vec{\omega} \times \vec{OG})}{|\vec{\omega}|^2} + \frac{\delta\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OG})}{|\vec{\omega}|^2} - 2 \frac{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OG})}{|\vec{\omega}|^2} \left( \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) \\ &= \left( \frac{\vec{OG} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) \delta\vec{\omega} - \left( \frac{\vec{OG} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) \left( \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) \vec{\omega} \\ &\quad + \left( \frac{\vec{OG} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) \vec{\omega} - \left( \frac{\vec{OG} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) \left( \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \right) \vec{\omega}. \quad (4.89) \end{aligned}$$

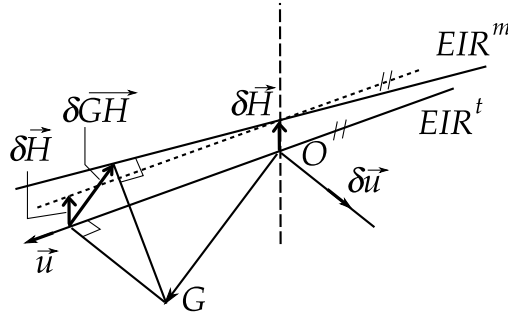


Figura 4.9: Discrepancia de la distancia mínima entre  $EIR^t$  y  $EIR^m$  ( $\delta \vec{H}$ ) con el incremento diferencial de  $\vec{GH}$  ( $\delta \vec{GH}$ ), según la ubicación del centroide  $G$ .

Y considerando las definiciones de  $\vec{u}$  y  $\delta \vec{u}$  en (4.11) y (4.80), esta fórmula se reduce a

$$\delta \vec{GH} - \delta \vec{H} = (\vec{OG} \cdot \vec{u}) \delta \vec{u} + (\vec{OG} \cdot \delta \vec{u}) \vec{u}. \quad (4.90)$$

Es decir, la discrepancia de  $\delta \vec{GH}$  respecto a  $\delta \vec{H}$  depende de la proyección de  $\vec{OG}$  sobre en el plano común a  $EIR^t$  y  $EIR^m$ : la componente de esta proyección en la dirección de  $EIR^t$  ( $\vec{u}$ ) añade una componente en la dirección de  $\delta \vec{u}$  (perpendicular a  $\vec{u}$ ), y viceversa. Estas componentes añadidas son perpendiculares a  $\delta \vec{H}$ , por lo que  $\delta \vec{GH}$  siempre tendrá una longitud mayor que la separación mínima entre los ejes.

Esto significa que cuando se calcula el punto  $H_G$  del EIR más cercano a  $G$ , el error cinemático influye de dos maneras. Por una parte hace que el eje al que se refiere esté desalineado y separado una distancia  $\delta \vec{H}$  respecto al eje teórico, como se ha visto. Pero el incremento que sufrirá el vector  $\vec{GH}$  como consecuencia no será igual a  $\delta \vec{H}$ , sino mayor. Esta discrepancia es debida a la falta de paralelismo entre  $EIR^t$  y  $EIR^m$ , de tal modo que cuanto más alejado está  $G$  (y por lo tanto  $H_G$ ) del lugar en que se cruzan (el punto  $O$ ), más se aprecia la divergencia entre los ejes, aunque su separación mínima es la misma.

A efectos de representación esto puede ser problemático. Por ejemplo, el lugar geométrico ocupado por el EIR de un cuerpo a lo largo del tiempo es una superficie reglada (el llamado axoide), pero cuando se quiere analizar un movimiento plano, como es el caso en este trabajo, se suele utilizar la curva

que traza el axoide sobre el plano de movimiento. Si esta curva se calcula a partir de  $H_C$  el resultado será distinto en función de la posición de  $G$  respecto a los ejes. Por lo tanto es recomendable diseñar el experimento de forma que  $G$  esté cercano al punto teórico  $O$  donde  $EIR^t$  y  $EIR^m$  están más próximos.

Este punto depende de la naturaleza del error, y por lo tanto no se puede saber su ubicación exacta, pero aun así es posible controlar la separación de  $G$  respecto a él. En primer lugar  $O$  es un punto del EIR, por lo que si se tiene una idea previa de por dónde se encuentra el eje del movimiento, mientras más se acerque  $G$  a él más se acotará el vector de  $\overrightarrow{OG}$ . Esta recomendación aumenta en importancia cuando el error es fundamentalmente aleatorio y se minimiza en el entorno de  $G$ . En ese caso acercar  $G$  al EIR no reducirá sólo la discrepancia entre  $\delta\overrightarrow{GH}$  y la separación mínima  $\delta\vec{H}$ , sino la propia magnitud de  $\delta\vec{H}$  esperada, como ya se ha explicado anteriormente.

#### 4.2.5.6. Error cinemático relativo

En este trabajo se desea caracterizar la flexión lumbar, que es un movimiento relativo entre dos segmentos (pelvis y tórax). Este movimiento no se mide de forma directa, sino restando los torsesores cinemáticos asociados a cada cuerpo. Por lo tanto, si dichos torsesores se ven afectados por un error, el torsesor del movimiento relativo tendrá un error igual a la suma de los anteriores. Si  $\{\vec{\omega}_P, \vec{v}_{GP}\}$  es el torsesor cinemático de la pelvis,  $\{\vec{\omega}_T, \vec{v}_{GT}\}$  es el del tórax, y sus respectivos errores son  $\{\delta\vec{\omega}_P, \delta\vec{v}_{GP}\}$  y  $\{\delta\vec{\omega}_T, \delta\vec{v}_{GT}\}$ , el torsesor del error relativo (tórax respecto a pelvis) expresado en un punto arbitrario  $Q$  será

$$\delta\vec{\omega}_R = \delta\vec{\omega}_T - \delta\vec{\omega}_P, \quad (4.91)$$

$$\delta\vec{v}_{QR} = \delta\vec{v}_{GT} - \delta\vec{v}_{GP} + \delta\vec{\omega}_T \times \overrightarrow{G_TQ} - \delta\vec{\omega}_P \times \overrightarrow{G_PQ}. \quad (4.92)$$

Al ser ésta una operación lineal, si el error de ambos torsesores componentes es aleatorio, también lo será el del torsesor relativo. Supóngase que el error en velocidad angular de la pelvis y el tórax está caracterizado por las matrices de covarianzas  $\Sigma_{\omega}^P$  y  $\Sigma_{\omega}^T$ , y que las matrices para los errores de velocidad lineal en sus centroides son  $\Sigma_{vG}^P$  y  $\Sigma_{vG}^T$ . La suma (o la resta) de ambos torsesores en  $Q$  tendrá también un error aleatorio, cuyas matrices de covarianzas se podrán calcular a partir de las anteriores, utilizando las matrices antisimétricas  $A_{PQ}$  y  $A_{TQ}$  asociadas a  $\overrightarrow{G_PQ}$  y  $\overrightarrow{G_TQ}$ , respectivamente

$$\Sigma_{\omega R} = \Sigma_{\omega T} + \Sigma_{\omega P}, \quad (4.93)$$

$$\Sigma_{vQR} = \Sigma_{vGT} + \Sigma_{vGP} + A_{TQ}\Sigma_{\omega T}A_{TQ}^T + A_{PQ}\Sigma_{\omega P}A_{PQ}^T. \quad (4.94)$$

La ecuación (4.88) expresa el mínimo error en la ubicación del EIR de un cuerpo, dado el error de su torsor cinemático en el centroide y la distancia de éste respecto al eje. Dicha expresión se puede aplicar también al error del EIR relativo, cuando éste se calcula a partir de su torsor cinemático en  $Q$ . Si el vector  $\overrightarrow{QH_R}$  expresa la separación entre el punto  $Q$  y el EIR relativo,

$$\delta\overrightarrow{QH_R} \approx \frac{\vec{\omega}_R \times \delta\vec{v}_{QR}}{|\vec{\omega}_R|^2} - \frac{\vec{\omega}_R \cdot \delta\vec{\omega}_R}{|\vec{\omega}_R|^2} \overrightarrow{QH_R}. \quad (4.95)$$

Desarrollando (4.95) a partir de (4.91) y (4.92),

$$\begin{aligned} \delta\overrightarrow{QH_R} \approx & \frac{\vec{\omega}_R \times \delta\vec{v}_{GT}}{|\vec{\omega}_R|^2} - \frac{\vec{\omega}_R \cdot \delta\vec{\omega}_T}{|\vec{\omega}_R|^2} (\overrightarrow{QH_R} - \overrightarrow{G_TQ}) \\ & - \frac{\vec{\omega}_R \times \delta\vec{v}_{GP}}{|\vec{\omega}_R|^2} + \frac{\vec{\omega}_R \cdot \delta\vec{\omega}_P}{|\vec{\omega}_R|^2} (\overrightarrow{QH_R} - \overrightarrow{G_PQ}) \\ & + \frac{\vec{\omega}_R \cdot \overrightarrow{G_TQ}}{|\vec{\omega}_R|^2} \delta\vec{\omega}_T - \frac{\vec{\omega}_R \cdot \overrightarrow{G_PQ}}{|\vec{\omega}_R|^2} \delta\vec{\omega}_P. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Esta ecuación se simplifica si se considera un movimiento plano, y además los centroides  $G_T$  y  $G_P$  coinciden en un mismo plano perpendicular a los EIR. Al ser todas las velocidades angulares paralelas:

$$\vec{\omega}_R = \frac{\omega_R}{\omega_T} \vec{\omega}_T = \frac{\omega_R}{\omega_P} \vec{\omega}_P. \quad (4.97)$$

Además, si se escoge cualquier punto  $Q$  en el mismo plano que  $G_T$  y  $G_P$ , en las condiciones expuestas  $\overrightarrow{G_PQ}$  y  $\overrightarrow{G_TQ}$  serán perpendiculares a  $\vec{\omega}_R$ , y los dos últimos sumandos de (4.96) se anularán, con lo cual quedará

$$\begin{aligned} \delta\overrightarrow{QH_R} \approx & \frac{\omega_T}{\omega_R} \left( \frac{\vec{\omega}_T \times \delta\vec{v}_{GT}}{|\vec{\omega}_T|^2} - \frac{\vec{\omega}_T \cdot \delta\vec{\omega}_T}{|\vec{\omega}_T|^2} \overrightarrow{G_TH_R} \right) \\ & - \frac{\omega_P}{\omega_R} \left( \frac{\vec{\omega}_P \times \delta\vec{v}_{GP}}{|\vec{\omega}_P|^2} - \frac{\vec{\omega}_P \cdot \delta\vec{\omega}_P}{|\vec{\omega}_P|^2} \overrightarrow{G_PH_R} \right). \end{aligned} \quad (4.98)$$

La fórmula (4.98) contiene sendos términos semejantes a los del error en el EIR propio de cada cuerpo, pero en este caso la excentricidad de los centroides se refiere al EIR relativo. Además cada término está multiplicado por la razón de velocidades angulares entre el cuerpo correspondiente y el movimiento relativo. La mejor opción para minimizar este error, por tanto, consiste en acercar los centroides de ambos cuerpos al eje del movimiento relativo, y en caso de tener que priorizar, acercar más el del cuerpo que gira más rápido.

#### 4.2.6. Diseño experimental para minimizar los errores

El anterior desarrollo teórico lleva a las siguientes recomendaciones a la hora de diseñar un sistema de marcadores para el análisis cinemático de cuerpos rígidos:

- **Emplear un número alto de marcadores.** Aunque se requiere un mínimo de tres marcadores no alineados para realizar el análisis, es conveniente emplear un número más elevado para minimizar el error de origen aleatorio en el campo de velocidades. El valor mínimo de este error se encontrará con la máxima probabilidad en el entorno del centro de gravedad del conjunto, y su varianza será inversamente proporcional al número de marcadores.
- **Procurar la mayor inercia posible del conjunto de marcadores.** No basta con emplear un número alto de marcadores, sino que se deben disponer separados para minimizar el error de origen aleatorio en la velocidad angular. La proyección de este error en una dirección determinada será inversamente proporcional al momento de inercia del conjunto de marcadores en esa dirección. Por eso, si la nube de marcadores está muy poco separada de una recta en el espacio, habrá un error grande en esa dirección (figura 4.10).
- **Centrar los cuerpos en el espacio calibrado.** Se ha discutido la repercusión en el cálculo cinemático de distintos errores de origen sistemático: los errores invariantes en el tiempo no influyen sobre este cálculo, y los artefactos se han de atajar controlando el movimiento realizado, ya que no son un error del análisis, sino un movimiento real que interfiere sobre el que se desea medir. El otro tipo de error sistemático discutido es el provocado por defectos en la calibración o el sistema proyectivo, y éste suele tener un efecto local, simétrico y contrapuesto en las distintas regiones del espacio calibrado. Si los marcadores de un cuerpo ocupan

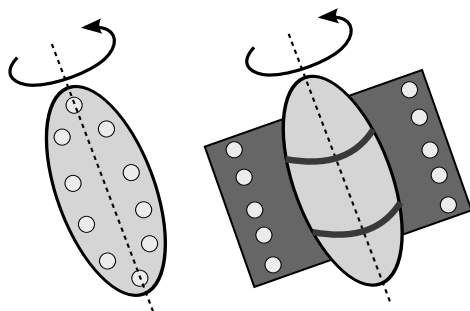


Figura 4.10: Aumento de la inercia en un sistema de marcadores. El sistema de la izquierda tiene muy poca inercia alrededor del eje señalado, y el error de la velocidad angular en ese eje será grande. Con el mismo número de marcadores, a la derecha se ha añadido un soporte que sobresale del cuerpo y permite aumentar la inercia del sistema (reduciéndose por tanto el error) en ese eje.

en un instante la parte central de este espacio, el resultado será equivalente a una deformación simétrica del sistema de marcadores, que se ve compensada con el procedimiento de cálculo.

- **Disponer el sistema de marcadores centrado con el EIR.** De este modo el campo de errores aleatorios de velocidad tendrá su eje cercano al EIR, y se reducirá la separación entre el EIR real y el medido.
- **Realizar los movimientos a una velocidad de giro alta.** De esta manera el error relativo de la velocidad angular disminuirá, y se minimizará el error en la determinación del EIR. La velocidad de giro a realizar tendrá que ser acorde con la velocidad de grabación: mientras más alta sea la frecuencia de muestreo de las cámaras, más rápidos podrán ser los movimientos grabados sin que se pierda la condición de «desplazamiento infinitesimal» que se ha considerado para todo el desarrollo teórico. Teniendo en cuenta esta limitación, mientras más alta sea la velocidad de giro más preciso será el cálculo de los ejes de rotación.



## 4.3. Desarrollo experimental

### 4.3.1. Herramientas de medida y análisis

Los métodos de análisis cinemático presentados difieren de los comúnmente usados en el estudio de los movimientos humanos (véase la revisión de Cappozzo et al. (2005) para los protocolos de medida más habituales). Esta propuesta nace de las limitaciones observadas en las técnicas comunes para medir con precisión y controlar el error del EIR, como se ha expuesto al comienzo de este capítulo. Su utilidad, por tanto, está sujeta a que el desarrollo teórico que fundamenta el método se pueda verificar en condiciones experimentales. Por esta razón, antes de estudiar la flexión del tronco con usuarios se ha realizado una batería de pruebas de validación y control de errores, que verificasen la aptitud del método para esta aplicación.

Los detalles de los seis experimentos llevados a cabo se exponen en los apartados siguientes. Todos ellos, tanto los de validación del método como las medidas con usuarios y sillas, se han realizado con el sistema de fotogrametría Kinescan-IBV en el Laboratorio de Movimientos Humanos del Instituto de Biomecánica de Valencia. Se emplearon dos cámaras fijas sincronizadas, equipadas con filtros infrarrojos, grabando a una velocidad de 25 fotogramas por segundo (fps). Las cámaras estaban a 3,4 metros de altura del suelo, inclinadas 45° respecto al plano horizontal y separadas 5 metros entre sí. El espacio de trabajo se calibró a través del método DLT (Abdel-Aziz & Karara, 1971), a partir de las coordenadas (conocidas previamente) de un conjunto de 12 marcadores, dispuestos en una estructura fija.

Para los experimentos de validación y control de errores aleatorios se utilizó, como patrón de movimiento controlado, un mecanismo sencillo con un eje fijo. Este mecanismo estaba formado por una barra cilíndrica apoyada sobre rodamientos en una estructura fija, más una tabla atornillada a la barra. Sobre esta tabla se fijaron los distintos sistemas de marcadores empleados en las pruebas, de tal modo que su movimiento era una rotación perfecta alrededor de un eje fijo.

Para los experimentos con sujetos, siguiendo los principios expuestos en la sección 4.2.6, se utilizaron dos sistemas de marcadores rígidos, diseñados para fijarlos externamente al tórax y la pelvis. Ambos sistemas estaban compuestos por sendas barras ligeras y rígidas de aluminio, dobladas para formar una estructura con un área mayor que la de los segmentos corporales, sobre cada una de las cuales se fijaron 8 marcadores (figura 4.11).

En todas las pruebas se usaron marcadores retrorreflectantes de 25 mm de diámetro. Las grabaciones se hicieron en el laboratorio a oscuras, con focos in-

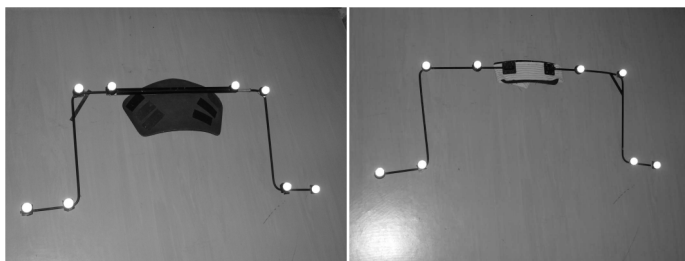


Figura 4.11: Sistema de marcadores empleado para el tórax (izquierda) y la pelvis (derecha).

frarrosos alineados con el eje focal de cada cámara, para que en las imágenes grabadas se distinguiese claramente el reflejo de los marcadores de cualquier otra fuente de luz. La posición de cada marcador sobre las imágenes se definió a través de los centroides de las áreas iluminadas, y a partir de estas posiciones se definieron las coordenadas 3-D de los marcadores.

Partiendo de dichas coordenadas, mediante los métodos de análisis presentados en la sección 4.2 se calcularon los parámetros cinemáticos relevantes para cada experimento. Estos cálculos se hicieron con el software matemático MATLAB de The MathWorks<sup>TM</sup>, en un PC con Windows XP.

En los experimentos de validación se hicieron pruebas estadísticas para dimensionar el error instrumental y para comprobar si las desviaciones de los resultados respecto a las hipótesis de partida podían explicarse como efectos de dicho error. Estas pruebas pueden clasificarse en dos grupos, según la naturaleza de las variables a contrastar:

- Variables que podían oscilar entre valores positivos y negativos en torno a cero (por ejemplo la proyección de cualquier vector sobre uno de los ejes de coordenadas). Para estas variables se hicieron pruebas T, en las que se comprobó que pudiesen proceder de una distribución con media nula. A algunas de ellas también se les hizo una prueba bilateral de  $\chi^2$  para comprobar que su variabilidad coincidía con la esperada. Los valores que se contrastaron en estas pruebas fueron las varianzas de la muestra y las teóricas, pero las medidas de variabilidad que se reflejan en las tablas de resultados son las desviaciones típicas (raíz cuadrada de las varianzas). Al contrario que las varianzas, las desviaciones típicas tienen las mismas unidades que la variable, y pueden compararse con el orden de magnitud de los resultados medios.

- Valores absolutos de variables (por ejemplo los módulos de los vectores). Dado un vector que varía de forma aleatoria e insesgada, la media de su módulo al cuadrado equivale a la varianza total de sus componentes, que es la traza de su matriz de covarianzas (véase el desarrollo matemático en el apéndice A.3). Por ejemplo, dado el vector variable  $\vec{\xi} = (x, y, z)$ ,

$$E\left(|\vec{\xi}|^2\right) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \text{tr}(\Sigma_{\vec{\xi}}). \quad (4.99)$$

En los experimentos que analizaron este tipo de variables, su magnitud se parametrizó en forma de media cuadrática (RMS). Este valor al cuadrado es la media muestral del cuadrado de la variable:

$$\text{RMS}^2(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_i x_i^2}{n}. \quad (4.100)$$

Esto es lo mismo que decir que la RMS al cuadrado es el mejor estimador del parámetro representado en (4.99). Así pues, a estas variables se les aplicó una prueba de  $\chi^2$ , en la que se contrastó la RMS al cuadrado con la varianza teórica del error.

En todas las pruebas el nivel de significación utilizado fue  $\alpha = 0,05$ . El tratamiento estadístico se hizo con MATLAB y SPSS 14.0 de SPSS Inc.

### 4.3.2. Experimento 1: Validación de la teoría de propagación de errores

#### 4.3.2.1. Diseño del experimento

En primer lugar se realizó una validación experimental de la teoría de propagación de errores en el análisis cinemático. El movimiento registrado era el de un sistema rígido de 16 marcadores ubicados sobre una tabla que giraba respecto a un eje fijo, con dos marcadores que se ubicaron en sendos extremos de la barra. Los marcadores de la tabla estaban uniformemente distribuidos, en 2 filas de 8 marcadores, con 70 mm de separación entre cada pareja de marcadores de una misma fila, y 160 mm de separación entre las filas; la disposición de los marcadores era simétrica respecto al eje (figura 4.12).

Se tomó un registro del movimiento de los marcadores, consistente en 15 ciclos de giro oscilatorio. Se realizó un análisis cinemático de este movimiento, tomando un sistema de referencia con el origen de coordenadas (punto O)

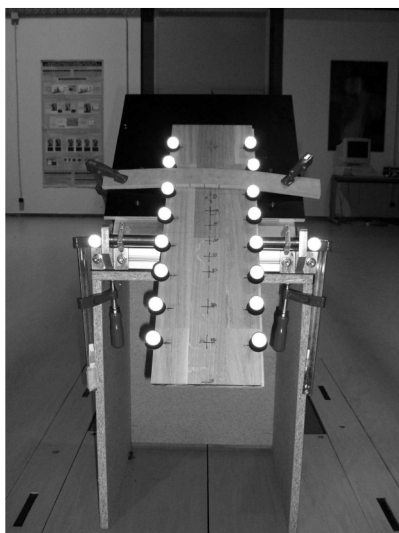


Figura 4.12: Sistema de marcadores del Experimento 1.

en el punto medio de la barra, con el eje  $Z$  paralelo al eje de la barra, el eje  $X$  perpendicular al eje vertical del laboratorio, y el eje  $Y$  en sentido ascendente (figura 4.13).

#### 4.3.2.2. Análisis

Se definieron todas las combinaciones posibles de 2 ó más columnas de marcadores entre las 8 existentes (figura 4.14), y se realizó un análisis cinemático de los 247 subconjuntos de marcadores resultantes (subconjuntos pares y simétricos respecto al plano  $XY$ , de 4 a 16 marcadores).

Para comprobar la validez de las fórmulas de error presentadas en la sección 4.2.5 era necesario tener unas estimaciones fiables de los errores de partida. Para lograr esto se requeriría disponer de información precisa sobre el movimiento real. Como aproximación al mismo se consideraron los resultados de un análisis con los 16 marcadores, en el que los valores óptimos  $\vec{R}_i^*(t)$ ,  $\vec{v}_i^*(t)$  se obtuvieron de suavizar las coordenadas  $\vec{R}_i(t)$  medidas.

Para los demás análisis se tomaron las posiciones  $\vec{R}_i(t)$  sin suavizar, y las velocidades  $\vec{v}_i(t)$  se calcularon por diferencias finitas:

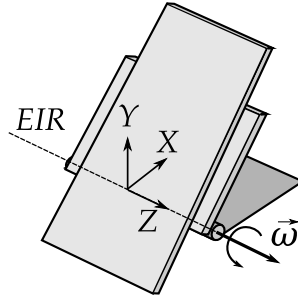


Figura 4.13: Representación del sistema de referencia respecto a la tabla y el eje.

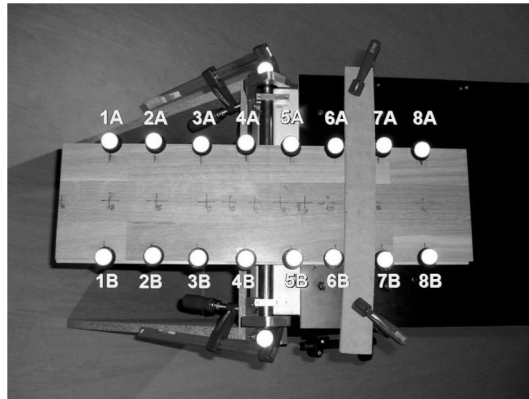


Figura 4.14: Las 8 columnas de marcadores en el Experimento 1.

$$\vec{v}_i(t) = \frac{\vec{R}_i(t + \Delta t) - \vec{R}_i(t)}{\Delta t}. \quad (4.101)$$

El valor de  $\Delta t$  era el intervalo de tiempo entre dos fotogramas consecutivos; dado que las cámaras grababan a una frecuencia de 25 fps, este intervalo era de 0,04 s.

En el caso de que no existiesen errores en las posiciones, esta aproximación introduciría un error en el cálculo de la velocidad, cuya magnitud dependería de las derivadas de orden superior. El desarrollo de la serie de Taylor de la función  $\vec{R}(t + \Delta t)$ :

$$\vec{R}(t + \Delta t) = \vec{R}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \vec{o}(\Delta t), \quad (4.102)$$

siendo  $\vec{o}(\Delta t)$  una función vectorial que tiende asintóticamente a un valor despreciable frente a  $\Delta t$ , cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  (si la función es continuamente diferenciable). Concretamente,

$$\vec{o}(\Delta t) = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} \frac{d^k(\vec{R}(t))}{dt^k} \Delta t^k \right). \quad (4.103)$$

Al calcular la velocidad mediante (4.101), por lo tanto, se introduce un error igual a

$$\delta \vec{v}_i(t) = \frac{\vec{o}(\Delta t)}{\Delta t} = \vec{o}(1); \quad (4.104)$$

es decir, una función que tiende asintóticamente a cero. Así pues, ante la existencia de los errores de posición  $\delta \vec{R}_i(t)$  y  $\delta \vec{R}_i(t + \Delta t)$ , se puede atribuir a ellos todo el error en el cálculo de la velocidad.

Del análisis cinemático se tomaron los siguientes parámetros para controlar el efecto de la geometría sobre el error:

- Velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  en el eje Z (el eje de rotación).
- Velocidad lineal  $\vec{v}_G(t)$  en el centroide de los marcadores.
- EIR, parametrizado mediante el vector  $\vec{GH}(t)$  de mínima distancia entre el centroide de los marcadores y el EIR.

Como todos los cálculos se hicieron sobre la misma medida, cambiando sólo el conjunto de marcadores analizados y el suavizado de las señales, las diferencias en los resultados eran únicamente producto de cómo se propagaron

los errores en cada configuración geométrica. El error resultante de cada configuración se estimó a través de la diferencia con el resultado óptimo (con los 16 marcadores y las señales suavizadas):

$$\delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}^*. \quad (4.105)$$

$$\delta\vec{v}_G = \vec{v}_G - \vec{v}_G^*. \quad (4.106)$$

$$\delta\vec{GH} = \vec{GH} - \vec{GH}^*. \quad (4.107)$$

Para el control del error en el vector  $\vec{GH}$ , como su magnitud depende no sólo de la geometría del sistema de marcadores, sino también de la velocidad angular instantánea  $\vec{\omega}$ , se compararon sólo las medidas en instantes dentro de una franja estrecha de velocidad angular. La franja tomada fue la correspondiente a una velocidad angular en la dirección de Z entre 1,1 y 1,6 rad/s, que contenía el 76% del recorrido (48° de los 62° recorridos en total). Para definir el valor óptimo de  $\vec{GH}^*$  se consideró que el EIR debía ser un punto fijo:

$$\vec{GH}^*(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \vec{R}_G^*(\tau) + \frac{\vec{\omega}^* \times \vec{v}_G^*(\tau)}{|\vec{\omega}^*(\tau)|^2} \right) d\tau - \vec{R}_G^*(t). \quad (4.108)$$

Los errores observados se contrastaron con los teóricos, según las siguientes fórmulas procedentes de (4.57), (4.61) y (4.88), respectivamente:

$$\delta\vec{\omega} = J_G^{-1} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \delta\vec{v}_i. \quad (4.109)$$

$$\delta\vec{v}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta\vec{v}_i. \quad (4.110)$$

$$\delta\vec{GH} = \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{v}_G}{|\vec{\omega}|^2} - \frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{GH}. \quad (4.111)$$

En el análisis estadístico se comprobó que el error de posiciones y el de velocidades fuesen de tipo aleatorio, insesgados, con unas matrices de covarianzas  $\Sigma$  y  $\Sigma_v$ , respectivamente, relacionadas por el efecto de la operación lineal (4.101). Se esperaba que los errores del torsor cinemático, definidos en (4.109) y (4.110) por operaciones lineales sobre  $\delta\vec{v}_i$ , fuesen asimismo variables aleatorias insesgadas, aunque su variabilidad dependería de la configuración geométrica del análisis.

El sistema de marcadores tenía una distribución simétrica respecto al eje Z, por lo que se esperaba que la proyección de  $\delta\vec{\omega}$  en dicho eje tuviese una desviación típica (raíz cuadrada de la varianza) inversamente proporcional a la raíz del momento de inercia de los marcadores en esa dirección ( $\lambda_z$ ). Por otra parte se esperaba que la desviación típica de  $\delta\vec{v}_G$  dependiese inversamente de la raíz cuadrada del número de marcadores ( $n$ ) en todas las direcciones. Para comprobar la validez de estas hipótesis se hicieron unas regresiones lineales según los siguientes modelos:

$$\text{MW: } \sigma(\delta\vec{\omega}) = A \frac{1}{\sqrt{\lambda_z}} + B \text{ en la dirección de Z.} \quad (4.112)$$

$$\text{MV: } \sigma(\delta\vec{v}_G) = A \frac{1}{\sqrt{n}} + B \text{ en todas las direcciones.} \quad (4.113)$$

Por su parte, el error en  $\vec{GH}$  se podía descomponer en dos partes igualmente aleatorias ( $\delta\vec{GH}_1$  y  $\delta\vec{GH}_2$ ), correspondientes a los dos sumandos de (4.111). La componente  $\delta\vec{GH}_1$ , relacionada con  $\delta\vec{v}_G$ , debería seguir una ley semejante a MV (considerando que la variación de  $\vec{\omega}$  era pequeña en los tramos analizados). Asimismo  $\delta\vec{GH}_2$ , relacionada con  $\delta\vec{\omega}$ , seguiría una ley semejante a MW multiplicada por la magnitud del vector  $\vec{GH}$ . Además, esta segunda parte actuaría sólo en la dirección de  $\vec{GH}$ , mientras que la primera actuaría indistintamente en todas las direcciones.

Esta fuerte direccionalidad de  $\delta\vec{GH}$ , en función de un vector que variaba en el tiempo ( $\vec{GH}$ ), hacía que no se pudiese generalizar su magnitud esperada en los ejes de coordenadas. Las componentes de  $\delta\vec{GH}$  se parametrizaron, por lo tanto, en función de su módulo, que es un elemento independiente del sistema de coordenadas.

La componente de  $\delta\vec{GH}$  en la dirección normal a  $\vec{GH}$  ( $\delta\vec{GH}_{\perp GH}$ ) se tomó como parte íntegra de  $\delta\vec{GH}_1$ , y se analizó su ajuste al siguiente modelo:

$$\text{MGH1: } \text{RMS} \left( \left| \delta\vec{GH}_{\perp GH} \right| \right) = A \frac{1}{\sqrt{n}} + B. \quad (4.114)$$

Una vez confirmado que el modelo de  $\delta\vec{GH}_1$  era correcto, se calculó una aproximación a  $\delta\vec{GH}_2$  restando a  $\delta\vec{GH}$  el primer sumando de (4.111) (utilizando los valores experimentales óptimos de  $\vec{\omega}^*$ ,  $\vec{v}_G^*$  y  $\vec{GH}^*$ ):



$$\begin{aligned}
\delta\vec{GH}_2 &= \delta\vec{GH} - \frac{\vec{\omega}^* \times \delta\vec{v}_G}{|\vec{\omega}^*|^2} \\
&= \vec{GH} - \vec{GH}^* - \frac{\vec{\omega}^* \times \vec{v}_G}{|\vec{\omega}^*|^2} + \frac{\vec{\omega}^* \times \vec{v}_G^*}{|\vec{\omega}^*|^2} \\
&= \vec{GH} - \frac{\vec{\omega}^* \times \vec{v}_G}{|\vec{\omega}^*|^2}. \quad (4.115)
\end{aligned}$$

Sobre esta componente se hicieron dos pruebas. En primer lugar se analizó la dirección de  $\delta\vec{GH}_2(t)$  en relación con la del vector  $\vec{GH}(t)$ , a través de sus vectores unitarios  $\vec{u}_{\delta GH_2}(t)$  y  $\vec{u}_{GH}(t)$ , respectivamente. Según la teoría, dichos vectores habían de ser paralelos. Para comprobarlo se calcularon los ángulos  $\beta_{\delta GH_2}(t)$  y  $\beta_{GH}(t)$  que formaban con la vertical (el eje Y), y se analizó la correlación entre ellos. Se compararon estos dos ángulos, en lugar de analizar directamente el ángulo entre  $\vec{u}_{\delta GH_2}(t)$  y  $\vec{u}_{GH}(t)$ , para que la hipótesis nula de la prueba estadística fuese una relación aleatoria entre los vectores, en lugar de su paralelismo. De este modo, si se obtenía un resultado positivo, se tendría una mayor seguridad de que la dirección de  $\delta\vec{GH}_2(t)$  venía realmente determinada por  $\vec{GH}(t)$ . La segunda comprobación fue una regresión lineal al siguiente modelo:

$$\text{MGH2: } \text{RMS} \left( \left| \delta\vec{GH} - \frac{\vec{\omega}^* \times \delta\vec{v}_G}{|\vec{\omega}^*|^2} \right| \right) = A \frac{|\vec{GH}^*|}{\sqrt{\lambda_z}} + B. \quad (4.116)$$

Con esta batería de pruebas se estudió en qué medida los errores instrumentales se propagaban de forma lineal al tursor cinemático, según las leyes propuestas, y de forma no lineal al cálculo del EIR, con una componente mayor en la dirección de  $\vec{GH}$ , proporcional a la magnitud de este vector.

### 4.3.3. Experimento 2: Control del error aleatorio

Como primera medida de control de los errores en la localización de los EIR anatómicos, se realizó una prueba semejante al Experimento 1, fijando el sistema de marcadores torácico a la tabla articulada, con el centroide en torno al eje de rotación (figura 4.15). El sistema formaba un conjunto rígido con un eje fijo, libre de los posibles artefactos que se podían dar en el movimiento

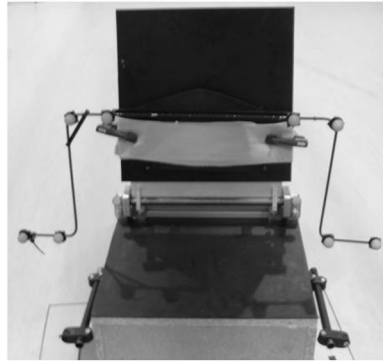


Figura 4.15: Sistema de marcadores del tórax fijado a la tabla articulada.

humano. Por lo tanto los cálculos cinemáticos estaban sujetos únicamente al efecto de errores instrumentales, principalmente de tipo aleatorio.

El conjunto se hizo girar cíclicamente en un rango aproximado de  $90^\circ$  desde la posición horizontal a la vertical, y se calcularon para cada instante los vectores  $\vec{u}(t)$  y  $\vec{GH}(t)$  que determinaban el EIR, de forma semejante al Experimento 1. Los promedios de estas variables se tomaron como mejor estimación de su valor real, y se analizó la magnitud de los errores a partir de su desviación típica, que en este caso era lo mismo que la RMS del error. Estos valores se compararon con el orden de magnitud esperado, considerando las leyes de propagación de errores descritas en la sección 4.2.5.5 y validadas en el Experimento 1, tal como se desarrolla a continuación.

Como dato de partida se necesitaba conocer el error en las velocidades suavizadas de los marcadores. La magnitud de este error se estimó partiendo de una de las variables suavizadas, que se utilizó como patrón de medida «sin error». A esta variable se le añadió un ruido aleatorio del mismo tamaño que el error de posición original (obtenido del Experimento 1). El resultado se volvió a suavizar, y la diferencia entre la nueva derivada y la calculada antes de añadir el error se tomó como medida del error de velocidad, con desviación típica igual a  $\sigma_v$ .

El error de orientación estaba definido en (4.81) como el producto vectorial entre los vectores unitarios del EIR medido y el teórico:

$$\delta\alpha\vec{n} = \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2}. \quad (4.117)$$

El módulo de este vector sería el valor absoluto del ángulo  $\delta\alpha$  entre los EIR medido y teórico. Su valor cuadrático esperado sería la traza de la matriz de covarianzas asociada al cálculo de (4.117). Para simplificar su cálculo se consideró un error de velocidades isótropo, con una desviación típica igual a  $\sigma_v$ . De este modo la matriz de covarianzas de (4.117) se podía definir fácilmente, utilizando sólo la velocidad angular del cuerpo y el tensor de inercias. Como  $\vec{\omega}$  debía ser un vector en la dirección Z ( $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ ), utilizando (4.62) y (4.69),

$$Var(\delta\alpha\vec{n}) = \frac{\sigma_v^2}{\omega^4} \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} J_G^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.118)$$

La traza de esta matriz se podía calcular a partir de los autovalores de  $J_G^{-1}$ , que son los valores inversos a los momentos de inercia principales de  $J_G$ . Por lo tanto el valor esperado para el cuadrado de  $\delta\alpha$  era

$$E(\delta\alpha^2) = \text{tr} \left( \frac{\sigma_v^2}{\omega^4} \text{diag} \left( \frac{\omega^2}{\lambda_2}, \frac{\omega^2}{\lambda_1}, 0 \right) \right) = \frac{\sigma_v^2}{\omega^2} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (4.119)$$

Para estimar el error de ubicación del EIR se consideraron los dos términos independientes definidos en el Experimento 1:

$$\delta\vec{GH}_1 = \frac{\vec{\omega} \times \delta\vec{v}_G}{|\vec{\omega}|^2}, \quad (4.120)$$

$$\delta\vec{GH}_2 = -\frac{\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{GH}. \quad (4.121)$$

El valor esperado de estos términos se estimó de forma análoga el error de orientación:

$$Var(\delta\vec{GH}_1) = \frac{\sigma_v^2}{\omega^2 n} \text{diag} (1, 1, 0) \Rightarrow E \left( \left| \delta\vec{GH}_1 \right|^2 \right) = 2 \frac{\sigma_v^2}{\omega^2 n}. \quad (4.122)$$

$$Var(\delta\vec{GH}_2) = \frac{\sigma_v^2}{\omega^2 \lambda_z} \begin{pmatrix} x_{GH}^2 & x_{GH}y_{GH} & x_{GH}z_{GH} \\ x_{GH}y_{GH} & y_{GH}^2 & y_{GH}z_{GH} \\ x_{GH}z_{GH} & y_{GH}z_{GH} & z_{GH}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow E \left( \left| \delta\vec{GH}_2 \right|^2 \right) = \frac{\sigma_v^2}{\omega^2 \lambda_z} \left| \vec{GH} \right|^2. \quad (4.123)$$

Como  $\delta\vec{GH}_1$  es teóricamente un vector independiente de  $\delta\vec{GH}_2$ , era posible sumar (4.122) y (4.123) para estimar el módulo de su suma al cuadrado (véase el apéndice A.3.3). Por lo tanto, en definitiva, el error del EIR debía estar determinado por la siguiente fórmula:

$$E \left( \left| \delta\vec{GH} \right|^2 \right) = \frac{\sigma_v^2}{\omega^2} \left( \frac{2}{n} + \frac{\left| \vec{GH} \right|^2}{\lambda_z} \right). \quad (4.124)$$

### 4.3.4. Experimento 3: Control de los artefactos

#### 4.3.4.1. Naturaleza de los artefactos en la flexión del tronco

Para finalizar con la fase de experimentos de validación se llevó a cabo una prueba de control de los artefactos, que son considerados la mayor fuente de error en muchos análisis biomecánicos (Andriacchi & Alexander, 2000; Leardini et al., 2005).

Dado que el sistema de marcadores no formaba parte del cuerpo de los sujetos, se contempló la posibilidad de que hubiera un movimiento relativo entre ambas partes, que podría falsear los resultados. Por lo tanto se realizó una comprobación experimental de la magnitud de dicho deslizamiento en la espalda y la pelvis, con el fin de tener bajo control esta fuente de error.

En la literatura sobre errores por artefactos se suele dar especial importancia a la deformación de los tejidos blandos subcutáneos, que queda fuera del alcance de este experimento ya que su control riguroso requiere el uso de técnicas altamente invasivas. La deformación de los tejidos blandos produce un movimiento relativo entre la piel y el esqueleto, que por lo tanto no ha sido controlado. Ahora bien, dado que el movimiento analizado era de flexo-extensión del tronco, se esperaba que el principal artefacto entre la piel y la columna vertebral fuese un desplazamiento longitudinal, es decir un movimiento de traslación  $\delta\vec{v}$  aproximadamente homogéneo en la dirección de la columna con un error de rotación  $\delta\vec{\omega}$ . Según se desprende de la ecuación (4.88), esto implicaría un desplazamiento transversal del EIR, en la dirección antero-posterior, pero no afectaría a la ubicación del EIR en la dirección longitudinal de la columna.

Por otra parte, se ha demostrado que la deformación de la piel en la espalda acompaña al movimiento de las apófisis vertebrales (Vergara et al., 2006), lo cual indica que los artefactos por tejidos blandos son pequeños en este caso. Además, los posibles movimientos de las partes internas del cuerpo, de

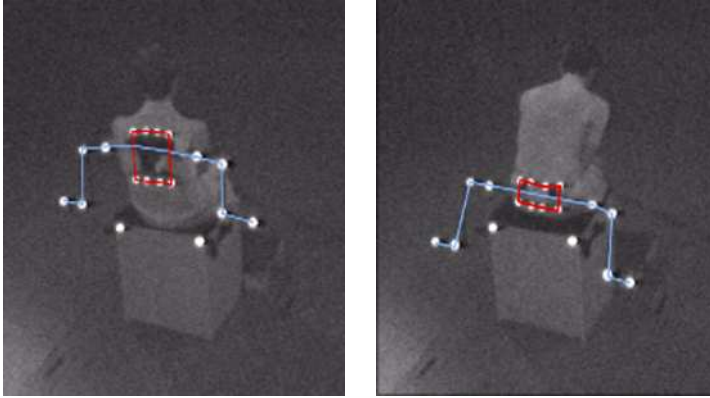


Figura 4.16: Sistemas de marcadores empleados para el control de los artefactos por deslizamiento en el tórax (izquierda) y en la pelvis (derecha). En rojo están delineados los sistemas de marcadores fijados al cuerpo del sujeto, y en azul los fijados en el sistema rígido.

crucial importancia en los estudios clínicos, son menos críticos en las aplicaciones industriales relacionadas con el diseño de sillas. El contacto directo de la silla con el cuerpo se realiza a nivel superficial, por lo que el movimiento externo de la piel tiene, en este caso, interés por sí mismo.

#### 4.3.4.2. Procedimiento de medida y análisis

En este experimento se registró el movimiento de los marcadores de las estructuras metálicas atadas a ambos segmentos, al mismo tiempo que el movimiento de otros marcadores adheridos superficialmente a su alrededor, sobre una prenda ceñida, mientras los sujetos realizaban el ejercicio del Experimento 4 (véase la sección 4.3.5 y la figura 4.16). Las pruebas se realizaron con cinco sujetos, cada uno de los cuales realizó una prueba para los artefactos del tórax y otra para los artefactos de la pelvis. Dado que para este experimento no se requería determinar el movimiento relativo entre tórax y pelvis, las pruebas para cada uno de los segmentos se realizaron separadamente, por economía operativa en el procesado y análisis de los datos.

En cada medida, el deslizamiento que se deseaba controlar venía determinado por el movimiento relativo entre el conjunto de marcadores adheridos directamente al cuerpo (sistema *A*, marcado en rojo en la figura 4.16) y los marcadores de la estructura metálica (sistema *B*, marcado en azul). Para ca-

da medida se calculó el torsor cinemático de ambos sistemas:  $\{\vec{\omega}^A, \vec{v}_{GA}^A\}$  y  $\{\vec{\omega}^B, \vec{v}_{GB}^B\}$ . Y para poder componerlos, se cambió el punto de referencia del torsor  $B$ , de modo que ambos movimientos estuvieran referidos al centroide de  $A$ . Así pues, en lugar de  $\{\vec{\omega}^B, \vec{v}_{GB}^B\}$  se utilizó  $\{\vec{\omega}^B, \vec{v}_{GA}^B\}$ , siendo

$$\vec{\omega}^R = \vec{\omega}^B - \vec{\omega}^A, \quad (4.125)$$

$$\vec{v}_{GA}^B = \vec{v}_{GB}^B - \vec{\omega}^B \times \overrightarrow{G_A G_B}. \quad (4.126)$$

La diferencia entre  $\{\vec{\omega}^A, \vec{v}_{GA}^A\}$  y  $\{\vec{\omega}^B, \vec{v}_{GA}^B\}$  era el torsor del movimiento relativo en  $G_A$ ,  $\{\vec{\omega}^R, \vec{v}_{GA}^R\}$ , es decir el artefacto a controlar. Como el principal objetivo del estudio era obtener la posición de los EIR, también se calculó la separación entre los EIR de ambos sistemas:

$$\overrightarrow{H_A H_B} = \overrightarrow{G_A H_B} - \overrightarrow{G_A H_A}. \quad (4.127)$$

Siendo el movimiento esencialmente plano, se analizó la magnitud de  $\vec{v}_{GA}^R$  y  $\overrightarrow{H_A H_B}$  en el plano sagital ( $XY$ ), que es en el que tenía lugar el movimiento, y la magnitud de  $\vec{\omega}^R$  en la dirección perpendicular a dicho plano ( $Z$ ).

En ausencia de artefactos,  $\vec{\omega}^R$ ,  $\vec{v}_{GA}^R$  y  $\overrightarrow{H_A H_B}$  serían nulos, pero en la práctica podía esperarse un movimiento relativo aparente, debido al efecto de los errores instrumentales. Teniendo esto en cuenta se establecieron unos intervalos de confianza para los errores en el movimiento relativo, bajo la hipótesis de artefactos nulos. En dicho caso los torsesores teóricos de  $A$  y  $B$  serían idénticos, pudiéndose formular de forma común como  $\{\vec{\omega}, \vec{v}_{GA}\}$ , y naturalmente tanto  $\overrightarrow{G_A H_A}$  como  $\overrightarrow{G_A H_B}$  serían un mismo vector  $\overrightarrow{G_A H}$ . Por su parte, el torsor relativo y la distancia observada entre los EIR serían únicamente los términos de error combinados de los sistemas  $A$  y  $B$ :

- $\vec{\omega}^R$  sería el término de error  $\delta\vec{\omega}$ , combinación de  $\delta\vec{\omega}^A$  y  $\delta\vec{\omega}^B$ .
- $\vec{v}_{GA}^R$  sería el término de error  $\delta\vec{v}_{GA}$ , combinación de  $\delta\vec{v}_{GA}^A$  y  $\delta\vec{v}_{GA}^B$ .
- $\overrightarrow{H_A H_B}$  sería el término de error  $\delta\overrightarrow{G_A H}$ , combinación de  $\delta\overrightarrow{G_A H_A}$  y  $\delta\overrightarrow{G_A H_B}$ .

En caso de artefactos nulos se podría esperar que estos errores fuesen primordialmente aleatorios, y las RMS al cuadrado de los parámetros medidos fuesen coherentes con las varianzas de ese error. Considerando las fórmulas (4.93) y (4.94), las matrices de covarianzas del error en el torsor cinemático deberían ser las siguientes:

$$\Sigma_{\omega} = \Sigma_{\omega}^A + \Sigma_{\omega}^B. \quad (4.128)$$

$$\Sigma_{vGA} = \Sigma_{vG}^A + \Sigma_{vG}^B + A(\overrightarrow{G_A G_B}) \Sigma_{\omega}^B A(\overrightarrow{G_A G_B})^T. \quad (4.129)$$

La parte de interés en  $\delta\vec{\omega}$  era la componente en Z. Su valor cuadrático esperado era el tercer valor de la diagonal de  $\Sigma_{\omega}$ ,  $\sigma_{zz,\omega}^2$ , y de (4.128) se deduce que

$$E(\delta\omega_z^2) = \sigma_{zz,\omega}^2 = \left(\sigma_{zz,\omega}^A\right)^2 + \left(\sigma_{zz,\omega}^B\right)^2. \quad (4.130)$$

Los dos sumandos de la ecuación anterior se obtuvieron a partir del error de velocidades teórico, siguiendo el mismo procedimiento que en el Experimento 2:

$$\left(\sigma_{zz,\omega}^A\right)^2 = \frac{\sigma_v^2}{\lambda_{zA}^2}, \quad \left(\sigma_{zz,\omega}^B\right)^2 = \frac{\sigma_v^2}{\lambda_{zB}^2} \quad (4.131)$$

Por otra parte, tanto para el tórax como para la pelvis, los sistemas A y B eran aproximadamente simétricos respecto al plano sagital, y no se esperaba ningún artefacto perpendicular a dicho plano en el movimiento de flexo-extensión. Por lo tanto  $\overrightarrow{G_A G_B}$  se podía aproximar a un vector  $(x, y, 0)$  definido en el plano XY. Si, para simplificar, se obvian las correlaciones entre las distintas direcciones del error  $\delta\vec{\omega}^B$  (es decir, si  $\Sigma_{\omega}^B$  se aproxima a una matriz diagonal), al desarrollar la ecuación (4.129) se obtiene la siguiente submatriz de  $\Sigma_{vGA}$  en relación con el plano XY (que es el plano de interés para  $\delta\vec{v}_{GA}$ ):

$${}^{XY}\Sigma_{vGA} = {}^{XY}\Sigma_{vG}^A + {}^{XY}\Sigma_{vG}^B + \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} \left(\sigma_{zz,\omega}^B\right)^2. \quad (4.132)$$

La traza de  ${}^{XY}\Sigma_{vGA}$  era el valor esperado de las componentes de  $\delta\vec{v}_{GA}$  en el plano XY, sumadas al cuadrado:

$$\begin{aligned} E(\delta v_{GAx}^2 + \delta v_{GAy}^2) &= \left(\sigma_{xx,vGA}^A\right)^2 + \left(\sigma_{yy,vGA}^A\right)^2 \\ &+ \left(\sigma_{xx,vGB}^B\right)^2 + \left(\sigma_{yy,vGB}^B\right)^2 + \left|\overrightarrow{G_A G_B}\right|^2 \left(\sigma_{zz,\omega}^B\right)^2 \end{aligned} \quad (4.133)$$

Los errores de velocidad de A y B en sus respectivos centroides, necesarios para completar la ecuación anterior, se obtuvieron de forma análoga a los errores de velocidad angular:

$$\left(\sigma_{xx.vGA}^A\right)^2 = \left(\sigma_{yy.vGA}^A\right)^2 = \left(\sigma_{xx.vGB}^B\right)^2 = \left(\sigma_{yy.vGB}^B\right)^2 = \frac{\sigma_v^2}{n} \quad (4.134)$$

Finalmente, se esperaba que existiese un error en el cálculo del EIR para cada uno de los conjuntos de marcadores, y que estos errores se sumasen al calcular  $\overrightarrow{H_A H_B}$ . Bajo la hipótesis de errores aleatorios y artefactos nulos, el error de cálculo para cada conjunto de marcadores sería independiente; por lo tanto, aplicando el mismo principio que en el Experimento 2,

$$E\left(\left|\delta\overrightarrow{G_A H}\right|^2\right) = \frac{\sigma_v^2}{\omega^2} \left(2\frac{1}{n} + \frac{\left|\overrightarrow{G_A H}\right|^2}{\lambda_{zA}} + \frac{\left|\overrightarrow{G_B H}\right|^2}{\lambda_{zB}}\right). \quad (4.135)$$

A partir de los errores instrumentales obtenidos del Experimento 2 para el sistema rígido de marcadores, contando con la configuración geométrica y cinemática de los marcadores dispuestos sobre la piel, se calcularon los valores modelo definidos en (4.130), (4.133) y (4.135). A continuación estos valores se compararon con las RMS al cuadrado del artefacto medido, para verificar si realmente existía un deslizamiento entre el sistema de marcadores y la piel más grande que el error aleatorio inherente a la medida.

### 4.3.5. Experimento 4: Flexión del tronco

#### 4.3.5.1. Diseño del experimento

El experimento principal de este trabajo tenía como objetivo medir la posición y desplazamiento de los EIR asociados a la flexo-extensión del tronco en una postura sedente sin restricciones. En este experimento participaron once sujetos entre 26 y 41 años de edad, cuya antropometría se resume en la tabla 4.1. Todos eran sujetos sanos, sin dolor ni síntomas de lesiones lumbares.

Los sistemas de marcadores se fijaron a la parte posterior del tórax a la altura de los omoplatos y la pelvis a la altura del sacro de los sujetos. El segmento central de cada barra estaba unido a una placa semirrígida que se ajustaba al cuerpo de los sujetos con unas bandas flexibles. Estas bandas se ceñían al cuerpo cruzándolas en el pecho para el sistema torácico, y ajustándolas a modo de cinturón y arnés para el sistema pélvico (figura 4.17).

Los sujetos se sentaron en una caja rígida, cuya altura relativa al suelo se reguló con un soporte en los pies, ajustable en altura, de tal manera que los



Tabla 4.1: Medias y desviaciones típicas (entre paréntesis) de las características antropométricas de los sujetos

	Peso (kg)	Estatura (mm)	Altura sentada (mm)
Hombres ( $N = 7$ )	74,6 (7,2)	1723 (50)	875 (28)
Mujeres ( $N = 4$ )	57,5 (4,2)	1642 (75)	840 (20)



Figura 4.17: Sujeto con los sistemas de marcadores de tórax y pelvis.

pies apoyasen firmemente en él, las rodillas formasen un ángulo de aproximadamente  $90^\circ$ , y los muslos se mantuviesen horizontales. A través de tres marcadores en la parte posterior de la caja se definió un sistema de coordenadas, cuyo origen se centró al nivel del asiento, y en el que los ejes eran los siguientes:

- X: eje frontal.
- Y: eje vertical.
- Z: eje medio-lateral.

Se emplearon marcadores anatómicos adicionales, situados en las vértebras T12, L3 y en las crestas ilíacas posteriores (LPSIS y RPSIS), para poder referir los resultados a los puntos anatómicos.

Cada sujeto realizó una prueba haciendo un movimiento oscilatorio de flexo-extensión, que se grabó enfocándolo con las cámaras desde la espalda. La postura de partida era la de máxima flexión, con los brazos cruzados sobre el pecho y cada mano sobre el hombro opuesto, estando los codos apoyados sobre las rodillas. A partir de esta postura los sujetos tenían que extender el tronco hacia detrás tanto como pudieran de forma natural y confortable, volviendo luego a la postura inicial. Este movimiento se repetía cíclicamente durante 30 segundos, a la velocidad con la que el sujeto se sintiera cómodo.

#### 4.3.5.2. Análisis

Como resultado del experimento se obtuvieron los parámetros cinemáticos del movimiento de cada segmento (tórax y pelvis), calculados según los métodos definidos en las secciones 4.2.1 y 4.2.2, y que se compusieron para obtener el torsor cinemático y el EIR del movimiento relativo (el de la articulación lumbar), conforme a las operaciones descritas en 4.2.3. Para el análisis descriptivo se partió de las siguientes variables:

- Ángulos de flexo-extensión para el movimiento de la pelvis ( $\theta_P(t)$ ), el tórax ( $\theta_T(t)$ ) y el movimiento relativo ( $\theta_R(t)$ ). Dichos ángulos eran la proyección sobre el eje Z del vector de orientación  $\vec{\phi}(t)$  de cada movimiento, tal cual se ha definido en (4.44).
- Radios de los EIR de la pelvis ( $\overrightarrow{OH}_P(t)$ ), el tórax ( $\overrightarrow{OH}_T(t)$ ) y el movimiento relativo ( $\overrightarrow{OH}_R(t)$ ) desde el origen de coordenadas situado en el asiento. Para controlar el error de esta variable, sólo se calculó en los instantes en los que el módulo de la velocidad angular superaba el 50 % de su valor máximo.

Se evaluó la altura respecto al asiento de los tres EIR (componente en  $Y$  de los respectivos vectores), así como el recorrido anatómico de  $\overrightarrow{OH_R}(t)$ , que representaba el eje de la articulación lumbar. Para esto último se calculó la posición longitudinal y transversal del EIR respecto al segmento L1-L3 (véase la figura 4.18):

$$l(t) = (\overrightarrow{OH_R}(t) - \overrightarrow{OL3}(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{L1L3}(t)}{|\overrightarrow{L1L3}(t)|}. \quad (4.136)$$

$$d(t) = \left| \frac{\overrightarrow{L1L3}(t) \times [(\overrightarrow{OH_R}(t) - \overrightarrow{OL3}(t)) \times \overrightarrow{L1L3}(t)]}{\overrightarrow{L1L3}(t) \cdot \overrightarrow{L1L3}(t)} \right|. \quad (4.137)$$

También se calculó la relación entre el ángulo de flexo-extensión relativo y la posición longitudinal del EIR relativo, mediante el coeficiente de correlación y la pendiente de la regresión lineal entre ambas variables:

$$r_{l\theta} = \frac{\sum_i (\theta_R(t_i) - \bar{\theta}_R)(l(t_i) - \bar{l})}{(n-1)s_d s_\theta}. \quad (4.138)$$

$$\beta_{l\theta} = r_{l\theta} \frac{s_l}{s_\theta}, \quad (4.139)$$

donde  $\bar{\theta}_R$ ,  $\bar{l}$  son los promedios de las variables  $\theta_R(t)$  y  $l(t)$ , respectivamente, y  $s_\theta$ ,  $s_l$  son sus desviaciones típicas.

Como descripción estadística de los resultados se calcularon los valores centrales (medianas) y de dispersión (cuartiles) de los distintos sujetos. Se hizo uso de estos estimadores, más robustos que la media y la desviación típica, para dar una descripción más precisa de las distribuciones, que no eran perfectamente simétricas. El conjunto de las variables utilizadas se presenta en la tabla 4.2.

### 4.3.6. Experimento 5: Caracterización de sillas

#### 4.3.6.1. Definición del experimento

El siguiente experimento tuvo como objetivo caracterizar los ejes de rotación de una muestra de sillas de trabajo reclinables, para compararlos con los ejes del movimiento anatómico. El movimiento de las sillas viene determinado por el diseño de sus mecanismos, constituidos principalmente por barras

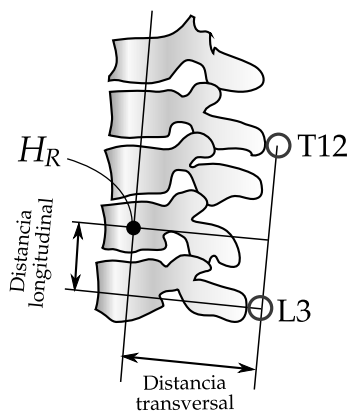


Figura 4.18: Distancia longitudinal y transversal del EIR del movimiento relativo respecto a la línea L3-T12.

Tabla 4.2: Variables medidas en el Experimento 4.

Variable	Descripción
AMP	Mediana de la altura del EIR pélvico desde el asiento ( $\overrightarrow{OH}_{Py}$ )
AMT	Mediana de la altura del EIR torácico desde el asiento ( $\overrightarrow{OH}_{Ty}$ )
AMR	Mediana de la altura del EIR relativo desde el asiento ( $\overrightarrow{OH}_{Ry}$ )
RFP	Rango del ángulo de flexo-extensión de la pelvis ( $\theta_P$ )
RFT	Rango del ángulo de flexo-extensión del tórax ( $\theta_T$ )
RFR	Rango del ángulo de flexo-extensión relativo ( $\theta_R$ )
RL	Desplazamiento longitudinal del EIR relativo (rango de $l$ )
MD	Distancia transversal del EIR relativo (mediana de $d$ )
CLFR	Coficiente de correlación lineal entre $l$ y $\theta_R$
PLFR	Pendiente de la relación lineal entre $l$ y $\theta_R$



Figura 4.19: Sillas utilizadas en el Experimento 5.

rígidas, articulaciones y deslizaderas. El comportamiento cinemático de estos mecanismos es conocido de antemano; por lo tanto en un principio sería posible estimar el lugar que ocupan los ejes de rotación «sobre plano», mediante la inspección de las partes desmontadas.

No obstante, hay ciertos aspectos del movimiento que no pueden conocerse con una mera inspección estática: algunos ejes pueden moverse a lo largo del recorrido, y lo que es más importante, los elementos pueden deformarse por efecto de la compresión, bajo el peso del usuario. Estos efectos únicamente pueden medirse de forma fiable en pruebas de uso experimentales.

Para este experimento se utilizaron 8 sillas distintas (figura 4.19) de las que se midió el movimiento del asiento y el respaldo, de forma análoga a como el Experimento 4 midió el movimiento de la pelvis y el tórax de los sujetos. Los modelos fueron escogidos de forma aleatoria entre las sillas de trabajo de gama media-alta usadas en los puestos del Instituto de Biomecánica de Valencia. No hubo participación de ninguna empresa en la definición ni en el desarrollo de los experimentos.

En el lateral de cada una de las partes se fijaron dos marcadores, utilizando un marcador de cada cuerpo para identificar sendos puntos significativos: la línea del apoyo pélvico en el asiento (*AP*), y la línea del apoyo lumbar en el

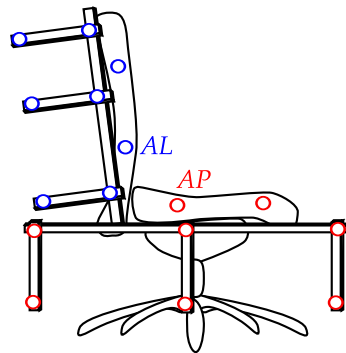


Figura 4.20: Esquema de la configuración de los marcadores en la silla. Los marcadores rojos son los fijados al asiento (con *AP* en la línea del apoyo pélvico). Los marcadores azules son los fijados al respaldo (con *AL* en la línea del apoyo lumbar).

respaldo (*AL*). Además se diseñaron dos sistemas de marcadores rígidos, con 6 puntos cada uno, que se amarraron al respaldo y el asiento de las sillas como se representa en la figura 4.20. Para la fijación de estos sistemas se utilizaron abrazaderas metálicas, dispuestas de distinto modo según permitía el diseño de la silla. La estructura del asiento se dispuso centrada en la zona donde se encontraba el mecanismo, para minimizar la distancia entre el centro de gravedad de los marcadores y el eje de rotación, y en consecuencia minimizar el error de cálculo. Debido a la dificultad de centrar la estructura del respaldo en la misma región, los puntos del respaldo se encontraban más distantes respecto a su eje de rotación, aunque el error de cálculo que esto añadiría quedaba compensado por la mayor velocidad de rotación del respaldo.

Las sillas se ubicaron con un lateral orientado hacia las dos cámaras, de modo que éstas captasen de forma óptima todos los marcadores a lo largo del recorrido. La silla, con el asiento en la posición más baja, se apoyó en la estructura metálica de las patas (sin ruedas), de forma que se evitase el desplazamiento horizontal de la silla en conjunto. El giro alrededor del eje vertical no se bloqueó debido a la imposibilidad de hacerlo sin alterar la funcionalidad de la silla. Así pues, se asumió la existencia de un artefacto en forma de rotación alrededor del eje vertical; sin embargo, la influencia de este artefacto se controló en el análisis, como se comenta a continuación.

Una vez instrumentada la silla, un investigador se sentaba en ella, con la espalda apoyada en el respaldo en la posición más adelantada. Partiendo de

esta postura inicial se procedía a grabar una secuencia de 30 segundos, en la que el investigador empujaba el respaldo hasta la posición más reclinada, y a continuación se inclinaba hacia delante para permitir el retorno a la posición más avanzada, manteniendo en todo momento el contacto con el respaldo, para asegurar un movimiento suave y continuo. Este movimiento se repitió cíclicamente entre 5 y 7 veces por prueba, hasta que terminaba la grabación, procurando que el giro del asiento alrededor del eje vertical fuese el mínimo posible.

#### 4.3.6.2. Análisis

Tras la grabación de cada ensayo se calcularon los parámetros cinemáticos del asiento, el respaldo y el movimiento relativo, al igual que en el Experimento 4, expresando las variables en el sistema de referencia global del laboratorio. A partir de este resultado se definió un sistema de referencia local, según los siguientes criterios:

- Como origen del sistema se escogió punto  $AP$  del asiento en la posición inicial.
- El eje  $Z$  se hizo coincidir con el promedio de los EIR del respaldo.
- El eje  $X$  se definió de modo que estuviese contenido en el plano horizontal (perpendicular al eje vertical del laboratorio), orientado de la parte trasera a la delantera de la silla.
- El eje  $Y$  se orientó en sentido ascendente.

Todos los parámetros cinemáticos se transformaron a este sistema de coordenadas local. A continuación se corrigió el posible artefacto por el giro del asiento alrededor del eje vertical, asumiendo que el movimiento de reclinación debía de ser una rotación alrededor de un eje horizontal (en el plano  $XY$ ).

Bajo esa condición, el vector  $\vec{\omega}(t)$  de cualquiera de los movimientos se podía descomponer fácilmente en la componente debida al artefacto ( $\vec{\omega}_a(t) \parallel \vec{j}$ ) y la propia de la reclinación ( $\vec{\omega}_r(t) \perp \vec{j}$ ). El eje de  $\vec{\omega}(t)$  debía estar entre los ejes de la reclinación y el artefacto, compartiendo los tres una perpendicular común, como se comenta en la sección 4.2.3. Por otra parte, aunque tanto la reclinación como el artefacto fuesen rotaciones puras, el movimiento observado podía ser de tipo helicoidal, con una velocidad  $\vec{v}_H(t)$  paralela a  $\vec{\omega}(t)$  en su eje (figura 4.21). Dadas estas condiciones, y suponiendo que la dirección

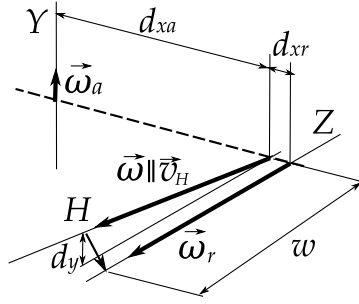


Figura 4.21: Relación entre ejes de la inclinación ( $\vec{\omega}_r$ ), el artefacto ( $\vec{\omega}_a$ ) y el movimiento observado ( $\vec{\omega}$ ), que es la suma de los dos anteriores. Este último es un movimiento de tipo helicoidal, con una velocidad  $\vec{v}_H$  paralela al eje. Si  $H$  es un punto del eje observado, el EIR de la inclinación tiene un punto cercano a la distancia  $d_y$  en la dirección de giro del artefacto, y  $d_{xr}$  en la dirección perpendicular.

de  $\vec{\omega}_r(t)$  era el eje  $Z$ , dicha velocidad sería (utilizando las variables definidas en la figura),

$$\vec{v}_H(t) = -\omega_r(t)d_{xr}(t)(\vec{k} \times \vec{i}) + \omega_a(t)d_{xa}(t)(\vec{j} \times \vec{i}). \quad (4.140)$$

Por otra parte, si  $p_s(t)$  es el paso del movimiento observado, tal como se ha definido en (4.13),

$$\vec{v}_H(t) = p_s(t)(\omega_r(t)\vec{k} + \omega_a(t)\vec{j}). \quad (4.141)$$

Así pues, combinando (4.140) y (4.141) se podía obtener la separación en  $X$  entre el eje observado y los EIR de la inclinación y el artefacto:

$$d_{xr} = -\frac{\omega_a(t)}{\omega_r(t)} p_s(t). \quad (4.142)$$

$$d_{xa} = -\frac{\omega_r(t)}{\omega_a(t)} p_s(t). \quad (4.143)$$

El valor de  $d_{xr}$  sería la mínima separación entre el eje observado y el verdadero EIR de la inclinación. Pero dependiendo del punto de referencia que se escogiese para localizar el EIR, también habría una separación en vertical  $d_y$  entre el punto  $H$  medido y el EIR buscado, tal cual se ha explicado en la sección 4.2.5.5. Como se observa en la figura (4.21), esta separación aparente



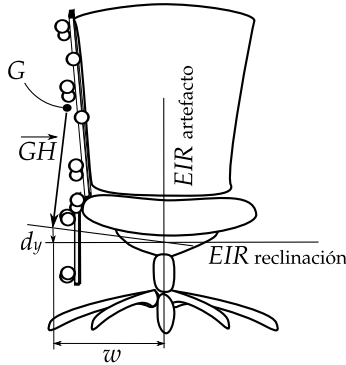


Figura 4.22: El punto del eje medido se encuentra a una distancia  $w$ , que es aproximadamente la mitad de la anchura de la silla, del lugar en el que los EIR de la inclinación y el artefacto se cruzan perpendicularmente. Esta separación determina el error cometido en la dirección vertical al ubicar el EIR.

depende de la distancia  $w$  a la que se encuentre  $H$  de la perpendicular común a los ejes, en la dirección de  $Z$ :

$$d_y = \frac{\omega_a(t)}{\omega_r(t)} w. \quad (4.144)$$

Todos los marcadores empleados en las medidas se encontraban en un lateral de la silla; por lo tanto el punto  $H$  observado de cada eje, que es el más cercano a los centroides, también había de encontrarse en el plano lateral. Por otra parte, el eje de giro de las sillas estaba localizado en la sección central de las mismas. En consecuencia, la distancia  $w$  podía aproximarse a la mitad de la anchura de la silla, tal como se representa en la figura 4.22. De este modo, a través de las fórmulas (4.142) y (4.144) se hizo una corrección del EIR de los tres movimientos (asiento, respaldo y movimiento relativo). Como medida de control adicional se repitieron los experimentos con aquellas sillas en las que la componente vertical de  $\vec{\omega}(t)$  (el artefacto) superaba un 10 % de la magnitud de la velocidad angular de inclinación.

La corrección descrita era la única restricción que se imponía al movimiento, pero por su naturaleza mecánica se esperaba que la inclinación de las sillas sólo tuviera un grado de libertad. Por lo tanto se aplicó el método de promediado funcional descrito en la sección 4.2.4, utilizando la inclinación

Tabla 4.3: Variables medidas en el Experimento 5.

Variable	Descripción
RIA	Rango de inclinación del asiento ( $\phi_A$ )
RIR	Rango de inclinación del respaldo ( $\phi_R$ )
PRA	Pendiente de la relación lineal entre $\phi_A$ y $\phi_R$
MEA	Posición mediana del EIR del asiento
MER	Posición mediana del EIR del respaldo
MERA	Posición mediana del EIR del movimiento relativo
DEA	Desv. típ. de la posición del EIR del asiento
DER	Desv. típ. de la posición del EIR del respaldo
DERA	Desv. típ. de la posición del EIR del movimiento relativo

del respaldo como variable independiente, y el procedimiento de ajuste por semiciclos para el paso 4 del método (véase el apéndice A.4).

Las variables que se tomaron para describir los mecanismos son las presentadas en la tabla 4.3.

#### 4.3.7. Experimento 6: Efecto de la silla sobre el tronco

Para concluir la investigación se hizo un experimento en el que se midió parcialmente la flexión del tronco restringida por la reclinación de las sillas. La finalidad de estas pruebas era doble: comprobar en general cómo influye en general la silla sobre el movimiento del tórax, y cómo esta influencia puede quedar condicionada por diferentes soluciones constructivas de la silla.

Se escogieron las dos sillas que dieron resultados más distintos en el Experimento 5, y se realizó una medida semejante a la del Experimento 4, modificando las siguientes condiciones:

- El sistema de marcadores del tórax se fijó sobre el pecho de los sujetos, debido a que el respaldo impedía grabar por la espalda. En lugar de cruzar los brazos sobre el pecho, los sujetos los mantuvieron apoyados sobre las piernas, y se les indicó que aguantasen la respiración durante los 30 segundos de la prueba para evitar artefactos por el movimiento del pecho.
- Se descartó la medida del movimiento de la pelvis, ya que el sistema de marcadores pélvico no podía fijarse por la parte delantera. En consecuencia, sólo se analizó el movimiento torácico, no pudiéndose evaluar el relativo.

Tabla 4.4: Medias y desviaciones típicas (entre paréntesis) de las características antropométricas de los sujetos del Experimento 6.

	Peso (kg)	Estatura (mm)	Altura sentada (mm)
Silla 1 ( $N = 6$ )	76,3 (10.6)	1795 (76)	915 (42)
Silla 2 ( $N = 6$ )	75,0 (9.1)	1813 (98)	924 (53)

Tabla 4.5: Variables medidas en el Experimento 6.

Variable	Descripción
RFT	Rango de flexión del tórax
MET	Mediana de la posición del EIR del tórax
RET	Rango de la posición del EIR del tórax

- El sistema de referencia local se definió con un marcador en el punto de apoyo de la pelvis (sobre el asiento, medido antes de sentar a los sujetos) para definir el origen de coordenadas, y con el mismo criterio que en el Experimento 5 para definir la dirección de los ejes.
- La posición inicial y final del movimiento vino marcada por el rango de inclinación de la silla, como se ha descrito en el Experimento 5.

El experimento se realizó con 6 hombres en cada una de las dos sillas evaluadas. Sus características antropométricas se resumen en la tabla 4.4. Se analizó la cinemática del tórax siguiendo el método descrito en las secciones 4.2.1 y 4.2.2. Como no se disponía de las marcas anatómicas de la espalda que se habían empleado en el Experimento 4, para representar la ubicación del EIR en relación al cuerpo del sujeto se aplicó a  $\overrightarrow{GH}(t)$  una rotación en el sentido opuesto de  $\vec{\Omega}(t)$ , utilizando la fórmula (4.29). De este modo se obtuvo la posición del EIR vista sobre la configuración inicial del cuerpo, la adoptada en el instante  $t_0$ :

$$\overrightarrow{OH}_{t_0}(t) = \vec{R}_G(t_0) + 2 \frac{\overrightarrow{GH}(t) \times \vec{\Omega}(t) + \vec{\Omega}(t) \times (\vec{\Omega}(t) \times \overrightarrow{GH}(t))}{1 + \Omega(t)^2}. \quad (4.145)$$

Las variables evaluadas fueron las descritas en la tabla 4.5.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1. Experimento 1: Validación de la teoría

#### 5.1.1. Error de posición

Para validar la teoría de propagación de errores en primer lugar se comprobó la magnitud del error de posición, que es el origen de los demás errores.

Debido a imprecisiones de las medidas, la posición  $\vec{R}_i(t)$  de los marcadores estaba afectada por un error  $\delta\vec{R}_i(t)$ , que se podía suponer de naturaleza aleatoria y centrado en cero. El suavizado eliminaba todo lo que fuese posible de ese error aleatorio; por lo tanto, las coordenadas suavizadas se utilizaron como aproximación a la posición real  $\vec{R}_i^*(t)$ .

El error calculado a partir de esta aproximación,  $\delta\vec{R}_i(t) = \vec{R}_i(t) - \vec{R}_i^*(t)$ , mostró una distribución aleatoria insesgada, como se había esperado ( $p > 0,05$ , véase la tabla 5.1). La matriz de covarianzas promediada para todos los marcadores era

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,61 & -0,18 & -0,00 \\ -0,18 & 0,62 & 0,03 \\ -0,00 & 0,03 & 0,23 \end{pmatrix} \text{ mm}^2. \quad (5.1)$$

La tabla 5.2 muestra los elementos principales que componen  $\Sigma$ . Los componentes de la tabla están ordenados de forma descendente respecto a los autovalores (las varianzas principales); las desviaciones típicas son las raíces cuadradas de las varianzas, y las direcciones principales son los vectores propios de la matriz.

Tabla 5.1: Prueba T para el error de posición. (Hipótesis nula: la media de todos los marcadores a lo largo de la prueba es cero en todas las coordenadas.)

Eje	Error medio (mm)	Desv. típ. (mm)	$t$	gdl	$p$
X	$-1,59 \cdot 10^{-5}$	0,78	-0,002	13023	0,998
Y	$1,36 \cdot 10^{-3}$	0,79	0,197	13023	0,844
Z	$-2,87 \cdot 10^{-4}$	0,48	-0,068	13023	0,946

Tabla 5.2: Descomposición espectral de la matriz del error de posición.

Varianzas (mm <sup>2</sup> )	Desv. típicas (mm)	Direcciones
$\lambda_1 = \sigma_1^2 = 0,79$	$\sigma_1 = 0,87$	$\vec{\gamma}_1 = ( 0,69 \quad -0,72 \quad -0,04 )^T$
$\lambda_2 = \sigma_2^2 = 0,44$	$\sigma_2 = 0,65$	$\vec{\gamma}_2 = ( 0,72 \quad 0,69 \quad 0,08 )^T$
$\lambda_3 = \sigma_3^2 = 0,23$	$\sigma_3 = 0,48$	$\vec{\gamma}_3 = ( -0,03 \quad -0,09 \quad 1,00 )^T$

La dirección con mínimo error ( $\vec{\gamma}_3$ ) era el eje de separación de las cámaras. Esta dirección era prácticamente paralela al eje Z local, que era el eje de rotación del movimiento. Los otros dos ejes principales se encontraban inclinados  $46^\circ$  respecto a los ejes X e Y. Esto viene explicado por la configuración de las cámaras, que se encontraban elevadas y enfocaban la escena en una dirección inclinada respecto al plano horizontal (véase la figura 5.1). El mayor error era el del eje de profundidad en la visión de las dos cámaras ( $\vec{\gamma}_1$ ).

### 5.1.2. Error de velocidad

La velocidad real de cada marcador,  $\vec{v}_i^*(t)$ , se estimó a partir del suavizado de las posiciones. Para los análisis sin suavizar la velocidad  $\vec{v}_i(t)$  se calculó por diferencias finitas. El error asociado a este cálculo era

$$\delta\vec{v}_i(t) := \frac{\delta\vec{R}_i(t + \Delta t) - \delta\vec{R}_i(t)}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

El test de correlación de Pearson para el error de  $\vec{R}_i(t)$  en dos instantes consecutivos no mostró que existiese ninguna autocorrelación entre los errores ( $p > 0,05$ ). Por lo tanto la matriz de covarianzas esperada para  $\delta\vec{v}_i(t)$  era (sabiendo que  $\Delta t = 0,04$  s):

$$\Sigma_v^{esp} = \frac{2}{\Delta t^2} \Sigma = 1250 \Sigma. \quad (5.3)$$

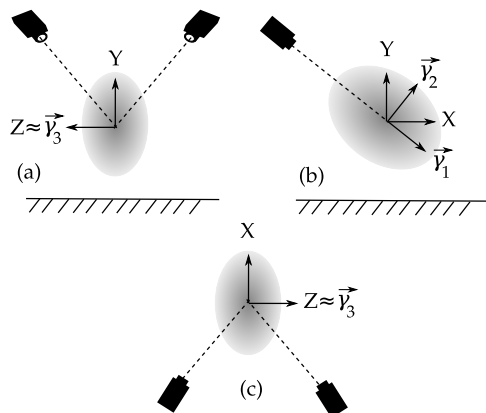


Figura 5.1: Elipsoide del error de posición en el sistema de coordenadas local. Las cámaras estaban dispuestas simétricamente respecto al plano  $XY$ . Por lo tanto el eje perpendicular a este plano ( $Z$ ) era prácticamente paralelo a uno de los ejes principales del error,  $\vec{\gamma}_3$  (subfiguras *a* y *c*). Los ejes principales en el plano  $XY$  (subfigura *b*) eran el eje de profundidad de visión ( $\vec{\gamma}_1$ ) y el perpendicular al mismo ( $\vec{\gamma}_2$ ). Como las líneas de visión estaban inclinadas respecto al plano horizontal, estos otros ejes no coincidían con  $X$  e  $Y$ .

La matriz de covarianzas resultante fue

$$\Sigma_v = \begin{pmatrix} 765,7 & -262,9 & -18,2 \\ -262,9 & 783,4 & 33,3 \\ -18,2 & 33,3 & 285,8 \end{pmatrix} \left(\frac{\text{mm}}{\text{s}}\right)^2. \quad (5.4)$$

La tabla 5.3 muestra los resultados de las pruebas estadísticas sobre los errores de velocidad. Como hipótesis nula ( $H_0$ ) se consideró que:

- Las medias debían ser cero (errores insesgados), para lo cual se realizaron pruebas T con  $H_0 = 0$ .
- Las desviaciones típicas (raíces cuadradas de las varianzas) medidas en cada eje debían corresponderse con las estimadas. Para esta comprobación se hicieron pruebas bilaterales de  $\chi^2$  sobre las varianzas, comparando los valores de la diagonal de (5.4) con los de (5.3) a partir de (5.1).
- Las covarianzas de los errores de velocidad deberían guardar las mismas relaciones proporcionales que las de posición. Esto se comprobó a partir de los coeficientes de correlación de Pearson, que se esperaban iguales a los del error de posición.

Las medias y varianzas se ajustaron perfectamente a las hipótesis. Tan sólo los coeficientes de correlación de  $\delta v_x$  con el error en las otras direcciones eran significativamente distintos a los del error de posición ( $p < 0,05$ ), a pesar de que sus órdenes de magnitud eran semejantes. En definitiva, estos resultados reflejan que el error de velocidad tenía el tamaño esperado, aunque su distribución en el espacio no era exactamente igual.

### 5.1.3. Errores en el torsor cinemático

Para cada análisis se calculó la velocidad angular de la tabla en la dirección de  $Z$  ( $\omega_z(t)$ ) y la velocidad del centroide de los marcadores ( $\vec{v}_G(t)$ ) en todas las direcciones. Los valores calculados se compararon de nuevo con los mejores estimadores,  $\omega_z^*(t)$  y  $\vec{v}_G^*(t)$ , procedentes del análisis con todos los marcadores y variables suavizadas. En este caso se esperaba que la magnitud de los errores fuese distinta para cada análisis, según el subconjunto de marcadores seleccionado, pero que en cualquier caso fuesen errores insesgados. Para confirmar esta hipótesis, por cada análisis se calculó un estadístico  $T$  asociado a las distintas variables:

$$T = \frac{\bar{X}}{s} \sqrt{n_t}, \quad (5.5)$$

Tabla 5.3: Pruebas estadísticas para los errores de velocidades.

Variable	Valor	$H_0$	Estadístico	gdl	$p$
$\delta\bar{v}_x, \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$-1,25 \cdot 10^{-1}$	0	$t = -0,514$	12991	0,608
$\delta\bar{v}_y, \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$-8,81 \cdot 10^{-3}$	0	$t = -0,036$	12991	0,971
$\delta\bar{v}_z, \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$9,73 \cdot 10^{-3}$	0	$t = 0,066$	12991	0,948
$s(\delta v_x), \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	27,7	27,6	$\chi^2 = 1,31 \cdot 10^4$	12991	0,521
$s(\delta v_y), \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	27,9	27,9	$\chi^2 = 1,31 \cdot 10^4$	12991	0,553
$s(\delta v_z), \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	16,9	17,0	$\chi^2 = 1,29 \cdot 10^4$	12991	0,586
$\rho(\delta v_x, \delta v_y)$	-0,34	-0,29	$t = -5,61$	12990	0,000
$\rho(\delta v_x, \delta v_z)$	-0,04	-0,01	$t = -3,72$	12990	0,000
$\rho(\delta v_y, \delta v_z)$	0,07	0,07	$t = -0,24$	12990	0,807

Tabla 5.4: Prueba T aplicada al error normalizado del torsor cinemático, asumiendo que está distribuido según  $N(0,1)$ .

Variable	$t = \bar{T}\sqrt{n_c}$	gdl = $n_c - 1$	$p$
$\delta\omega_z$	2,540	246	0,012
$\delta v_{Gx}$	0,315	246	0,753
$\delta v_{Gy}$	1,135	246	0,257
$\delta v_{Gz}$	0,544	246	0,584

donde  $\bar{X}$  era la media a lo largo de la prueba de la variable  $X$  (cualquiera de las coordenadas del error en el torsor),  $s$  su desviación típica, y  $n_t$  el número de instantes registrados. Ésta era una medida normalizada del error medio, que bajo la hipótesis propuesta debería distribuirse según una  $t$  de Student de  $n_t - 1$  grados de libertad (Domènech, 1982). El valor de  $n_t$  era 812 para todas las medidas, suficientemente alto para aproximar esta distribución a la normal  $N(0,1)$ . Se realizó una prueba T sobre la distribución de este estadístico en los  $n_c = 247$  casos, que sólo dio una diferencia significativa para el error en la velocidad angular (tabla 5.4).

La tabla 5.5 presenta los resultados de la regresión lineal para la desviación de  $\delta\omega_z$  según el modelo MW. Estos resultados reflejan un ajuste casi perfecto al modelo.

La bondad de este ajuste puede observarse gráficamente en la figura 5.2. Esta gráfica presenta las desviaciones típicas de  $\delta\omega_z$  en los distintos análisis, y las estimadas teóricamente a partir de los errores de velocidad de los marcadores. Los datos únicamente se desvían ligeramente para los conjuntos de



Tabla 5.5: Resultados de la regresión lineal de  $\sigma(\delta\omega_z)$  al modelo MW (con intervalos de confianza al 95 % para los parámetros):

$$\sigma(\delta\vec{\omega}) = A \frac{1}{\sqrt{\lambda_z}} + B$$

$A$ (mm/s)	$B$ (rad/s)	$R^2$	$F$	$p$
$24,2 \pm 0,5$	$(3,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$	0,971	8092,6	0,000

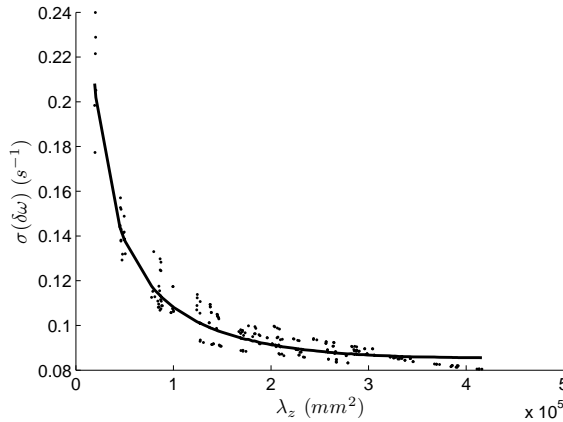


Figura 5.2: Error en la velocidad angular en función del momento de inercia ( $\lambda_z$ ). Puntos: errores experimentales; línea continua: errores estimados.

marcadores con mayor inercia, para los que el error está ligeramente sobrestimado.

La tabla 5.6 y la figura 5.3 presentan el ajuste de las desviaciones típicas de  $\delta\vec{v}_G$  al modelo MV, en los tres ejes de coordenadas. Se observa que de nuevo el ajuste medio es bueno, aunque la dispersión de los resultados reales es sensiblemente mayor que en el caso de las velocidades angulares.

#### 5.1.4. Error en el EIR

El error en el EIR, que es el resultado de operaciones no lineales sobre el torsor cinemático, era también una variable aleatoria. Su media variaba alrededor de cero y su desviación típica oscilaba entre los 5 mm y varios centímetros, según el análisis (véase la tabla 5.7 y la figura 5.4). Sin embargo su distri-

Tabla 5.6: Resultados de la regresión lineal de  $\sigma(\delta\vec{v}_G)$  al modelo MV (con intervalos de confianza al 95% para los parámetros):

$$\sigma(\delta\vec{v}_G) = A \frac{1}{\sqrt{n}} + B$$

Eje	A (mm/s)	B(mm/s)	R <sup>2</sup>	F	p
X	32,1 ± 2,3	-1,9 ± 0,9	0,751	740,3	0,000
Y	28,9 ± 2,1	0,3 ± 0,8	0,748	726,9	0,000
Z	17,2 ± 0,8	-0,2 ± 0,3	0,883	1846,0	0,000

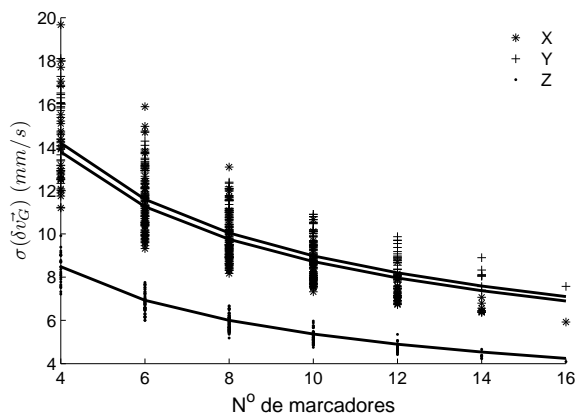


Figura 5.3: Error en la velocidad del centroide en función del número de marcadores. Símbolos (\*, +, ·, ver leyenda): errores experimentales; líneas continuas: errores estimados.

Tabla 5.7: Rangos del error medio y la desviación típica del error en el EIR (en el plano XY).

Coordenada	Media (mm)	Desv. típica (mm)
X	$[-7,8 \quad 4,6]$	$[5,7 \quad 40,2]$
Y	$[-23,4 \quad 12,0]$	$[4,8 \quad 104,7]$

Tabla 5.8: Prueba T aplicada al error normalizado del EIR en el plano del movimiento.

Coordenada	$t = \bar{T}\sqrt{n_c}$	gdl = $n_c - 1$	$p$
X	0,033	246	0,974
Y	-10,723	246	0,000

bución no se correspondía exactamente con una variable normal insesgada, debido a la no linealidad de las operaciones. La tabla 5.8, con los resultados de la misma prueba realizada con el torsor cinemático, muestra diferencias significativas con una distribución normal insesgada para la coordenada Y.

La diferencia entre el error en X y en Y tiene que ver con el hecho de que, como se ha expuesto en la sección 4.3.2.1, se esperaba que el error tuviera un comportamiento en la dirección del vector  $\overrightarrow{GH}(t)$  distinto al comportamiento en la perpendicular. Para esta última se definió el modelo MGH1, semejante a MV. Los resultados del ajuste se presentan en la tabla 5.9 y la figura 5.5. Esta regresión mostró una respuesta parecida a la de la velocidad en el centroide, aunque con un ajuste más moderado.

En la dirección paralela a  $\overrightarrow{GH}(t)$  se esperaba un error que sumase el del modelo MGH1 y el efecto de la excentricidad del sistema de marcadores res-

Tabla 5.9: Resultados de la regresión lineal de  $RMS\left(\left|\delta\overrightarrow{GH}_1\right|\right)$  al modelo MGH1 (con intervalos de confianza al 95% para los parámetros):

$$RMS\left(\left|\delta\overrightarrow{GH}_1\right|\right) = A\frac{1}{\sqrt{n}} + B \text{ en la dirección perpendicular a } \overrightarrow{GH}$$

A (mm)	B(mm)	$R^2$	F	$p$
$22,4 \pm 2,4$	$-0,5 \pm 0,9$	0,575	331,4	0,000

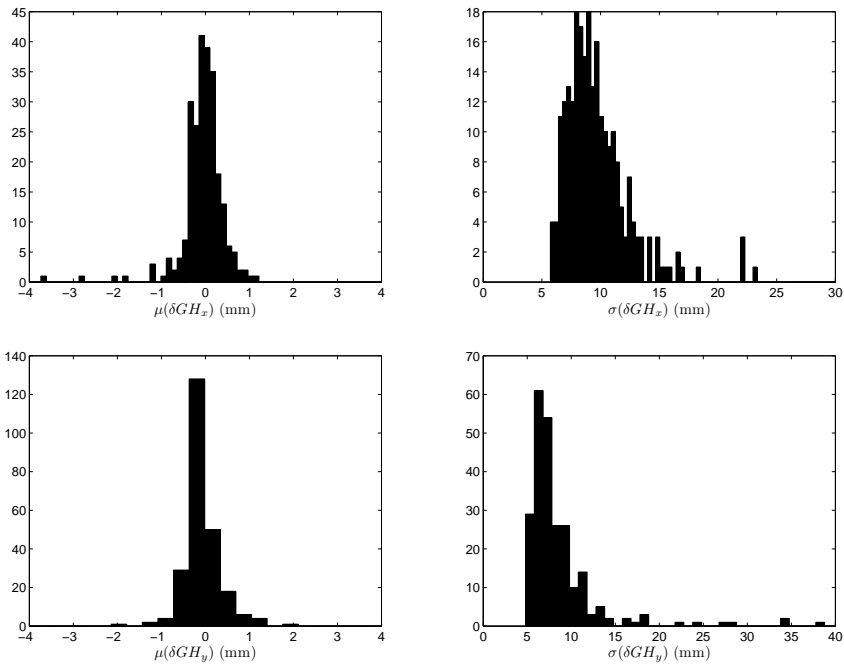


Figura 5.4: Histogramas de los errores en el EIR. Arriba: error en X; abajo: error en Y; izquierda: errores medios; derecha: desviaciones típicas del error. Algunos de los valores extremos quedan fuera de los límites de las gráficas.

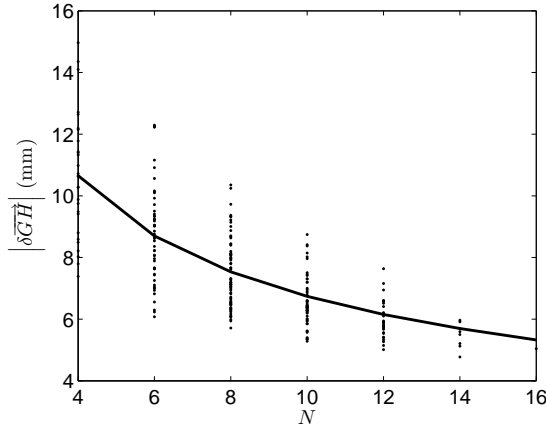


Figura 5.5: Componente de  $\delta\vec{GH}$  perpendicular a  $\vec{GH}$ , en función del número de marcadores. Puntos: errores experimentales; línea continua: errores estimados.

pecto al EIR. Para aislar este último se había calculado  $\delta\vec{GH}_2(t)$  según (4.115):

$$\delta\vec{GH}_2(t) = \vec{GH}(t) - \frac{\vec{\omega}^*(t) \times \vec{v}_G(t)}{|\vec{\omega}^*(t)|^2}. \quad (5.6)$$

Una de las pruebas sobre este término consistía en comparar la dirección de los vectores unitarios  $\vec{u}_{\delta GH_2}(t)$  y  $\vec{u}_{GH}(t)$  asociados a  $\delta\vec{GH}_2(t)$  y  $\vec{GH}(t)$ , respectivamente (figura 5.6). Se obtuvo una correlación significativa entre los ángulos que formaban con la vertical, siempre que el módulo de  $\vec{GH}$  fuese mayor de 80 mm (en los sistemas analizados esta medida variaba entre 40 y 220 mm).

Además se comprobó el ajuste de la magnitud de  $\delta\vec{GH}_2$  con el modelo MGH2. Los resultados se muestran en la tabla 5.10, que refleja un ajuste casi perfecto al modelo.

La figura 5.7 presenta las desviaciones típicas del módulo de  $\delta\vec{GH}_2$ , tomando sólo los sub-análisis de dos columnas consecutivas de marcadores ( $n = 4$ ,  $\lambda_z < 10^4 \text{ mm}^2$ ), para poder apreciar el efecto de  $\vec{GH}$  sin la interacción con el efecto de  $\lambda_z$ . Se observa, como era de esperar, que el error en  $\vec{GH}$  aumenta linealmente con la separación entre el EIR y el centro geométrico de los marcadores.

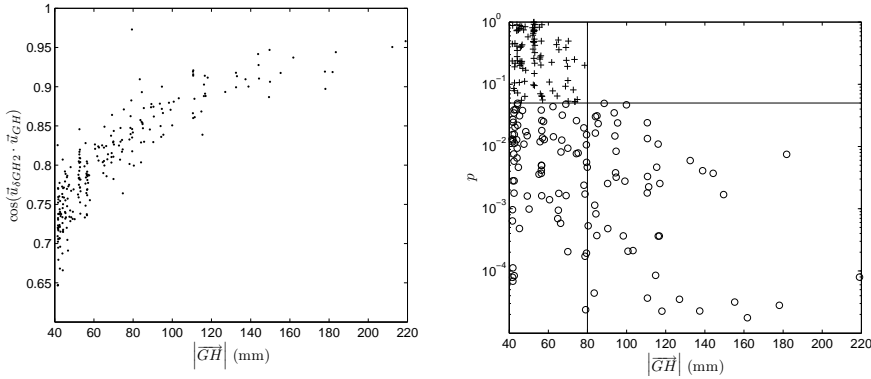


Figura 5.6: Relación entre los vectores unitarios de  $\delta\vec{GH}_2(t)$  y  $\vec{GH}(t)$  en función de la excentricidad. Izquierda: proyección de  $\vec{u}_{\delta GH_2}(t)$  sobre  $\vec{u}_{GH}(t)$ . Derecha: valores  $p$  para la correlación entre los ángulos formados con la vertical ( $\beta_{\delta GH_2}$  y  $\beta_{GH}$ ). Los casos significativos ( $p < 0,05$ ) están marcados con círculos; el resto están marcados con cruces. Se observa que para todos los casos en los que el módulo de  $\vec{GH}$  es mayor que 80 mm la correlación es significativa.

Tabla 5.10: Resultados de la regresión lineal de  $RMS\left(\left|\delta\vec{GH}_2\right|\right)$  al modelo MGH2 (con intervalos de confianza al 95 % para los parámetros):

$$RMS\left(\left|\delta\vec{GH}_2\right|\right) = A \frac{|\vec{GH}|}{\sqrt{\lambda_z}} + B$$

$A$ (mm)	$B$ (mm)	$R^2$	$F$	$p$
$13,1 \pm 0,4$	$2,8 \pm 0,2$	0,939	3791,2	0,000

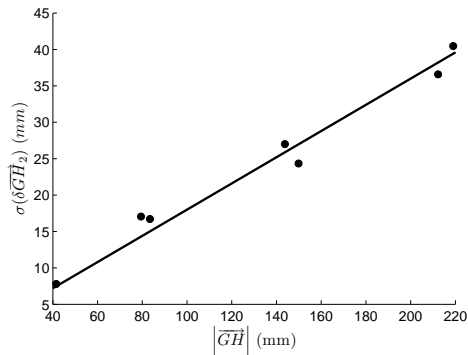


Figura 5.7: Efecto de la excentricidad para los grupos de cuatro marcadores en dos columnas contiguas. Puntos: errores de experimentales; línea continua: errores estimados.

## 5.2. Experimento 2: Control del error aleatorio

En este experimento se dimensionó el error de tipo aleatorio que se esperaba cometer al definir el EIR en las pruebas con usuarios. Se empleó el mismo montaje con eje fijo del Experimento 1, pero el sistema de marcadores que se fijó fue el diseñado para el tórax, y el análisis cinemático se hizo suavizando la señal.

Al igual que en el Experimento 1, se tomó el EIR medio como mejor aproximación al real, y se definió su error a partir de la oscilación de las medidas alrededor de esta media. Este error se comparó con el que se esperaría según las leyes validadas en el experimento anterior. El dato de partida para calcular el error esperado era el error en las velocidades de los marcadores, pero debido al proceso de suavizado se esperaba que éste fuese mucho menor que el estudiado en el Experimento 1. Para dimensionarlo se hizo un análisis sobre una variable «modelo», que fue la coordenada con mayor rango de los marcadores, después de haberla suavizado. A esta variable se le añadió de forma simulada un ruido normal aleatorio, distribuido con una desviación típica de 0,8 mm, semejante al error de posición observado en el Experimento 1 para las coordenadas X e Y. Tras volverla a suavizar, se compararon las posiciones y derivadas resultantes con las obtenidas antes de añadir el ruido. El tamaño de los errores residuales, que cumplieron la hipótesis de sesgo nulo ( $p > 0,05$ ), se presenta en la tabla 5.11.

Tabla 5.11: Errores de posición y velocidad residuales tras el suavizado. Las pruebas T arrojan un resultado coherente con la hipótesis de variables insesgadas.

Variable	Error medio	Desv. típ.	$t$	gdl	$p$
Posición	$2,05 \cdot 10^{-2}$ mm	0,42 mm	-0,518	416	0,605
Velocidad	$0,2 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$3,1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	1,155	416	0,121

Tabla 5.12: Errores en orientación ( $\delta\alpha$ ) y posición ( $\delta GH$ ) en el EIR.

	Medido (RMS)	Estimado (Desv. típica)
$\delta\alpha$ ( $^\circ$ )	0,24	0,38
$\left  \delta \vec{GH}_1 \right $ (mm)	N/A	1,7
$\left  \delta \vec{GH}_2 \right $ (mm)	N/A	0,9
$\left  \delta \vec{GH} \right $ (mm)	1,0	1,9

Además del error de velocidad, para calcular la magnitud prevista del error en el EIR era necesario conocer las características geométricas y cinemáticas del sistema de marcadores:

- El número de marcadores era  $n = 8$ .
- La excentricidad del centroide respecto al EIR era 84,5 mm (calculada como el promedio de  $\left| \vec{GH} \right|$  a lo largo de la prueba).
- Los momentos de inercia principales del sistema de marcadores eran, de mayor a menor  $\lambda_1 = 1,05 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$ ,  $\lambda_2 = 8,54 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$  y  $\lambda_3 = 1,93 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$ . La dirección principal asociada a este último coincidía con el eje Z, y no variaba sensiblemente a lo largo de la prueba.
- En el tramo en el que se calculó la posición del EIR, la media cuadrática (RMS) de la velocidad angular era  $RMS(|\vec{\omega}|) = 0,66 \text{ rad/s}$ .

Con estos valores, empleando las fórmulas descritas en la sección 4.3.3, se calcularon los errores estimados en la orientación y la posición del EIR. La tabla 5.12 muestra de forma conjunta los valores medidos y estimados de estos errores.

Como se puede observar, las estimaciones predecían un error con un orden de magnitud semejante al medido, aunque las desviaciones típicas estimadas eran aproximadamente el doble que la RMS observada.



### 5.3. Experimento 3: Control de los artefactos

Para controlar el deslizamiento que pudiera existir entre los sistemas de marcadores y la piel, en este experimento se fijaron marcadores directamente sobre las prendas ceñidas a la piel de cinco sujetos, y se midió el movimiento relativo de estos conjuntos ( $A$ ) respecto a los sistemas de barras ( $B$ ). Se hicieron pruebas separadas para el tórax y la pelvis. En cada prueba se calculó la RMS de la velocidad angular relativa en el eje principal ( $\omega_z^R$ ), el módulo de la velocidad relativa en el centroide del conjunto  $A$  ( $\vec{v}_{GA}^R$ ), y la distancia entre los EIR de los conjuntos  $A$  y  $B$  ( $\overrightarrow{H_A H_B}$ ).

Para comprobar si estos valores podían explicarse como efecto de los errores aleatorios, se calcularon los errores estimados para el movimiento relativo, utilizando las características geométricas y cinemáticas de los sistemas de marcadores:

- Como estimación del error de velocidad de los marcadores se tomó la misma que en el Experimento 2 (un ruido aleatorio isótropo con desviación típica  $\sigma_v = 3,1 \text{ mm/s}$  en todos los ejes).
- El número de marcadores era  $n = 8$  para todos los conjuntos.
- Los momentos de inercia de los sistemas de barras en el eje de rotación ( $Z$ ) eran  $1,93 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$  para el tórax y  $2,07 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$  para la pelvis.

Todos los demás parámetros necesarios (momentos de inercia de los conjuntos de marcadores superficiales, distancias entre centroides y el EIR, y la velocidad angular del movimiento) variaron de una prueba a otra. Con estos datos se estimaron las desviaciones típicas esperadas de los errores de velocidad angular y lineal, de forma semejante al Experimento 2 y aplicando las fórmulas definidas en la sección 4.3.4.

Los parámetros cinemáticos del movimiento relativo observado se compararon con el error aleatorio estimado para cada una de las cinco medidas. Los valores  $p$  de la comparación estadística se corrigieron según el criterio de Šidák para evitar falsos positivos por repetición de la prueba (Abdi, 2007). Los resultados de las medidas, el tamaño de los errores estimados y los valores de las pruebas estadísticas se muestran en las tablas 5.13, 5.14 y 5.15.

Se observa en estas tablas que la velocidad angular relativa entre los conjuntos  $A$  y  $B$  de marcadores era significativamente alta en dos de las cinco medidas del tórax, y en todas las de la pelvis ( $p < 0,05$ ). La velocidad relativa en el centroide de  $A$ , en cambio, era en general pequeña, y sólo superaba significativamente la estimada por el error aleatorio en una de las medidas

Tabla 5.13: Prueba estadística sobre la velocidad angular relativa ( $\omega_z^R$ ). Los valores  $p$  están corregidos según el criterio de Šidák (5 comparaciones). Los sujetos que mostraron diferencias significativas con el error aleatorio se marcan con asteriscos.

Variable	Sujeto	RMS ( $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )	$H_0$ ( $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )	$\chi^2$	gdl	$p$
Tórax	1	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	462,7	406	0,128
Tórax	2	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	345,4	404	1,000
Tórax	3*	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	2625,5	500	0,000
Tórax	4	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	437,3	488	1,000
Tórax	5*	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	591,4	389	0,000
Tórax	Media	$1,7 \cdot 10^{-2}$				
Pelvis	1*	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	1327,6	388	0,000
Pelvis	2*	$6,4 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	525,0	349	0,000
Pelvis	3*	$9,3 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	810,9	509	0,000
Pelvis	4*	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	1856,5	538	0,000
Pelvis	5*	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	681,5	362	0,000
Pelvis	Media	$6,4 \cdot 10^{-2}$				

Tabla 5.14: Prueba estadística sobre la velocidad relativa en el centroide del conjunto  $A$  ( $|\bar{v}_{GA}^R|$ ). Los valores  $p$  están corregidos según el criterio de Šidák (5 comparaciones). Los sujetos que mostraron diferencias significativas con el error aleatorio se marcan con asteriscos.

Variable	Sujeto	RMS ( $\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ )	$H_0$ ( $\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ )	$\chi^2$	gdl	$p$
Tórax	1	0,55	1,8	40,1	406	1,000
Tórax	2	0,98	1,6	147,4	404	1,000
Tórax	3	1,04	1,8	175,3	500	1,000
Tórax	4	0,20	1,7	6,2	488	1,000
Tórax	5	1,00	1,7	124,3	389	1,000
Tórax	Media	0,75				
Pelvis	1	1,9	1,9	402,3	388	0,829
Pelvis	2	1,8	1,9	303,7	349	1,000
Pelvis	3*	2,9	1,9	1196,6	509	0,000
Pelvis	4	0,9	1,9	133,1	538	1,000
Pelvis	5	2,0	1,9	408,3	362	0,213
Pelvis	Media	1,9				

Tabla 5.15: Prueba estadística sobre la discrepancia en el EIR ( $|\overrightarrow{H_A H_B}|$ ). Los valores  $p$  están corregidos según el criterio de Šidák (5 comparaciones). Los sujetos que mostraron diferencias significativas con el error aleatorio se marcan con asteriscos.

Variable	Sujeto	RMS (mm)	$H_0$ (mm)	$\chi^2$	gdl	$p$
Tórax	1	3,4	9,8	11,8	76	1,000
Tórax	2	4,3	8,8	12,3	50	1,000
Tórax	3	10,3	10,0	98,6	93	0,862
Tórax	4	5,8	18,3	8,0	79	1,000
Tórax	5	5,1	8,3	7,1	19	1,000
Tórax	Media	5,8				
Pelvis	1	13,3	23,2	9,2	28	1,000
Pelvis	2	11,7	27,9	4,7	27	1,000
Pelvis	3*	23,4	14,0	210,7	100	0,000
Pelvis	4	32,6	36,8	73,4	93	1,000
Pelvis	5	27,0	47,7	6,4	20	1,000
Pelvis	Media	21,6				

de la pelvis. La ubicación del EIR también se vio poco afectada por el posible movimiento relativo: el tamaño de  $\overrightarrow{H_A H_B}$  se podía explicar en todos los casos como un efecto del error aleatorio, y sólo en una de las medidas de la pelvis esta distancia era significativamente mayor que la estimada (la misma medida en la que  $|\vec{v}_G^R|$  era significativamente alto).

En definitiva, los artefactos por deslizamiento en el tórax eran generalmente pequeños, y en la gran mayoría de casos insignificantes respecto al error aleatorio. En velocidad angular de la pelvis sí existían importantes diferencias de forma generalizada; en la mayoría de los casos esto no afectaba a la localización del EIR de forma significativa, ya que la velocidad relativa en el centro del cuerpo era pequeña y el error aleatorio esperado superaba en magnitud el efecto del artefacto, pero el posible impacto en los cálculos de la pelvis debía ser considerado.

## 5.4. Experimento 4: Flexión del tronco

La tabla 5.16 muestra los valores descriptivos de los resultados de los experimentos con sujetos (véase la tabla 4.2 para la descripción de las variables).

Tabla 5.16: Resumen de los resultados del Experimento 4 ( $N = 11$ ). Se muestran las medianas (percentil 50%) y los cuartiles inferior (25%) y superior (75%).

Variable	25 %	50 %	75 %
AMP (mm)	-6,8	46,6	52,2
AMT (mm)	111,4	172,9	226,9
AMR (mm)	201,0	239,6	289,0
RFP ( $^{\circ}$ )	18,7	20,9	28,1
RFT ( $^{\circ}$ )	57,7	64,7	74,2
RFR ( $^{\circ}$ )	30,8	46,8	52,4
RL (mm)	62,7	96,4	122,5
MD (mm)	89,1	95,5	104,0
CLFR	0,54	0,71	0,87
PLFR (mm/ $^{\circ}$ )	1,0	1,6	2,5

Aunque había importantes diferencias entre los sujetos, existían algunas características comunes que permitieron definir un patrón del movimiento. La figura 5.8 representa un caso ejemplar de este patrón.

Los valores positivos de la altura del EIR pélvico (AMP) muestran que la posición de este eje se encontraba normalmente por encima del plano del asiento. Las implicaciones de este resultado sobre la naturaleza del movimiento de la pelvis se discuten en el siguiente capítulo. Por otra parte, el EIR del tórax se encontraba claramente por encima del asiento, con una altura mediana (AMT) de 173 mm. Más alto aún se encontraba el EIR del movimiento relativo, con una altura mediana (AMR) de 240 mm. La distancia mediana de este eje respecto a la piel (MD) estaba en un rango estrecho entre 89 y 104 mm (véase la figura 5.9).

Los rangos de flexo-extensión del tórax presentaban una dispersión relativamente baja (rango intercuartílico, RI, de  $16,5^{\circ}$ ). Mayor era la variabilidad del movimiento relativo respecto a la pelvis, con un RI de  $21,6^{\circ}$ . El RI de la flexo-extensión pélvica era  $9,4^{\circ}$ .

El rango de desplazamiento longitudinal (RL) muestra que el EIR del movimiento relativo se desplazaba a lo largo de las vértebras lumbares cuando aumentaba la extensión. El eje se desplazaba en un rango cuyo valor central era de casi 100 mm. La relación entre este desplazamiento y el movimiento de flexo-extensión se aprecia claramente en la correlación que presentaba el ángulo de extensión y la posición longitudinal del EIR relativo (CLFR, véase la figura 5.10). Esta correlación era positiva en todos los sujetos, con una mediana de 0,71. El EIR ascendía durante el movimiento de extensión y descendía

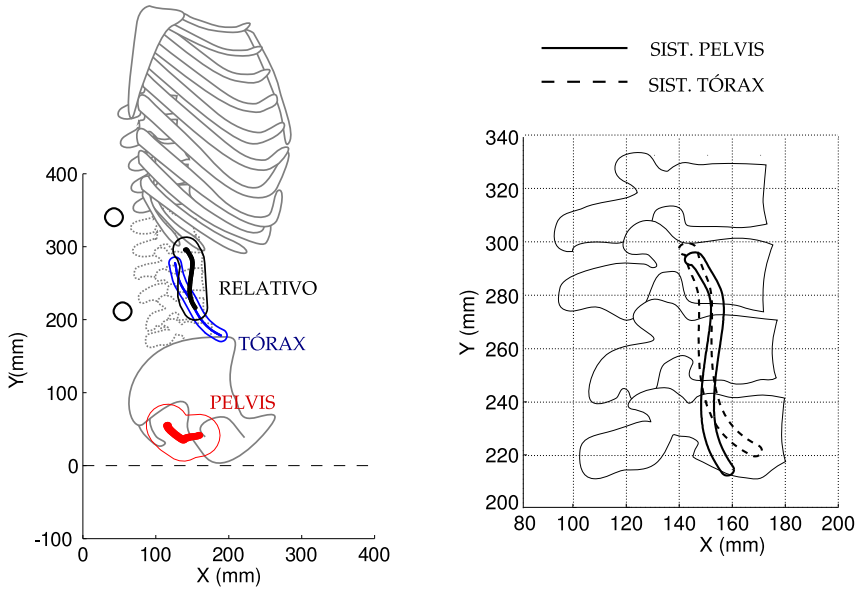


Figura 5.8: Ejemplo de la posición de los EIR en el movimiento del tronco. En la figura de la izquierda se muestran los tres ejes en distintos colores, vistos de forma solidaria a los propios segmentos corporales en una postura erguida (el EIR relativo se muestra como visto desde la pelvis). Las áreas coloreadas son las regiones de confianza al 95 % para el error aleatorio; los contornos sin relleno son los de un error más conservador, de magnitud semejante a las discrepancias entre ejes vistas en el Experimento 3. Los dos círculos negros representan los marcadores de T12 y L3 en la postura erguida. A la derecha se muestra con mayor detalle el EIR relativo, visto de forma solidaria a los dos segmentos corporales en la misma postura erguida. Sólo se representa el área de confianza relativa al error aleatorio. Las estructuras óseas están representadas de forma figurativa, para ayudar a la interpretación: se puede observar que el EIR de la pelvis, a pesar de su error de medida, se encuentra claramente por encima del nivel del asiento ( $Y = 0$ ), y que el EIR relativo recorre gran parte de la columna lumbar.

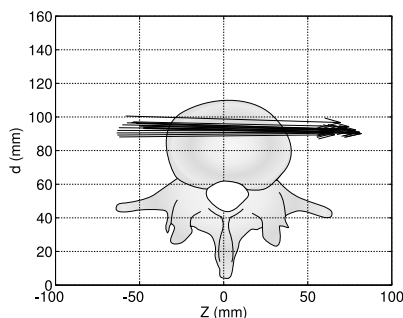


Figura 5.9: Vista transversal del EIR del movimiento relativo, para uno de los sujetos. El eje es prácticamente paralelo a Z a lo largo de todo el movimiento y se desplaza muy poco en la dirección antero-posterior. La vértebra L3 está representada de forma figurativa, a escala con las medidas de Panjabi et al. (1992), para comparar su tamaño con la distancia transversal desde el marcador de L3 hasta el EIR ( $d$ ).

durante la flexión. Este patrón se daba en todos los sujetos, salvo en uno cuyo EIR se desplazaba de forma más irregular. El coeficiente PLFR cuantificaba cuánto ascendía el EIR relativo en término medio cuando aumentaba la extensión; en la muestra analizada esta pendiente estaba entre 1 y 2,5 mm por cada grado de extensión.

En el ejemplo de la figura 5.8 se muestran unas áreas de confianza para la posición de los EIR, en base a la medida de un sujeto de ejemplo. Estas áreas se definen alrededor de las trayectorias de los EIR, promediadas entre los distintos ciclos y representadas en los sistemas de referencia ligados a la pelvis y el tórax, cuando éstos se encontraban en una postura de referencia erguida. En estos sistemas de referencia su representación geométrica puede compararse con una figura anatómica estática.

Los contornos se han calculado a partir de una circunferencia de radio  $r = 1,96$ , que sería el límite de confianza al 95 % para una distribución bidimensional normal. A esta circunferencia se le ha aplicado una transformación de Mahalanobis inversa (Härdle & Simar, 2007). Para esta transformación se ha utilizado como punto medio el valor promedio del EIR en cada instante del recorrido, y se han considerado dos matrices de covarianzas por cada movimiento:

- La asociada al error aleatorio, considerando (como en los Experimentos 2 y 3) que los marcadores tienen un error de velocidad con  $\sigma_v =$

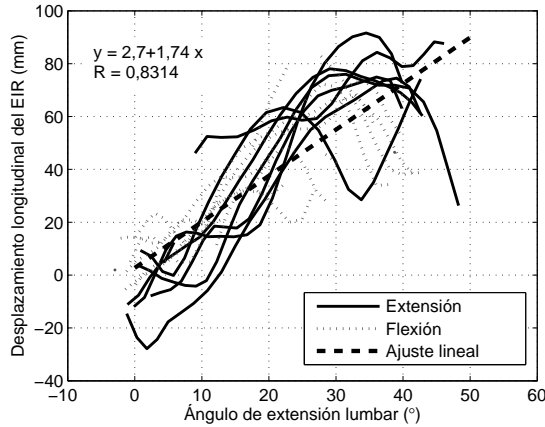


Figura 5.10: Relación entre el desplazamiento longitudinal del EIR del movimiento relativo y el ángulo de flexo-extensión para un sujeto. Se representan todos los ciclos de flexión y extensión, más la recta con el ajuste lineal.

3,1 mm/s, y los parámetros geométricos y cinemáticos de los sistemas de marcadores. La región de confianza relativa a este error es la representada en un área de color en la gráfica izquierda de la figura 5.8, y la utilizada en la de la derecha.

- La asociada a un error cuya desviación típica fuese igual a la discrepancia media entre ejes del Experimento 3. Es decir, un error que tuviese el tamaño del posible artefacto, aunque modelado como error aleatorio sin una dirección definida (matriz de covarianzas diagonal). La región de confianza correspondiente es la representada mediante un contorno sin relleno en la gráfica de la izquierda (no se emplea en la derecha).

Para el movimiento relativo las matrices de covarianzas se han calculado considerando la fórmula (4.98).

## 5.5. Experimento 5: Caracterización de sillas

La tabla 5.17 muestra los valores descriptivos de los resultados de las pruebas con sillas (véase la tabla 4.3 para la descripción de las variables). Las posiciones y trayectorias medias de los EIR se muestran gráficamente, para

Tabla 5.17: Resumen de los resultados del Experimento 5 ( $N = 8$ ). Se muestran las medianas (percentil 50%) y los cuartiles inferior (25%) y superior (75%).

Variable		25 %	50 %	75 %
RIA (°)		7,3	11,4	13,5
RIR (°)		20,7	25,0	28,1
PRA		0,17	0,36	0,51
MEA (mm)	X	95,3	145,8	204,5
	Y	-156,5	-118,3	-105,6
MER (mm)	X	8,9	19,7	48,1
	Y	-159,9	-120,1	-96,7
MERA (mm)	X	-83,6	-74,0	-68,0
	Y	-168,9	-126,2	-77,0
DEA (mm)	X	3,2	4,9	10,0
	Y	1,7	4,0	9,0
DER (mm)	X	3,1	3,8	5,1
	Y	2,2	2,8	3,3
DERA (mm)	X	6,4	7,4	9,6
	Y	4,4	7,2	11,6

cada silla por separado, en la figura 5.11, de forma análoga a la primera gráfica de la figura 5.8 en el Experimento 4. El lugar geométrico de los ejes también se muestra en forma de áreas de confianza, calculadas del mismo modo que para el error aleatorio en los ejes del movimiento humano. En este caso los EIR se representan en el sistema de coordenadas fijo del laboratorio.

La rotación de las partes de la silla era, en términos medios, de  $11^\circ$  para el asiento (RIA) y  $25^\circ$  para el respaldo (RIR), con un rango intercuartílico de  $7^\circ$  para ambas partes. Esta variabilidad era, en términos proporcionales, mucho mayor para el asiento. Esto daba lugar a una variabilidad grande en la relación de sincronismo (PRA), cuyo rango intercuartílico (RI) oscilaba entre 0,17 ( $1^\circ$  del asiento por cada  $6^\circ$  del respaldo) y 0,51 ( $1^\circ$  grado del asiento por cada  $2^\circ$  del respaldo).

Todos los EIR se encontraban muy por debajo del asiento, donde suelen estar articuladas las piezas (coordenadas Y de MEA, MER y MERA negativas). La silla S6 es la única en la que ninguno de los ejes descendía más de 100 mm bajo la línea del asiento. Además, en todas las sillas el EIR del asiento se ubicaba en una zona claramente anterior (coordenada X de MEA positiva), y el EIR del movimiento relativo en una zona posterior (coordenada X de MERA negativa), quedando el EIR del respaldo entre ellos dos. La ubica-



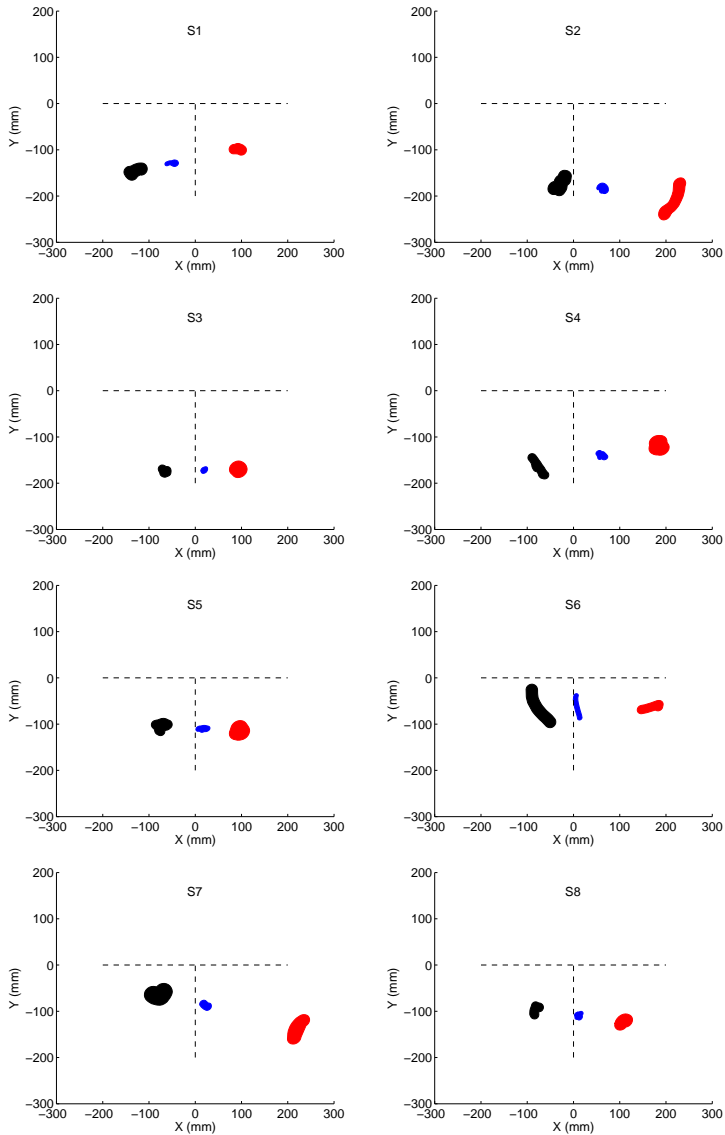


Figura 5.11: Áreas de confianza al 95 % para los EIR de las ocho sillas (el orden de presentación *no* se corresponde con la secuencia de fotografías de la figura 4.19). El código de colores es análogo al de la figura 5.8: rojo para el EIR del asiento, azul para el del respaldo, y negro para el del movimiento relativo. Las cruces en línea discontinua marcan los ejes en torno al origen de coordenadas local: la línea horizontal representa el plano del asiento, y la línea vertical el punto central de apoyo, aproximadamente en línea con el eje de giro de la silla.

ción horizontal de este último (coordenada X de MER) solía estar cerca del punto de apoyo del asiento, o ligeramente por delante.

La oscilación de los ejes era generalmente pequeña para el respaldo, en el que la desviación típica del eje (DER) se encontraba en torno a los 4 mm en el eje X y 3 mm en el eje Y, con un RI del orden de 1 mm. Sólo la silla S6 se apartaba de este patrón, con una gran oscilación vertical, cuya desviación típica era 15 mm. Los EIR del asiento y el movimiento relativo tenían una oscilación (DEA y DERA, respectivamente) de mayor magnitud: en el eje X el cuartil superior de ambos duplicaba el de la oscilación del eje del respaldo, y en el eje Y se llegaba a triplicar. El cuartil inferior para asiento y respaldo era semejante, y menor que el del movimiento relativo.

En resumen, la característica común de los EIR de todas las sillas es que se encontraban por debajo del asiento, con el eje del asiento en una región anterior, el del movimiento relativo en una región posterior, y el del respaldo centrado entre los otros dos. Estos ejes podían mantenerse fijos o desplazarse, según el modelo de silla. En general el más fijo era el eje del respaldo, mientras que los otros dos podían moverse más allá de lo que cabría esperar por el error instrumental (véanse las regiones de confianza de la figura 5.11; pero el patrón de movimiento variaba entre sillas. S6 se distinguía de las demás en que todos los ejes se encontraban más cerca del plano de asiento, y el del respaldo experimentaba un gran desplazamiento vertical. En el siguiente capítulo se discuten los distintos mecanismos de reclinación y cómo se pueden explicar las diferencias observadas.

## 5.6. Experimento 6: Efecto de la silla

El último experimento se realizó con el propósito de comprobar cómo afectaba el diseño mecánico de las sillas a la cinemática de la flexión del tronco. Se escogieron dos sillas cuyas articulaciones fuesen claramente distintas, entre las medidas en el Experimento 5. Estas sillas fueron S1 (altura media de los EIR, con poca oscilación y el eje del respaldo en una posición más posterior que el resto) y S6 (ejes más elevados que el resto, con mucha más oscilación en el EIR del respaldo, que se encontraba centrado horizontalmente). Las sillas también diferían en el rango de reclinación del asiento, de tal manera que S1 tenía una relación de sincronismo asiento-respaldo ligeramente más alta que S6 (figura 5.12). La tabla 5.18 muestra los valores descriptivos de los resultados de las pruebas con sujetos en cada una de estas sillas (véase la tabla 4.5 para la descripción de las variables).

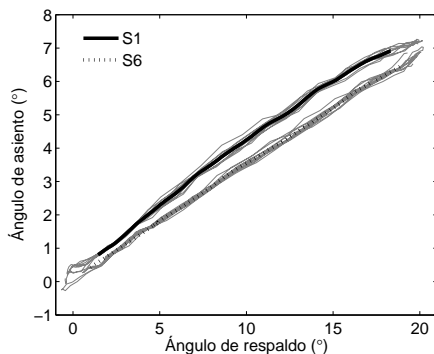


Figura 5.12: Relaciones entre los ángulos de asiento y respaldo en las sillas S1 y S6. Las líneas grises representan los valores a lo largo de todos los ciclos del movimiento; las líneas negras gruesas son las curvas promedio.

Tabla 5.18: Resumen de los resultados del Experimento 6 ( $N = 6$  para cada silla). Se muestran las medianas (percentil 50%) y los cuartiles inferior (25%) y superior (75%).

Variable	Silla		25 %	50 %	75 %
RFT (°)	S1		25,9	30,0	31,5
	S6		25,5	29,8	33,9
MET (mm)	S1	X	26,1	38,3	52,7
		Y	-111,3	-82,7	-50,
	S6	X	-23,7	-7,3	37,5
		Y	-12,4	20,4	113,6
RET (mm)	S1	X	23,1	39,5	50,6
		Y	41,0	59,4	74,4
	S6	X	41,0	64,1	70,6
		Y	89,6	94,4	138,4

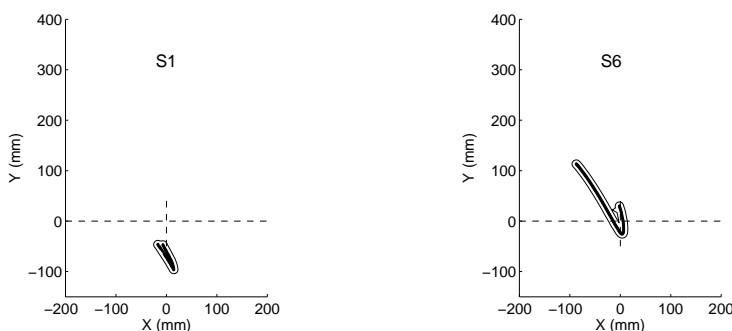


Figura 5.13: Ejemplos del recorrido del EIR torácico cuando se usa la silla S1 (izquierda) y cuando se usa S6 (derecha). Los recorridos están promediados a lo largo de los ciclos, y representados en un sistema solidario al tórax en la postura más adelantada. Se muestran las áreas de confianza al 95 %, considerando sólo el error instrumental aleatorio (área rellena) o un error de igual tamaño que la discrepancia entre ejes medida en el Experimento 3 (contorno vacío). Las crucetas en línea discontinua marcan los ejes en torno al origen de coordenadas local.

En el siguiente capítulo se comparan estos valores con los medidos en el Experimento 4 sobre un asiento rígido y plano, sin respaldo. En grandes rasgos, destaca que la posición del EIR mucho era más baja, llegando a estar por debajo del asiento (coordenada  $Y$  de MET negativa), y que en el caso de la silla S1 el recorrido era, además, mucho más reducido (menores valores de RET). Esto se observa claramente en los dos ejemplos de la figura 5.13, que muestran el recorrido del EIR torácico, calculado del mismo modo que en la gráfica de la figura 5.8 para el Experimento 4.

Las pruebas estadísticas de la tabla 5.19 confirman que los recorridos de los EIR eran distintos entre sillas, para todo el conjunto de medidas. El rango de flexión (RFT) y las coordenadas  $X$  de MET y RET no diferían de forma significativa, pero las coordenadas  $Y$  (en la dirección vertical) sí lo hacían ( $p < 0,05$ ); en términos medios, cuando se usaba la silla S1 el EIR torácico estaba 115 mm más bajo y recorría 48 mm menos que cuando se usaba la silla S6.

Tabla 5.19: Prueba estadística para las diferencias en el movimiento del tórax entre las dos sillas (S1 y S6). La prueba de Levene compara las varianzas de ambos grupos de medidas. La prueba T compara la diferencia entre las medias de S1 y S6.

Variable	Levene		T				
	<i>F</i>	<i>p</i>	S1-S6	<i>t</i>	gdl	<i>p</i>	
RFT <sup>a</sup>	2,64	0,135	-2,3°	-0,56	10	0,590	
MET	X <sup>b</sup>	6,03	0,034	27,6 mm	1,38	5,9	0,218
	Y <sup>a</sup>	4,25	0,066	-114,5 mm	-3,89	10	0,003
RET	X <sup>a</sup>	0,27	0,616	-16,6 mm	-1,17	10	0,268
	Y <sup>a</sup>	0,25	0,626	-47,7 mm	-3,1	10	0,012

<sup>a</sup> Se asumen varianzas homogéneas ( $p > 0,05$  en el test de Levene).

<sup>b</sup> Se consideran varianzas diferentes ( $p < 0,05$  en el test de Levene)

# Capítulo 6

## Discusión

### 6.1. Método de análisis cinemático

La primera parte del trabajo desarrollado fue definir un método de análisis cinemático para cadenas de segmentos con 6 gdl, en el que no se impusiese ninguna restricción previa al movimiento. Además se buscaba que el método pudiese controlar de forma eficaz los errores instrumentales en el cálculo de los parámetros del movimiento, y especialmente en el EIR. Este objetivo se ha logrado a través de los procedimientos y fórmulas descritas en la sección 4.2.

El método propuesto para el análisis instantáneo es una generalización del método invariante desarrollado por Angeles (1986b) para tres marcadores. El mayor número de marcadores empleados ha permitido disponer de información redundante, lo cual es un aspecto crucial para mejorar la precisión en el cálculo de los parámetros cinemáticos (Vithani & Gupta, 2004). El método que se ha presentado en este trabajo permite usar más de tres marcadores sin perder la sencillez de cálculo asociada al método invariante. El cálculo del torsor cinemático y los ejes instantáneos se realiza a través de fórmulas explícitas, más simples que los métodos de descomposición en valores singulares (Woltring et al., 1994; Vithani & Gupta, 2004) o los basados en álgebra lineal (Shiflett & Laub, 1995).

El procedimiento de análisis de los desplazamientos finitos es igual de sencillo en términos de cálculo, y supone una alternativa eficiente a los métodos convencionales basados en matrices de rotación (Spoor & Veldpaus, 1980; Woltring et al., 1985; Veldpaus et al., 1988; Söderkvist & Wedin, 1993; Challis, 1995). Su principal valor práctico es la naturaleza explícita y lineal

de las ecuaciones, que permite obtener los parámetros del movimiento a través de operaciones vectoriales sencillas, a partir de los datos de fotogrametría. Además emplea una analogía con el cálculo del movimiento instantáneo, que complementa otras aproximaciones geométricas dirigidas a establecer un vínculo entre los desplazamientos finitos e infinitesimales, como propusieron Huang et al. (2008). Para ello se utiliza el concepto del «cuerpo virtual», basado en las posiciones intermedias de los puntos, utilizadas a menudo en la teoría de los desplazamientos finitos (Bottema & Roth, 1990; Hunt & Parkin, 1995; Parkin, 1997b; Huang et al., 2008). Los parámetros obtenidos no son los empleados habitualmente para representar los desplazamientos finitos, pero la transformación a cualquier otra notación es inmediata: el término de traslación resultante es la mitad del desplazamiento del centroide de los marcadores; el término de rotación es el vector de Rodrigues, estrechamente relacionado con el vector orientación (Woltring, 1994), y que se puede utilizar directamente para componer desplazamientos o reproducir la traslación de cualquier punto. La analogía empleada entre los análisis de desplazamientos finitos e infinitesimales (instantáneos) da lugar a un procedimiento de cálculo común para ambos.

En ambos métodos se hace uso de una analogía mecánica con el cálculo de cantidades de movimiento y momentos cinéticos, que da lugar a una técnica para priorizar la información aportada por distintos marcadores, en caso de necesidad o conveniencia. Esta priorización se realiza asignando masas ficticias a los marcadores individuales, dando más valor a aquéllos que proporcionen información más consistente o con menos error. Esta técnica facilita el proceso de optimización ponderada propuesto por Sommer III (1992) a través de métodos estadísticos, sin que la sencillez del proceso de cálculo se vea afectada.

El efecto de los errores instrumentales en el tursor cinemático y en los ejes del movimiento queda controlado a través de fórmulas igualmente explícitas, como función del error en las velocidades de los marcadores, su distribución geométrica, la excentricidad del conjunto respecto al eje y —en el caso del análisis instantáneo— la velocidad angular del movimiento. Los trabajos anteriormente publicados sobre la materia normalmente parten de distribuciones isótropas de marcadores, sin considerar la naturaleza vectorial y anisótropa del cálculo de los parámetros cinemáticos (Woltring et al., 1985, 1994), o se han limitado al estudio de movimientos en 2-D (Crisco et al., 1994) y desplazamientos finitos (Söderkvist & Wedin, 1993).

El método se complementa con dos técnicas numéricas para reducir los errores. El suavizado de las variables elimina las fluctuaciones que tienen características matemáticas de un residuo aleatorio, dejando sólo la señal com-

patible con una función continuamente derivable, y proporcionando al mismo tiempo el valor de sus derivadas. El promediado funcional reduce la variabilidad de los resultados que no esté asociada a un grado de libertad funcional único. Estas dos técnicas complementarias se basan en algoritmos más complejos, que en este trabajo sólo se analizan de forma teórica (véase el desarrollo matemático en el apéndice A.1 y A.4). Para una comprobación experimental de las técnicas véanse Page et al. (2006b, 2008b,a, 2009b,c, 2010)

El resto de la metodología se validó experimentalmente. El Experimento 1 tenía como objetivo comprobar que el error estimado tenía el mismo orden de magnitud que el medido, dado un movimiento controlado en el que se tuviese una buena aproximación a los valores reales de las variables cinemáticas. Esta aproximación se consiguió utilizando el conjunto completo de marcadores y aplicando las técnicas numéricas de reducción de errores; el campo cinemático así medido se comparó con el resultante de otros 247 análisis, realizados con distintos subconjuntos de marcadores y velocidades calculadas por diferencias finitas.

Las discrepancias entre los resultados de estos análisis y el «ideal» mostraron un ajuste excelente con la teoría. El error instrumental en las posiciones ( $\delta\vec{R}_i$ ) coincidía con una distribución aleatoria e insesgada, cuyos ejes principales venían determinados por la posición de las cámaras: la desviación típica del error era 0,48 mm en el eje de separación de las cámaras, 0,65 mm en el eje perpendicular del plano de visión y 0,87 mm en el eje de profundidad. Estos errores se encuentran dentro de lo habitual en sistemas de fotogrametría, según la revisión de Chiari et al. (2005). El error en la velocidad de los marcadores ( $\delta\vec{v}_i$ ) era proporcional al de las posiciones, amplificado exactamente en la medida que se había estimado. La parte angular del error en el torsor cinemático ( $\delta\omega_z$ ) era inversamente proporcional a la raíz cuadrada del momento de inercia de los marcadores en el plano de rotación, y su parte lineal ( $\delta\vec{v}_G$ ) se reducía proporcionalmente con la raíz del número de marcadores. Además, los coeficientes lineales de las regresiones calculadas eran semejantes a la desviación típica de  $\delta\vec{v}_i$  en los distintos ejes, tal como se esperaba ( $\sigma_{vx} = 27,7 \text{ mm/s}$ ,  $\sigma_{vy} = 28,0 \text{ mm/s}$ ,  $\sigma_{vz} = 17,0 \text{ mm/s}$ ). Por su parte, el error en la ubicación del EIR ( $\delta\vec{GH}$ ) también se ajustaba al estimado en la dirección perpendicular al vector  $\vec{GH}$  (un error proporcional a  $\delta\vec{v}_G$ ), y se comprobó que una vez sustraída esa componente, el error que quedaba en el EIR era paralelo y proporcional a  $\vec{GH}$ , y también aumentaba proporcionalmente con  $\delta\omega_z$ .

Por otro lado, los análisis estadísticos también mostraron algunas diferencias significativas con los valores estimados, aunque todas ellas tienen una explicación teórica. Dos de las tres covarianzas de  $\delta\vec{v}_i$  (las que involucraban



al eje  $X$ ) no tenían la misma distribución que las de  $\delta\vec{R}_i$ , aunque su tamaño sí era el esperado. Esto podía ser el efecto de una autocorrelación en  $\delta R_{ix}$ , que era suficientemente pequeña como para no encontrarse en un análisis coordenada por coordenada, pero se reveló al cruzar el error en los distintos ejes.

El error en la velocidad angular, por su parte, mostró un pequeño sesgo, que se podía explicar por el efecto obviado de  $\delta\vec{R}_i$ ; en la sección 4.2.5.3 se había planteado que el cálculo de  $\vec{\omega}$  puede verse afectado por la deformación aparente del conjunto de marcadores, aunque normalmente este efecto puede despreciarse frente al del error de las velocidades. Además en la gráfica 5.2 se aprecia que  $\delta\omega_z$  estaba ligeramente sobreestimado en los análisis para los conjuntos de marcadores de mayor inercia. Esto se explica por el método de cálculo de  $\delta\omega_z$ : este parámetro no era, en realidad, el error total en la velocidad angular, sino la *diferencia* entre el error total y el error de la mejor estimación ( $\delta\omega_z^*$ ), hecha con todos los marcadores y los datos suavizados. Este último error, aunque pequeño en comparación con el total, no era nulo y además estaba correlacionado con el primero. En consecuencia  $\delta\omega_z$  era algo menor que el error real, y esto se notaba más cuanto más se parecía el sistema de marcadores analizado al empleado para la mejor estimación. Esto también explicaría que el coeficiente lineal de la regresión al modelo MW ( $A = 24,2 \text{ mm/s}$ ) fuese alrededor de un 12 % menor que la desviación típica de  $\delta\vec{v}_i$  en el plano  $XY$ , así como el valor significativamente distinto de cero (aunque pequeño) del segundo coeficiente, con  $B = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$  de media.

La parte lineal del error en el tursor,  $\delta\vec{v}_G$ , cumplió todas las hipótesis casi a la perfección. Sólo en la coordenada  $X$  los intervalos de confianza de los coeficientes de MV no incluían los valores previstos: los límites de  $A$  se encontraban a  $2,1 \text{ mm/s}$  de  $\sigma_{vx}$  (un 7,5 % de su valor nominal) y los del coeficiente  $B$  a  $1,0 \text{ mm/s}$  de cero. Esta pequeña desviación puede relacionarse con la encontrada en las covarianzas de  $\delta\vec{v}_i$ .

El error en  $\vec{GH}$  mostraba un sesgo en la coordenada  $Y$ , que es a la que afectaba principalmente la excentricidad de los marcadores. Esto era consecuencia de la naturaleza no lineal de la operación para el cálculo del EIR, que implica la multiplicación y división de velocidades angulares y lineales. Sin embargo la magnitud de las componentes de  $\delta\vec{GH}$  sí se ajustaba muy bien a la prevista, sobre todo en la parte en la que no intervenía la excentricidad del sistema de marcadores. El efecto de esta excentricidad se ajustaba bien a los valores esperados cuando  $|\vec{GH}|$  era mayor de  $80 \text{ mm}$ ; en caso contrario el error en el EIR quedaba dominado por la otra componente.

En definitiva, se demostró que el método de análisis cinemático era válido para los propósitos de la investigación, y que los errores instrumentales ac-

tuaban tal como estaba previsto. El análisis pormenorizado del error a nivel estadístico mostró algunas diferencias respecto al modelo ideal, aunque se ha podido encontrar una explicación matemática a todas esas divergencias, y el tamaño de las mismas es pequeño respecto a la magnitud de los errores, que se ajustaban bien a los valores esperados. La detección de esas diferencias, por lo tanto, no era consecuencia de discrepancias importantes entre los valores estimados y medidos, sino de la sensibilidad de las pruebas estadísticas, que contaban con un número de datos suficientes para hallar cualquier desviación.

## 6.2. Control de los errores experimentales

Los Experimentos 2 y 3 se llevaron a cabo para tener un orden de magnitud de los errores que podían cometer en los experimentos con sujetos y sillas. El tamaño de los errores instrumentales se podría estimar a partir de las fórmulas validadas en el Experimento 1 aunque el error de partida sería menor, ya que las variables se suavizarían para calcular las posiciones y velocidades (en el Experimento 1 esto sólo se hizo para calcular la aproximación al campo cinemático real).

En el Experimento 2 se comprobó que el suavizado reducía ocho veces el error de velocidad en los marcadores. El error en el cálculo del EIR se controló además utilizando un sistema de 8 marcadores con un momento de inercia alto alrededor de los ejes de rotación. Debido a las limitaciones de la superficie disponible en las regiones pélvica y torácica, los marcadores se colocaron en sendos soportes que se extendían por fuera del cuerpo de los sujetos. Con este sistema bien centrado, la variación en un EIR fijo era del orden de 1 mm en cada coordenada, más  $0,24^\circ$  ( $4,2 \cdot 10^{-3}$  rad) en su orientación. Esto último suponía un incremento de 4,2 mm en el error de representación del EIR por cada metro de separación entre el plano con el error mínimo y el utilizado para representarlo (véase la sección 4.2.5.5).

Sin embargo la teoría predecía, utilizando el error de partida en la velocidad de los marcadores ( $\sigma_v = 3,1$  mm/s), aproximadamente el doble de error: 1,9 mm en la posición y  $0,38^\circ$  en la orientación ( $6,6 \cdot 10^{-3}$  rad ó 6,6 mm por metro). Esto podía explicarse en parte por las hipótesis asumidas en la estimación, en especial haber simplificado la distribución de  $\delta\vec{v}_i$  a un error isótropo. Pero la principal razón podía ser la misma que se ha comentado en el Experimento 1 en relación con  $\delta\omega_z$  para conjuntos de marcadores con momentos de inercia altos. En ambos casos el error estimado superaba al medido, y la razón podía ser la misma, a saber: que las variables consideradas como valores

«reales» de los parámetros cinemáticos (en este caso la posición y orientación del EIR) no habían sido calculadas de forma independiente, sino aproximadas a partir de los mismos datos que se estaban comparando con ellas. El error asociado a esta aproximación ideal estaba directamente influido por los errores cometidos en cada instante. Por lo tanto era esperable que al medir los errores como la diferencia entre las medidas y esa aproximación, el valor resultante tuviese un valor menor que el estimado según procedimientos estadísticos. Esto implica que el error medido experimentalmente, aunque podía ser una buena aproximación al cometido y tenía un claro soporte empírico, era una aproximación «optimista» al error real, que podía alcanzar el doble de magnitud.

Los errores por artefactos eran potencialmente mayores; la discrepancia entre el EIR medido con los soportes externos y el medido con marcadores directos sobre el cuerpo (utilizando prendas elásticas ceñidas) era, en términos medios, de 6 mm para el tórax y 21 mm para la pelvis. Ahora bien, el análisis estadístico mostraba que la mayor parte del movimiento relativo entre ambos conjuntos de marcadores entraba dentro de lo explicable como efecto de los errores instrumentales aleatorios. Esta comprobación se hizo con cada uno de los cinco sujetos participantes, corrigiendo el resultado del análisis estadístico para evitar falsos positivos por la mera repetición de la prueba.

El parámetro del torsor relativo que más se aproximaba al límite del error aleatorio o lo superaba era la velocidad angular; ésta superaba el valor esperado en caso de artefactos nulos en dos de las pruebas del tórax, y en todas las de la pelvis. En cambio, la velocidad relativa en el centro de los puntos fijados sobre el cuerpo era generalmente menor que la esperable sólo por el error aleatorio, salvo en una medida para la pelvis. Este resultado implica que el movimiento de flexo-extensión del tronco producía un giro sobre el conjunto de marcadores superficiales que el sistema de barras no podía medir, pero la traslación de ambos sistemas era normalmente solidaria. Esta rotación «invisible» al sistema de marcadores externo era, probablemente, efecto de una deformación local del conjunto de marcadores dispuestos sobre el cuerpo, a la que el sistema indeformable de barras era insensible.

Las discrepancias entre los EIR de ambos conjuntos de marcadores estuvieron dominadas por el término de traslación relativa: en el tórax no se encontró ninguna discrepancia de tamaño superior al esperado por los errores instrumentales, y para la pelvis el único caso significativo fue el mismo en el que había una traslación significativamente alta. Esto ocurrió a pesar de que el error instrumental obtenido en el Experimento 2 era mucho menor (1 mm frente a los 6 mm del tórax y los 21 mm de la pelvis en el Experimento 3), debido a que el error aleatorio estimado también era mucho mayor en este otro

experimento: el número de marcadores era el mismo en todos los conjuntos, pero los momentos de inercia no podían ser tan grandes en los marcadores fijados al cuerpo, ni se podían aproximar tanto al EIR del movimiento (precisamente la razón por la que se diseñaron los sistemas de barras). Al calcular el movimiento relativo y comparar las posiciones del EIR se componían ambos errores, amplificándose así su magnitud esperada.

Así pues, la hipótesis de artefactos nulos era en general coherente con los datos (más para el tórax que para la pelvis), pero aun ignorándola el error en la ubicación del EIR tenía un valor muy aceptable. En la revisión de della Croce et al. (2005) se señalan errores en la determinación en los puntos anatómicos que van desde desde 11.8 mm hasta 24.7 mm entre examinadores; y en relación con el cálculo de centros de rotación articulares, el error alcanzado para la cadera es de 12 mm utilizando métodos funcionales (entre 21 y 23 mm para los métodos predictivos).

### 6.3. Modelo biomecánico del tronco

En el Experimento 4 se analizó la flexo-extensión del tronco utilizando un asiento rígido y plano, sin respaldo, y un modelo de tronco sencillo con dos cuerpos rígidos, el tórax y la pelvis. Midiendo en 3-D ambos segmentos se calculó el lugar geométrico ocupado por el EIR de tres movimientos: el de la pelvis sobre el asiento, el movimiento absoluto del tórax respecto al sistema de referencia local y el movimiento relativo del tórax respecto a la pelvis.

La primera conclusión que se obtiene de los resultados se refiere a los rangos de flexo-extensión, que es uno de los parámetros habituales en los estudios sobre la postura sedente. En este experimento los sujetos realizaban un movimiento controlado entre dos posturas extremas, por lo que se podía esperar una variabilidad pequeña en los rangos del ángulo de flexo-extensión. El RI del rango torácico (RFT) era  $16,5^\circ$ , lo cual suponía un 26 % de su valor central. Pero los RI del rango pélvico y del movimiento relativo (RFP y RFR) eran, respectivamente,  $9,4^\circ$  y  $21,6^\circ$ , en ambos casos un 45 % de su valor central. Por lo tanto se puede concluir que la variabilidad en las estrategias individuales para realizar el movimiento eran ciertamente grandes, a pesar de la semejanza del movimiento global: dependiendo del sujeto se observaba una mayor contribución de la rotación de la pelvis o del movimiento lumbar. Estos resultados coinciden con la variabilidad entre sujetos encontrada para los rangos de movimiento en estudios anteriores sobre la postura sedente (Bridger et al., 1992; Black et al., 1996; Faiks & Reinecke, 1998), así como en

postura de pie (Gatton & Percy, 1999) o en el movimiento de levantarse de un asiento (Tully et al., 2005).

Kasahara et al. (2008) analizaron la coordinación pélvico-lumbar en la postura sentada sin respaldo y encontraron valores similares en el rango de movimiento del tronco, aunque distintas contribuciones de la pelvis y de la zona lumbar. El rango pélvico en aquel estudio era mayor que en éste ( $35,8^\circ$  frente a  $20,9^\circ$  en términos medios), mientras que el rango lumbar era menor ( $27,6^\circ$  frente a  $46,8^\circ$ ). Cabe destacar que las posiciones inicial y final de dicho estudio eran distintas de las utilizadas en éste, y no analizaron el movimiento de forma cíclica entre las posturas de flexión y extensión extremas. Vergara & Page (2002) encontraron una gran variabilidad en los rangos pélvicos y lumbares incluso en tareas cuasi-estáticas en sillas de oficina convencionales (rangos pélvicos entre  $1,6^\circ$  y  $70,5^\circ$ , y rangos lumbares entre  $1,9^\circ$  y  $48,9^\circ$ ). En ese caso la gran variabilidad se podía atribuir a las diferentes estrategias posturales, clasificadas por Callaghan & McGill (2001) como «estática» y «dinámica». Los menores rangos pélvicos y mayores rangos lumbares encontrados en el presente estudio se pueden deber a las diferencias en el tipo de movimiento analizado, sin respaldo y partiendo de una postura muy flexionada. En su estudio sobre sedestación prolongada (2 horas) sin respaldo, Callaghan & McGill (2001) hallaron variaciones en el ángulo lumbar de entre el 30 % y el 80 % de su rango.

En la mayoría de los sujetos (nueve de los once participantes) el EIR pélvico se encontraba por encima del nivel del asiento ( $AMP > 0$ ). Esto significa que la pelvis no pivotaba sobre las tuberosidades isquiáticas. Al estar elevado el eje de rotación, durante el movimiento de extensión la velocidad de las tuberosidades isquiáticas debía tener una componente en la dirección anterior, que provocaba un deslizamiento de las mismas respecto al asiento, probablemente sobre la capa interna de la piel (figura 6.1). Este tipo de movimiento se percibe en la compresión que se experimenta en la parte superior de los muslos al reclinarse, o puede notarse con mayor claridad sentándose sobre la propia palma de la mano: al reclinarse se nota cómo las tuberosidades isquiáticas se deslizan sobre la capa interna de la piel, mientras la externa se mantiene fija sobre la mano.

Este posible deslizamiento de las tuberosidades isquiáticas debería ser tenido en cuenta en los modelos biomecánicos de la postura sedente. Algunos modelos representan el contacto entre pelvis y asiento como una articulación (Goossens & Snijders, 1995; Kayis & Hoang, 1999), asumiendo implícitamente que el deslizamiento de la pelvis que provoca las posturas cifóticas extremas puede evitarse inclinando el asiento o por fricción. Los resultados obtenidos

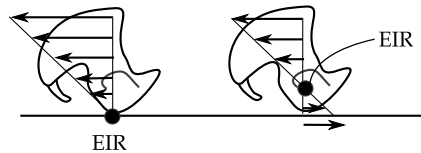


Figura 6.1: Distribución de las velocidades en la pelvis según el tipo de deslizamiento de las tuberosidades isquiáticas. A la izquierda EIR al nivel del asiento; la pelvis pivota sin deslizarse. A la derecha EIR por encima del asiento; las tuberosidades isquiáticas se deslizan hacia adelante cuando la pelvis se inclina hacia atrás.

en nuestro experimento, en cambio, muestran un grado de libertad adicional que debería ser considerado en relación con la estabilidad de la postura.

Esta conclusión debe tomarse con cautela, dado que los artefactos podían afectar al movimiento de la pelvis (véase el apartado anterior). No obstante la mediana de AMP (46,6 mm) era mayor que el efecto del posible artefacto, como se aprecia en el ejemplo de la figura 5.8: se puede ver en ella cómo el área de confianza del EIR pélvico no alcanza el plano del asiento, ni siquiera en la estimación más conservadora. En cualquier caso, el resultado pone de manifiesto la necesidad de analizar en profundidad el posible efecto, para conocer en qué condiciones ocurre tal deslizamiento y su efecto sobre las variables cinemáticas.

La ubicación y el desplazamiento del EIR lumbar (el del movimiento relativo entre pelvis y tórax) tiene que ver con la naturaleza del movimiento de la columna. Su altura mediana (AMR) estaba manifiestamente por encima del asiento, con un RI entre aproximadamente 200 y 300 mm. El valor medio de este rango es semejante a la altura media de la zona lumbar (Pheasant, 1996). Por otra parte la distancia transversal entre este eje y la piel tenía un RI estrecho entre 89 y 104 mm. Estos valores son ligeramente mayores que la distancia entre el centro del cuerpo vertebral y el extremo de la apófisis lumbar posterior (Panjabi et al., 1992) y muy similares a la distancia entre un marcador externo al nivel de L2 y el centro de del disco L2 o L3, a la que Snyder et al. (1972) dieron la medida de 88 mm. El resultado obtenido implica que el EIR se encontraba en un punto ligeramente anterior al centro de los discos. Esto contrasta con los resultados de experimentos *in vitro* que localizaron el EIR de la flexo-extensión lumbar en la región posterior de las vértebras (Rousseau et al., 2006; Wachowski et al., 2009).

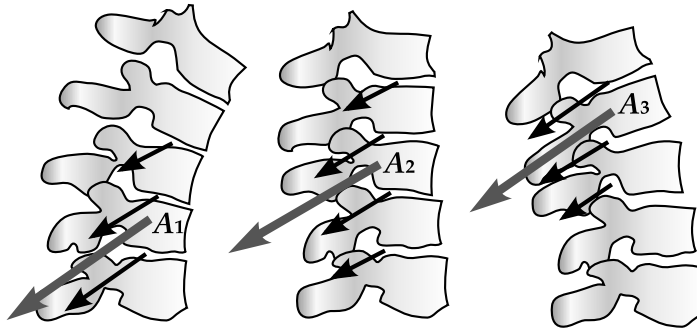


Figura 6.2: Interpretación del desplazamiento del EIR lumbar. En cada punto del movimiento la posición del EIR ( $A_i$ ) es el centro de los ejes de rotación de cada par de vértebras. El desplazamiento del EIR significa un ascenso secuencial del conjunto de vértebras implicadas en el movimiento.

El desplazamiento de este eje a lo largo de la columna lumbar se explica como consecuencia de un movimiento secuencial de los cuerpos vertebrales a lo largo de la flexo-extensión. La figura 6.2 expone gráficamente este efecto. El movimiento relativo se puede descomponer en un conjunto de movimientos entre cada par de vértebras consecutivas; movimientos cuyo eje de rotación se encuentra localizado en el espacio intervertebral (Pearcy & Bogduk, 1988; Bogduk et al., 1995), aunque en la flexión puede ascender a la altura del cuerpo vertebral superior (Rousseau et al., 2006). Al sumar los movimientos el eje resultante se ubica en el centro geométrico de los ejes de los movimientos intervertebrales, más cerca de los pares de vértebras que giren a mayor velocidad entre sí. Así pues, una posición baja del eje global implica que las vértebras inferiores contribuyen más a la rotación que las superiores, y viceversa. En el experimento realizado se observa que el EIR lumbar ascendía según se extendía el tronco y descendía en la flexión en un rango alrededor de 100 mm, lo que significa que en la postura más flexionada eran las vértebras inferiores las que contribuían al movimiento, y las superiores participaban más en las posturas extendidas. Esta activación secuencial fue ya sugerida por estudios radiográficos, que detectaron un pequeño desfase angular entre los movimientos de vértebras consecutivas (Kanayama et al., 1996; Harada et al., 2000). El análisis del EIR proporciona una medida más sensible de ese movimiento secuencial.

Finalmente, se vio que el EIR torácico se encontraba a una altura intermedia entre el pélvico y el del movimiento relativo, más cerca del EIR lumbar (la mediana de AMT era 172,9 mm). Esta ubicación era consecuencia directa de las relaciones geométricas entre los parámetros cinemáticos: el movimiento torácico es la suma del pélvico y el lumbar, por lo que su eje debía ser una media de las de los otros dos, ponderada por la velocidad angular de cada cuerpo. Al ser el movimiento relativo mayor que el de la pelvis, el eje se aproximaba más a la zona lumbar que a la pélvica. Esta ubicación cambió al medir la flexo-extensión en una silla reclinable con respaldo, debido a que se modificaron las restricciones al movimiento, y con ellas la contribución de cada segmento corporal al movimiento total del tórax. Este efecto se discute en el siguiente apartado.

Al margen de las diferencias entre el movimiento «libre» medido en el Experimento 4 y el movimiento que se da al usar otro tipo de asientos, los resultados obtenidos ayudan a comprender cómo tiene lugar la flexión del tronco en la postura sedente, y permite extraer conclusiones relevantes en relación con los actuales modelos biomecánicos de esta postura, así como con el diseño de distintos tipos de sillas. Incluso para movimientos sencillos, como el estudiado en este experimento, los modelos basados en articulaciones fijas no representan bien la cinemática real. Los EIR no son puntos fijos de la anatomía, sino que experimentan un desplazamiento. Un modelo más adecuado sería el de un mecanismo con varias articulaciones intermedias, que aportasen 3 gdl al movimiento. Por otra parte, la ubicación resultante del EIR pélvico sugiere la posibilidad de un deslizamiento de las tuberosidades isquiáticas sobre la capa interna de la piel, incluso aunque la piel misma no deslice sobre el asiento. Esto implica un posible grado de libertad adicional, que no suele considerarse en los modelos biomecánicos y que podría afectar a la estabilidad de la pelvis en la postura sedente.

Además se ha mostrado que el EIR torácico se encuentra por encima del asiento. Esto es un aspecto a considerar en el diseño de las sillas de trabajo, con el fin de ajustar mejor el movimiento del respaldo al de la espalda. Si el respaldo no se mueve de forma coherente con la espalda se puede esperar una restricción del movimiento lumbar. Esto es un aspecto ergonómicamente relevante, ya que la ausencia de movimientos lumbares se ha asociado con la fatiga y el disconfort (Vergara & Page, 2002). Asimismo, si el eje de rotación del respaldo no coincide con el EIR torácico puede haber un desplazamiento relativo entre ambos cuerpos, dando lugar a un mal alineamiento entre la columna lumbar y el soporte lumbar, así como a fuerzas tangenciales en el respaldo.



## 6.4. Caracterización y efecto de las sillas

Para comprobar el efecto que podían tener las sillas sobre el movimiento del tronco, primero se caracterizó un conjunto de ocho sillas de trabajo en el Experimento 5. Las sillas se escogieron entre varios modelos de gama media-alta, con respaldo y asiento reclinables. Se descartaron sillas en las que algunas de las partes fuese fija y las que no presentaban ningún movimiento relativo entre ellas, para poder comparar los ejes de rotación con los del cuerpo humano.

El asiento y el respaldo tenían un rango de rotación considerablemente menor que la flexo-extensión de la pelvis y el tórax, ya que los mecanismos de reclinación están esencialmente diseñados para las posturas extendidas. Más relevante es el hecho de que la proporción entre inclinación de asiento y respaldo (PRA) presentaba valores muy variables (RI entre 0,17 y 0,51, o en una escala entera entre 1:6 y 1:2). La proporción 1:3 observada generalmente para la rotación de pelvis/tórax en el Experimento 4 se encontraba cubierta por ese rango, pero también las había mucho mayores y menores.

Por otra parte, la ubicación de los ejes de rotación era completamente distinta a la observada para los EIR del Experimento 4. Todos los ejes estaban muy por debajo del asiento, totalmente al contrario que en el movimiento humano según dicho experimento. La alineación horizontal de los ejes también era consistente entre las sillas, si bien distinta de la alineación vertical en el cuerpo humano. El EIR del asiento siempre se encontraba en una región anterior, más cerca del borde delantero del asiento. Esto es una práctica común para mantener constante la altura de las rodillas y evitar la pérdida de apoyo de los pies cuando se reclina el asiento (Festervoll, 1994). El EIR del respaldo era en casi todas las sillas un punto fijo con muy poco rango de movimiento, ubicado en una posición media inferior, y el EIR del movimiento relativo se encontraba, en consecuencia, en una región posterior. La ubicación de estos ejes y la poca o nula movilidad del EIR del respaldo obedece a razones constructivas, que no tienen que ver con la naturaleza del movimiento humano. En la mayoría de sillas la reclinación se conseguía esencialmente a través de mecanismos situados por conveniencia debajo del asiento. Los patrones observados en la ubicación y posición de los EIR se correspondía claramente con los propios de mecanismos sencillos de cuatro barras. En particular hay dos tipos de mecanismos que podrían explicar dichos patrones (figura 6.3):

1. Respaldo articulado a la barra fija, y asiento articulado directamente al respaldo. El eje del respaldo se mantiene fijo, pero al no haber una articulación directa entre el asiento y la barra fija, el eje del asiento varía

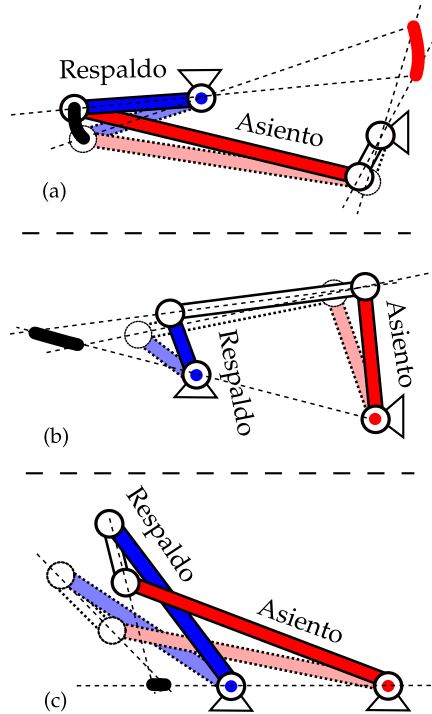


Figura 6.3: Posibles configuraciones de los mecanismos de cuatro barras que modelan el movimiento de las sillas. Las barras rojas representan el asiento, y las azules el respaldo. Los puntos y líneas de color representan los EIR: rojo para el asiento, azul para el respaldo y negro para el movimiento relativo, a semejanza de la figura 5.11.

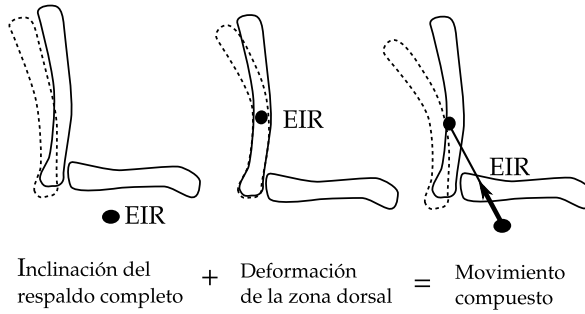


Figura 6.4: Composición de movimientos en un respaldo flexible.

según la inclinación (figura 6.3-a). Este mecanismo puede representar el movimiento de las sillas S2, S6 y S7.

2. Respaldo y asiento articulados a la barra fija. Tanto el eje del respaldo como el del asiento permanecen fijos. El eje del movimiento relativo se desplaza necesariamente, pero según la configuración de las barras este desplazamiento puede ser grande (figura 6.3-b) como ocurre claramente en la silla S4, o poco apreciable (figura 6.3-c), como ocurre en la mayoría de los casos.

En todos los casos había un eje aparentemente fijo al soporte, que es el del respaldo, salvo en el caso de la silla S6. Ésta era la única que no se correspondía con ninguno de esos modelos (se ha de destacar que éstos no describen necesariamente la configuración real de los demás mecanismos, sólo son representaciones equivalentes a su comportamiento). Los EIR se desplazaban de forma singular en S6, incluyendo un movimiento vertical del eje del respaldo. Este desplazamiento podía ser explicado por la flexibilidad de la sección inferior del respaldo. El sistema de marcadores con el que se midió el movimiento del respaldo se fijó a su parte dorsal, que era rígida pero se movía de forma flexible respecto a la parte inferior. Debido a esta peculiaridad, el respaldo se movía como si tuviese una doble articulación: una por debajo del asiento, como la mayoría de sillas, y otra en el propio respaldo. De este modo el EIR resultante se desplazaba verticalmente entre las dos articulaciones, según la contribución de la superior al movimiento de reclinación (figura 6.4).

A la vista de estos resultados, en el Experimento 6 se escogieron las sillas S1 y S6 para medir su efecto sobre el movimiento del tronco. En este experimento sólo se midió el EIR del tórax, debido a que las propias sillas obstaculizaban la instrumentación para medir el movimiento de la pelvis como en el Experimento 4, y los sistemas de marcadores del cuerpo humano y la silla no podían observarse simultáneamente con la configuración del sistema de fotogrametría.

Las trayectorias del EIR torácico usando las sillas de trabajo eran claramente distintas a las observadas en el Experimento 4, y también diferían en función de la silla empleada. Si se compara la coordenada Y de la altura mediana del EIR torácico (MET) con la medida en el Experimento 4 (AMT), se observa que al inclinarse en una silla de trabajo el eje desciende de forma destacada, pudiendo llegar a encontrarse por debajo del asiento. Este descenso del EIR era mucho más notable para la silla S1, que también presentaba un rango de desplazamiento del eje torácico (RET) mucho menor. Las diferencias entre sillas eran significativas en la dirección vertical. Los datos en el eje horizontal no aportaron diferencias significativas, ni tampoco información comparable con la del movimiento sin respaldo.

Al disponer únicamente de los datos sobre el movimiento absoluto del tronco no se pudieron extraer valores cuantitativos sobre la acción de la articulación lumbar. No obstante sí es posible hacer una interpretación a nivel cualitativo de los resultados, haciendo uso de las relaciones que existen entre los parámetros cinemáticos de movimientos compuestos. El movimiento medido del tórax era la suma del movimiento absoluto del asiento, la rotación de la pelvis sobre el asiento y la flexo-extensión lumbar del tórax respecto a la pelvis. Llámense EA, EPA y ETP los respectivos ejes de estos tres movimientos. Siguiendo el principio presentado en la sección 4.2.3, esto significa que si EA, EPA y ETP formaban un triángulo en el plano del movimiento y las tres rotaciones tenían simultáneamente el mismo sentido, entonces el EIR del movimiento absoluto del tórax estaría necesariamente dentro de ese triángulo. Si además se asume que la pelvis seguía rotando alrededor de un punto cercano al asiento (a su nivel o ligeramente por encima), y que el movimiento lumbar también se articulaba en la zona de la columna, esto da lugar a unas configuraciones como las presentadas en la figura 6.5. En ellas se han dibujado unas mismas posiciones de EPA y ETP, mientras que EA y el EIR torácico (representado por la elipse negra) se han ubicado en relación con la silla según el resultado de los Experimentos 5 y 6. Las medidas representadas en la figura son aproximadas; no reflejan los valores exactos de los experimentos.

En la silla S1 se observa que el EIR del tórax se encontraba principalmente en el segmento entre EA y EPA, y más cerca del primero. Bajo las hipótesis

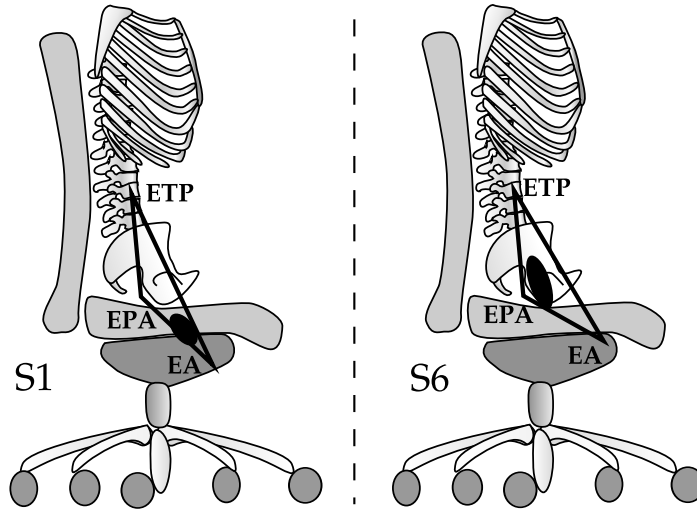


Figura 6.5: Interpretación geométrica de la composición de movimientos que da lugar al EIR torácico observado en la silla S1 (izquierda) y S6 (derecha).

presentadas, esto significaría que la contribución de la zona lumbar al movimiento del tórax era muy baja, estando éste principalmente determinado por la rotación del asiento y la de la pelvis. En S6 el EIR del tórax se encontraba más cerca de EPA, ascendiendo hacia ETP, lo cual significa que en esa silla se daba una mayor contribución del movimiento lumbar, aunque la rotación de la pelvis seguía jugando un papel mayor que en el Experimento 4.

Es necesario recalcar el carácter tentativo de esta interpretación, que depende de las hipótesis establecidas. Si alguna de tres rotaciones que componían el movimiento del tórax tuviese un sentido opuesto a las demás, el EIR resultante podría encontrarse fuera del triángulo, pero ésta es la hipótesis con un fundamento más robusto: la rotación del asiento estaba sincronizada positivamente con la reclinación del respaldo en ambas sillas, y la rotación coordinada de la pelvis en relación con la reclinación del tronco es un efecto ya observado desde los estudios radiográficos de Keegan (1953), popularizado por Schoberth (1962) en su clasificación de las posturas sedentes (media, anterior y posterior), y que posteriormente se ha medido con otras técnicas (Reinecke et al., 1994). Es posible, sin embargo, que los asientos acolchados alterasen la forma en la que rotaba la pelvis, o que las restricciones del movimiento modificasen la secuencialidad del movimiento lumbar medido en

el Experimento 4. Esto podría alterar la ubicación de EPA y ETP, y en consecuencia el área de los triángulos representados representados en la figura 6.5. Por otra parte, la muestra de sujetos empleada con cada silla en el Experimento 6 era más reducida que en el Experimento 4 y no incluía mujeres. Esta diferencia plantea otra causa posible de variación en los resultados de un experimento respecto al otro, si bien no afecta a los efectos observados en cada uno de ellos.

Aun así, en términos cualitativos no se esperaría una gran desviación en la interpretación de los resultados, que son coherentes internamente y con estudios previos. La pérdida de movilidad lumbar para ambas sillas en favor de la contribución de la pelvis está en línea con los resultados de otros experimentos, en los que se simulaban tareas reales realizadas con sillas de oficina (Vergara & Page, 2002). Las diferencias encontradas en S6 respecto a S1 son, a su vez, coherentes con las diferencias en las características de las propias sillas. La posición más elevada del EIR torácico, que se ha relacionado con una mayor contribución lumbar, podía deberse en parte a que el asiento de S6 se elevaba menos que el de S1 para una misma reclinación del respaldo, y por lo tanto el movimiento relativo entre las partes de la silla era mayor, aunque esta diferencia no era muy grande entre ellas (véase la figura 5.12). La diferencia entre los ejes de los asientos, que era más notable, también puede haber jugado un papel importante: es posible que el respaldo flexible, que se comportaba como si tuviera una doble articulación, facilitase el movimiento de la zona lumbar. Asimismo, el mayor rango vertical del EIR torácico en esa silla concuerda con el hecho de que S6 era la única silla en la que el EIR del respaldo se desplazaba (también en dirección vertical).

Dados los beneficios atribuidos a la movilidad de la zona lumbar, estos resultados parecen favorecer la solución de diseño asociada a S6. Hay distintas estrategias de diseño que pueden procurar un efecto semejante, además de emplear materiales deformables. Una de ellas es añadir grados de libertad a los mecanismos de reclinación. Otra sería modificar las articulaciones del asiento y el respaldo de tal manera que el eje de rotación entre ambos se acerque a la región lumbar; esto se podría conseguir alineando las articulaciones adecuadamente, o también empleando otras tipologías de mecanismos. Estas propuestas buscan que el movimiento relativo entre el asiento y el respaldo sea cinemáticamente similar al que se observa de forma natural entre la pelvis y el tórax, para propiciar que la flexión movimiento lumbar se encontrase menos «bloqueada» por la silla.

Sin embargo, la lectura ergonómica que se ha realizado de los resultados debe hacerse con cautela, debido a las condiciones en las que se han realizado los experimentos. Tanto el Experimento 4 que midió el movimiento sin res-

paldo, como el Experimento 6 realizado con sillas de trabajo, se han limitado a analizar un movimiento de flexo-extensión entre dos posiciones extremas, repetido cíclicamente en 30 segundos. Este movimiento, aunque útil para definir un modelo biomecánico, es muy distinto del movimiento realizado en condiciones reales. Durante el uso cotidiano de una silla el usuario permanece sentado por periodos mucho más largos, los movimientos de flexión tan amplios son poco frecuentes, y por el contrario se dan otros movimientos (cambios de postura, apoyo sobre la mesa o los reposabrazos, sentarse y levantarse, etc.) que no han formado parte de esta investigación, principalmente orientada a la caracterización cinemática de un modelo biomecánico.

Asimismo, aun si los beneficios ergonómicos contemplados se comprobasen en tales contextos, antes de aplicar esta filosofía de forma generalizada habría que tener en cuenta otras consideraciones con las que puede entrar en conflicto puntualmente. Por ejemplo, al observarse en el Experimento 4 que el EIR de la pelvis se encuentra por encima de las tuberosidades isquiáticas, podría proponerse la conveniencia de articular el asiento en una región próxima. Pero esto se opondría al ya citado criterio de mantener el eje de rotación del asiento en torno a las rodillas, para evitar que la reclinación provoque una elevación de las mismas —y en consecuencia también de los pies—. Así pues, la generación de nuevos diseños en base a los resultados observados siempre deberá ir acompañada de su correspondiente validación con pruebas de confort, con el objetivo de verificar en qué medida las ventajas introducidas compensarían los efectos derivados de modificar los mecanismos.

En estudios previos se han hallado relaciones significativas entre la movilidad y el confort en la postura sedente (Vergara & Page, 2002): el factor que más influye son los «micromovimientos» (oscilaciones alrededor de posturas estables), y son específicamente los más rápidos y de menor amplitud los que tienen un efecto beneficioso, ya que cuanto más lentos y amplios son, más se incrementa el disconfort, dando lugar a frecuentes cambios posturales de mayor magnitud («macromovimientos»), que son un reflejo de molestias lumbares. Siguiendo una aproximación semejante, se puede buscar la relación entre los mecanismos de las sillas, la cinemática del tronco y el tipo de movimientos lumbares asociados al disconfort, o su relación directa con el confort global y las molestias en partes del cuerpo.

## Capítulo 7

# Conclusiones

Los principales logros, resultados y aportaciones del trabajo que se ha presentado en esta tesis doctoral se sintetizan en los siguientes puntos:

1. A través de las ecuaciones del movimiento de los cuerpos rígidos se ha definido una nueva metodología de análisis cinemático, que unifica el estudio de la cinemática instantánea y los desplazamientos finitos y es aplicable a cualquier cadena de segmentos rígidos, independientemente del tipo de movimiento que exista entre ellos. Es el propio método de análisis el que determina las restricciones cinemáticas, a través de la caracterización del eje instantáneo de rotación (o del movimiento helicoidal, en términos más generales). Esta metodología se puede usar en estudios biomecánicos para analizar el movimiento de cualquier articulación, y se ha empleado en particular para analizar la flexión del tronco en la postura sedente.
2. Uno de los aspectos cruciales de la técnica de análisis es su precisión y la capacidad de controlar los errores instrumentales, que son críticos en el cálculo del EIR. Este control se puede realizar de forma eficaz a través de fórmulas teóricas, que se han validado experimentalmente con una prueba de alta sensibilidad estadística. Al aplicar este método a la medida del movimiento del tronco y las sillas se consiguió mantener el error instrumental al nivel de 1 mm en el EIR.
3. Los errores de medida por artefactos quedaron controlados a través de un cuidadoso diseño de la instrumentación. Las pruebas estadísticas no encontraron artefactos que se pudieran distinguir del error instrumen-



tal, y en el peor de los casos eran del orden de magnitud o menores que los de otros métodos para definir centros de rotación.

4. Los experimentos con sujetos realizando un movimiento controlado de flexo-extensión proporcionaron un modelo biomecánico distinto de los habituales, que suelen estar basados en articulaciones fijas al nivel del asiento y L3 o L5. El nuevo modelo, al no imponer restricciones artificiales al movimiento, proporciona una representación más fiel de la cinemática de la flexión del tronco.
5. El movimiento que se observó en la pelvis es una rotación centrada por encima del asiento, que implica un deslizamiento de las tuberosidades isquiáticas sobre la capa interna de la piel. Por lo tanto la rotación de la pelvis presenta más de un grado de libertad, en oposición a los modelos tradicionales. Esto puede tener consecuencias no consideradas habitualmente sobre la estabilidad de la pelvis en la postura sedente, e invita a replantear los modelos mecánicos sobre el equilibrio de fuerzas en dicha postura.
6. La flexo-extensión lumbar mostró un patrón secuencial, con un eje que asciende a lo largo de la columna según aumenta la extensión del tronco. Este movimiento secuencial también contrasta con los modelos simplificados que asumen una articulación fija, e implica que los mecanismos basados en ejes fijos no pueden reproducir con fidelidad el movimiento natural.
7. Sobre la base de este patrón se observaron notables diferencias entre sujetos, que revelan distintas estrategias a la hora de combinar el movimiento pélvico y el lumbar para flexionar o extender el tronco. Algunos sujetos tienden a realizar el movimiento con una mayor contribución de la pelvis y otros con mayor contribución lumbar. Este resultado verifica la existencia de al menos dos grados de libertad a nivel funcional, que no pueden reproducirse con un mismo mecanismo de cuatro barras (el habitual en sillas de trabajo) para todos los usuarios.
8. El modelo biomecánico es también muy diferente del comportamiento cinemático de las sillas medidas, cuyos ejes estaban en todos los casos por debajo del asiento y distribuidos de la misma forma, al margen de diferencias individuales entre sillas. Esta discrepancia implica que los mecanismos de las sillas de trabajo producen movimientos de asiento y respaldo distintos a los del movimiento natural de la pelvis y el tórax, y aun distintos a los de los modelos biomecánicos simplificados.

9. En el último experimento se observó que las sillas alteraban de forma notable los patrones de flexo-extensión torácica. Esta alteración se interpretó de forma coherente con lo visto en estudios previos y con las discrepancias entre el modelo biomecánico y los mecanismos de las sillas. Esta interpretación implica una mayor rotación de la pelvis y una reducción del movimiento lumbar, en distinto grado según el tipo de silla empleado: el supuesto «bloqueo lumbar» se daba de forma más notable en la silla de respaldo rígido con articulación fija, y menos en la silla de respaldo flexible, que tenía un mayor rango de inclinación respaldo-asiento y se comportaba como si tuviera una doble articulación.
10. El conjunto de resultados obtenidos constituyen una aportación original para el análisis de movimientos humanos en general, tanto a nivel metodológico como por el modelo biomecánico desarrollado. Este modelo y el efecto observado de las sillas también proporcionan un conocimiento prometedor para el campo de la ergonomía y el diseño de sillas. Esta investigación abre nuevas vías de profundización en los modelos biomecánicos, así como en el análisis ergonómico de la postura sedente desde una perspectiva dinámica.

Como trabajo futuro, desde el punto de vista del diseño de sillas, una mejora en la instrumentación permitiría ampliar el estudio sobre el efecto de las sillas en el movimiento del tronco, midiendo de forma sincronizada el movimiento del tórax, la pelvis y las partes del asiento. Por ejemplo, el uso combinado de sensores inerciales podría permitir la medición de los segmentos que quedan ocultos a las cámaras por interposición de otros cuerpos, como la pelvis en las sillas de trabajo.

Además, a nivel ergonómico es necesario combinar la información de los modelos resultantes de estos experimentos con datos de observaciones más «naturales». Estas últimas pueden revelar aspectos sobre el confort asociado al uso real de las sillas, que no están al alcance de los experimentos con movimientos controlados, aunque éstos son necesarios para obtener información fiable sobre la cinemática articular. A través de pruebas de uso con usuarios realizando o simulando tareas habituales podrían identificarse las variables cinemáticas que más influyen sobre el confort.

Otro de los aspectos en los que se puede profundizar es el de las distintas estrategias de movimiento. Con una base de experimentos más amplia sería posible definir distintos patrones, y compararlos según las características de los sujetos.

Las técnicas y modelos desarrollados también pueden aplicarse para la valoración funcional de la zona lumbar, ya que las alteraciones en los patrones de movimiento provocadas por una dolencia pueden tener un claro reflejo en el eje de rotación y otros parámetros cinemáticos. También podría incorporarse parte de la metodología al estudio de la sedestación en sillas de ruedas, para definir criterios de configuración y diseño de las mismas que optimicen simultáneamente la estabilidad y la acción funcional de sus usuarios.

En definitiva, el trabajo que se ha llevado a cabo aporta una visión nueva y detallada sobre las características del movimiento del tronco en la postura sedente, que se ha dedicado a una exploración de cómo las sillas de trabajo condicionan dicho movimiento, si bien esta aproximación ergonómica no constituye un límite de aplicación, sino un punto de proyección para otros y más amplios estudios.

# Bibliografía

- Abdel-Aziz, Y.I. & Karara, H.M. (1971). Direct linear transformation into object space coordinates in close-range photogrammetry. In *Proceedings ASP/UII Symposium on Close-Range Photogrammetry*, (pp. 1–18).
- Abdi, H. (2007). The Bonferonni and Šidák corrections for multiple comparisons. In N.J. Salkind (Ed.), *Encyclopedia of Measurement and Statistics*, (pp. 103–107). Thousand Oaks: Sage.
- Adams, M.A. & Hutton, W.C. (1985). The effect of posture on the lumbar spine. *Journal of Bone and Joint Surgery*, 67-B(4), 625–629.
- Ahmed, M. & Farag, A. (2005). Nonmetric calibration of camera lens distortion: differential methods and robust estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(8), 1215–1230. doi:10.1109/TIP.2005.846025.
- Alexander, E.J. & Andriacchi, T.P. (2001). Correcting for deformation in skin-based marker systems. *Journal of Biomechanics*, 34(3), 355–361. doi:10.1016/S0021-9290(00)00192-5.
- Allard, P., Blanchi, J.P., & Aïssaoui, R. (1995). Bases of three-dimensional reconstruction. In P. Allard, I.A.F. Stokes, & J.P. Blanchi (Eds.), *Three-Dimensional Analysis of Human Movement*, chap. 2, (pp. 19–40). Champaign: Human Kinetics.
- Alonso, F.J., Castillo, J.M.D., & Pintado, P. (2005). Application of singular spectrum analysis to the smoothing of raw kinematic signals. *Journal of Biomechanics*, 38(5), 1085–1092. doi:10.1016/j.jbiomech.2004.05.031.
- Ambrósio, J., Abrantes, J., & Lopes, G. (2001). Spatial reconstruction of human motion by means of a single camera and a biomechanical model. *Human Movement Science*, 20(6), 829–851. doi:10.1016/S0167-9457(01)00056-2.

- Amevo, B., Worth, D., & Bogduk, N. (1991). Instantaneous axes of rotation of the typical cervical motion segments: a study in normal volunteers. *Clinical Biomechanics*, 6(2), 111–117. doi:10.1016/0268-0033(91)90008-E.
- Andersson, B.J., Jonsson, B., & Ortengren, R. (1974). Myoelectric activity in individual lumbar erector spinae muscles in sitting. a study with surface and wire electrodes. *Scandinavian Journal of Rehabilitation and Medicine*, 3, 91–108.
- Andriacchi, T.P. & Alexander, E.J. (2000). Studies of human locomotion: past, present and future. *Journal of Biomechanics*, 33(10), 1217–1224. doi:10.1016/S0021-9290(00)00061-0.
- Andriacchi, T.P., Alexander, E.J., Toney, M.K., Dyrby, C., & Sum, J. (1998). A point cluster method for in vivo motion analysis: applied to a study of knee kinematics. *Journal of Biomechanical Engineering*, 120(6), 743–749. doi:10.1115/1.2834888.
- Angeles, J. (1986a). Automatic computation of the screw parameters of rigid-body motions. Part I - Finitely-separated positions. *ASME Transactions Journal of Dynamic Systems and Measurement Control B*, 108, 32–38. doi: 10.1115/1.3143739.
- Angeles, J. (1986b). Automatic computation of the screw parameters of rigid-body motions. Part II: Infinitesimally-separated positions. *ASME Transactions Journal of Dynamic Systems and Measurement Control B*, 108, 39–43. doi: 10.1115/1.3143740.
- Annequin, R. & Boutigny, J. (1973). *Cours de sciences physiques*. Paris: Libraire Vuibert.
- Baker, R. (2003). ISB recommendation on definition of joint coordinate systems for the reporting of human joint motion-part i: ankle, hip and spine. *Journal of Biomechanics*, 36(2), 300–2. doi:10.1016/S0021-9290(02)00336-6.
- Ball, K.A. & Pierrynowski, M.R. (1998). Modeling of the pliant surfaces of the thigh and leg during gait. In S.L. Jacques (Ed.), *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 3254, (pp. 435–446). doi:10.1117/12.308193.
- Ball, R.S. (1998). *A treatise on the theory of screws*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Beach, T.A.C., Parkinson, R.J., Stothart, J.P., & Callaghan, J.P. (2005). Effects of prolonged sitting on the passive flexion stiffness of the in vivo lumbar spine. *The Spine Journal*, 5(2), 145–154. doi:10.1016/j.spinee.2004.07.036.
- Beggs, J.S. (1966). *Advanced Mechanism*. New York: Macmillan.
- Bendix, A., Jensen, C.V., & Bendix, T. (1988). Posture, acceptability and energy consumption on a tiltable and a knee-support chair. *Clinical Biomechanics*, 3(2), 66–73. doi:10.1016/0268-0033(88)90047-2.
- Betsch, P., Menzel, A., & Stein, E. (1998). On the parametrization of finite rotations in computational mechanics : A classification of concepts with application to smooth shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(3–4), 273–305. doi:10.1016/S0045-7825(97)00158-8.
- Black, K.M., McClure, P., & Polansky, M. (1996). The influence of different sitting positions on cervical and lumbar posture. *Spine*, 21(1), 65–70. doi:10.1097/00007632-199601010-00015.
- Bogduk, N., Amevo, B., & Pearcy, M. (1995). A biological basis for instantaneous centres of rotation of the vertebral column. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 209(3), 177–183.
- Bogduk, N. & Mercer, S. (2000). Biomechanics of the cervical spine. I: Normal kinematics. *Clinical Biomechanics*, 15(9), 633–648. doi:10.1016/S0268-0033(00)00034-6.
- Bösemann, W. (2005). Advances in photogrammetric measurement solutions. *Computers in Industry*, 56(8), 886–893. doi:10.1016/j.compind.2005.05.014.
- Bottema, O. & Roth, B. (1990). *Theoretical Kinematics*. New York: Dover Publications.
- Branton, P. & Grayson, G. (1967). An evaluation of train seats by observation of sitting behaviour. *Ergonomics*, 10(1), 35–51. doi:10.1080/00140136708930838.
- Braun, W.J. & Rousson, V. (2000). An autocorrelation criterion for bandwidth selection in nonparametric regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 68(1), 89–101. doi:10.1080/00949650008812057.

- Bridger, R., Orkin, D., & Henneberg, M. (1992). A quantitative investigation of lumbar and pelvic postures in standing and sitting: Interrelationships with body position and hip muscle length. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 9(3), 235–244. doi:10.1016/0169-8141(92)90017-T.
- Bush, T.R. & Gutowski, P.E. (2003). An approach for hip joint center calculation for use in seated postures. *Journal of Biomechanics*, 36(11), 1739–1743. doi:10.1016/S0021-9290(03)00168-4.
- Callaghan, J.P. & McGill, S.M. (2001). Low back joint loading and kinematics during standing and unsupported sitting. *Ergonomics*, 44(3), 280–294. doi: 10.1080/00140130118276.
- Camomilla, V., Cereatti, A., Vannozzi, G., & Cappozzo, A. (2006). An optimized protocol for hip joint centre determination using the functional method. *Journal of Biomechanics*, 39(6), 1096–1106. doi:10.1016/j.jbiomech.2005.02.008.
- Cappozzo, A., Cappello, A., Croce, U.D., & Pensalfini, F. (1997). Surface-marker cluster design criteria for 3-D bone movement reconstruction. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 44(12), 1165–1174. doi:10.1109/10.649988.
- Cappozzo, A., Catani, F., Croce, U., & Leardini, A. (1995). Position and orientation in space of bones during movement: anatomical frame definition and determination. *Clinical Biomechanics*, 10(4), 171–178. doi: 10.1016/0268-0033(95)91394-T.
- Cappozzo, A., Croce, U.D., Leardini, A., & Chiari, L. (2005). Human movement analysis using stereophotogrammetry. Part 1: theoretical background. *Gait & Posture*, 21(2), 186–196. doi:10.1016/j.gaitpost.2004.01.010.
- Cerveri, P., Pedotti, A., & Ferrigno, G. (2004). Non-invasive approach towards the in vivo estimation of 3D inter-vertebral movements: methods and preliminary results. *Medical Engineering & Physics*, 26(10), 841–853. doi: 10.1016/j.medengphy.2004.08.005.
- Challis, J.H. (1995). A procedure for determining rigid body transformation parameters. *Journal of Biomechanics*, 28(6), 733–737. doi:10.1016/0021-9290(94)00116-L.
- Chiari, L., Croce, U.D., Leardini, A., & Cappozzo, A. (2005). Human movement analysis using stereophotogrammetry. Part 2: instrumental errors. *Gait & Posture*, 21(2), 197–211. doi:10.1016/j.gaitpost.2004.04.004.

- Chèze, L., Fregly, B.J., & Dimnet, J. (1995). A solidification procedure to facilitate kinematic analyses based on video system data. *Journal of Biomechanics*, 28(7), 879–884. doi:10.1016/0021-9290(95)95278-D.
- Chèze, L., Fregly, B.J., & Dimnet, J. (1998). Determination of joint functional axes from noisy marker data using the finite helical axis. *Human Movement Science*, 17(1), 1–15. doi:10.1016/S0167-9457(97)00018-3.
- Claus, A., Hides, J., Moseley, G.L., & Hodges, P. (2008). Sitting versus standing: does the intradiscal pressure cause disc degeneration or low back pain? *Journal of Electromyography and Kinesiology*, 18(4), 550–558. doi:10.1016/j.jelekin.2006.10.011.
- Claus, A.P., Hides, J.A., Moseley, G.L., & Hodges, P.W. (2009). Is 'ideal' sitting posture real? measurement of spinal curves in four sitting postures. *Manual Therapy*, 14(4), 404–408. doi:10.1016/j.math.2008.06.001.
- Cleveland, W.S. & Loader, C.L. (1996). Smoothing by local regression: Principles and methods. In W. Hardle & M.G. Schimek (Eds.), *Statistical Theory and Computational Aspects of Smoothing*, (pp. 10–49). Heidelberg: Physica-Verlag.
- Corazza, S., Mündermann, L., & Andriacchi, T. (2006). Markerless technology. In *Ninth International Symposium on the 3D Analysis of Human Movement*. Valenciennes.
- Corlett, E.N. (2006). Background to sitting at work: research-based requirements for the design of work seats. *Ergonomics*, 49(14), 1538–1546. doi:10.1080/00140130600766261.
- Crisco, J.J., Chen, X., Panjabi, M.M., & Wolfe, S.W. (1994). Optimal marker placement for calculating the instantaneous center of rotation. *Journal of Biomechanics*, 27(9), 1183–1187. doi:10.1016/0021-9290(94)90059-0.
- Dai, J.S. (2006). An historical review of the theoretical development of rigid body displacements from rodrigues parameters to the finite twist. *Mechanism and Machine Theory*, 41(1), 41–52. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2005.04.004.
- Daniilidis, K. (1999). Hand-eye calibration using dual quaternions. *The International Journal of Robotics Research*, 18(3), 286–298. doi:10.1177/02783649922066213.



- de Leo, S. & Rotelli, P.P. (2003). Quaternionic analyticity. *Applied Mathematics Letters*, 16(7), 1077–1081. doi:10.1016/S0893-9659(03)90097-8.
- de Looze, M.P., Kuijt-Evers, L.F.M., & van Dieën, J. (2003). Sitting comfort and discomfort and the relationships with objective measures. *Ergonomics*, 46(10), 985–997. doi:10.1080/0014013031000121977.
- de Looze, M., Kingma, I., Bussmann, J., & Toussaint, H. (1992). Validation of a dynamic linked segment model to calculate joint moments in lifting. *Clinical Biomechanics*, 7(3), 161 – 169. doi:10.1016/0268-0033(92)90031-X.
- della Croce, U., Cappozzo, A., & Kerrigan, D.C. (1999). Pelvis and lower limb anatomical landmark calibration precision and its propagation to bone geometry and joint angles. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 37(2), 155–161. doi:10.1007/BF02513282.
- della Croce, U., Leardini, A., Chiari, L., & Cappozzo, A. (2005). Human movement analysis using stereophotogrammetry. Part 4: assessment of anatomical landmark misplacement and its effects on joint kinematics. *Gait & Posture*, 21(2), 226–237. doi:10.1016/j.gaitpost.2004.05.003.
- Demarais, D.M., Bachschmidt, R.A., & Harris, G.F. (2002). The instantaneous axis of rotation (IAOR) of the foot and ankle: a self-determining system with implications for rehabilitation medicine application. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 10(4), 232–238. doi:10.1109/TNSRE.2002.806843.
- Dempster, W.T. (1955). *Space requirements of the seated operator*, chap. The shoulder mechanism, (pp. 88–90). Springfield: Carpenter Litho & Printing Co.
- Domènech, J.M. (1982). *Bioestadística. Métodos estadísticos para investigadores*. Barcelona: Herder.
- Dowell, M. & Jarratt, P. (1972). The “Pegasus” method for computing the root of an equation. *BIT Numerical Mathematics*, 12(4), 503–508. doi:10.1007/BF01932959.
- Eklund, J.A. & Corlett, E.N. (1984). Shrinkage as a measure of the effect of load on the spine. *Spine*, 9(2), 189–194.
- Eklund, J.A., Corlett, E.N., & Johnson, F. (1983). A method for measuring the load imposed on the back of a sitting person. *Ergonomics*, 26(11), 1063–1076. doi:10.1080/00140138308963439.

- Eklund, J.A.E. & Corlett, E.N. (1986). Experimental and biomechanical analysis of seating. In E.N. Corlett, J.R. Wilson, & I. Manenica (Eds.), *The Ergonomics of Working Postures: Models, Methods and Cases: The Proceedings Of The First International Occupational Ergonomics Symposium, Zadar, Yugoslavia*, (pp. 319–330). London: Taylor & Francis.
- Faiks, F.S. & Reinecke, S.M. (1998). Investigation of spinal curvature while changing one's posture during sitting. In M.A. Hanson (Ed.), *Contemporary Ergonomics 1998*, (pp. 113–117). London: Taylor & Francis.
- Fan, J. & Gibels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. London: Chapman and Hall/CRC Press.
- Festervoll, I. (1994). Office seating and movement. In R. Lueder & K. Noro (Eds.), *Hard Facts About Soft Machines*, (pp. 413–421). Taylor & Francis.
- Francisco Fernández, M. & Vilar Fernández, J.M. (2001). Local polynomial regression estimation with correlated errors. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30(7), 1271–1293. doi:10.1081/STA-100104745.
- Frobin, W., Leivseth, G., Biggemann, M., & Brinckmann, P. (2002). Sagittal plane segmental motion of the cervical spine. a new precision measurement protocol and normal motion data of healthy adults. *Clinical Biomechanics*, 17(1), 21–31. doi:10.1016/S0268-0033(01)00105-X.
- Gatton, M.L. & Percy, M.J. (1999). Kinematics and movement sequencing during flexion of the lumbar spine. *Clinical Biomechanics*, 14(6), 376–383. doi:10.1016/S0268-0033(98)00109-0.
- Gerber, H., Zihlmann, M., Foresti, M., & Stüssi, E. (2006). Method to simultaneously measure 3D kinematic and kinetic data during normal level walking using KISTLER force plates, VICON System and video-fluoroscopy. In *Ninth International Symposium on the 3D Analysis of Human Movement*. Valenciennes.
- Giakas, G., Stergioulas, L.K., & Vourdas, A. (2000). Time-frequency analysis and filtering of kinematic signals with impacts using the Wigner function: accurate estimation of the second derivative. *Journal of Biomechanics*, 33(5), 567–574. doi:10.1016/S0021-9290(99)00216-X.
- Giorcelli, R.J., Hughes, R.E., Current, R.S., & Meyers, J.R. (2004). Accuracy of a system for measuring three-dimensional torso kinematics during manual materials handling. *Journal of Applied Biomechanics*, 20(2), 185–194.

- Goel, V.K., Clark, C.R., McGowan, D., & Goyal, S. (1984). An in-vitro study of the kinematics of the normal, injured and stabilized cervical spine. *Journal of Biomechanics*, 17(5), 363–376. doi:10.1016/0021-9290(84)90030-7.
- Goossens, R.H. & Snijders, C.J. (1995). Design criteria for the reduction of shear forces in beds and seats. *Journal of Biomechanics*, 28(2), 225–230. doi:10.1016/0021-9290(94)00052-6.
- Graf, M., Guggenbühl, U., & Krueger, H. (1993). Investigations on the effects of seat shape and slope on posture, comfort and back muscle activity. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 12(1-2), 91–103. doi:10.1016/0169-8141(93)90041-B.
- Gruen, A. (1997). Fundamentals of videogrammetry – a review. *Human Movement Science*, 16(2-3), 155–187. doi:10.1016/S0167-9457(96)00048-6.
- Gupta, K.C. & Chutakanonta, P. (1998). Accurate determination of object position from imprecise data. *Journal of Mechanical Design*, 120(4), 559–564. doi:10.1115/1.2829315.
- Haer, T.R., O'Brien, M., Felmly, W.T., Welin, D., Perrier, G., Choueka, J. et al. (1992). Instantaneous axis of rotation as a function of the three columns of the spine. *Spine*, 17(6 Suppl), S149–S154.
- Hansen, E. & Patrick, M. (1976). A family of root finding methods. *Numerische Mathematik*, 27(3), 257–269. doi:10.1007/BF01396176.
- Harada, M., Abumi, K., Ito, M., & Kaneda, K. (2000). Cineradiographic motion analysis of normal lumbar spine during forward and backward flexion. *Spine*, 25(15), 1932–1937. doi:10.1097/00007632-200008010-00011.
- Härdle, W. & Simar, L. (2007). *Applied multivariate statistical analysis*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 2nd ed.
- Härdle, W.K. (1992). *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Harrison, D.D., Harrison, S.O., Croft, A.C., Harrison, D.E., & Troyanovich, S.J. (1999). Sitting biomechanics part I: review of the literature. *Journal of Manipulative and Physiological Therapeutics*, 22(9), 594–609. doi:10.1016/S0161-4754(99)70020-5.

- Harvey, S.B. & Hukins, D.W. (1998). Measurement of lumbar spinal flexion-extension kinematics from lateral radiographs: simulation of the effects of out-of-plane movement and errors in reference point placement. *Medical Engineering & Physics*, 20(6), 403–409. doi:10.1016/S1350-4533(98)00052-6.
- Herda, L., Fua, P., Plänkners, R., Boulic, R., & Thalmann, D. (2001). Using skeleton-based tracking to increase the reliability of optical motion capture. *Human Movement Science*, 20(3), 313–341. doi:10.1016/S0167-9457(01)00050-1.
- Hsiao, H. & Keyserling, W. (1991). Evaluating posture behavior during seated tasks. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 8(4), 313–334. doi:10.1016/0169-8141(91)90068-W.
- Huang, C. (2000). On definitions of pitches and the finite screw system for displacing a line. In *Proceedings of a Symposium Commemorating the Legacy, Works and Life of Sir Robert Ball Upon the 100th Anniversary of "A Treatise on the Theory of Screws"*. Cambridge.
- Huang, C., Ravani, B., & Kuo, W. (2008). A geometric interpretation of finite screw systems using the bisecting linear line complex. *Journal of Mechanical Design*, 130(10), 102303. doi:10.1115/1.2965362.
- Hunt, K.H. & Parkin, I.A. (1995). Finite displacements of points, planes, and lines via screw theory. *Mechanism and Machine Theory*, 30(2), 177–192. doi:10.1016/0094-114X(94)00028-J.
- Jensen, C. & Bendix, T. (1992). Spontaneous movements with various seated-workplace adjustments. *Clinical Biomechanics*, 7(2), 87–90. doi:10.1016/0268-0033(92)90020-5.
- Kanayama, M., Abumi, K., Kaneda, K., Tadano, S., & Ukai, T. (1996). Phase lag of the intersegmental motion in flexion-extension of the lumbar and lumbosacral spine. an in vivo study. *Spine*, 21(12), 1416–1422. doi:10.1097/00007632-199606150-00004.
- Kaneoka, K., Ono, K., Inami, S., & Hayashi, K. (1999). Motion analysis of cervical vertebrae during whiplash loading. *Spine*, 24(8), 763–770. doi:10.1097/00007632-199904150-00006.
- Kang, M. (2004). Hip joint center location by fitting conchoid shape to the acetabular rim region of MR images. In *Proc. 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society IEMBS '04*, vol. 2, (pp. 4477–4480). doi:10.1109/IEMBS.2004.1404244.

- Karlsson, A., Lanshammar, H., & Persson, T. (1997). Estimation of the knee joint location using colour video. *International Journal of Medical Informatics*, 45(3), 163–174. doi:10.1016/S1386-5056(97)00043-9.
- Kasahara, S., Miyamoto, K., Takahashi, M., Yamanaka, M., & Takeda, N. (2008). Lumbar-pelvic coordination in the sitting position. *Gait & Posture*, 28(2), 251–257. doi:10.1016/j.gaitpost.2007.12.004.
- Kays, B. & Hoang, K. (1999). Static three-dimensional modelling of prolonged seated posture. *Applied Ergonomics*, 30(3), 255–262. doi:10.1016/S0003-6870(98)00022-2.
- Keegan, J.J. (1953). Alterations of the lumbar curve related to posture and seating. *Journal of Bone and Joint Surgery*, 35-A(3), 589–603.
- Keler, M.L. (2000). On the theory of screws and the dual method. In *Proceedings of a Symposium Commemorating the Legacy, Works and Life of Sir Robert Ball Upon the 100th Anniversary of "A Treatise on the Theory of Screws"*. Cambridge.
- Kendall, H.O., Kendall, F.P., & Boynton, D.A. (1952). *Posture and Pain*. Baltimore: Williams & Wilkins.
- Kettler, A., Marin, F., Sattelmayer, G., Mohr, M., Mannel, H., Dürselen, L. et al. (2004). Finite helical axes of motion are a useful tool to describe the three-dimensional in vitro kinematics of the intact, injured and stabilised spine. *European Spine Journal*, 13(6), 553–559. doi:10.1007/s00586-004-0710-8.
- King, A.I. (1984). A review of biomechanical models. *Journal of Biomechanical Engineering*, 106(2), 97–104. doi:10.1115/1.3138480.
- Kingma, I., de Looze, M.P., Toussaint, H.M., Klijnsma, H.G., & Bruijnen, T.B.M. (1996). Validation of a full body 3-D dynamic linked segment model. *Human Movement Science*, 15(6), 833–860. doi:10.1016/S0167-9457(96)00034-6.
- Kinzel, G.L. & Gutkowski, L.J. (1983). Joint models, degrees of freedom, and anatomical motion measurement. *Journal of Biomechanical Engineering*, 105(1), 55–62. doi:10.1115/1.3138385.
- Kinzel, G.L., Hall, A.S., & Hillberry, B.M. (1972). Measurement of the total motion between two body segments. — I. Analytical development. *Journal of Biomechanics*, 5(1), 93–105. doi:10.1016/0021-9290(72)90022-X.

- Kirkwood, R.N., Culham, E.G., & Costigan, P. (1999). Radiographic and non-invasive determination of the hip joint center location: effect on hip joint moments. *Clinical Biomechanics*, 14(4), 227–235. doi:10.1016/S0268-0033(98)00073-4.
- König, A. & Vitzthum, H.E. (2001). Functional MRI of the spine: different patterns of positions of the forward flexed lumbar spine in healthy subjects. *European Spine Journal*, 10(5), 437–442. doi:10.1007/s005860000231.
- Kopparapu, S. & Corke, P. (2004). The effect of noise on camera calibration parameters. *Graphical Models*, 63(5), 277–303. doi:10.1006/gmod.2001.0551.
- Kroemer, K.H.E. (1994). Sitting (or standing?) at the computer workplace. In R. Lueder & K. Noro (Eds.), *Hard Facts About Soft Machines*, (pp. 181–191). Taylor & Francis.
- Ladin, Z. (1995). Three-dimensional instrumentation. In P. Allard, I.A.F. Stokes, & J.P. Blanchi (Eds.), *Three-Dimensional Analysis of Human Movement*, chap. 1, (pp. 3–17). Champaign: Human Kinetics.
- Leardini, A., Cappozzo, A., Catani, F., Toksvig-Larsen, S., Petitto, A., Sforza, V. et al. (1999a). Validation of a functional method for the estimation of hip joint centre location. *Journal of Biomechanics*, 32(1), 99–103. doi:10.1016/S0021-9290(98)00148-1.
- Leardini, A., O'Connor, J.J., Catani, F., & Giannini, S. (1999b). Kinematics of the human ankle complex in passive flexion; a single degree of freedom system. *Journal of Biomechanics*, 32(2), 111–118. doi:10.1016/S0021-9290(98)00157-2.
- Leardini, A., Biagi, F., Belvedere, C., & Benedetti, M.G. (2009). Quantitative comparison of current models for trunk motion in human movement analysis. *Clinical Biomechanics*, 24(7), 542–550. doi:10.1016/j.clinbiomech.2009.05.005.
- Leardini, A., Chiari, L., Croce, U.D., & Cappozzo, A. (2005). Human movement analysis using stereophotogrammetry. Part 3. Soft tissue artifact assessment and compensation. *Gait & Posture*, 21(2), 212–225. doi:10.1016/j.gaitpost.2004.05.002.
- Lee, R.Y.W., Laprade, J., & Fung, E.H.K. (2003). A real-time gyroscopic system for three-dimensional measurement of lumbar spine motion. *Medical Engineering & Physics*, 25(10), 817–824. doi:10.1016/S1350-4533(03)00115-2.

- Lee, R.Y.W. & Wong, T.K.T. (2002). Relationship between the movements of the lumbar spine and hip. *Human Movement Science*, 21(4), 481–494. doi:10.1016/S0167-9457(02)00117-3.
- Leivseth, G. & Drerup, B. (1997). Spinal shrinkage during work in a sitting posture compared to work in a standing posture. *Clinical Biomechanics*, 12(7-8), 409–418. doi:10.1016/S0268-0033(97)00046-6.
- Lengsfeld, M., van Deursen, D.L., Rohlmann, A., van Deursen, L.L., & Griss, P. (2000). Spinal load changes during rotatory dynamic sitting. *Clinical Biomechanics*, 15(4), 295–297. doi:10.1016/S0268-0033(99)00043-1.
- Li, Z.M. (2006). Functional degrees of freedom. *Motor Control*, 10(4), 301–310.
- Li, Z.M. & Tang, J. (2007). Coordination of thumb joints during opposition. *Journal of Biomechanics*, 40(3), 502–510. doi:10.1016/j.jbiomech.2006.02.019.
- Lu, T.W. & O'Connor, J.J. (1999). Bone position estimation from skin marker co-ordinates using global optimisation with joint constraints. *Journal of Biomechanics*, 32(2), 129–134. doi:10.1016/S0021-9290(98)00158-4.
- Lu, T.W. & O'Connor, J.J. (2000). Three-dimensional computer graphics-based modelling and mechanical analysis of the human locomotor system. In *Sixth International Symposium on the 3D Analysis of Human Movement*. Cape Town.
- Lucchetti, L., Cappozzo, A., Cappello, A., & Croce, U.D. (1998). Skin movement artefact assessment and compensation in the estimation of knee-joint kinematics. *Journal of Biomechanics*, 31(11), 977–984. doi:10.1016/S0021-9290(98)00083-9.
- Mandal, A.C. (1976). Work-chair with tilting seat. *Ergonomics*, 19(2), 157–164. doi:10.1080/00140137608931528.
- Mandal, A. (1991). Investigation of the lumbar flexion of the seated man. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 8(1), 75–87. doi:10.1016/0169-8141(91)90027-J.
- Mansour, M., Spiering, S., Lee, C., Dathe, H., Kalscheuer, A.K., Kubein-Meesenburg, D., & Nägerl, H. (2004). Evidence for IHA migration during axial rotation of a lumbar spine segment by using a novel high-resolution 6D kinematic tracking system. *Journal of Biomechanics*, 37(4), 583–592. doi:10.1016/j.jbiomech.2003.09.001.

- Mayagoitia, R.E., Nene, A.V., & Veltink, P.H. (2002). Accelerometer and rate gyroscope measurement of kinematics: an inexpensive alternative to optical motion analysis systems. *Journal of Biomechanics*, 35(4), 537–542. doi:10.1016/S0021-9290(01)00231-7.
- McCane, B., King, T.I., & Abbott, J.H. (2006). Calculating the 2D motion of lumbar vertebrae using splines. *Journal of Biomechanics*, 39(14), 2703–2708. doi:10.1016/j.jbiomech.2005.09.015.
- Muller, M. (1993). The relationship between the rotation possibilities between femur and tibia and the lengths of the cruciate ligaments. *Journal of Theoretical Biology*, 161(2), 199–220. doi:10.1006/jtbi.1993.1050.
- Mündermann, L., Corazza, S., & Andriacchi, T.P. (2006). The evolution of methods for the capture of human movement leading to markerless motion capture for biomechanical applications. *Journal of Neuroengineering and Rehabilitation*, 3, 6. doi:10.1186/1743-0003-3-6.
- Nachemson, A. (1966). The load on lumbar disks in different positions of the body. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 45, 107–122.
- Nussbaum, M.A. & Zhang, X. (2000). Heuristics for locating upper extremity joint centres from a reduced set of surface markers. *Human Movement Science*, 19(5), 797–816. doi:10.1016/S0167-9457(00)00020-8.
- Öberg, K. (1983). Knee mechanisms for through-knee prostheses. *Prosthetics and Orthotics International*, 7(2), 107–112.
- Öhberg, F., Grip, H., Wiklund, U., Sterner, Y., Karlsson, J.S., & Gerdle, B. (2003). Chronic whiplash associated disorders and neck movement measurements: an instantaneous helical axis approach. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 7(4), 274–282. doi:10.1109/TITB.2003.821328.
- Ormonet, D., Black, M.J., Hastie, T., & Kjellström, H. (2005). Representing cyclic human motion using functional analysis. *Image and Vision Computing*, 23(14), 1264–1276. doi:10.1016/j.imavis.2005.09.004.
- Page, Á., Ayala, G., León, M.T., Peydro, M.F., & Prat, J.M. (2006a). Normalizing temporal patterns to analyze sit-to-stand movements by using registration of functional data. *Journal of Biomechanics*, 39(13), 2526–2534. doi:10.1016/j.jbiomech.2005.07.032.



- Page, Á., Candelas, P., & Belmar, F. (2006b). On the use of local fitting techniques for the analysis of physical dynamic systems. *European Journal of Physics*, 27(2), 273–279. doi:10.1088/0143-0807/27/2/010.
- Page, Á., De Rosario, H., Gálvez, J., Mata, V., & Prat, J. (2008a). Instantaneous helical axis in joints with one functional degree of freedom. In *3DMA-'08: 10th International Symposium on 3D analysis of Human Movement*. Amsterdam.
- Page, Á., De Rosario, H., Mata, V., & Atienza, C. (2009a). Experimental analysis of rigid body motion. a vector method to determine finite and infinitesimal displacements from point coordinates. *Journal of Mechanical Design*, 131(3), 31005–1 – 031005–8. doi:10.1115/1.3066468.
- Page, Á., Gálvez, J.A., Baydal-Bertomeu, J.M., Mata, V., & Belda-Lois, J.M. (2008b). Functional degrees of freedom of neck movements: linear models may overestimate variability. *Gait & Posture*, 28(Supplement 2), S56. doi: 10.1016/S0966-6362(08)70080-8.
- Page, Á., Galvez, J.A., de Rosario, H., Mata, V., & Such, M.J. (2009b). Representation of motion of human joints by means of rolling pairs. application to neck motion. *Gait & Posture*, 30(Supplement 2), S51–S52. doi: 10.1016/j.gaitpost.2009.08.078. 18th Annual General Meeting of European Society of Movement Analysis in Adults and Children - ESMAC 2009.
- Page, Á., Gálvez, J.A., De Rosario, H., Mata, V., & Baydal, J.M. (2009c). Optimal average path of the Instantaneous Screw Axis in 3D human movements. In J. Ambrósio et al. (Eds.), *7th EUROMECH Solid Mechanics Conference (ESMC)*. Lisbon.
- Page, Á., Gálvez, J.A., De Rosario, H., Mata, V., & Prat, J. (2010). Optimal average path of the instantaneous helical axis in planar motions with one functional degree of freedom. *Journal of Biomechanics*, 43(2), 375–378. doi: 10.1016/j.jbiomech.2009.09.023.
- Page, Á., Mata, V., Hoyos, J.V., & Porcar, R. (2007). Experimental determination of instantaneous screw axis in human motions. error analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 42(4), 429–441. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2006.04.001.
- Panjabi, M.M., Goel, V., Oxland, T., Takata, K., Duranceau, J., Krag, M., & Price, M. (1992). Human lumbar vertebrae. quantitative three-dimensional anatomy. *Spine*, 17(3), 299–306.

- Panjabi, M.M., Krag, M.H., & Goel, V.K. (1981). A technique for measurement and description of three-dimensional six degree-of-freedom motion of a body joint with an application to the human spine. *Journal of Biomechanics*, 14(7), 447–460. doi:10.1016/0021-9290(81)90095-6.
- Parkin, I.A. (1997a). Dual systems of finite displacement screws in the screw triangle. *Mechanism and Machine Theory*, 32(8), 993–1003. doi:10.1016/S0094-114X(96)00015-8.
- Parkin, I.A. (1997b). Unifying the geometry of finite displacement screws and orthogonal matrix transformations. *Mechanism and machine theory*, 32(8), 975–991. doi:10.1016/S0094-114X(96)00016-X.
- Patterson, R.M., Nicodemus, C.L., Viegas, S.F., Elder, K.W., & Rosenblatt, J. (1998). High-speed, three-dimensional kinematic analysis of the normal wrist. *Journal of Hand Surgery*, 23(3), 446–453. doi:10.1016/S0363-5023(05)80462-9.
- Pearcy, M.J. & Bogduk, N. (1988). Instantaneous axes of rotation of the lumbar intervertebral joints. *Spine*, 13(9), 1033–1041.
- Pedotti, A. & Ferrigno, G. (1995). Optoelectronic-based systems. In P. Allard, I.A.F. Stokes, & J.P. Blanche (Eds.), *Three-Dimensional Analysis of Human Movement*, chap. 4, (pp. 57–77). Champaign: Human Kinetics.
- Pheasant, S. (1996). *Bodyspace: Anthropometry, Ergonomics and the Design of Work*. Taylor & Francis, 2nd ed.
- Piazza, S.J., Erdemir, A., Okita, N., & Cavanagh, P.R. (2004). Assessment of the functional method of hip joint center location subject to reduced range of hip motion. *Journal of Biomechanics*, 37(3), 349–356. doi:10.1016/S0021-9290(03)00288-4.
- Pirsic, G. (2007). An inverse of the Faà di Bruno Formula. *INTEGERS: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 7(1), A34.
- Plamondon, A., Gagnon, M., & Maurais, G. (1988). Application of a stereoradiographic method for the study of intervertebral motion. *Spine*, 13(9), 1027–1032.
- Ramsay, J.O. & Silverman, B.W. (1997). *Functional Data Analysis*. New York: Springer.

- Reinecke, S., Coleman, K., & Pope, M. (1994). Measurement of lumbar and pelvic motion during sitting. In R. Lueder & K. Noro (Eds.), *Hard Facts About Soft Machines*, (pp. 193–204). Taylor & Francis.
- Reinecke, S. & Hazard, R.G. (1994). Continuous passive lumbar motion in seating. In R. Lueder & K. Noro (Eds.), *Hard Facts About Soft Machines*, (pp. 157–164). Taylor & Francis.
- Riley, S. & Bader, D.L. (1988). Biomechanical measurements of back shape and interface pressures in unsupported sitting. *Clinical Biomechanics*, 3(2), 114–117. doi:10.1016/0268-0033(88)90054-X.
- Rivera-Rios, A.H., Shih, F.L., & Merefat, M. (2005). Stereo camera pose determination with error reduction and tolerance satisfaction for dimensional measurements. In *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA 2005*, (pp. 423–428).
- Rousseau, M.A., Bradford, D.S., Hadi, T.M., Pedersen, K.L., & Lotz, J.C. (2006). The instant axis of rotation influences facet forces at L5/S1 during flexion/extension and lateral bending. *European Spine Journal*, 15(3), 299–307. doi:10.1007/s00586-005-0935-1.
- Sahabi, H. & Basu, A. (1996). Analysis of error in depth perception with vergence and spatially varying sensing. *Computer Vision and Image Understanding*, 63(3), 447–461. doi:10.1006/cviu.1996.0034.
- Schache, A.G., Blanch, P., Rath, D., Wrigley, T., & Bennell, K. (2002). Three-dimensional angular kinematics of the lumbar spine and pelvis during running. *Human Movement Science*, 21(2), 273–293. doi:10.1016/S0167-9457(02)00080-5.
- Schoberth, H. (1962). *Sitzhaltung, Sitzchaden, Sitzmobel*. Berlin: Springer-Verlag.
- Schultz, A.B. & Galante, J.O. (1970). A mathematical model for the study of the mechanics of the human vertebral column. *Journal of Biomechanics*, 3(4), 405–416. doi:10.1016/0021-9290(70)90013-8.
- Serber, H. (1994). The study of lumbar motion in seating. In R. Lueder & K. Noro (Eds.), *Hard Facts About Soft Machines*, (pp. 423–431). Taylor & Francis.

- Shiflett, G.R. & Laub, A.J. (1995). The analysis of rigid body motion from measured data. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 117(4), 578–584. doi:10.1115/1.2801117.
- Shoup, V. (2009). *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra*. New York: Cambridge University Press.
- Snyder, R.G., Chaffin, D.B., & Schutz, R.K. (1972). Link system of the human torso. Tech. Rep. HSRI-71-112, AMRL-TR-71-88, Transportation Research Institute (UMTRI), Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
- Söderkvist, I. & Wedin, P.A. (1993). Determining the movements of the skeleton using well-configured markers. *Journal of Biomechanics*, 26(12), 1473–1477. doi:10.1016/0021-9290(93)90098-Y.
- Sommer III, H.J. (1992). Determination of first and second order instant screw parameters from landmark trajectories. *Journal of Mechanical Design*, 114(2), 274–282. doi:10.1115/1.2916943.
- Spoor, C.W. & Veldpaus, F.E. (1980). Rigid body motion calculated from spatial co-ordinates of markers. *Journal of Biomechanics*, 13(4), 391–393. doi:10.1016/0021-9290(80)90020-2.
- Sprigle, S., Wootten, M., Bresler, M., & Flinn, N. (2002). Development of a noninvasive measure of pelvic and hip angles in seated posture. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, 83(11), 1597–1602. doi:10.1053/apmr.2002.35468.
- Staffel, F. (1884). Zur Hygiene des Sitzens. *Zentralblatt für Allgemeine Gesundheitspflege*, 3, 403–421.
- Stokes, I.A.F. (1995). X-ray photogrammetry. In P. Allard, I.A.F. Stokes, & J.P. Blanchi (Eds.), *Three-Dimensional Analysis of Human Movement*, chap. 7, (pp. 125–141). Champaign: Human Kinetics.
- Suzuki, Y., Sunago, T., & Kato, T. (1994). An ergonomic study of dynamic seating. In R. Lueder & K. Noro (Eds.), *Hard Facts About Soft Machines*, (pp. 347–373). Taylor & Francis.
- Thornton, M.J., Morrissey, M.C., & Coutts, F.J. (1998). Some effects of camera placement on the accuracy of the kinematrix three-dimensional motion analysis system. *Clinical Biomechanics*, 13(6), 452–454. doi:10.1016/S0268-0033(98)00001-1.

- Tully, E.A., Fotoohabadi, M.R., & Galea, M.P. (2005). Sagittal spine and lower limb movement during sit-to-stand in healthy young subjects. *Gait & Posture*, 22(4), 338–345. doi:10.1016/j.gaitpost.2004.11.007.
- Ude, A. (1999). Filtering in a unit quaternion space for model-based object tracking. *Robotics and Autonomous Systems*, 28(2–3), 163–172. doi:10.1016/S0921-8890(99)00014-7.
- Unuma, M., Anjyo, K., & Takeuchi, R. (1995). Fourier principles for emotion-based human figure animation. In *SIGGRAPH '95: Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, (pp. 91–96). New York, NY, USA: ACM. doi:http://doi.acm.org/10.1145/218380.218419.
- van Deursen, D.L., Goossens, R.H., Evers, J.J., van der Helm, F.C., & van Deursen, L.L. (2000). Length of the spine while sitting on a new concept for an office chair. *Applied Ergonomics*, 31(1), 95–98. doi:10.1016/S0003-6870(99)00030-7.
- van Dieën, J.H., de Looze, M.P., & Hermans, V. (2001). Effects of dynamic office chairs on trunk kinematics, trunk extensor EMG and spinal shrinkage. *Ergonomics*, 44(7), 739–750. doi:10.1080/00140130120297.
- Veldpaus, F.E., Woltring, H.J., & Dortmans, L.J. (1988). A least-squares algorithm for the equiform transformation from spatial marker co-ordinates. *Journal of Biomechanics*, 21(1), 45–54. doi:10.1016/0021-9290(88)90190-X.
- Vergara, M. & Page, A. (2000). Technique to measure lumbar curvature in the ergonomic evaluation of chairs: description and validation. *Clinical Biomechanics*, 15(10), 786–789. doi:10.1016/S0268-0033(00)00042-5.
- Vergara, M., Page, A., & Sancho, J. (2006). Analysis of lumbar flexion in sitting posture: Location of lumbar vertebrae with relation to easily identifiable skin marks. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 36(11), 937–942. doi:10.1016/j.ergon.2006.07.006.
- Vergara, M. & Page, A. (2002). Relationship between comfort and back posture and mobility in sitting-posture. *Applied Ergonomics*, 33(1), 1–8. doi:10.1016/S0003-6870(01)00056-4.
- Vithani, A.R. & Gupta, K.C. (2004). Estimation of object kinematics from point data. *Journal of Mechanical Design*, 126(1), 16–21. doi:10.1115/1.1639377.

- Wachowski, M.M., Mansour, M., Lee, C., Ackenhausen, A., Spiering, S., Fanghänel, J. et al. (2009). How do spinal segments move? *Journal of Biomechanics*, 42(14), 2286–2293. doi:10.1016/j.jbiomech.2009.06.055.
- White III, A.A. & Panjabi, M.M. (1990). *Clinical Biomechanics of the Spine*. Philadelphia: JB Lippincot Company.
- Williams, T.R. & Fyfe, K.R. (2010). Rodrigues' spatial kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, 45(1), 15–22. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2009.07.009.
- Winter, D.A. (2009). *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. New York: John Wiley & Sons, 4th ed.
- Wolf, A. & Degani, A. (2007). Recognizing knee pathologies by classifying instantaneous screws of the six degrees-of-freedom knee motion. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 45(5), 475–482. doi:10.1007/s11517-007-0174-1.
- Woltring, H.J. (1980). Planar control in multi-camera calibration for 3-D gait studies. *Journal of Biomechanics*, 13(1), 39–48. doi:10.1016/0021-9290(80)90006-8.
- Woltring, H.J. (1992). One hundred years of photogrammetry in biolocomotion. In A. Cappozzo, M. Marchetti, & V. Tossi (Eds.), *Biolocomotion: a century of research using moving pictures*, chap. 11, (pp. 199–225). Roma: Promograph.
- Woltring, H.J. (1994). 3-d attitude representation of human joints: a standardization proposal. *Journal of Biomechanics*, 27(12), 1399–1414. doi:10.1016/0021-9290(94)90191-0.
- Woltring, H.J., Huiskes, R., de Lange, A., & Veldpaus, F.E. (1985). Finite centroid and helical axis estimation from noisy landmark measurements in the study of human joint kinematics. *Journal of Biomechanics*, 18(5), 379–389. doi:10.1016/0021-9290(85)90293-3.
- Woltring, H.J., Long, K., Osterbauer, P.J., & Fuhr, A.W. (1994). Instantaneous helical axis estimation from 3-D video data in neck kinematics for whiplash diagnostics. *Journal of Biomechanics*, 27(12), 1415–1432. doi:10.1016/0021-9290(94)90192-9.

- Woltring, H.J. (1995). Smoothing and differentiation techniques applied to 3-D data. In P. Allard, I.A.F. Stokes, & J.P. Blanche (Eds.), *Three-Dimensional Analysis of Human Movement*, chap. 5, (pp. 79–99). Champaign: Human Kinetics.
- Wong, W.Y. & Wong, M.S. (2008). Detecting spinal posture change in sitting positions with tri-axial accelerometers. *Gait & Posture*, 27(1), 168–171. doi: 10.1016/j.gaitpost.2007.03.001.
- Wood, G.A. & Marshall, R.N. (1986). The accuracy of DLT extrapolation in three-dimensional film analysis. *Journal of Biomechanics*, 19(9), 781–785. doi: 10.1016/0021-9290(86)90201-0.
- Wu, G., Siegler, S., Allard, P., Kirtley, C., Leardini, A., Rosenbaum, D. et al. (2002). ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion—part I: ankle, hip, and spine. International Society of Biomechanics. *Journal of Biomechanics*, 35(4), 543–548. doi:10.1016/S0021-9290(01)00222-6.
- Wu, G., van der Helm, F.C.T., Veeger, H.E.J.D., Makhsous, M., Roy, P.V., Anglin, C. et al. (2005). ISB recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion—Part II: shoulder, elbow, wrist and hand. *Journal of Biomechanics*, 38(5), 981–992. doi:10.1016/j.jbiomech.2004.05.042.
- Zatsiorsky, V.M. (1998). *Kinematics of Human Motion*. Champaign: Human Kinetics.
- Zhang, X., Lee, S.W., & Braido, P. (2003). Determining finger segmental centers of rotation in flexion-extension based on surface marker measurement. *Journal of Biomechanics*, 36(8), 1097–1102. doi:10.1016/S0021-9290(03)00112-X.
- Zhang, X. & Xiong, J. (2003). Model-guided derivation of lumbar vertebral kinematics in vivo reveals the difference between external marker-defined and internal segmental rotations. *Journal of Biomechanics*, 36(1), 9–17. doi: 10.1016/S0021-9290(02)00323-8.
- Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(11), 1330–1334. doi: 10.1109/34.888718.

# Apéndice A

## Procedimientos matemáticos

El método de análisis cinemático y de errores presentado en el capítulo 4 depende de una serie de procedimientos y principios matemáticos (cálculo de derivadas, leyes estadísticas, etc.) que, aun siendo cruciales para la correcta aplicación de las técnicas, por su carácter auxiliar y en aras de la concreción sólo se han comentado superficialmente. En este apéndice se desarrollan en detalle, haciendo referencia a las secciones del capítulo 4 en las que se aplican.

### A.1. Suavizado y diferenciación de variables

#### A.1.1. Principios del ajuste polinómico local

En los cálculos cinemáticos diferenciales es necesario obtener las derivadas temporales de las variables de posición. Por ejemplo, en las fórmulas (4.8) y (4.9) de la sección 4.2.1 aparecen las velocidades de los marcadores  $\vec{v}_i(t)$ , que han de obtenerse por diferenciación de las posiciones  $\vec{R}_i(t)$ . La técnica escogida para ello ha sido el ajuste polinómico local comentado en la sección 2.5.1.2, que es un método adecuado para el análisis de sistemas dinámicos que no actúan conforme a un modelo predefinido, y para las variables biomecánicas en particular (Page et al., 2006a,b).

Dada una función  $y(x)$  el ajuste polinómico local proporciona, para cada instante  $x_t$ , una función polinómica de grado  $p$ ,  $\hat{f}_t(x)$ , que se ajusta a las observaciones de la variable medida en el entorno de  $x_t$ :

$$\hat{f}_t(x) = \beta_{t0} + \beta_{t1}(x - x_t) + \beta_{t2}(x - x_t)^2 + \dots + \beta_{tp}(x - x_t)^p. \quad (\text{A.1})$$



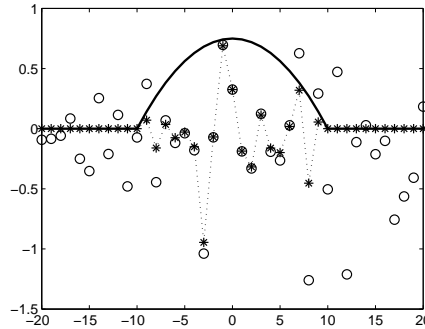


Figura A.1: Ejemplo de la ponderación con una función *kernel*. La línea continua es la función parabólica de Epanechnikov, con un máximo en 0 y definida entre  $[-10, 10]$ . Los círculos son un residuo aleatorio con una distribución normal de media nula. Los asteriscos son dichos residuos modulados por el valor del *kernel*. Alrededor de 0 los valores prácticamente coinciden; según se distancia la ordenada, los residuos ponderados se hacen más pequeños, y para  $x < -10$  o  $x > 10$  son siempre nulos.

Este polinomio es el que satisface el criterio de mínimas diferencias cuadráticas entre sus valores y los datos  $y(x)$  observados en el entorno de  $x_t$ , ponderadas según una función *kernel*  $w(u)$  simétrica y con su máximo en  $u = 0$ :

$$\min \left( \sum_x w \left( \frac{x - x_t}{h} \right) \left( y(x) - \hat{f}_t(x) \right)^2 \right). \quad (\text{A.2})$$

Esta ponderación hace que los residuos entre el polinomio  $\hat{f}_t(x)$  y las observaciones  $y(x)$  tengan mayor peso cuanto más cercano esté  $x$  al instante de referencia  $x_t$ . El parámetro  $h$  es el «ancho de banda» de la función de pesos, de modo que para una misma  $w(u)$ , mientras más grande sea  $h$  más influirán los puntos alejados de  $x_t$  (figura A.1).

La diferencia con una regresión polinómica convencional es que el polinomio obtenido es distinto para cada instante, de modo que el resultado se ajusta perfectamente a cualquier conjunto de datos, si la función «real» de la que proceden es continuamente diferenciable hasta orden  $p$  y el ruido se distribuye de forma aleatoria e incorrelacionada.

Aplicando esta técnica se pueden calcular los valores de la función suavizada y sus derivadas hasta orden  $p$  en todos los puntos:

$$\left. \frac{d^k \hat{f}_t(x)}{dx^k} \right|_{x=x_t} = k! \beta_{tk}. \quad (\text{A.3})$$

De este modo, por ejemplo, dadas las coordenadas de los marcadores  $\vec{R}_i(t)$  observadas en cada instante se calculan su posiciones corregidas (con el mínimo error aleatorio) y sus derivadas primeras,  $\vec{v}_i(t)$ , que se requieren para calcular los parámetros cinemáticos diferenciales.

### A.1.2. Parámetros del suavizado

El problema que se presenta es qué valores dar a los parámetros del suavizado: el grado del polinomio, el tipo de función *kernel* y, sobre todo, el ancho de banda  $h$ . El grado de polinomio se ha escogido en función de las derivadas a calcular; para el cálculo directo de velocidades (derivadas de primer grado) se han escogido polinomios cúbicos. La elección del *kernel* no es especialmente crítica, aunque se recomienda escoger una función suave y definida únicamente en un entorno limitado alrededor de cero (Cleveland & Loader, 1996); siguiendo este criterio se ha empleado la función de Epanechnikov (Härdle, 1992):

$$w(u) = \begin{cases} 0,75(1 - u^2) & |u| \leq 1 \\ 0 & |u| > 1 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La elección del ancho de banda óptimo es normalmente el problema principal, y hay múltiples estrategias para resolverlo. En general se recomienda utilizar un criterio que no se base directamente en el tamaño de  $h$ , sino en el número de puntos cubiertos en el intervalo definido por el *kernel* (el llamado criterio de *nearest neighbours* o «vecinos próximos»). Entre las técnicas habituales para seleccionar el mejor ancho de banda se cuenta la validación cruzada y los métodos *plug-in* (Cleveland & Loader, 1996). La técnica usada en este trabajo se basa en el criterio de autocorrelación mínima de los residuos, especialmente adecuado para funciones con cambios de curvatura cuya forma es desconocida (Braun & Rousson, 2000). Este método parte de la hipótesis de que los errores aleatorios están incorrelacionados en el tiempo, por lo que busca el valor de  $h$  para el que se minimiza el estadístico de Box-Pierce:

$$Q(h) = \sum_{j=1}^m r_j^2(h), \quad (\text{A.5})$$

donde  $r_j(h)$  es la autocorrelación de los residuos con un desfase de  $j$  observaciones, cuando el suavizado se ha realizado con un ancho de banda  $h$ . El índice  $m$  es un máximo arbitrario de los desfases empleados para el cálculo de  $Q(h)$ .

En el procedimiento seguido en este trabajo la función objetivo no es directamente el estadístico de Box-Pierce, sino una modificación del mismo en la que las autocorrelaciones no están elevadas al cuadrado:

$$Q^*(h) = \sum_{j=1}^m r_j(h). \quad (\text{A.6})$$

Esta variación aprovecha el distinto carácter de  $r_j(h)$  según el tamaño relativo de  $h$ :

- Si el suavizado es deficiente (el valor de  $h$  es pequeño), el criterio de ajuste (A.2) generará residuos con valores cuadráticos mínimos (de signo positivo y negativo equilibrados) en entornos estrechos. Por lo tanto el signo de los residuos alternará a intervalos muy cortos, y sus autocorrelaciones  $r_j(h)$  serán predominantemente negativas para  $j \leq m$ .
- Si por el contrario el suavizado es excesivo (con valores de  $h$  muy altos), existirá una desviación local grande entre la función suavizada y los valores observados. En señales con cambio de curvatura esto producirá tramos largos con residuos de valor semejante, y sus autocorrelaciones  $r_j(h)$  serán predominantemente positivas para  $j \leq m$ .

En consecuencia, se espera que para las variables que han de ser suavizadas, la función  $Q^*(h)$  definida en (A.6) sea monótonamente creciente, y que el mínimo del estadístico de Box-Pearce se corresponda con una raíz de  $Q^*(h)$ . La búsqueda de raíces de una función es un problema numérico habitualmente más sencillo que la búsqueda de mínimos, siempre que la raíz exista realmente en el intervalo definido. Hay múltiples algoritmos para su resolución, como los métodos clásicos de bisección o de la secante, o los métodos de Laguerre, Halley, Ostrowski y Euler, entre otros (Hansen & Patrick, 1976). Para este trabajo se ha escogido el método «Pegasus», una modificación del *Regula Falsi* (Dowell & Jarratt, 1972). Como intervalo de partida para  $h$  se ha tomado aquél para el que el número de vecinos próximos oscila entre 5 y 50, y el desfase máximo para el cálculo de  $Q^*(h)$  se ha establecido en  $m = 5$ .

### A.1.3. Error de las medidas suavizadas

El suavizado convierte la secuencia de posiciones proporcionada por la fotogrametría a una función del tiempo, y además reduce el error aleatorio de la señal de entrada, pero no lo puede eliminar completamente ni corrige los errores sistemáticos. De hecho se ha visto que los suavizados excesivos introducen sesgos en la señal, que son otro tipo de error sistemático.

En la teoría sobre el suavizado de señales las medidas de este sesgo y el error aleatorio residual se tratan en términos estadísticos. Dada una función teórica  $f(x)$  muestreada en unos puntos  $x_t$ , y unos parámetros de suavizado fijos, el resultado de realizar el ajuste, representado por la familia de polinomios  $\hat{f}_t(x)$ , dependerá de los errores de la medida. Y como éstos son supuestamente una variable aleatoria,  $\hat{f}_t(x)$  también será una función aleatoria, con un valor medio y una varianza para cada punto  $x_t$ . El llamado *bias* es la diferencia entre  $f(x)$  y la media funcional de  $\hat{f}_t(x)$ , y representa el sesgo que se comete de forma sistemática al suavizar. La varianza de  $\hat{f}_t(x)$  cuantifica la oscilación que se espera del ajuste alrededor de su media, y por lo tanto es una medida del error residual.

En los teoremas presentados por Francisco Fernández & Vilar Fernández (2001) se formulan estimaciones asintóticas para el sesgo y la varianza de  $\hat{f}_t(x)$  y sus derivadas cuando la función está definida en el intervalo  $x \in [0, 1]$ , aunque esto no limita su aplicabilidad a funciones definidas en otros intervalos. También consideran que el ancho de banda  $h$  es relativamente pequeño respecto al dominio de  $x$ , más unas condiciones de la función *kernel* y las covarianzas del error aleatorio original que pueden darse por ciertas en el problema que se aborda en este trabajo. Las fórmulas mencionadas dependen de los distintos parámetros que determinan el proceso de suavizado (función *kernel*, número  $n$  de puntos medidos, grado  $p$  del polinomio, propiedades estadísticas de la variable independiente y el error original), así como del orden de derivación  $k \leq p$  para el que se estima el error. Dichas expresiones se pueden simplificar del siguiente modo para mostrar sólo las relaciones de proporcionalidad con los parámetros principales:

$$Bias \left( \hat{f}^{(k)}(x) \right) = \frac{k!}{h^k} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) B^* \cdot (1 + o(1)). \quad (A.7)$$

$$Var \left( \hat{f}^{(k)}(x) \right) = \left( \frac{k!}{h^k} \right)^2 \frac{1}{nh} \sigma^2 V^* \cdot (1 + o(1)). \quad (A.8)$$

Los términos  $B^*$  y  $V^*$  son términos en los que se combinan de forma no lineal los parámetros antes mencionados, y el factor asintótico  $1 + o(1)$  impli-

ca que el error cometido al usar estas aproximaciones es despreciable frente a su propio valor (véase Shoup, 2009 para la notación asintótica).

Para las variables de posición ( $k = 0$ ) el primer factor de (A.7) y (A.8) es igual a 1 y se puede obviar. Como puede observarse, el sesgo depende proporcionalmente de la derivada de orden  $p + 1$  de la función teórica original, mientras que la varianza del error aleatorio tras el suavizado es directamente proporcional a la del error original, representada en (A.8) por  $\sigma^2$ . En cuanto al efecto del ancho de banda  $h$ , se encuentra modulado en el primer caso por el grado  $p$  del polinomio, y en el segundo por el número  $n$  de puntos medidos. Pero para unos mismos valores de estos parámetros, un incremento de  $h$  aumenta exponencialmente el sesgo, al tiempo que reduce proporcionalmente el error aleatorio.

Las condiciones para las que están definidas estas fórmulas restringen los posibles valores de  $h$  al intervalo abierto  $]0, 1/2[$ . Por lo tanto, para todo ajuste de grado  $p > 1$  el sesgo presentará un grado de incremento respecto a  $h$  más «lento» que la reducción del ruido. Además, el método de suavizado que se ha seguido incluye una búsqueda ancho óptimo, con el que el residuo sustraído a la señal tenga una autocorrelación mínima, y por lo tanto no exista sesgo alguno entre los datos observados y la función ajustada.

Esto verifica las condiciones expresadas en la sección 4.2.5 sobre los errores de posición, a saber: que el error aleatorio en las posiciones medidas se ve reducido en magnitud por el proceso de suavizado, quedando la parte sistemática del error inalterada.

#### A.1.4. Error de las velocidades

Para las estimaciones del error en los parámetros cinemáticos, desarrolladas a lo largo de la sección 4.2.5, se ha asumido de forma generalizada que el error de las velocidades,  $\delta\vec{v}_i(t)$ , está dominado por la componente aleatoria, ya que el error aleatorio se magnifica en las derivadas, mientras que esto no ocurre con el error sistemático. Esta magnificación del error aleatorio se verifica en las ecuaciones (A.7) y (A.8) cuando se aplican a las derivadas primeras ( $k = 1$ ).

Los resultados de estas ecuaciones diferirán de los obtenidos para los errores de posición por los valores de los parámetros  $B^*$  y  $V^*$ , y sobre todo por el factor  $1/h$  añadido (que está elevado al cuadrado en el cálculo de la varianza). Para valorar el efecto de este factor hay que tener en cuenta el cambio de escala que supone trabajar con las derivadas. En los experimentos de esta investigación se miden movimientos cíclicos; considérese, a tal efecto, que el

rango recorrido en un ciclo de la variable  $f(x)$  es  $F$ , y que el error de su ajuste polinómico está caracterizado en proporción a dicho rango:

$$\varepsilon(\hat{f}(x)) := \frac{1}{F}(\hat{f}(x) - f(x)). \quad (\text{A.9})$$

El error de su derivada podría normalizarse, análogamente, de forma proporcional a la velocidad característica de la función. Si la duración típica de un semiciclo ocupa una fracción  $X$  del intervalo  $[0, 1]$  (en el que está definida la variable  $x$ ), la velocidad típica puede definirse como el cociente entre  $F$  y  $X$ . Así pues,

$$\varepsilon(\hat{f}'(x)) := \frac{X}{F}(\hat{f}'(x) - f'(x)). \quad (\text{A.10})$$

En consecuencia, la relación de proporcionalidad entre los errores normalizados de posición y velocidad sería, en función de  $h$ ,

$$\varepsilon(\hat{f}'(x)) \propto \frac{X}{h}\varepsilon(\hat{f}(x)). \quad (\text{A.11})$$

Normalmente el ancho de banda será una fracción pequeña de un ciclo. Es decir, que el factor  $X/h$  será un número mayor que 1. Por lo tanto la relación (A.11) implica que el error normalizado de velocidad es varias veces mayor que el error normalizado de posición, tal como se había propuesto.

## A.2. Propiedades del cuerpo y el torsor virtual

### A.2.1. Interpretación geométrica del cuerpo virtual y configuraciones singulares

En la sección 4.2.2 se ha presentado el método de cálculo lineal para resolver el problema de desplazamientos finitos, basado en la definición de un campo antisimétrico de «desplazamientos virtuales» aplicado sobre un «cuerpo virtual». La geometría del cuerpo virtual se relaciona con la del cuerpo real en el punto medio de la rotación, que es la posición empleada por Parkin (1997b) para calcular las transformaciones matriciales de desplazamientos finitos. Esta relación se muestra en la figura A.2, donde se representa un cuerpo en la posición inicial, final y «semirrotada», considerando sólo la rotación pura alrededor del centroide  $G$ , que no experimenta ningún desplazamiento. El vector  $\vec{r}_1$  representa la posición de un punto arbitrario respecto a  $G$ , siendo  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_m$  sus reflejos en la posición final y en la semirrotada, respectivamente.

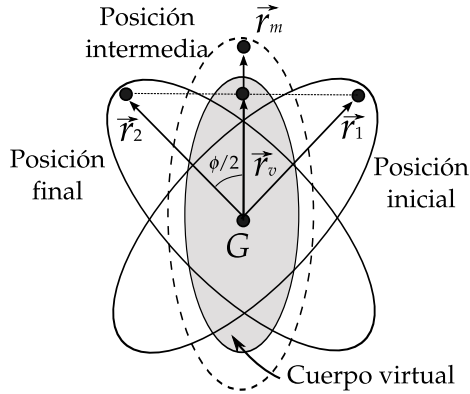


Figura A.2: Relación geométrica entre el cuerpo virtual y el real: el cuerpo virtual es similar al real en la posición intermedia, pero comprimido en torno al eje de rotación por el factor  $\cos(\phi/2)$ .

En un sistema de coordenadas con origen en  $G$  y eje  $Z$  alineado con el FHA ( $\vec{u} = \vec{k}$ ), la relación entre los vectores mencionados se puede derivar de (2.6):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_m - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{k} \times \vec{r}_m + \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}_m), \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_m + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{k} \times \vec{r}_m + \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}_m). \quad (\text{A.13})$$

Así pues, el vector del cuerpo virtual  $\vec{r}_v$  puede definirse explícitamente a partir de las coordenadas de la posición media  $\vec{r}_m = (x_m, y_m, z_m)^T$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}_v = \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2} &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{r}_m + \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)z_m\vec{k} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2)x_m \\ \cos(\phi/2)y_m \\ z_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Como muestra (A.14), la geometría del cuerpo virtual es similar a la del cuerpo real en la posición semirrotada, aunque «encogida» en torno al FHA

en proporción al factor  $\cos(\phi/2)$ . Esto crea una configuración singular cuando  $\phi = (2k - 1)\pi$  (para  $k \in \mathbb{N}$ ). En dicho caso el cuerpo virtual degenera en una serie de puntos alineados con el FHA; la matriz de inercias virtuales  $J_{vG}$  no es invertible, y el módulo de  $\vec{\Omega}$  es infinito.

En esta situación singular el método propuesto para resolver los desplazamientos finitos da soluciones numéricamente indeterminadas, aunque la solución algebraica existe y es finita para todos los parámetros salvo el módulo de  $\vec{\Omega}$ . El cálculo de  $\Delta\vec{R}_{vG}$  no se ve afectado por las singularidades de la rotación. En cuanto al FHA, dado que coincide con todos los puntos del cuerpo virtual, puede determinarse como la recta que mejor se ajusta a los mismos; en particular se puede apreciar que el límite de  $\overrightarrow{G_vH}$  en (4.24) cuando  $|\vec{\Omega}|$  tiende a infinito da como resultado un vector nulo. Asimismo, conocida la dirección  $\vec{u}$  del giro (que es la dirección de la línea formada por el cuerpo virtual), se pueden calcular los límites de las ecuaciones (4.27) y (4.29) que definen la matriz de rotación y el desplazamiento esférico de cualquier punto, respectivamente:

$$M_{\Omega=\infty} = I_3 + 2A^2(\vec{u}). \quad (\text{A.15})$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)_{\Omega=\infty} = 2\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}_1). \quad (\text{A.16})$$

Esta singularidad cobra importancia cuando el cuerpo bajo estudio puede girar  $180^\circ$  ó más desde su posición de referencia. La flexión del tronco en postura sedente tiene un rango de movimiento mucho más reducido, cualquiera que sea la posición de referencia escogida. Por lo tanto en este caso no es necesario establecer un control sobre las potenciales singularidades en el cálculo.

### A.2.2. Relación entre desplazamientos finitos e infinitesimales

En las secciones 4.2.1 y 4.2.2 se describen los métodos para calcular de forma independiente el torsor cinemático  $\{\vec{\omega}(t), \vec{v}_G(t)\}$  y los parámetros del desplazamiento entre dos posiciones dadas,  $\vec{\Omega}$  y  $\Delta\vec{R}_G$ . Pero evidentemente existe una relación matemática entre estas variables que puede aprovecharse si sólo uno de los métodos se puede aplicar adecuadamente, para obtener los otros parámetros por integración o derivación, según el caso. También se puede aprovechar, además, para aplicar el método de promediado funcional que se detalla en la sección A.4.



Por ejemplo, la medida directa de los desplazamientos finitos puede presentar problemas prácticos si las posiciones inicial y final observadas son muy distintas, y los marcadores vistos en cada una no son los mismos, en cuyo caso no se pueden aplicar las ecuaciones propuestas. Una solución para casos como éste es calcular el torsor cinemático en todos los instantes intermedios ( $\{\vec{\omega}(t), \vec{v}_G(t)\}$  para  $t \in [t_1, t_2]$ ) y obtener el desplazamiento finito por integración. El cálculo cinemático instantáneo sólo requiere un número suficiente de puntos comunes entre cada pareja de instantes adyacentes (por lo menos 3 no alineados, preferiblemente más), lo cual no entraña dificultad si se emplea un número alto de marcadores. Hay que tener en cuenta, eso sí, que el conjunto de marcadores vistos en una situación como ésta irá fluctuando, y por lo tanto el centroide  $G$  no será un punto fijo del cuerpo a lo largo del intervalo de integración. Por lo tanto  $\vec{v}_G(t)$  no se podrá integrar directamente; será necesario calcular en cada instante la velocidad asociada a un punto teórico del cuerpo, de forma que el término de traslación integrado estará referido a él.

Por otra parte, cuando el diseño experimental proporciona las coordenadas para todos los marcadores en todas las posiciones, el cálculo del torsor cinemático puede tener un alto coste computacional, especialmente a la hora de suavizar y calcular las velocidades de cada uno de los marcadores individuales (véase la sección A.1). Como en tal situación es posible calcular el desplazamiento finito entre cualesquiera dos posiciones del cuerpo, una alternativa más eficiente sería la siguiente: tomar la posición del cuerpo en primer instante como referencia ( $\vec{R}_{i1} = \vec{R}_i(t = 0)$ ), calcular los desplazamientos finitos respecto a él en todos los instantes ( $\vec{R}_{i2} = \vec{R}_i(\forall t)$ ), obteniendo así unas funciones temporales  $\vec{\Omega}(t)$ ,  $\Delta\vec{R}_G(t)$ , y aplicar el proceso de suavizado únicamente a este resultado, para obtener los torsesores  $\{\vec{\omega}(t), \vec{v}_G(t)\}$  por derivación.

En ambos casos hay un paso intermedio necesario, que es establecer la relación entre el torsor infinitesimal  $\{\vec{\omega}(t), \vec{v}_G(t)\}$  y las derivadas  $\vec{\dot{\Omega}}(t)$ ,  $\Delta\vec{\dot{R}}_G(t)$ . La relación entre los términos de traslación es trivial:

$$\vec{v}_G(t) = \Delta\vec{\dot{R}}_G(t). \quad (\text{A.17})$$

La relación entre  $\vec{\omega}(t)$  y  $\vec{\dot{\Omega}}(t)$ , sin embargo, no es tan obvia. En Page et al. (2009a) se da un método para calcular cada uno de esos vectores en función del otro, con una explicación basada en la representación de rotaciones infinitesimales. En resumen,  $\vec{\omega}(t)$  y  $\vec{\dot{\Omega}}(t)$  mantienen una relación directa de pro-

porcionalidad cuando  $\vec{\Omega}(t) = 0$ , es decir cuando la posición del cuerpo en el instante  $t$  coincide con la que se ha considerado como inicial:

$$\dot{\vec{\Omega}}(t)\Big|_{\Omega=0} = \frac{d(\tan(\phi/2)\vec{u})}{dt}\Big|_{\phi=0} = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dt} \vec{u}\Big|_{\phi=0} = \frac{\vec{\omega}(t)}{2}. \quad (\text{A.18})$$

Por lo tanto el cálculo de  $\vec{\omega}(t)$  no se basa directamente en la derivada de  $\vec{\Omega}(t)$ , sino la de otra rotación  $\vec{\Phi}_\tau(t)$  equivalente, pero definida para cada  $t = \tau$  de manera que  $\vec{\Phi}_\tau(\tau) = 0$ . Esta rotación viene a ser  $\vec{\Omega}(t)$  precedida de la rotación inversa en ese instante,  $\vec{\Omega}(\tau)$ , según (4.39):

$$\vec{\Phi}_\tau(t) = -\vec{\Omega}(\tau) \oplus \vec{\Omega}(t) = \frac{-\vec{\Omega}(\tau) + \vec{\Omega}(t) + \vec{\Omega}(\tau) \times \vec{\Omega}(t)}{1 + \vec{\Omega}(\tau) \cdot \vec{\Omega}(t)}. \quad (\text{A.19})$$

Derivando (A.19) en  $t = \tau$ , y dado que en ese instante se cumple la condición para la que se ha definido (A.18),

$$\vec{\omega}(t) = 2 \dot{\vec{\Phi}}_\tau(t)\Big|_{t=\tau} = \frac{2}{1 + \Omega(t)^2} \left( \dot{\vec{\Omega}}(t) + \vec{\Omega}(t) \times \dot{\vec{\Omega}}(t) \right). \quad (\text{A.20})$$

La ecuación (A.20) proporciona la definición de  $\vec{\omega}(t)$  en función de  $\vec{\Omega}(t)$  y su derivada. Por otra parte, si lo que se desea es calcular  $\vec{\Omega}(t)$  por integración a partir de  $\vec{\omega}(t)$ , esta ecuación se puede transformar para obtener una expresión explícita de  $\dot{\vec{\Omega}}(t)$ . De forma analítica:

$$\vec{\Omega}(t) \times (\vec{\Omega}(t) \times \vec{\omega}(t)) = 2 \frac{\vec{\Omega}(t) \times (\vec{\Omega}(t) \times \dot{\vec{\Omega}}(t)) - \vec{\Omega}(t)^2 (\vec{\Omega}(t) \times \dot{\vec{\Omega}}(t))}{1 + \Omega(t)^2}. \quad (\text{A.21})$$

Además, de (A.20) también se desprende:

$$\vec{\Omega}(t) \times \dot{\vec{\Omega}}(t) = \frac{1 + \vec{\Omega}(t)^2}{2} \vec{\omega}(t) - \dot{\vec{\Omega}}(t). \quad (\text{A.22})$$

Y sustituyendo este resultado sucesivamente en (A.21) finalmente se obtiene la definición explícita de  $\dot{\vec{\Omega}}(t)$ :

$$\dot{\vec{\Omega}}(t) = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\Omega}(t) + (\vec{\omega}(t) \cdot \vec{\Omega}(t)) \vec{\Omega}(t) \right). \quad (\text{A.23})$$

De este modo se puede calcular  $\vec{\Omega}(t)$  por integración en cualquier instante:

$$\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \left( \vec{\omega}(\tau) + \vec{\omega}(\tau) \times \vec{\Omega}(\tau) + (\vec{\omega}(\tau) \cdot \vec{\Omega}(\tau)) \vec{\Omega}(\tau) \right) d\tau. \quad (\text{A.24})$$

Nótese que (A.24) es una fórmula recursiva para el cálculo de  $\vec{\Omega}(t)$ , pues requiere conocer de antemano el valor de  $\vec{\Omega}(\tau)$  para  $\tau \in [t_1, t]$ . Si la integración se hace progresivamente a lo largo del intervalo, los valores para  $\tau < t$  podrán obtenerse de las integrales realizadas hasta el momento, pero también será necesario hacer una primera estimación de  $\vec{\Omega}(\tau = t)$ , que se irá ajustando iterativamente.

En el artículo más detallado sobre el método publicado por Page et al. (2009a) se mide experimentalmente la discrepancia entre los cálculos cinemáticos según si se hacen con los métodos directos (los expuestos en las secciones 4.2.1 y 4.2.2), o mediante los indirectos descritos en esta sección. El error en  $\vec{\omega}(t)$  es de 0,016 rad/s (un 0.5% de la velocidad angular media), y en  $\vec{\Omega}(t)$  equivale a una rotación de 0,05°. En ambos casos las magnitudes son del orden de la precisión del sistema de medida.

### A.2.3. Error de los métodos indirectos

En las secciones 4.2.5.3 y 4.2.5.4 se han proporcionado las fórmulas que definen el error en el tórsor cinemático diferencial y el de desplazamientos finitos, cuando se calculan mediante los métodos directos expuestos en 4.2.1 y 4.2.2. A continuación se presenta una demostración de que los métodos indirectos recién planteados dan lugar a los mismos errores de cálculo.

Asumiendo que los errores de las derivadas son proporcionalmente mayores que los de las medidas, como se ha detallado en A.1.4, el error  $\delta\vec{\omega}$  calculado por el método indirecto podrá considerarse primordialmente un efecto de  $\delta\dot{\vec{\Omega}}$  al derivar (A.20), es decir,

$$\delta\vec{\omega} = \frac{2}{1 + \Omega^2} \left( \delta\dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times \delta\dot{\vec{\Omega}} \right). \quad (\text{A.25})$$

Por otra parte, aplicando el principio de propagación de errores en las derivadas,

$$\delta\dot{\vec{\Omega}} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \Phi_1} \delta\dot{\Phi}_1 + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \Phi_2} \delta\dot{\Phi}_2, \quad (\text{A.26})$$

siendo  $\vec{\Phi}_1$  y  $\vec{\Phi}_2$  las rotaciones ficticias «añadidas» a la posición inicial y final, respectivamente, con el objetivo de cuantificar el error al calcular las rotaciones, tal como se ha desarrollado en la sección 4.2.5.4.

En el método indirecto para el cálculo de  $\vec{\omega}$  se utiliza siempre la misma posición inicial del cuerpo, por lo que  $\vec{\Phi}_1$  es constante y su derivada es nula (mientras que  $\vec{\Phi}_2$  es un concepto equivalente a  $\vec{\Phi}_\tau(t)$ ). Así pues, el primer sumando de (A.26) no interviene, y (A.25) da lugar a

$$\delta\vec{\omega} = \frac{2}{1 + \Omega^2} \left( \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{\Phi}_2} \delta\dot{\vec{\Phi}}_2 + \vec{\Omega} \times \left( \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{\Phi}_2} \delta\dot{\vec{\Phi}}_2 \right) \right). \quad (\text{A.27})$$

La derivada parcial que aparece en (A.27) se puede redefinir del siguiente modo a partir de la ecuación (4.79) (usando cualquier vector  $\vec{\xi}$ ):

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{\Phi}_2} \vec{\xi} = \vec{\xi} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{\xi})\vec{\Omega} - \vec{\Omega} \times \vec{\xi}. \quad (\text{A.28})$$

Y desarrollando (A.27) a partir de este resultado,

$$\begin{aligned} \delta\vec{\omega} &= \frac{2}{1 + \Omega^2} \left( \delta\dot{\vec{\Phi}}_2 + (\vec{\Omega} \cdot \delta\dot{\vec{\Phi}}_2)\vec{\Omega} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \delta\dot{\vec{\Phi}}_2) \right) \\ &= \frac{2}{1 + \Omega^2} \left( \delta\dot{\vec{\Phi}}_2 + \Omega^2 \delta\dot{\vec{\Phi}}_2 \right) = 2\delta\dot{\vec{\Phi}}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Por otra parte, la fórmula (4.77) sirve para estimar  $\delta\vec{\Phi}_2$  en función de la geometría del cuerpo en su posición final y de los errores  $\delta\vec{r}_{i2}$ . Si se deriva dicha ecuación, sustituyendo  $\vec{r}_{i2}$  por  $\vec{r}_i(t)$ ,  $J_{G2}^{-1}$  por  $J_G(t)^{-1}$ , y  $\delta\vec{r}_{i2}$  por  $\delta\vec{v}_i(t)$  en virtud de (4.49), se llega finalmente a

$$\delta\dot{\vec{\Phi}}_2 = \frac{1}{2} J_G(t)^{-1} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i(t) \times \delta\vec{v}_i. \quad (\text{A.30})$$

Y dicha expresión es, multiplicada por el factor  $1/2$ , exactamente igual a (4.61), que define el error  $\delta\vec{\omega}$  utilizando el método directo. Combinando este resultado con (A.29) queda claramente demostrado que ambos métodos no sólo dan lugar al mismo resultado, sino que conllevan el mismo error de cálculo.

En definitiva, se constata que el orden empleado para el cálculo de la velocidad angular (suavizado+cálculo cinemático diferencial, o cálculo de desplazamientos finitos+suavizado) no influye en el modo en que se propagan

los errores de medida. Análogo proceso lleva a concluir que lo mismo ocurre con el cálculo de  $\tilde{\Omega}(t)$ , sea de forma directa o indirecta, integrando su derivada. Las divergencias que se pueden encontrar serán debidas, principalmente, a diferencias en el proceso de suavizado que den lugar a distintos errores de las derivadas. No obstante, si se sigue un mismo criterio de suavizado óptimo se llegará a soluciones semejantes, como han demostrado experimentalmente Page et al. (2009a)

### A.3. Propagación de errores aleatorios

#### A.3.1. Definiciones generales

En la sección 4.2.5.3 se han calculado las matrices de covarianza asociadas al error aleatorio en el torsor cinemático  $(\Sigma_{vG}, \Sigma_{\omega})$ , en base a unos principios e hipótesis sobre la naturaleza estadística de los errores de medida, que han de ser confirmados. En este apéndice se desarrollan los detalles teóricos que dan pie a las afirmaciones realizadas en esa sección.

Partiendo de los conceptos más básicos, por definición los errores aleatorios de medida son variables cuyo valor exacto es indeterminado, pero que se suponen distribuidos de forma controlada alrededor de unos valores medios o esperanza estadística, representada por el operador lineal  $E$ :

$$\mu_x \equiv \bar{x} = E(x). \quad (\text{A.31})$$

En el caso de ser errores insesgados, este valor medio es nulo, y si su distribución es normal, cada variable unidimensional puede describirse simplemente a través de su varianza:

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(x) = E((x - \bar{x})^2) = E(x^2). \quad (\text{A.32})$$

Cuando se realiza un análisis con múltiples variables, como pueden ser las tres dimensiones de un vector, además de la varianza de cada variable entra en juego la covarianza entre cada par de ellas. En el caso de variables  $x$  e  $y$  insesgadas:

$$\sigma_{xy}^2 = \text{Cov}(x, y) = E((x - \bar{x})(y - \bar{y})) = E(xy). \quad (\text{A.33})$$

La covarianza indica la medida en la que los valores esperados de una variable están condicionados por el que adopte la otra; si las variables son independientes la covarianza entre ambas es nula. También puede observarse

que la definición de varianza en (A.32) es equivalente a la covarianza de una variable cruzada consigo misma, por lo cual se puede utilizar equivalentemente  $\sigma_{xx}^2 \equiv \sigma_x^2$ .

Para un conjunto  $n$ -dimensional de variables su dispersión se describe matricialmente a través de la matriz de covarianzas  $\Sigma$  (de dimensión  $n \times n$ ), como se ha hecho en la descripción de los métodos. Las matrices de covarianzas tienen una serie de propiedades de interés. Son matrices simétricas, y sirven para calcular la varianza de cualquier combinación lineal de las variables representadas, a través de la forma cuadrática asociada a la matriz. Por ejemplo, si  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas del vector  $(x, y)^T$ , para la operación  $z = ax + by$  (siendo  $a, b$  coeficientes constantes) la varianza de  $z$  será

$$\sigma_z^2 = \text{Var}(ax + by) = E((ax)^2 + (by)^2 + 2abxy). \quad (\text{A.34})$$

Y siendo la esperanza estadística un operador lineal,

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= a^2 E(x^2) + b^2 E(y^2) + 2ab E(xy) \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_{yy}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Otra propiedad interesante es que, si las variables representadas por  $\Sigma$  forman un vector de un espacio  $n$ -dimensional determinado, la varianza total del vector es la traza de  $\Sigma$  (la suma de sus autovalores, que es igual a la suma de los elementos de la diagonal). Este valor no depende de la base en la que estén expresados los vectores, y equivale a la esperanza estadística de la norma al cuadrado del vector. Por ejemplo para el vector de dos dimensiones  $(x, y)$ :

$$\text{tr}(\Sigma) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = E(x^2) + E(y^2) = E(x^2 + y^2) = E(\|(x, y)\|^2). \quad (\text{A.36})$$

Hay otras propiedades de las varianzas en los análisis multivariantes, que pueden encontrarse en Härdle & Simar (2007). Entre ellas son de especial interés las que llevan al cálculo de nuevas matrices de covarianzas, asociadas al resultado de operaciones lineales sobre vectores aleatorios. Esto es una extensión del cálculo sencillo con escalares que se ha mostrado en (A.34) y (A.35). En lugar de la varianza  $\sigma_{xx}^2$  asociada a un escalar aleatorio se utiliza la matriz  $\Sigma_x$  correspondiente al vector  $\vec{x}$ , y en vez de la covarianza  $\sigma_{xy}^2$  entre dos escalares se utiliza la matriz de covarianzas entre los dos vectores:

$$\Sigma_{x,y} = Cov(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} Cov(x_1, y_1) & \dots & Cov(x_1, y_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(x_n, y_1) & \dots & Cov(x_n, y_m) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Se puede apreciar que la matriz de covarianzas que describe la variabilidad de un vector es un caso particular de (A.37), donde el vector se cruza consigo mismo:

$$\Sigma_{x,x} = Cov(\vec{x}, \vec{x}) = Var(\vec{x}) = \Sigma_x. \quad (\text{A.38})$$

Sin embargo, ciertas propiedades de la matriz de covarianzas de un vector no se mantienen cuando se cruzan dos vectores diferentes:  $\Sigma_{x,y}$  no es en general simétrica; de hecho no es necesariamente cuadrada, y el orden en el que se especifican las variables es relevante. En particular se cumple que

$$\Sigma_{x,y} = \Sigma_{y,x}^T. \quad (\text{A.39})$$

Las operaciones lineales sobre vectores se pueden expresar a través de productos matriciales. La siguiente fórmula sintetiza cómo estas operaciones se reflejan en la transformación de las matrices de covarianzas, utilizando los vectores aleatorios  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  más las matrices  $A$ ,  $B$ :

$$Var(A\vec{x} + B\vec{y}) = A\Sigma_x A^T + B\Sigma_y B^T + A\Sigma_{x,y} B^T + (A\Sigma_{x,y} B^T)^T. \quad (\text{A.40})$$

La ecuación (A.40) se puede expresar más compactamente con matrices en bloque, para ver más claramente la analogía con el caso escalar representado en (A.35):

$$Var\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_x & \Sigma_{x,y} \\ \Sigma_{y,x} & \Sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

De estas fórmulas se deriva la expresión más simple (4.62), aplicable a los casos en los que los distintos vectores a operar son independientes.

### A.3.2. Naturaleza del campo de velocidades aleatorio

Para definir el error del torsor  $\{\delta\vec{\omega}, \delta\vec{v}_G\}$  en la sección 4.2.5.3 se ha partido de la hipótesis de que los errores de velocidad  $\delta\vec{v}_i$ , a partir de los cuales se

realiza el cálculo, son independientes entre marcadores, por lo que las consideraciones anteriores sobre las matrices de covarianzas cruzadas son prescindibles en ese caso.

Sin embargo, ese hecho no implica necesariamente que los vectores resultantes  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$  sean a su vez independientes. En general es posible que la matriz de covarianzas entre ellos tenga valores no nulos:

$$\Sigma_{\omega v} = Cov(\delta\vec{\omega}, \delta\vec{v}_G) \neq \mathbf{0}_3. \quad (\text{A.42})$$

El valor de  $\Sigma_{\omega v}$  determinará la naturaleza del campo de velocidades generado por el error. Esta influencia se puede apreciar tomando cualquier punto  $P$  distante del centroide  $G$  según el vector  $\vec{r}_P$ . El error de velocidad en  $P$  generado por  $\{\delta\vec{\omega}, \delta\vec{v}_G\}$  será un vector aleatorio cuya matriz de covarianzas se calcula aplicando (A.40):

$$\begin{aligned} \Sigma_{vP} &= Var(\delta\vec{v}_P) = Var(\delta\vec{v}_G - \vec{r}_P \times \delta\vec{\omega}) \\ &= \Sigma_{vG} + A_P \Sigma_{\omega} A_P^T - A_P \Sigma_{\omega v} - (A_P \Sigma_{\omega v})^T, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

siendo  $A_P$  la matriz antisimétrica asociada a este vector.

Como se puede observar, las covarianzas del error de velocidad en  $P$  ( $\Sigma_{vP}$ ) difieren de las del error en  $G$  ( $\Sigma_{vG}$ ) según una serie de términos que dependen de  $\Sigma_{\omega}$  y  $\Sigma_{\omega v}$ , modulados por la matriz  $A_P$ . La magnitud del error resultante puede cuantificarse por la traza de la matriz de covarianzas,  $\text{tr}(\Sigma_{vP})$ . Si se toma un sistema de referencia alineado con los ejes principales de  $\Sigma_{\omega}$ :

$$\Sigma_{\omega} = \text{diag}(\sigma_{\omega_x}^2, \sigma_{\omega_y}^2, \sigma_{\omega_z}^2), \quad (\text{A.44})$$

y desarrollando la ecuación (A.43) con  $\vec{r}_P = (x, y, z)^T$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Sigma_{vP}) &= \text{tr}(\Sigma_{vG}) \\ &+ x^2(\sigma_{\omega_y}^2 + \sigma_{\omega_z}^2) + y^2(\sigma_{\omega_x}^2 + \sigma_{\omega_z}^2) + z^2(\sigma_{\omega_x}^2 + \sigma_{\omega_y}^2) \\ &+ 2x(\text{cov}(\delta\omega_z, \delta v_y) - \text{cov}(\delta\omega_y, \delta v_z)) \\ &+ 2y(\text{cov}(\delta\omega_x, \delta v_z) - \text{cov}(\delta\omega_z, \delta v_x)) \\ &+ 2z(\text{cov}(\delta\omega_y, \delta v_x) - \text{cov}(\delta\omega_x, \delta v_y)). \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Se puede observar que  $\text{tr}(\Sigma_{vP})$  toma distintos valores en función de  $\vec{r}_P$ , es decir que la variabilidad de  $\delta\vec{v}_P$  depende del punto escogido. El valor mínimo



se dará para el vector  $\vec{r}_P$  con el cual  $\vec{\nabla}\text{tr}(\Sigma_{vp}) = 0$ , que derivando la ecuación anterior resulta ser

$$\vec{r}_P^{min} = \begin{pmatrix} \frac{cov(\delta\omega_y, \delta v_z) - cov(\delta\omega_z, \delta v_y)}{\sigma_{\omega_y}^2 + \sigma_{\omega_z}^2} \\ \frac{cov(\delta\omega_z, \delta v_x) - cov(\delta\omega_x, \delta v_z)}{\sigma_{\omega_x}^2 + \sigma_{\omega_z}^2} \\ \frac{cov(\delta\omega_x, \delta v_y) - cov(\delta\omega_x, \delta v_y)}{\sigma_{\omega_x}^2 + \sigma_{\omega_y}^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.46})$$

Así pues, se comprueba que las covarianzas entre  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$  influyen sobre el lugar en el que se minimiza el error aleatorio de velocidades. Concretamente, cuando estas covarianzas se minimizan (cuando  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$  son independientes) el lugar de mínimo error es el centroide ( $\vec{r}_P^{min} = 0$ ). Ésta es la situación que se ha planteado en diversos puntos de la metodología, en particular al estimar los errores en la ubicación del EIR. Veamos cuáles son las condiciones para las que esta hipótesis se cumple.

Si  $\delta\vec{v}_G$  y  $\delta\vec{\omega}$  se expresan en función de  $\delta\vec{v}_i$  a través de las fórmulas (4.57), (4.61), respectivamente, y el producto vectorial  $\vec{r}_i \times \delta\vec{v}_i$  de la segunda ecuación se representa matricialmente como  $A_{ri}\delta\vec{v}_i$ , la matriz de covarianzas entre  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$  será

$$\begin{aligned} \Sigma_{\omega v} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov \left( m_i J_G^{-1} A_{ri} \delta\vec{v}_i, \frac{m_j}{m} \delta\vec{v}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{m} J_G^{-1} A_{ri} Cov(\delta\vec{v}_i, \delta\vec{v}_j). \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Pero considerando la independencia entre los errores de distintos marcadores y la definición de (A.38):

$$\Sigma_{\omega v} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{m} J_G^{-1} A_{ri} \Sigma_{vi}. \quad (\text{A.48})$$

De (A.48) se desprende que si el error de velocidad es homogéneo para todos los marcadores y se selecciona una misma masa  $m_0$  para ellos, o de forma más genérica, si  $m_i^2 \Sigma_{vi}$  es igual a un mismo valor  $m_0^2 \Sigma_{v0}$  para todos los marcadores,

$$\Sigma_{\omega v} = \frac{m_0^2 \Sigma_{v0}}{m} J_G^{-1} \sum_{i=1}^n A_{ri} = \mathbf{0}_3. \quad (\text{A.49})$$

En definitiva, estos cálculos verifican que cuando  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$  son errores independientes se cumple que el error mínimo de velocidad se encuentra en el centroide de los marcadores, y esta condición se da siempre que los errores entre los marcadores sean independientes (hipótesis generalmente asumible), y además su dispersión sea semejante o se compense con las masas asignadas a cada marcador.

### A.3.3. Suma de vectores aleatorios

En los Experimentos 1, 2 y 3 se hicieron estimaciones del error aleatorio esperado para los distintos parámetros cinemáticos. El error en la ubicación del EIR dependía de dos términos, cada uno de los cuales tenía un carácter anisótropo distinto.

El primer término  $\delta\vec{GH}_1$  era proporcional al producto vectorial  $\vec{\omega} \times \delta\vec{v}_G$ . La velocidad angular  $\vec{\omega}$  tenía una dirección fija y el error  $\delta\vec{v}_G$  era la media de los errores de velocidad de los marcadores, cuya matriz de covarianzas era constante. Por lo tanto se esperaba que este término de error mantuviese una distribución espacial igualmente constante, es decir,

$$Var(\delta\vec{GH}_1(t)) = \sigma_{GH1}^2(t)\mathbf{S}, \quad (\text{A.50})$$

donde  $\mathbf{S}$  sería una matriz constante.

Por el contrario  $\delta\vec{GH}_2$  era proporcional al producto escalar  $\vec{\omega} \cdot \delta\vec{\omega}$  y al propio vector  $\vec{GH}$ , siendo su dirección paralela a este último. Como este vector podía cambiar a lo largo del movimiento, la matriz de covarianzas asociada también variaría en algo más que su magnitud:

$$Var(\delta\vec{GH}_2(t)) = \sigma_{GH2}^2(t)\mathbf{T}(t), \quad (\text{A.51})$$

donde  $\mathbf{T}(t)$  es el tensor de  $\vec{GH}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ :

$$\mathbf{T}(t) = \vec{GH}(t) \otimes \vec{GH}(t)^T = \begin{pmatrix} x(t)^2 & x(t)y(t) & x(t)z(t) \\ x(t)y(t) & y(t)^2 & y(t)z(t) \\ x(t)z(t) & y(t)z(t) & z(t)^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

Ahora bien, la medida experimental que se tomaba del error en el EIR era la suma de estos dos términos, no cada uno de ellos de forma individual. Para evaluar la magnitud de su módulo, por lo tanto, era necesario conocer cuál era el tamaño esperado de esa suma.

Dados dos vectores  $\vec{\xi}$  y  $\vec{\zeta}$  dispuestos en un ángulo  $\eta$  entre sí, al sumarlos se obtiene un vector cuyo módulo cumple la siguiente ley:

$$|\vec{\xi} + \vec{\zeta}|^2 = |\vec{\xi}|^2 + |\vec{\zeta}|^2 - 2|\vec{\xi}| \cdot |\vec{\zeta}| \cos(\eta). \quad (\text{A.53})$$

Si estos vectores son aleatorios e independientes entre sí, el ángulo  $\eta$  debería ser una variable aleatoria uniforme en  $[0, \pi]$ , y su coseno otra variable aleatoria, igualmente independiente, con media nula. De este modo, aunque no se trate de una composición lineal de variables, al calcular la esperanza estadística de (A.53) puede obviarse el tercer sumando. Y si las matrices de covarianzas de  $\vec{\xi}$  y  $\vec{\zeta}$  son conocidas ( $\Sigma_{\xi}$  y  $\Sigma_{\zeta}$ , respectivamente), aplicando (A.36) se obtiene que

$$E\left(|\vec{\xi} + \vec{\zeta}|^2\right) = \text{tr}(\Sigma_{\xi}) + \text{tr}(\Sigma_{\zeta}). \quad (\text{A.54})$$

Este principio se puede aplicar al módulo del error aleatorio en el EIR. Aunque uno de sus dos términos tenía una dirección definida, la orientación del otro era aleatoria e independiente. Por lo tanto, una vez estaban estimadas las matrices de covarianzas de  $\delta\vec{GH}_1$  y  $\delta\vec{GH}_2$ , sumando sus trazas se definía el valor esperado del módulo de su suma (el error total) al cuadrado.

Este razonamiento también sirve como demostración alternativa a la afirmación de la sección A.3.2: que si  $\delta\vec{\omega}$  y  $\delta\vec{v}_G$  son aleatorios e independientes, el error  $\delta\vec{v}_P$  se minimiza en el entorno de  $G$ . En efecto, al no haber dependencia entre el tamaño ni la orientación de ambos vectores, aplicando (A.54) la traza de  $\Sigma_{vP}$  será

$$\text{tr}(\Sigma_{vP}) = \text{tr}(\Sigma_{vG}) + \text{tr}(A_P \Sigma_{\omega} A_P^T). \quad (\text{A.55})$$

Y como ambos sumandos de esta ecuación han de ser positivos, su valor mínimo se alcanza cuando se anula el segundo término, es decir cuando la distancia entre  $G$  y  $P$ , y por lo tanto la matriz  $A_P$ , son nulas.

## A.4. Ajuste de ciclos

### A.4.1. Ajuste por regresión local

En la sección 4.2.4 se han descrito los pasos generales para un proceso de promediado funcional, en el que dada una variable  $q(\theta)$  registrada en los

puntos  $\theta_i$  de distintos ciclos, se calcula la función promedio  $\bar{q}(\theta)$  que mejor representa el conjunto de observaciones.

Una técnica de ajuste es la utilizada en los experimentos publicados por Page et al. (2008b,a, 2009b,c, 2010). Este método aplica el algoritmo de regresión polinómica local que se ha empleado para el suavizado y diferenciación de variables (véase la sección A.1 de este apéndice), utilizando  $\theta$  como variable independiente y cambiando el criterio de selección del ancho de banda. En este caso el objetivo es procurar que la primera derivada resultante se ajuste de forma óptima a las derivadas de la función observada. Al partir de  $\theta$  como variable independiente, la derivada de  $q(\theta)$  que proporcione la regresión local estará calculada en ese dominio geométrico, no en el de la variable temporal  $t$ ; pero ambas derivadas están relacionadas del siguiente modo:

$$\frac{dq(\theta)}{dt} = \frac{d\bar{q}(\theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}. \quad (\text{A.56})$$

El criterio utilizado para definir el ancho de banda  $h$  óptimo en este caso es, por lo tanto, buscar el mejor ajuste en las derivadas, es decir minimizar la función  $D(h)$  definida como sigue:

$$D(h) = \sum_{\theta_i} \left( \frac{dq(\theta_i)}{dt} - \frac{d\bar{q}(\theta_i, h)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta(\theta_i)}{dt} \right)^2, \quad (\text{A.57})$$

donde la derivada geométrica se expresa en función de  $h$ , porque es la función obtenida por el proceso de regresión local, y es su valor el que cambia en función del ancho seleccionado.

En el procedimiento propuesto las funciones a promediar son  $\vec{\Omega}(\theta)$  y  $\vec{R}_G(\theta)$ . La derivada de la segunda, a utilizar en la condición (A.57), es la velocidad  $\vec{v}_G(\theta)$ . Para el parámetro de rotación, sin embargo, la variable diferencial que normalmente se tendrá es  $\vec{\omega}(\theta)$ , no  $\vec{\dot{\Omega}}(\theta)$ . Para salvar este inconveniente se pueden usar las fórmulas presentadas en la sección A.2.2 de este apéndice, que establecen las relaciones entre dichos parámetros.

Las condiciones matemáticas que rigen este procedimiento, expresadas en (A.2) y (A.57), aseguran que el resultado será la función de 1 gdlf que mejor represente las variables observadas y sus derivadas, si se cumplen las hipótesis estadísticas en las que se basa la regresión polinómica local. Además tiene la ventaja procedimental de aprovechar unos algoritmos de cálculo y optimización ya empleados en otras partes del análisis.

### A.4.2. Ajuste por interpolación y promediado

Si se violan las hipótesis de partida de la regresión local el método anterior puede proporcionar resultados incorrectos, por lo que conviene utilizar otro procedimiento de promediado funcional. Una de las hipótesis más vulnerables es la naturaleza aleatoria e incorrelacionada del error. Los valores  $q(\theta)$  en el entorno de cada  $\theta_i$  serán los de  $q(t)$  en los distintos ciclos cuando  $\theta(t) \approx \theta_i$ . Y si  $q(t)$  adopta valores suficientemente dispares cada vez que  $\theta(t)$  pasa por  $\theta_i$ , al tratarse de una función continua, las distribuciones de  $q(\theta)$  se repetirán de forma sistemática, perdiéndose el carácter aleatorio de los residuos.

Además, para cada  $\theta_i$  la regresión local da un peso a los distintos valores de  $q(\theta)$  según la distancia  $(\theta - \theta_i)$ . Es decir, que el punto con mayor peso es el de la trayectoria en la que se ha dado la observación  $\theta_i$ , y luego progresivamente el de las otras trayectorias, según la «distancia» de  $\theta_i$  a la que se hayan muestreado. Si las velocidades de cada ciclo son suficientemente homogéneas, todas las trayectorias entrarán con pesos similares en el proceso de cálculo, pero nunca iguales. La consecuencia es que la señal resultante puede presentar un «rizado», pues para cada punto los distintos ciclos «participan» con un peso cambiante.

Una solución alternativa que evade estas limitaciones consiste en segregar  $q(\theta)$  en los distintos ciclos o semiciclos, homogeneizar la base de  $\theta$  para todos ellos y realizar un promediado aritmético de la variable y su derivada en el dominio geométrico. En este procedimiento se tiene en cuenta que el conjunto de observaciones  $q(\theta_i)$  procede de una familia de funciones  $q(\theta, c)$  para  $c = 1, 2, \dots, n_c$ , definidas en el intervalo  $\Theta$ , y se trabaja sobre sus valores en cualquier punto  $\theta \in \Theta$ . Las funciones objetivo a minimizar, para que  $\bar{q}(\theta)$  y su derivada se ajusten de forma óptima a las observaciones, son

$$\Psi_1(\theta) = \sum_{c=1}^{n_c} (q(\theta, c) - \bar{q}(\theta))^2. \quad (\text{A.58})$$

$$\Psi_2(\theta) = \sum_{c=1}^{n_c} \left( \frac{dq(\theta, c)}{d\theta} - \frac{d\bar{q}(\theta)}{d\theta} \right)^2. \quad (\text{A.59})$$

Las soluciones a (A.58) y (A.59) se consiguen de forma sencilla, promediando los distintos ciclos:

$$\bar{q}(\theta) = \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} q(\theta, c). \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{d\bar{q}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} \frac{dq(\theta, c)}{d\theta}. \quad (\text{A.61})$$

Ahora bien, el uso de este método implica disponer de los valores de  $q(\theta, c)$  y su derivada geométrica para cualquier valor de  $\theta$  y  $c$ . A priori sólo se tienen los valores  $q(\theta_i)$ , donde cada  $\theta_i$  pertenece a un semiciclo distinto, y los de la derivada temporal  $\frac{dq}{dt}$  en dichos puntos. Pero aplicando técnicas de análisis funcional es posible obtener los parámetros necesarios, ya que se conocen las relaciones matemáticas que los gobiernan. Para ello es necesario modificar algunos pasos del procedimiento de análisis:

1. En el proceso de suavizado en el que se definen  $\theta(t)$ ,  $q(t)$  y sus derivadas temporales conviene llegar a un orden de derivación mayor que el de los resultados del análisis. Como se ha comentado en la sección A.1 de este apéndice, para el cálculo de velocidades (derivadas primeras), se han realizado suavizados con polinomios de orden cúbico. Para obtener derivadas de mayor grado con precisión conviene utilizar polinomios de orden quinto.
2. Se han de definir de los límites inferior y superior de  $\theta$  para los distintos semiciclos ( $\theta_{inf}(c)$  y  $\theta_{sup}(c)$ ), respectivamente, véase la figura A.3). Estos límites vienen determinados por la primera derivada temporal de  $\theta(t)$ : los extremos de cada semiciclo son aquellos puntos en los que  $\theta(t)$  cambia de sentido, y por lo tanto  $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|$  alcanza valores mínimos. A continuación se define el dominio geométrico  $\Theta$  en el que quedará determinada la familia de funciones  $q(\theta, c)$ :

$$\Theta = \left[ \text{máx}(\theta_{inf}(c)), \text{mín}(\theta_{sup}(c)) \right]. \quad (\text{A.62})$$

3. Antes de proceder a la segmentación por semiciclos y al promediado se han de calcular las derivadas en el dominio geométrico, para todos los casos observados en los que  $\theta \in \Theta$ . Tal como se han definido los límites de ese dominio, para todos los casos contenidos en él  $\frac{d\theta}{dt}$  tiene un valor no despreciable, por lo que su inversa  $\frac{dt}{d\theta}$  tendrá un valor finito. Por lo tanto será posible definir cualquier derivada  $\frac{d^n q}{d\theta^n}$ , si se conoce  $\frac{d^k q}{dt^k}$  y  $\frac{d^k \theta}{dt^k}$  para  $k \leq n$  (véase el siguiente apartado). Para la aplicación de este método en el presente trabajo se han calculado las tres primeras derivadas geométricas ( $q^{(k)}$  equivale en las siguientes fórmulas a  $\frac{d^k q}{dt^k}$ ):

$$\frac{dq(t)}{d\theta} = \frac{q^{(1)}}{\theta^{(1)}}. \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{d^2q(t)}{d\theta^2} = \frac{q^{(2)}}{(\theta^{(1)})^2} - \frac{q^{(1)}\theta^{(2)}}{(\theta^{(1)})^3}. \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{d^3q(t)}{d\theta^3} = \frac{q^{(3)}}{(\theta^{(1)})^3} - 3\frac{q^{(2)}\theta^{(2)}}{(\theta^{(1)})^4} - \frac{q^{(1)}\theta^{(3)}}{(\theta^{(1)})^4} + 3\frac{q^{(1)}(\theta^{(2)})^2}{(\theta^{(1)})^5}. \quad (\text{A.65})$$

4. Al realizar el cambio de dominio de  $q(t)$  y sus derivadas, cada observación se asigna sólo al semiciclo que corresponda. Debido a esto, el subconjunto de puntos  $\theta_i$  en el que  $q(\theta, c)$  y sus derivadas se conocen inicialmente será distinto para cada semiciclo. Estos datos se utilizan para calcular, mediante series de Taylor, los valores de las funciones y las derivadas en una base de puntos  $\theta_j \in \Theta$  común a todos los ciclos. Por ejemplo, si para el ciclo  $c_o$  se tienen observaciones en los puntos  $\theta_i$  y  $\theta_{i+1}$ , se puede estimar el valor de  $q(\theta, c_o)$  en cualquier punto  $\theta_j$  intermedio del siguiente modo:

$$\begin{aligned} q(\theta_j, c_o) \approx & \frac{1}{2} \left( q(\theta_i, c_o) + q(\theta_{i+1}, c_o) + \frac{dq(\theta_i, c_o)}{d\theta} \delta\theta_- - \frac{dq(\theta_i, c_o)}{d\theta} \delta\theta_+ \right) \\ & + \frac{1}{2!2} \left( \frac{dq^2(\theta_i, c_o)}{d\theta^2} \delta\theta_-^2 + \frac{dq^2(\theta_i, c_o)}{d\theta^2} \delta\theta_+^2 \right) \\ & + \frac{1}{3!2} \left( \frac{dq^3(\theta_i, c_o)}{d\theta^3} \delta\theta_-^3 - \frac{dq^3(\theta_i, c_o)}{d\theta^3} \delta\theta_+^3 \right), \quad (\text{A.66}) \end{aligned}$$

siendo  $\delta\theta_- = (\theta_j - \theta_i)$  y  $\delta\theta_+ = (\theta_{i+1} - \theta_j)$ . La figura A.4 muestra un ejemplo de este procedimiento.

Tras estos pasos se tiene toda la información necesaria sobre las funciones para calcular los promedios (A.60) y (A.61) en cualquier punto de  $\Theta$ . Esta técnica de promediado presenta algunos inconvenientes, como la necesidad de calcular derivadas de orden superior a las que se reflejan en los resultados, y la imposibilidad de obtener datos en puntos más allá del ciclo más corto (en los extremos de dicho ciclo,  $\frac{dt}{d\theta}$  diverge y no se puede realizar el cálculo).

No obstante, también cuenta con una serie de ventajas frente al ajuste por regresión local, aparte de las limitaciones de éste cuando se violan las hipótesis de aleatoriedad e incorrelación de los errores. Todos los cálculos de

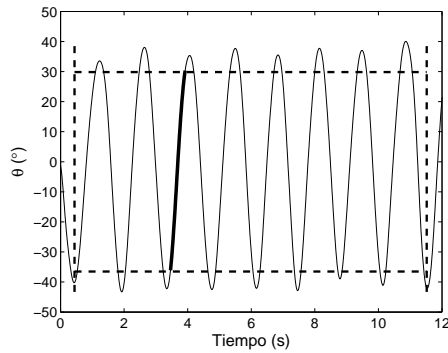


Figura A.3: Delimitación de semiciclos. Las líneas discontinuas verticales marcan el inicio y el final del primer y último ciclo completo. Las líneas discontinuas horizontales marcan los límites definidos para el dominio  $\Theta$ . En trazo más grueso está marcado uno de los semiciclos, limitado por estos parámetros.

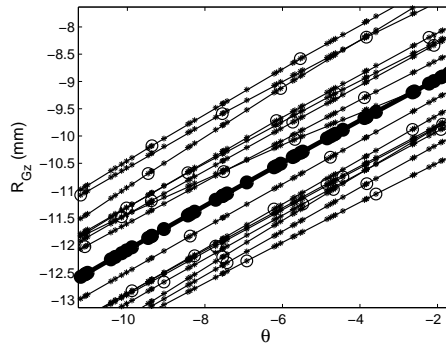


Figura A.4: Ejemplo de interpolación y promediado geométrico de una variable (coordenada Z del centroide). Las líneas negras representan tramos de los ciclos medidos. Los puntos registrados (círculos vacíos) se corresponden con valores distintos de la variable de par ( $\theta$ ) en cada ciclo. La variable se ha recalculado por interpolación, para obtener medidas de todos los ciclos en los mismos valores de  $\theta$  (asteriscos). La línea gruesa con círculos rellenos representa el promedio de todos los ciclos.



derivación, interpolación y promediado son explícitos y no requieren ningún mecanismo de optimización. Además, aunque la regresión admite puntos no cubiertos por el ciclo más corto, los ajustes locales presentan «efectos de borde» que reducen la validez de la información en los extremos de los ciclos.

#### A.4.2.1. Error en la interpolación

Una desventaja potencial del método de ajuste por interpolación y promediado es que el conjunto de datos que se promedian es distinto del medido; sus valores se calculan a partir de las derivadas geométricas, que podrían incorporar errores diferentes a los de medida, y esto podría afectar a la propagación de errores que se ha examinado en la sección 4.2.5. Sin embargo, en la práctica el efecto de las derivadas geométricas sobre los errores sólo llega a ser relevante cuando el movimiento se ralentiza y  $\frac{d\theta}{dt}$  tiende a cero, como se comprueba a continuación.

Partamos de la forma inversa de la fórmula de Faà di Bruno, para componer derivadas de cualquier orden (Pirsic, 2007):

$$\frac{d^n g(f(x))}{df(x)^n} = \sum_{j=0}^n \frac{d^j g(f(x))}{dx^j} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \frac{df(x)}{dx}^{-(n+k)} R_{n,j,k}(x), \quad (\text{A.67})$$

donde las funciones  $R_{n,j,k}(x)$  son nulas para las siguientes combinaciones de índices:

- $j = 0$ , salvo cuando  $j = n = k = 0$ ,
- $k = 0$ , salvo cuando  $j = n$ ,

y en cualquier otro caso  $R_{n,j,k}(x)$  es la siguiente suma de términos:

$$R_{n,j,k}(x) = \sum_{b_1, \dots, b_k} \frac{1}{k!} \binom{n+k-1}{j-1, b_1, \dots, b_k} \frac{d^{b_1} f(x)}{dx^{b_1}} \dots \frac{d^{b_k} f(x)}{dx^{b_k}}, \quad (\text{A.68})$$

donde  $b_1, \dots, b_k$  son cualquier combinación  $k$  de números enteros mayores o iguales que 2, que cumplan la siguiente condición:

$$\sum_{h=1}^k b_h = n + k - j, \quad (\text{A.69})$$

En el caso que estamos estudiando,  $x$  se corresponde con la variable temporal  $t$ ,  $f(x)$  es  $\theta(t)$ , y la función  $g$  se corresponde con la variable  $q$ . Utilizando esta nomenclatura, la fórmula (A.67) se puede redefinir convenientemente del siguiente modo, donde  $q^{(n)}(t)$  y  $\theta^{(n)}(t)$  expresan la derivada  $n$ -ésima de  $q$  o  $\theta$  en función de  $t$ , y se obvia el caso trivial en el que  $n = 0$ :

$$\frac{d^n q(t)}{d\theta^n} = \frac{q^{(n)}(t)}{(\theta^{(1)}(t))^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q^{(j)}(t)}{(\theta^{(1)}(t))^n} \sum_{k=1}^{n-j} S_{n,j,k}(t), \quad (\text{A.70})$$

donde  $S_{n,j,k}(t)$  se define de forma análoga a  $R_{n,j,k}(x)$ :

$$S_{n,j,k}(t) = \sum_{b_1, \dots, b_k} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+k-1}{j-1, b_1, \dots, b_k} \prod_{h=1}^k \frac{\theta^{(b_h)}(t)}{(\theta^{(1)}(t))}. \quad (\text{A.71})$$

A partir de estas ecuaciones se puede evaluar el efecto que tendría cualquier error en  $q^{(j)}(t)$  o  $\theta^{(j)}(t)$  sobre las derivadas geométricas. Según se desprende de (A.70), cualquier desviación de  $q^{(n)}(t)$  tendrá un efecto sobre la derivada geométrica del mismo orden modulado por la primera derivada de  $\theta(t)$ :

$$\frac{\partial \left( \frac{d^n q(t)}{d\theta^n} \right)}{\partial q^{(n)}(t)} = \left( \theta^{(1)}(t) \right)^{-n}. \quad (\text{A.72})$$

En cambio, el efecto de  $q^{(j)}(t)$  para  $j < n$  dependerá también de las derivadas de orden superior de  $\theta(t)$ :

$$\frac{\partial \left( \frac{d^n q(t)}{d\theta^n} \right)}{\partial q^{(j)}(t)} = \left( \theta^{(1)}(t) \right)^{-n} \sum_{k=1}^{n-j} S_{n,j,k}(t). \quad (\text{A.73})$$

La primera derivada de  $\theta(t)$  tendrá el siguiente efecto:

$$\frac{\partial \left( \frac{d^n q(t)}{d\theta^n} \right)}{\partial \theta^{(1)}(t)} = \frac{-1}{\theta^{(1)}(t)} \left( n \frac{q^{(n)}(t)}{(\theta^{(1)}(t))^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q^{(j)}(t)}{(\theta^{(1)}(t))^n} \sum_{k=1}^{n-j} (n+k) S_{n,j,k}(t) \right) \quad (\text{A.74})$$

El efecto más complejo es el que tienen las derivadas  $\theta^{(m)}(t)$  para  $2 \leq m \leq n$ . Éstas sólo están presentes en los términos  $S_{n,j,k}(t)$  definidos en (A.71). Concretamente, para cada sumando  $s_{n,j,k,b}(t)$  que compone ese término (donde  $b$  representa una combinación específica de  $b_1, \dots, b_k$ ):

$$\frac{\partial s_{n,j,k,b}(t)}{\partial \theta^{(m)}(t)} = \begin{cases} \exists b_h = m \Vdash \frac{(-1)^k}{k! \theta^{(1)}(t)} \binom{n+k-1}{j-1, b_1, \dots, b_k} \prod_{\substack{h=1 \\ b_h \neq m}}^k \frac{\theta^{(b_h)}(t)}{(\theta^{(1)}(t))} \\ \nexists b_h = m \Vdash 0 \end{cases} \quad (\text{A.75})$$

La complejidad de estas relaciones se reduce a la hora de usar las derivadas geométricas en la interpolación, tal como se ha especificado en (A.66). Tomemos un punto  $\theta^* = \theta(t^*)$  en el que se desea interpolar la variable  $q$ , sea  $Tq(\theta^*, n)$  el término  $n$  de la serie de Taylor en el dominio geométrico, y  $\theta_o = \theta(t_o)$  uno de los puntos más próximos en los que se conocen las derivadas geométricas, afectadas por el error que se está estudiando. Si  $\delta\theta$  es la distancia entre  $\theta_o$  y  $\theta^*$ , el efecto que tendrá el error de  $\frac{d^n q(t)}{d\theta}$  será

$$\frac{\partial Tq(\theta^*, n)}{\partial \left( \frac{d^n q(t)}{d\theta^n} \right)} = \frac{1}{n!2} \delta\theta^n. \quad (\text{A.76})$$

Siempre que  $\theta^{(1)}(t)$  no sea nula y toda  $\theta^{(j)}(t)$  esté acotada, la función  $\theta(t)$  tendrá un comportamiento localmente lineal. Utilizando la notación asintótica cuando  $\delta t \rightarrow 0$  (Shoup, 2009):

$$\delta\theta = \theta^{(1)}(t_o)\delta t + o\left(\theta^{(1)}(t_o)\delta t\right), \quad (\text{A.77})$$

siendo  $\delta t$  la diferencia entre  $t^*$  y  $t_o$ .

Esto significa que el efecto de la derivada primera dominará sobre el de las derivadas de cualquier otro orden  $m > 1$ :

$$\theta^{(m)}(t_o)\delta t^m = o(\theta^{(1)}(t_o)\delta t) \Rightarrow \frac{\theta^{(m)}(t_o)\delta t^m}{\theta^{(1)}(t_o)\delta t} = o(1). \quad (\text{A.78})$$

Sustituyendo (A.78) en (A.71) y (A.75) también se deduce que, en estas condiciones,

$$S_{n,j,k}(t_o)\delta t^{n-j} = o(1), \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{\partial s_{n,j,k,b}(t_o)}{\partial \theta^{(m)}(t_o)} \delta t^{n-j-m+1} = \frac{1}{\theta^{(1)}(t_o)} o(1). \quad (\text{A.80})$$

Por lo tanto, multiplicando (A.76) por (A.72), (A.73), (A.74) y (A.75), finalmente se obtiene, tras operar:

$$\frac{\partial Tq(\theta^*, n)}{\partial q^{(n)}(t_0)} = \frac{\delta t^n}{n!2} + o(\delta t^n). \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{\partial Tq(\theta^*, n)}{\partial q^{(j)}(t_0)} = \frac{\delta t^j}{n!2} o(1) \quad : \quad j < n. \quad (\text{A.82})$$

$$\frac{\partial Tq(\theta^*, n)}{\partial \theta^{(1)}(t_0)} = \frac{-q^{(n)}(t_0)\delta t^n}{(n-1)!2\theta^{(1)}(t_0)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q^{(j)}(t_0)\delta t^j}{n!2\theta^{(1)}(t_0)} o(1). \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\partial Tq(\theta^*, n)}{\partial \theta^{(m)}(t_0)} = \delta t^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q^{(j)}(t_0)\delta t^j}{n!2\theta^{(1)}(t_0)} o(1) \quad : \quad p \geq 2. \quad (\text{A.84})$$

Se puede observar que sólo hay dos términos que no tienden a desaparecer cuando  $\delta t \rightarrow 0$  (no están multiplicados por la función «o pequeña»): los primeros sumandos de (A.81) y (A.83). En definitiva, si las derivadas  $n$ -ésimas de  $q(t)$  y  $\theta(t)$  en  $t_0$  se ven afectadas por los errores  $\delta q^{(p)}(t_0)$ ,  $\delta \theta^{(p)}(t_0)$ , respectivamente, el error sobre la interpolación será

$$\begin{aligned} \delta \hat{q}(\theta^*) &= \sum_{n=1}^p \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial Tq(\theta^*, n)}{\partial q^{(j)}(t_0)} \delta q^{(j)}(t_0) + \frac{\partial Tq(\theta^*, n)}{\partial \theta^{(j)}(t_0)} \delta \theta^{(j)}(t_0) \right) \\ &= \sum_{n=1}^p \frac{\delta q^{(n)}(t_0)\delta t^n}{n!2} \left( 1 - n \frac{\delta \theta^{(1)}(t_0)}{\theta^{(1)}(t_0)} \right) (1 + o(1)). \quad (\text{A.85}) \end{aligned}$$

El primer factor de los sumandos de (A.85) corresponde exactamente al error que se cometería interpolando directamente a partir de las derivadas temporales, en lugar de las geométricas. Como se puede observar, al interpolar en el dominio geométrico este término se encuentra modificado por el error proporcional de la primera derivada de  $\theta(t)$ .

Esto significa que, en puntos donde la primera derivada de  $\theta(t)$  es suficientemente grande, la interpolación de  $q(\theta)$  en el dominio geométrico no introducirá ningún error apreciable, no mayor que interpolar  $q(t)$  en el dominio temporal, al menos. Sin embargo, allí donde la derivada de  $\theta(t)$  tiende a anularse (cuando el movimiento tiene poca velocidad), la interpolación geométrica puede dar resultados menos controlados. Como el método de cálculo presentado elimina del dominio  $\Theta$  los puntos en los que  $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|$  tiene un valor muy pequeño, se puede asumir de forma general que el proceso de interpolación no alterará los principios de propagación de error que se han presentado en la sección 4.2.5 de este trabajo.

