

## Optimización Multiobjetivo en Modelado y Control de un Péndulo Invertido Rotatorio

Víctor Huilcapi<sup>a,\*</sup>, Byron Lima<sup>a</sup>, Xavier Blasco<sup>b</sup>, Juan Manuel Herrero<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidad Politécnica Salesiana, Facultad de Ingenierías, Robles 107, Guayaquil-Ecuador.

<sup>b</sup>Instituto Universitario de Automática e Informática Industrial, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, Valencia 46022, Spain.

### Resumen

Este artículo muestra la aplicación de técnicas de optimización multiobjetivo, tanto para la identificación de parámetros de un modelo no lineal como para el ajuste de controladores. En particular, se propone una técnica para identificar los parámetros de un modelo en primeros principios para un péndulo invertido rotatorio (PIR) aplicando una metodología de optimización multiobjetivo y datos experimentales. Así también la metodología se extiende a la sintonización de controladores PID y PI para el sistema en mención. En la aplicación de la metodología multiobjetivo se utilizan una serie de herramientas para cada una de las etapas. Como optimizador se ha utilizado una implementación basada en algoritmos evolutivos, *ev-MOGA* (Herrero et al., 2007). Para la fase de análisis de las soluciones del frente se utiliza la herramienta de visualización del frente de Pareto denominada *Level Diagram* (Blasco et al., 2017), que permite explorar satisfactoriamente el conjunto de soluciones óptimas de Pareto y seleccionar una de ellas de acuerdo con las preferencias del diseñador. El artículo no trata de estudiar diferentes estructuras de control para el sistema PIR, sino, dada una estructura de control, analizar cómo exprimir al máximo las posibilidades de la misma para cumplir con unos objetivos contrapuestos establecidos por el diseñador. Una ventaja que ofrece esta metodología es la fácil comprensión de los conflictos que aparecen entre los objetivos de diseño, permitiendo seleccionar una solución de compromiso satisfactoria de acuerdo a las preferencias del diseñador, sin perder de vista el conjunto de soluciones óptimas encontradas.

### Palabras Clave:

Optimización evolutiva multiobjetivo, identificación no lineal, frente de Pareto, modelado, control PID.

### Multi-objective Optimization in Modeling and Control for Rotary Inverted Pendulum

### Abstract

This article shows the application of multi-objective optimization techniques, both for the identification of parameters of a non-linear model and for the adjustment of controllers. In particular, we propose a technique to identify the parameters of a first principles model of a rotational inverted pendulum (RIP) applying a methodology of multi-objective optimization and experimental data. Also the methodology extends to the tuning of PID and PI controllers for the mentioned system. For multiobjective optimization, an implementation based on evolutionary algorithms has been used, *ev-MOGA* (Herrero et al., 2007). For the analysis phase of the front solutions, we use the Pareto front visualization tool called *Level Diagram* (Blasco et al., 2017), which allows to successfully explore a set of Pareto optimal solutions and select one of them according to the preferences of the designer. The article does not try to study different control structures for the RIP system, but, given a control structure, analyze how to maximize the possibilities of the same to meet some conflicting objectives established by the designer. The advantage offered by this methodology is the easy understanding of the conflicts that appear among the design objectives, allowing to select a compromise solution according to the preferences of the designer, without losing sight of the set of optimal solutions found.

### Keywords:

Multi-objective evolutionary optimization, non-linear identification, Pareto front, modeling, PID control.

\* Autor para correspondencia: vhuilcapi@ups.edu.ec

**To cite this article:** Víctor Huilcapi, Byron Lima, Xavier Blasco, Juan Manuel Herrero. 2018. Modeling and control of a rotational inverted pendulum applying multi-objective optimization techniques. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 15 363-373.

<https://doi.org/10.4995/riai.2018.8739>

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)

## 1. Introducción

En la actualidad se está haciendo énfasis en el estudio de nuevas metodologías para el modelado y diseño de controladores de procesos cada vez más complejos. Una forma novedosa que ayuda a este propósito, especialmente cuando se analizan sistemas que presentan no linealidades, puede ser efectuada aplicando la metodología de optimización multiobjetivo (MO), ya que permite analizar diferentes prestaciones y compensaciones que ocurren entre los objetivos de diseño planteados para diferentes escenarios en un problema multiobjetivo (MOP por sus siglas en inglés). La metodología MO ofrece al diseñador un mayor criterio para seleccionar la mejor solución a un MOP de acuerdo a sus preferencias como se muestra en (Herrero et al., 2007), (Reynoso-Meza et al., 2009), (Reynoso-Meza et al., 2013), (Reynoso-Meza et al., 2016), (Huilcapi et al., 2017).

La metodología MO puede ser aplicada en diversas situaciones comunes de la vida real donde los ingenieros de control se enfrentan a problemas multivariantes en los cuales los objetivos de diseño se encuentran en contraposición, es decir que mejorar unos implica degradar las prestaciones de otros. Uno de los objetivos del presente estudio es mostrar la forma de proceder cuando se plantea un problema de control clásico con un enfoque diferente a los tradicionales. A partir de un planteamiento MO se analiza el problema de modelar y controlar un sistema para encontrar un conjunto de posibles soluciones óptimas en el sentido de Pareto y, basado en las preferencias del diseñador, elegir una de ellas. Además, se muestran las herramientas disponibles para el análisis MO cómo utilizarlas y cómo realizar la toma de decisión final.

En el presente artículo se plantea la aplicación de la metodología MO al modelado en primeros principios de un péndulo invertido rotatorio (PIR) ya que es un problema referente en la teoría de control, debido a que se trata de un sistema no lineal, inestable y subactuado del cual existe una numerosa cantidad de investigaciones en cuanto a su modelado y control con técnicas convencionales (Wang, 2011), (Shahnazi and Akbarzadeh-T, 2008), (Mathew et al., 2013), (Fontanet et al., 2016), (Zhang and Zhang, 2011), (Åström and Furuta, 2000).

Para el modelado del PIR se ajusta un conjunto de parámetros que caracterizan satisfactoriamente la dinámica de las salidas del sistema correspondientes a los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  del péndulo y brazo respectivamente. Después de evaluar y comparar las prestaciones de los modelos identificados se realiza la selección de un modelo con prestaciones satisfactorias para representar a la planta y de esta forma proceder al ajuste de dos controladores, uno de ellos PID para el control de la estabilización del péndulo y el otro PI para el seguimiento de referencias del brazo. Por último se evalúa el ajuste de los controladores del PIR para seguimiento de referencias en el ángulo  $\theta$  y el rechazo frente a perturbaciones externas del ángulo  $\alpha$  en una plataforma experimental.

El presente artículo ha sido organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se detallan los aspectos teóricos de la metodología de optimización multiobjetivo, se analiza el modelo en primeros principios del PIR, así como se dan detalles de la plataforma experimental utilizada. En la sección 3 se plantea el problema de optimización multiobjetivo para la identificación del modelo y el ajuste de los controladores del PIR. En la

sección 4 se muestran y evalúan los resultados obtenidos. Finalmente algunas conclusiones se detallan en la sección 5.

## 2. Consideraciones teóricas

### 2.1. Fundamentos de optimización multiobjetivo

En numerosas situaciones reales de ingeniería es muy común encontrarse con problemas que requieren la optimización de múltiples objetivos simultáneamente, los cuales se encuentran en conflicto y sujetos a restricciones físicas. Para resolver estos problemas es conveniente aplicar técnicas de optimización multiobjetivo. De acuerdo a (Herrero et al., 2007) un problema de optimización multiobjetivo puede ser definido como:

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \{J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x}), \dots, J_s(\mathbf{x})\} \quad (2)$$

sujeto a:

$$g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3)$$

$$h(\mathbf{x}) = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_{i_u}, i = [1, \dots, n] \quad (5)$$

Donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  es el vector de decisión,  $D$  es el espacio de decisión,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$  es el vector de objetivos,  $g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$  son los vectores de restricciones, y  $\mathbf{x}_{i_l}, \mathbf{x}_{i_u}$  son los límites superiores e inferiores del espacio de decisión. Consecuentemente no existe un único modelo óptimo, en efecto hay un conjunto de soluciones óptimas con diferentes compensaciones entre los objetivos, donde ninguno es mejor que otro. Este conjunto de soluciones forman lo que se conoce como frente de Pareto.

El concepto de frente de Pareto se basa en la definición de *dominancia de Pareto*. El conjunto de Pareto  $\mathbf{x}_p$  está formado por soluciones que no son dominadas por otras. Se establece que un vector  $\mathbf{x}^1$  domina a otro vector  $\mathbf{x}^2$ , si  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^1)$  no es peor a  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^2)$  en todos los objetivos, y es mejor en al menos un objetivo. La dominancia de Pareto está definida como:

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, J_i(\mathbf{x}^1) \leq J_i(\mathbf{x}^2) \wedge \exists k \in \{1, \dots, s\} : J_k(\mathbf{x}^1) < J_k(\mathbf{x}^2) \quad (6)$$

Y el conjunto óptimo de Pareto  $\mathbf{x}_p$  está definido por:

$$\mathbf{x}_p = \{\mathbf{x} \in D | \nexists \mathbf{x}' \in D : \mathbf{x}' \leq \mathbf{x}\} \quad (7)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) = \{\mathbf{J}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbf{x}_p\} \quad (8)$$

La solución para un problema multiobjetivo es  $\mathbf{x}_p$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p)$ . Esta solución por lo general es inabordable porque está formada por un conjunto infinito de puntos, por lo cual en la práctica la solución a un MOP se consigue encontrando un conjunto  $\mathbf{x}_p^* \subset \mathbf{x}_p$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p^*)$  el cual representa satisfactoriamente a  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p)$ . Basándose en el conjunto  $\mathbf{x}_p^*$  el diseñador puede seleccionar una solución de acuerdo a sus preferencias, por ejemplo seleccionado la solución que se encuentre mas próxima para alguna norma  $\|\cdot\|_n$  al punto utópico  $\mathbf{J}^{ideal}$  que es aquel que minimiza todos los objetivos al mismo tiempo.

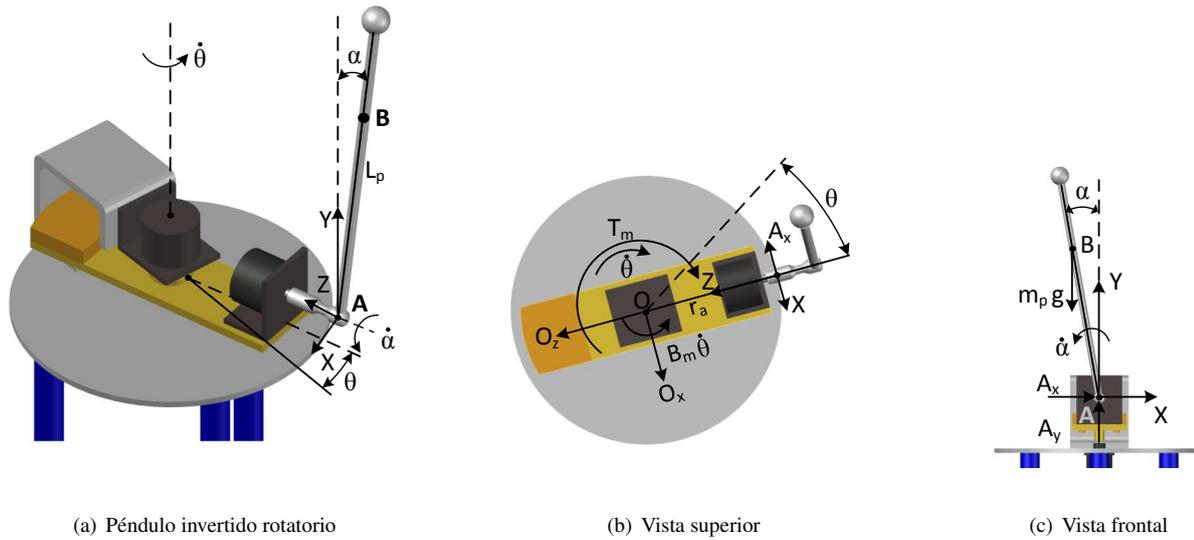


Figura 1: Diagrama esquemático del péndulo invertido rotatorio.

2.2. Modelo del péndulo invertido rotatorio

Un péndulo invertido rotatorio se conoce también como péndulo de Furuta (Furuta et al., 1992), está formado por un motor DC acoplado a un brazo mecánico, el cual se mueve en el plano horizontal debido al par que este le aplica. El brazo del PIR está acoplado a un péndulo que consiste de una varilla cilíndrica y se mueve libremente en posición vertical. El sistema tiene dos encoders rotativos para medir los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$ , el objetivo es mantener en equilibrio el péndulo en posición vertical hacia arriba. (Ramírez-Neria et al., 2014). El diagrama esquemático del sistema PIR se muestra en la Figura 1.

El modelo en primeros principios del PIR que se utilizó en este artículo es el propuesto por (Barbosa et al., 2011) y (Lima et al., 2017). Para describir las ecuaciones del modelo se usará la nomenclatura de la Tabla 1 y la Figura 1.

Tabla 1: Nomenclatura.

Símbolo	Descripción	Unidades
$m_p$	Masa del péndulo	Kg
$L_p$	Longitud de rotación del eje al centro de masa del péndulo	m
$r_a$	Longitud del brazo rotatorio	m
$g$	Aceleración gravitacional	$m/s^2$
$R_{ma}$	Resistencia de armadura	$\Omega$
$L_{ma}$	Inductancia de armadura	H
$J_{em}$	Momento de inercia equivalente del rotor	$Kg \cdot m^2$
$J_a$	Momento de inercia equivalente del brazo	$Kg \cdot m^2$
$J_p$	Momento de inercia equivalente del péndulo	$Kg \cdot m^2$
$B_p$	Coficiente de fricción viscosa del péndulo	$N \cdot m \cdot s/rad$
$B_m$	Coficiente de fricción viscosa del motor	$N \cdot m \cdot s/rad$
$k_b$	Constante de fuerza contraelectromotriz	$V \cdot s/rad$
$k_t$	Constante de par electromagnético	$N \cdot m/A$
$T_m$	Par del motor DC acoplado al brazo	$N \cdot m$
$V_a$	Voltaje de armadura	V
$\alpha$	Ángulo de giro del péndulo	Grados
$\theta$	Ángulo de rotación del brazo	Grados

En primer lugar se calcula las coordenadas del centro de masa y velocidad del péndulo en el punto B con respecto al punto A:

$$X_{BA} = -L_p \text{sen}(\alpha); Y_{BA} = L_p \text{cos}(\alpha) \quad (9)$$

$$\dot{X}_{BA} = -L_p \text{cos}(\alpha)\dot{\alpha}; \dot{Y}_{BA} = -L_p \text{sen}(\alpha)\dot{\alpha} \quad (10)$$

Las coordenadas de la velocidad del péndulo teniendo en consideración la velocidad del brazo son:

$$\dot{X}_B = r_a \dot{\theta} - L_p \text{cos}(\alpha)\dot{\alpha}; \dot{Y}_B = -L_p \text{sen}(\alpha)\dot{\alpha} \quad (11)$$

Las coordenadas de la aceleración del péndulo corresponden a la segunda derivada de su velocidad y son:

$$\ddot{X}_B = r_a \ddot{\theta} + L_p \text{sen}(\alpha)\dot{\alpha}^2 - L_p \text{cos}(\alpha)\ddot{\alpha} \quad (12)$$

$$\ddot{Y}_B = -L_p \text{cos}(\alpha)\dot{\alpha}^2 - L_p \text{sen}(\alpha)\ddot{\alpha} \quad (13)$$

Aplicando la segunda ley de Newton y las ecuaciones de Euler para el movimiento rotacional se describen las fuerzas y momentos dinámicos netos en los ejes (x, y) y en los puntos B y O respectivamente:

$$\sum F_x = A_x = m_p r_a \ddot{\theta} + m_p L_p \text{sen}(\alpha)\dot{\alpha}^2 - m_p L_p \text{cos}(\alpha)\ddot{\alpha} \quad (14)$$

$$\sum F_y = A_y = -m_p L_p \text{cos}(\alpha)\dot{\alpha}^2 - m_p L_p \text{sen}(\alpha)\ddot{\alpha} + m_p g \quad (15)$$

$$\sum M_B = J_p \ddot{\alpha} = A_x L_p \text{cos}(\alpha) + A_y L_p \text{sen}(\alpha) - B_p \dot{\alpha} \quad (16)$$

$$\sum M_O = (J_a + J_{em})\ddot{\theta} = T_m - B_m \dot{\theta} - A_x r_a \quad (17)$$

Donde el par  $T_m$  del motor DC acoplado al brazo del PIR se expresa en función de su voltaje de armadura y su velocidad angular como:

$$T_m = \frac{k_t}{R_{ma}}(V_a - k_b)\dot{\theta} \quad (18)$$

Reemplazando (14) y (15) en (16) así también reemplazando (14) y (18) en (17) se obtiene el modelo no lineal del PIR, como se muestra en (21):

$$(J_p + m_p L_p^2)\ddot{\alpha} - [m_p r_a L_p \text{cos}(\alpha)]\ddot{\theta} - m_p g L_p \text{sen}(\alpha) = -B_p \dot{\alpha} \quad (19)$$

$$- [m_p r_a L_p \text{cos}(\alpha)]\ddot{\alpha} + (J_a + J_{em} + m_p r_a^2)\ddot{\theta} + [m_p r_a L_p \text{sen}(\alpha)]\dot{\alpha}^2 = T_m - B_m \dot{\theta} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} J_p + m_p L_p^2 & -(m_p r_a L_p \cos(\alpha)) \\ -(m_p r_a L_p \cos(\alpha)) & (J_a + J_{em} + m_p r_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_p \dot{\alpha} + m_p g L_p \sin(\alpha) \\ \frac{k_t}{R_{ma}} V_a - (\frac{k_b k_t}{R_{ma}} + B_m) \dot{\theta} - (m_p r_a L_p \sin(\alpha)) \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

### 2.3. Plataforma experimental

El péndulo invertido rotatorio se comunica con un computador de escritorio a través de una tarjeta PCI-1711, que recibe los valores medidos de los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  de una tarjeta Arduino Mega. La señal de esfuerzo de control es el voltaje de armadura aplicado al motor del brazo, que previamente debe ser amplificada por una etapa de potencia. La planta experimental se muestra en la Figura 2.

Para compensar el efecto de la fricción estática en la plataforma se aplica una compensación de voltaje a la salida analógica de la tarjeta PCI-1711 para ambos sentidos de giro del motor que esta acoplado al brazo del PIR.

## 3. Detalles del enfoque de optimización multiobjetivo aplicado al PIR

### 3.1. Detalles de la identificación multiobjetivo del modelo

Para plantear el problema de optimización multiobjetivo es necesario tener en consideración los parámetros que se necesitan identificar del modelo propuesto del PIR, así como las condiciones iniciales del sistema, las restricciones del MOP, y el criterio de optimalidad a ser aplicado para representar el frente de Pareto. Para la aplicación presentada en el artículo se definieron los criterios mostrados en (22-25) que evalúan los errores promedio de los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  durante el tiempo del experimento (equivale a  $N = 12000$  muestras).

$$\min_{\mathbf{x}_m \in D} J(\mathbf{x}_m) \quad (22)$$

$$J(\mathbf{x}_m) = \{J_1(\mathbf{x}_m), J_2(\mathbf{x}_m)\} \quad (23)$$

$$J_1(\mathbf{x}_m) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\theta_{experimental}(k) - \theta_{identificado}(k)| \quad (24)$$

$$J_2(\mathbf{x}_m) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\alpha_{experimental}(k) - \alpha_{identificado}(k)| \quad (25)$$

El vector de decisión está representado por:

$$\mathbf{x}_m = \{R_{ma}, L_{ma}, k_b, k_t, J_{em}, B_m, J_a, L_p, J_p, B_p\} \quad (26)$$

$$\mathbf{x}_{im} \leq \mathbf{x}_m \leq \mathbf{x}_{ium} \quad (27)$$

Donde  $\mathbf{x}_{im}$  y  $\mathbf{x}_{ium}$  fueron determinados (ver Tabla 2) teniendo en consideración los valores referenciales establecidos por los fabricantes de los dispositivos eléctricos, así como realizando un análisis mecánico preliminar de la estructura del PIR.

Tabla 2: Límites de  $\mathbf{x}_m$  para la identificación del modelo del PIR.

$\mathbf{x}_m$	$R_{ma}$	$L_{ma}$	$k_b$	$k_t$	$J_{em}$
$\mathbf{x}_{im}$	5	0.001	0.4	0.3	0.00002
$\mathbf{x}_{ium}$	6	0.002	1.2	1.5	0.00009
$\mathbf{x}_m$	$B_m$	$J_a$	$L_p$	$J_p$	$B_p$
$\mathbf{x}_{im}$	0.01	0.005	0.18	0.001	0.0010
$\mathbf{x}_{ium}$	0.05	0.020	0.25	0.002	0.0018

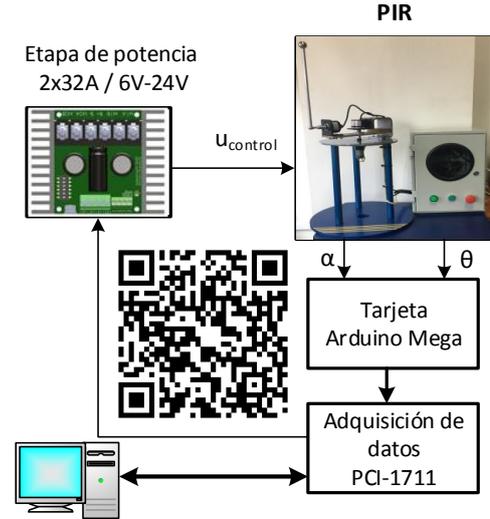


Figura 2: Péndulo invertido rotatorio. Planta experimental.

### 3.2. Detalles de la optimización multiobjetivo para el ajuste de controladores

La estructura de control implementada se muestra en la Figura 3. Es importante mencionar que el artículo no trata de estudiar diferentes estructuras de control para el sistema PIR, sino, dada una estructura de control, analizar cómo expresar al máximo las posibilidades de la misma para cumplir con unos objetivos contrapuestos establecidos por el diseñador. Sin embargo, de manera estratégica se decidió diseñar un control PID para el péndulo de tal forma que la acción derivativa pueda mejorar el rechazo de la perturbación al cual será sometido el PIR, mientras que un controlador PI para el brazo del PIR resultó satisfactorio en el seguimiento de referencias. En las ecuaciones (28) y (29) se muestran los controladores tipo paralelo PID y PI respectivamente.

$$U_\alpha(s) = \left( K_{p1} + K_{i1} \frac{1}{s} + K_{d1} \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \right) E_\alpha(s) \quad (28)$$

$$U_\theta(s) = \left( K_{p2} + K_{i2} \frac{1}{s} \right) E_\theta(s) \quad (29)$$

Donde:

$K_{p1}, K_{i1}, K_{d1}$  representan las ganancias proporcional, integral y derivativa del PID.

$K_{p2}, K_{i2}$  representan las ganancias proporcional, e integral del controlador PI.

$N$  representa el filtro derivativo. El valor usado fue  $N=100$ .

En el ajuste de los controladores PID y PI del péndulo y el brazo respectivamente se utilizaron como criterios de optimización: la integral de la magnitud absoluta del error (IAE por sus siglas en inglés), para evaluar la calidad del control, y la integral del valor absoluto de la derivada de la acción de control (IADU por sus siglas en inglés), para evaluar el esfuerzo de control. El problema trata de encontrar un conjunto de parámetros optimizados

correspondientes a las constantes de sintonización de los controladores:  $K_{p1}, K_{i1}, K_{d1}, K_{p2}, K_{i2}$ .

El problema de optimización multiobjetivo se plantea como se describe en (30-37), en donde se establecen dos escenarios, para seguimiento de referencia y rechazo de perturbación. La evaluación de seguimiento de referencia del brazo se hace a través de una señal tipo escalón con una amplitud de 10 grados en  $\theta$ , cuando el sistema se estabiliza se somete el péndulo a una perturbación externa que produce un desplazamiento del ángulo  $\theta$  de aproximadamente 40 grados. En los dos escenarios la referencia del ángulo  $\alpha$  debe estar a 0 grados para evitar que el péndulo se caiga. El tiempo de muestreo de las señales es de 1 milisegundo ( $T_s = 1ms$ ). El primer escenario trata el problema de seguimiento de referencias estableciendo dos objetivos,  $J_{11}$  y  $J_{21}$ , para cuantificar las prestaciones obtenidas en cada uno de los ángulos. Este escenario se evaluó durante 5 segundos después del cambio en la referencia (equivalente a  $N1 = 5000$  muestras). El segundo escenario se evaluó durante 9 segundos después de provocar la perturbación (equivalente a  $N2 = 9000$  muestras). En este segundo escenario se trata el problema del rechazo de una perturbación, para ello se establecieron dos objetivos,  $J_{12}$  y  $J_{22}$ . Se incluyen además dos objetivos adicionales ( $J_{31}$  y  $J_{32}$  uno para cada escenario) que evalúan el esfuerzo de control.

$$\min_{\mathbf{x}_c \in D} J(\mathbf{x}_c) \quad (30)$$

$$J(\mathbf{x}_c) = \{J_{11}(\mathbf{x}_c), J_{12}(\mathbf{x}_c), J_{21}(\mathbf{x}_c), J_{22}(\mathbf{x}_c), J_{31}(\mathbf{x}_c), J_{32}(\mathbf{x}_c)\} \quad (31)$$

$$J_{11}(\mathbf{x}_c) = [IAE]_{11} = T_s \sum_{k=1}^{N1} |\alpha_{ref}(k) - \alpha(k)| \quad (32)$$

$$J_{12}(\mathbf{x}_c) = [IAE]_{12} = T_s \sum_{k=1}^{N2} |\alpha_{ref}(k) - \alpha(k)| \quad (33)$$

$$J_{21}(\mathbf{x}_c) = [IAE]_{21} = T_s \sum_{k=1}^{N1} |\theta_{ref}(k) - \theta(k)| \quad (34)$$

$$J_{22}(\mathbf{x}_c) = [IAE]_{22} = T_s \sum_{k=1}^{N2} |\theta_{ref}(k) - \theta(k)| \quad (35)$$

$$J_{31}(\mathbf{x}_c) = [IADU]_{31} = \sum_{k=1}^{N1} |u_{control}(k) - u_{control}(k-1)| \quad (36)$$

$$J_{32}(\mathbf{x}_c) = [IADU]_{32} = \sum_{k=1}^{N2} |u_{control}(k) - u_{control}(k-1)| \quad (37)$$

El vector de variables de decisión está representado por los parámetros de sintonización de los controladores PID y PI:

$$\mathbf{x}_c = \{K_{p1}, K_{i1}, K_{d1}, K_{p2}, K_{i2}\} \quad (38)$$

$$\mathbf{x}_{ic} \leq \mathbf{x}_c \leq \mathbf{x}_{iuc} \quad (39)$$

Los límites para el espacio de decisión se muestran en la Tabla 3, los cuales fueron determinados diseñando controladores de referencia con los modelos linealizados del péndulo y brazo del PIR como se muestra en (Lima et al., 2017).

Tabla 3: Límites de  $\mathbf{x}_c$  para el ajuste de controladores del PIR.

$\mathbf{x}_c$	$K_{p1}$	$K_{i1}$	$K_{d1}$	$K_{p2}$	$K_{i2}$
$\mathbf{x}_{ic}$	20	50	0.1	1	1
$\mathbf{x}_{iuc}$	50	300	1.2	10	10

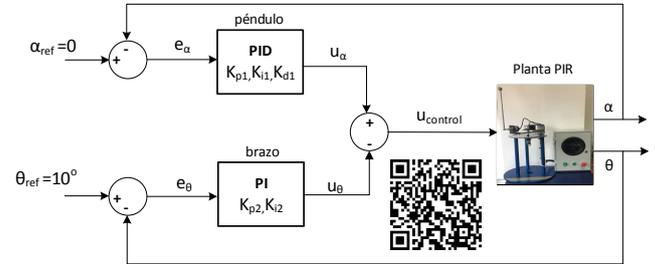


Figura 3: Estructura de control del PIR.

#### 4. Resultados y discusión

Para la identificación de los modelos y la sintonización de controladores del PIR se aplicó el algoritmo *ev-MOGA* (Hertero et al., 2007)<sup>1</sup>. En ambos casos, la optimización se ha llevado a cabo en una plataforma hardware con procesador Intel Core i7 4700MQ a 2.4GHz y con 12GB de RAM. En la fase de análisis de los frentes de Pareto se utiliza la herramienta *Level Diagram* (Blasco et al., 2017)<sup>2</sup>. Tanto la plataforma hardware como las herramientas *ev-MOGA* y *Level Diagram* son adecuadas para la dimensión del MOP.

##### 4.1. Resultados de la identificación experimental del modelo del PIR utilizando optimización multiobjetivo

En el ensayo para la identificación del modelo se aplicó una señal de voltaje al motor del PIR que consiste de un sumatorio de ondas senoidales de diferentes frecuencias mientras el péndulo se encuentra en posición vertical hacia abajo. Se efectuó el experimento de esta forma ya que el PIR es inestable en lazo abierto y no se lo puede mantener en posición vertical hacia arriba si no es con la aplicación de un controlador. Es importante mencionar que la identificación se realizó sobre el modelo no lineal del PIR detallado en (21), y los parámetros que se identifican tienen sentido físico, esto garantiza en cierta medida su funcionamiento en cualquier punto de operación. Aunque el modelo puede tener dinámica no modelada representada de manera satisfactoria al PIR.

La representación del frente de Pareto mostrado en la Figura 4 se realizó con la herramienta *Level Diagram*, la cual facilita la visualización de cada objetivo y parámetros de diseño de manera separada y sincronizada, esto ayuda al diseñador en la selección de la mejor solución de acuerdo a sus preferencias. En la Figura 4 se ha sectorizado el frente de Pareto en dos zonas A y

<sup>1</sup>El algoritmo está disponible en: <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31080-ev-moga-multiobjective-evolutionary-algorithm>.

<sup>2</sup>La herramienta está disponible en matlab central con videos tutoriales para explicar su uso: <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/62224-interactive-tool-for-decision-making-in-multiobjective-optimization-with-level-diagrams>

Tabla 4: Valores de la función objetivo y parámetros del modelo del PIR aplicando norma - ∞ para la zona A.

$J_1$	$J_2$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	$x_{m3}$	$x_{m4}$
[1.355-3.523]	[1.453-1.772]	[5.66-5.90]	[0.0014-0.0018]	[0.625-0.872]	[0.639-0.796]
$x_{m5}$	$x_{m6}$	$x_{m7}$	$x_{m8}$	$x_{m9}$	$x_{m10}$
[4.29e-05-6.559e-05]	[0.0185-0.0390]	[0.0054-0.0074]	[0.2047-0.2330]	[0.0013-0.0016]	≈0.001428

B, así como también se han seleccionado cuatro puntos (modelos)  $M_1, M_2, M_3, M_4$  para extender el análisis. Los puntos  $M_1$  y  $M_2$  muestran que existe conflicto entre el modelo del ángulo  $\theta$  con el ángulo  $\alpha$  del PIR, ya que mejorar uno significa empeorar el otro. El punto  $M_1$  representa el mejor modelo para el ángulo  $\theta$  dentro de la zona A, pero constituye el peor modelo para el ángulo  $\alpha$  dentro de la misma zona. El punto  $M_2$  representa el peor modelo para el ángulo  $\theta$ , y en cambio el mejor modelo para el ángulo  $\alpha$ . El punto  $M_3$  representa un modelo con buenas prestaciones tanto para el ángulo  $\alpha$  como para el  $\theta$ , aunque no es mejor en la representación de  $\alpha$  que el modelo que representa el punto  $M_2$ . El punto  $M_4$  se encuentra aproximadamente en el centro entre  $M_1$  y  $M_3$  es mejor en prestaciones para representar a  $\theta$  que  $M_3$ , pero para representar a  $\alpha$  es peor (ver Tabla 6). Los modelos pertenecientes a la zona A tienen prestaciones satisfactorias para los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$ , mientras que tomar un modelo de la zona B implicaría ganar pocas prestaciones para representar el ángulo  $\alpha$ , y perder muchas en la representación de  $\theta$ . Se puede observar en la Tabla 4 los valores de la función objetivo y los parámetros identificados para el modelo del PIR para la zona A, los cuales fueron extraídos de la Figura 5. En la Figura 6 se muestran los modelos identificados para el PIR correspondientes a los puntos  $M_1, M_2, M_3, M_4$  y en la Tabla 6 se muestran los valores de los criterios de optimización. Así también en la Figura 7 se muestra la validación de los modelos obtenidos en un tramo de datos diferentes de los utilizados para la identificación y los valores de los criterios de optimización se muestran en la Tabla 7. Como es de esperar los errores promedios en este conjunto de datos de validación es mayor que cuando se los evaluó sobre los datos utilizados para la identificación. Tras analizar los modelos óptimos del frente, se decide elegir el modelo M1 para ajustar a partir de él un conjunto óptimo de controladores PID y PI para el péndulo y brazo del PIR ya que  $M_1$  es muy bueno en cuanto al objetivo  $J_1(x_m)$  y pierde poco con respecto al objetivo  $J_2(x_m)$  en comparación con los puntos de la zona B. Es decir representa muy bien la dinámica del ángulo  $\theta$ , perdiendo muy pocas prestaciones en la representación del ángulo  $\alpha$ . Así también como se puede observar en la Figura 4 la selección de  $M_1$  nos asegura un error promedio de alrededor de 2 grados en la caracterización de ambos ángulos. Los parámetros del modelo se muestran en la Tabla 5 (extraídos de la Figura 5). Entre los datos conocidos del modelo se tiene la aceleración de la gravedad ( $g = 9,8 m/s^2$ ), la masa del péndulo ( $m_p = 0,127 Kg$ ), y la longitud del brazo ( $r_a = 0,125 m$ ).

Tabla 5: Valores de los parámetros identificados para el modelo del PIR. Punto  $M_1$ .

$R_{ma}$	$L_a$	$k_b$	$k_t$	$J_{em}$
5.844	0.00180	0.87167	0.63891	4.43304E-05
$B_m$	$J_a$	$L_p$	$J_p$	$B_p$
0.01847	0.0066	0.23189	0.00125	0.00127

Tabla 6: Valores de los criterios de optimización para los modelos mostrados en la Figura. 6.

$J(x_p)$	Punto $M_1$	Punto $M_2$	Punto $M_3$	Punto $M_4$
$J_1(x_m)$	1.427	8.698	3.523	2.422
$J_2(x_m)$	2.217	1.453	1.772	1.917

Tabla 7: Valores de los criterios de optimización para los modelos mostrados en la Figura. 7.

$J(x_p)$	Punto $M_1$	Punto $M_2$	Punto $M_3$	Punto $M_4$
$J_1(x_m)$	3.738	12.233	7.318	6.116
$J_2(x_m)$	4.570	3.507	3.684	3.787

#### 4.2. Resultados de optimización multiobjetivo en el ajuste de controladores del PIR

En el frente de Pareto mostrado en la Figura 9 se muestran los seis objetivos que fueron optimizados,  $J_{11}$  y  $J_{12}$  evalúan el IAE del ángulo  $\alpha$  para seguimiento de referencia y rechazo a la perturbación respectivamente, de forma equivalente  $J_{21}$  y  $J_{22}$  evalúan el IAE del ángulo  $\theta$  para seguimiento de referencia y rechazo a la perturbación, finalmente  $J_{31}$  y  $J_{32}$  evalúan el IADU para el seguimiento de referencia y rechazo a la perturbación. Se han seleccionado tres controladores en el frente de Pareto del objetivo  $J_{12}$  los cuales están en contraposición ( $C_1, C_2, C_3$ ). Se ha tomado como referencia el objetivo  $J_{12}$  ya que es fundamental que el PIR equilibre el péndulo en posición vertical hacia arriba ( $\alpha = 0$  grados) evitando que este se caiga. Se observa que el objetivo  $J_{12}$  tiene conflicto con  $J_{31}$  ya que  $C_1$  y  $C_2$  se encuentran en extremos diferentes de las gráficas, esto significa que elegir el controlador  $C_1$  con buenas prestaciones para rechazar una perturbación en  $\alpha$ , implica un mayor esfuerzo de control para el seguimiento de referencias del PIR, si se elige  $C_2$  ocurre lo contrario. Así también se puede observar que  $J_{12}$  tiene conflictividad con  $J_{11}$  y  $J_{22}$ , ya que ganar en cuanto a prestaciones para rechazar una perturbación en el ángulo  $\alpha$  representa perder un poco en prestaciones en cuanto al seguimiento de referencias en  $\alpha$  y al rechazo de una perturbación en  $\theta$ . En la Figura 10 se muestran los parámetros ajustados de los controladores seleccionados usando norma  $norma - \infty$ . Se usó esta norma ya que proporciona información acerca del peor de los objetivos de diseño de un MOP para un punto específico y es útil para realizar un análisis de compensaciones entre los diferentes objetivos. Un incremento en esta norma revela de manera directa el empeoramiento de al menos uno de los objetivos de diseño planteados (Blasco et al., 2017).

Las respuestas de los controladores seleccionados  $C_1, C_2, C_3$  se muestran en la Figura 8. En la Tabla 8 se muestran los valores de sus objetivos y de los parámetros de sintonización de los controladores PID y PI. Se puede observar en la Tabla 8 que  $C_1$

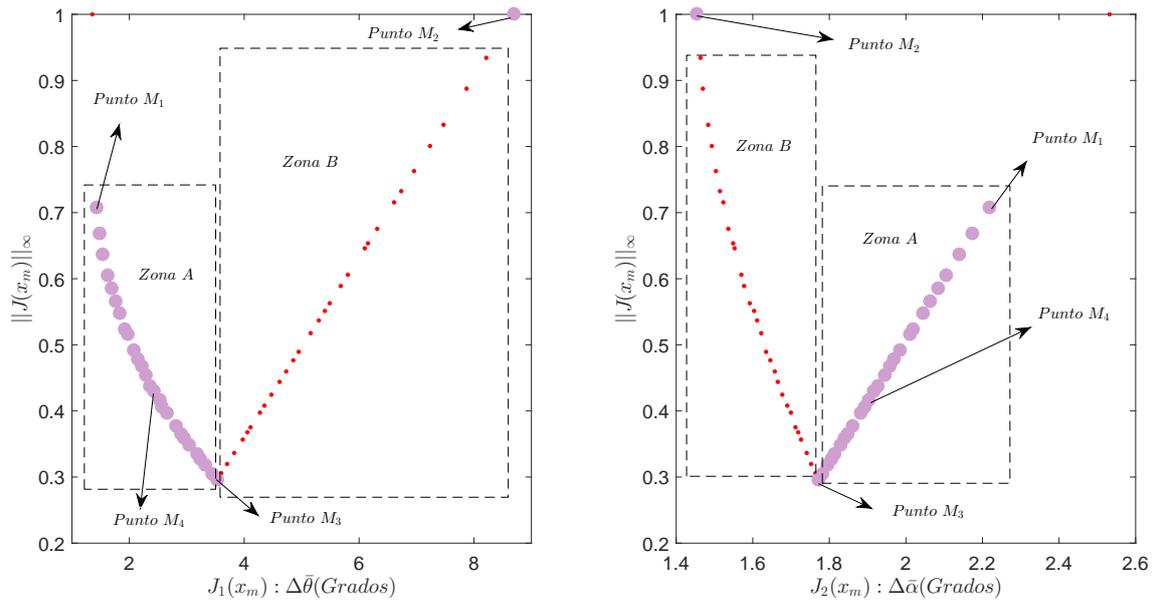


Figura 4: Representación del frente de Pareto de los modelos del PIR usando norma - ∞.

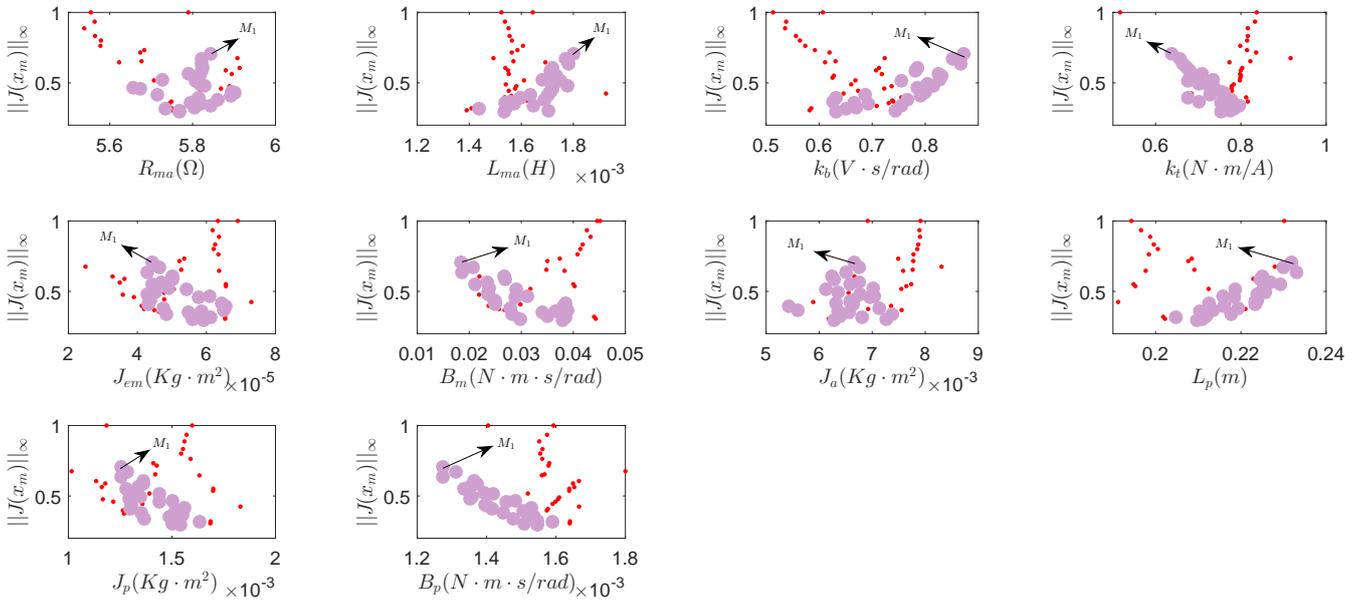


Figura 5: Representación de los parámetros óptimos de Pareto para los modelos del PIR. Los puntos sombreados pertenecen a la zona A.  $M_1$  representa el conjunto de parámetros del modelo elegido para representar el PIR.

Tabla 8: Valores de la función objetivo y los parámetros de los controladores PID y PI seleccionados para el PIR .

	[IAE] <sub>11</sub>	[IAE] <sub>12</sub>	[IAE] <sub>21</sub>	[IAE] <sub>22</sub>	[IADU] <sub>31</sub>	[IADU] <sub>32</sub>	$\mathbf{x}_c = (K_{p1}; K_{i1}; K_{d1}; K_{p2}; K_{i2})$
$C_1$	16.69	28.7	106.2	3027	3.993	0.8463	$\mathbf{x}_c = (28,9; 213,3; 0,8303; 8,836; 1,279)$
$C_2$	10.37	79.66	353	3150	0.8825	1.317	$\mathbf{x}_c = (32,61; 124,6; 0,6858; 1,803; 2,45)$
$C_3$	9.446	40.09	203.1	2004	1.556	0.9175	$\mathbf{x}_c = (28,25; 145,6; 0,8182; 3,592; 1,921)$

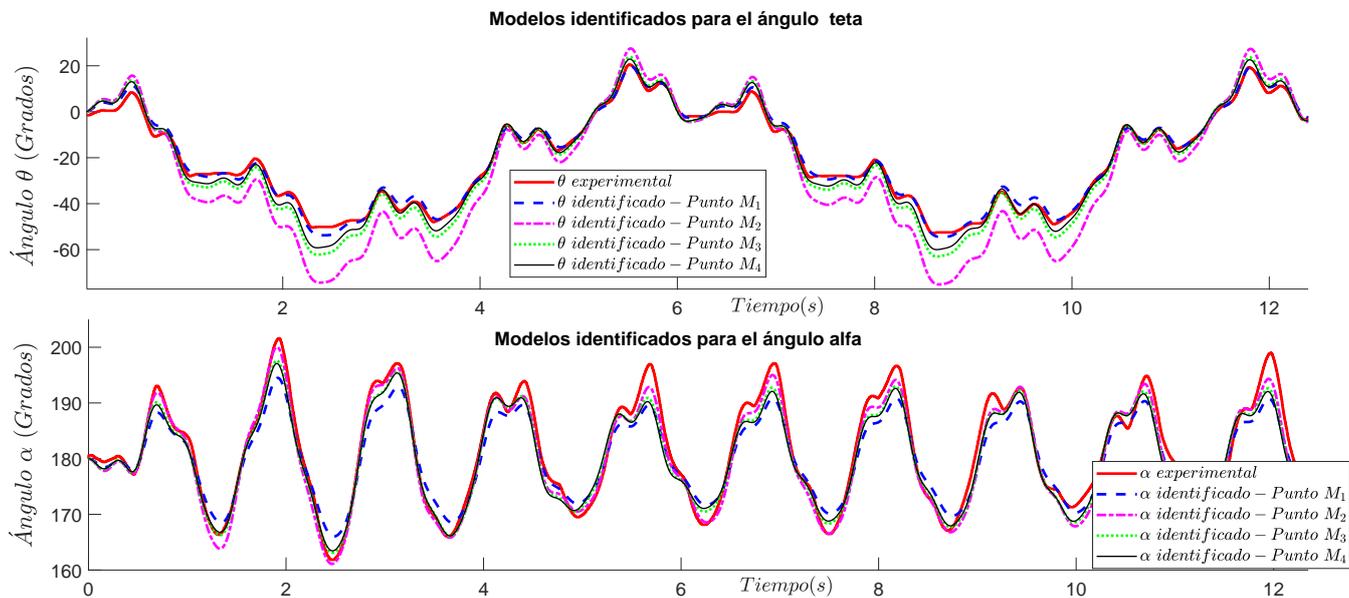


Figura 6: Simulación de modelos del PIR para los datos de identificación. Los puntos  $M_1, M_2, M_3, M_4$  se corresponden en el frente de Pareto de modelos.

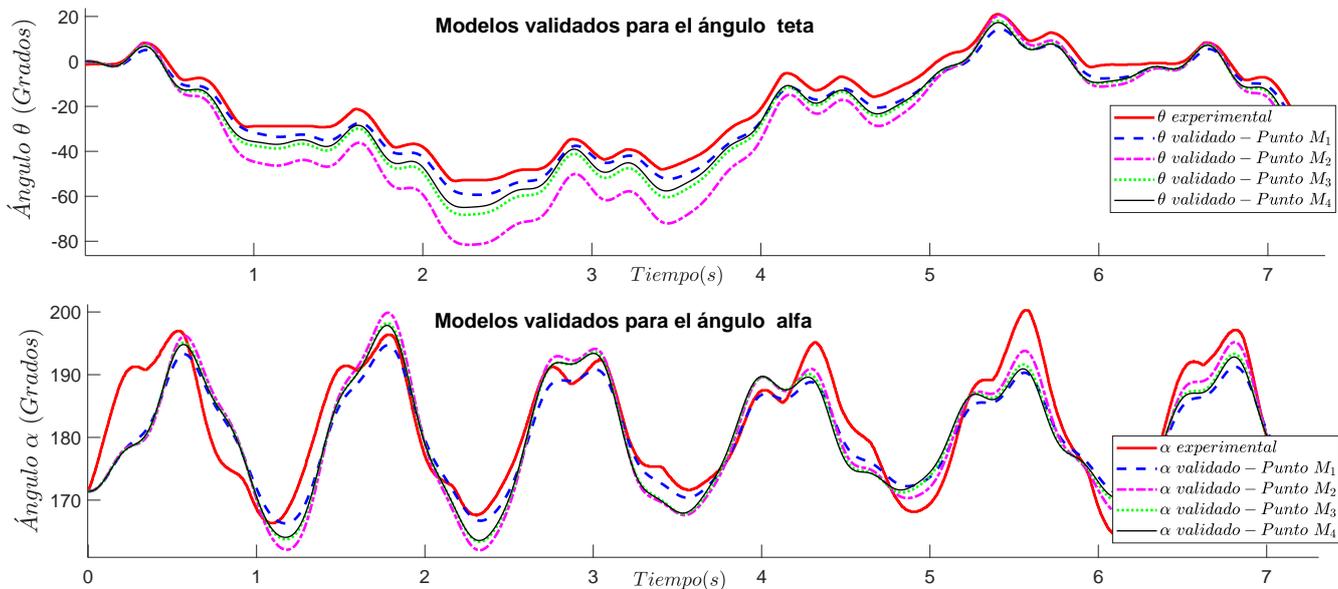


Figura 7: Simulación de modelos del PIR para los datos de validación. Los puntos  $M_1, M_2, M_3, M_4$  se corresponden en el frente de Pareto de modelos.

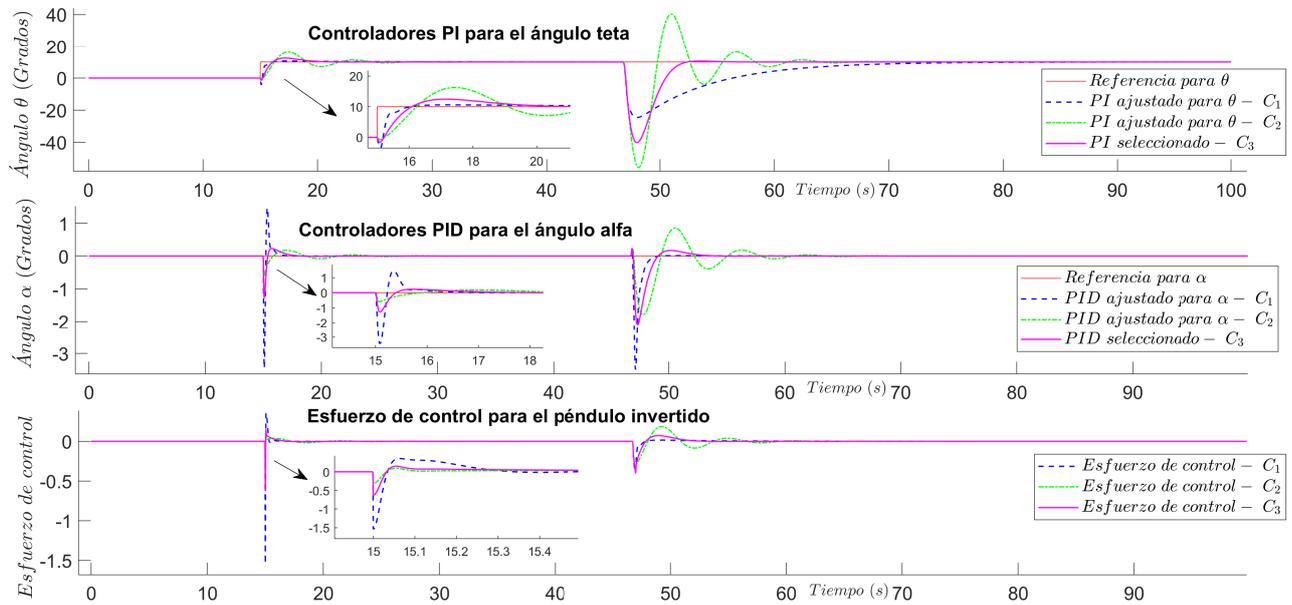


Figura 8: Simulación de controladores  $C_1, C_2, C_3$  para el PIR.

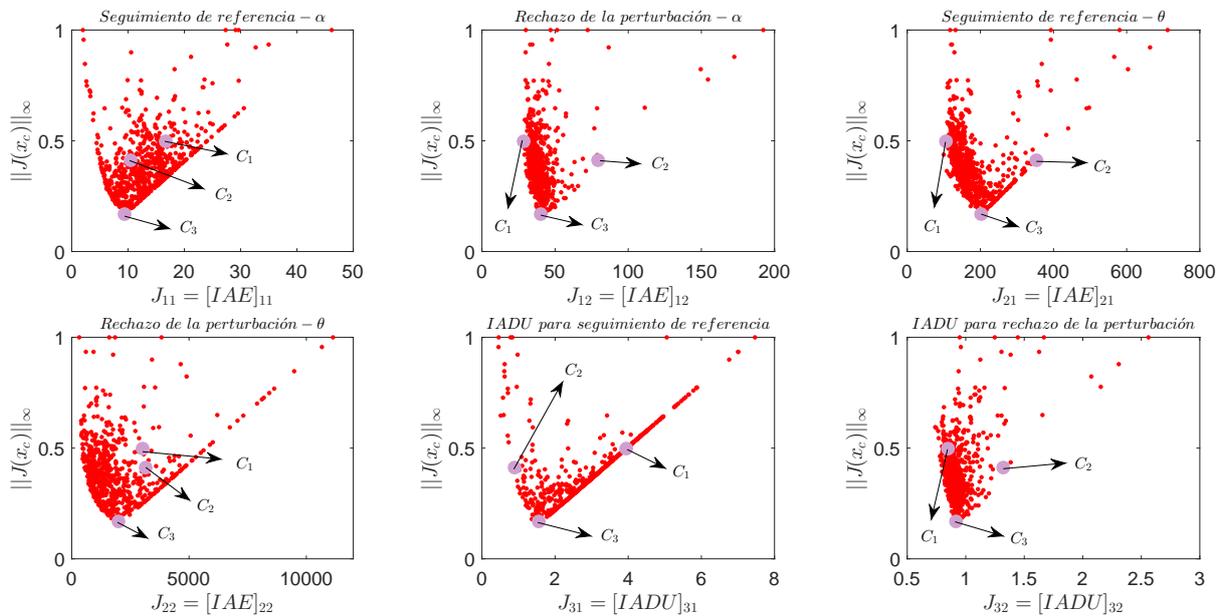


Figura 9: Frente de Pareto de controladores sintonizados para el PIR usando  $norma - \infty$ . Se han seleccionado tres controladores en contraposición.

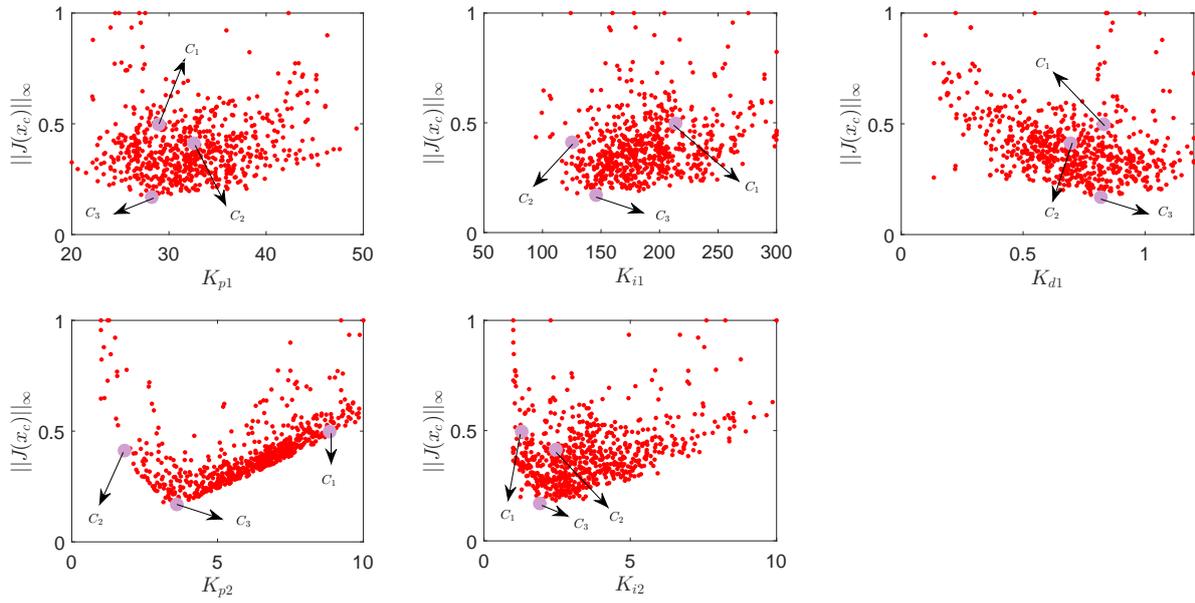


Figura 10: Parámetros de los controladores sintonizados para el PIR. Se muestran los parámetros de ajuste para  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .

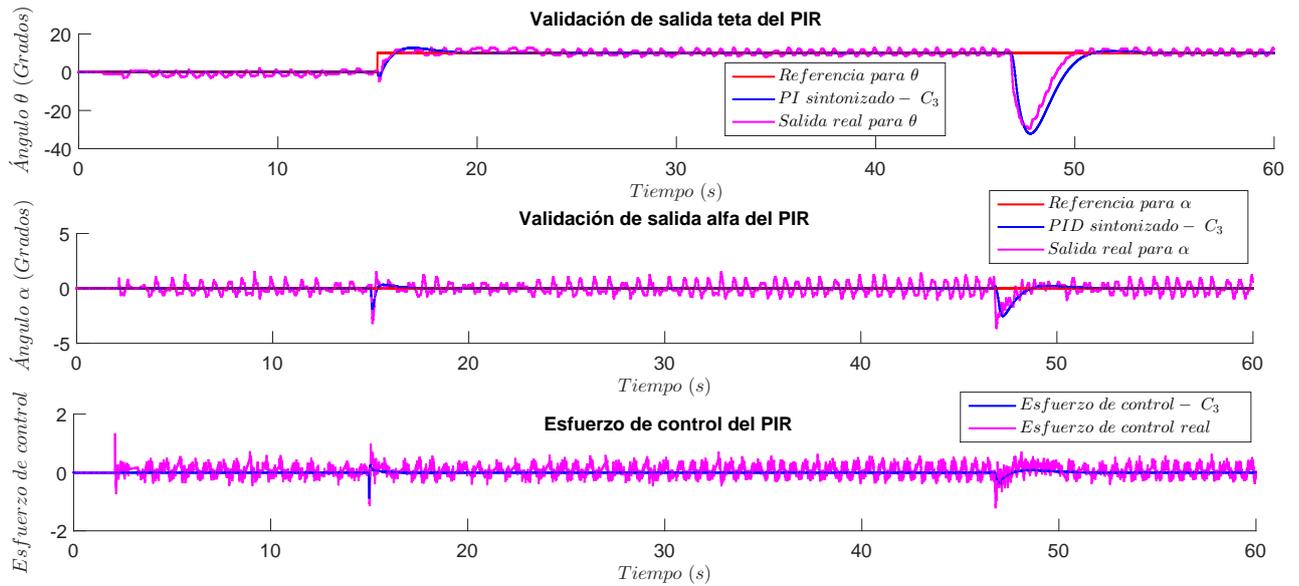


Figura 11: Prueba del controlador  $C_3$  sobre la planta real.

es mejor rechazando perturbaciones en  $\alpha$  comparado con  $C_2$  y  $C_3$ , pero el esfuerzo de control para que el PIR siga referencias es el más grande, así también  $C_1$  no es mejor que  $C_2$  o  $C_3$  para seguir referencias en  $\alpha$ . En cuanto al ángulo  $\theta$  es notorio que se estabiliza lentamente cuando aparece la perturbación en  $\alpha$ .

El controlador  $C_2$  es el mejor en cuanto a la acción de control para seguimiento de referencias del PIR, también es mejor que  $C_1$  para seguir referencias en  $\alpha$ , pero es peor que  $C_1$  y  $C_3$  en los otros objetivos. Finalmente el controlador  $C_3$  es un controlador de compromiso entre  $C_1$  y  $C_2$  para el IAE y el IADU en cuanto a seguimiento de referencia y rechazo de una perturbación, el cual fue probado en la planta real y sus resultados se muestran en la Figura 11. En cierta medida se observa la presencia de rizado casi ciclo límite en la respuesta real del PIR debido a que el prototipo presenta una degradación en sus componentes que generan una zona muerta bastante grande, en cualquier caso esto no invalida la metodología. En la Figura 3 se ha insertado un código QR en donde se muestra el sistema bajo control cuando se somete a perturbaciones. La respuesta real del sistema se muestra en la Figura 11.

## 5. Conclusiones

Una ventaja de la metodología aplicada es que permite analizar el conflicto entre varios objetivos que se optimizan simultáneamente como ocurrió con las respuestas de los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$ . Se ha observado que mejorar cada vez más el modelo del ángulo  $\alpha$  tenía como conflicto empeorar el de  $\theta$ . El conflicto existente entre los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$  muestra que existe dinámica no modelada para el PIR. No obstante fue factible identificar un modelo satisfactorio sin usar otros más complejos. La misma conflictividad ocurrió con el ajuste de los controladores PID y PI del péndulo y brazo respectivamente ya que mejorar el IAE tenía como penalización empeorar el IADU. El artículo no se fundamenta en comparar diferentes estructuras de control o tipos de ajustes para el PIR, ya que cada método de sintonía puede estar planteado para conseguir optimizar unos objetivos u otros, por tanto, puede no ser muy justo comparar técnicas cuando los objetivos son diferentes sino, se centra en explotar al máximo las posibilidades para cumplir con unos objetivos de diseño que se encuentran enfrentados y han sido establecidos por el diseñador manteniendo unas estructuras de control fijas y mostrando las herramientas disponibles para el análisis MO, cómo utilizarlas y cómo realizar la toma de decisión final. La técnica de optimización multiobjetivo permite al diseñador priorizar sus preferencias estableciendo hasta que punto esta dispuesto a perder en un objetivo por ganar en otro, o decidir un punto de compromiso que permita cumplir con las expectativas de diseño planteadas de acuerdo a preferencias establecidas, esto es común en muchas situaciones reales. Así también enriquece el análisis del problema ya que permite estudiar todos los objetivos requeridos sin pérdida de información, lo cual sería inevitable en un planteamiento mono-objetivo que aglutine a todos los objetivos de diseño. Aunque tiene como inconveniente una fase de decisión más costosa, el conocimiento de las posibles soluciones que adquiere el diseñador lo compensa. Este trabajo se propone como una contribución al estado del arte y la aplicabilidad de la metodología de optimización multiobjetivo para el modelado y control de sistemas. Los futuros trabajos

se enfocarán en aplicar la metodología a otros tipos de controladores multivariables estableciendo un marco de comparación, y donde todos los objetivos estén plasmados y sean similares, lo que probablemente requiera avances en las herramientas multi-objetivo. Es previsible que el número de parámetros y objetivos de los problemas de optimización se incrementen sensiblemente y, por tanto, será necesario mejorar los algoritmos de optimización para estos casos. Asimismo, será relevante trabajar en la propuesta de nuevos objetivos para orientarlos a problemas multivariables.

## Agradecimientos

Este trabajo fue soportado por el Ministerio de Economía y Competitividad (España) [Proyecto DPI2015-71443-R] y la Universidad Politécnica Salesiana (Ecuador) [CB-755-2015].

## Referencias

- Åström, K. J., Furuta, K., 2000. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* 36 (2), 287–295.
- Barbosa, D. I., Castillo, J. S., Combita, L. F., 2011. Rotary inverted pendulum with real time control. In: *Robotics Symposium, 2011 IEEE IX Latin American and IEEE Colombian Conference on Automatic Control and Industry Applications (LARC)*. IEEE, pp. 1–6.
- Blasco, X., Herrero, J. M., Reynoso-Meza, G., Martínez, M. A., 2017. Interactive tool for analyzing multiobjective optimization results with Level Diagrams. In: *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion*. ACM, pp. 1689–1696.
- Fontanet, J. G. G., Cervantes, A. L., Ortiz, I. B., 2016. Alternativas de control para un péndulo de furuta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 13 (4), 410–420.
- Furuta, K., Yamakita, M., Kobayashi, S., 1992. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 206 (4), 263–269.
- Herrero, J., Blasco, X., Martínez, M., Ramos, C., Sanchis, J., 2007. Non-linear robust identification of a greenhouse model using multi-objective evolutionary algorithms. *Biosystems Engineering* 98 (3), 335–346.
- Huilcapi, V., Herrero, J. M., Blasco, X., Martínez-Iranzo, M., 2017. Non-linear identification of a peltier cell model using evolutionary multi-objective optimization. *IFAC-PapersOnLine* 50 (1), 4448–4453.
- Lima, B., Cajo, R., Huilcapi, V., Agila, W., 2017. Modeling and comparative study of linear and nonlinear controllers for rotary inverted pendulum. In: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 783. IOP Publishing, p. 012047.
- Mathew, N. J., Rao, K. K., Sivakumaran, N., 2013. Swing up and stabilization control of a rotary inverted pendulum. *IFAC Proceedings Volumes* 46 (32), 654–659.
- Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Garrido-Moctezuma, R., Luviano-Juarez, A., 2014. Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the furuta pendulum. *ISA transactions* 53 (4), 920–928.
- Reynoso-Meza, G., Blasco, X., Sanchis, J., 2009. Diseño multiobjetivo de controladores PID para el benchmark de control 2008–2009. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 6 (4), 93–103.
- Reynoso-Meza, G., Blasco, X., Sanchis, J., Herrero, J. M., 2016. Controller Tuning with Evolutionary Multiobjective Optimization: A Holistic Multiobjective Optimization Design Procedure. Springer.
- Reynoso-Meza, G., Sanchis, J., Blasco, X., Martínez, M., 2013. Algoritmos evolutivos y su empleo en el ajuste de controladores del tipo PID: Estado actual y perspectivas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 10 (3), 251–268.
- Shahnazi, R., Akbarzadeh-T, M.-R., 2008. PI adaptive fuzzy control with large and fast disturbance rejection for a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (1), 187–197.
- Wang, J.-J., 2011. Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers. *Simulation Modelling Practice and Theory* 19 (1), 440–449.
- Zhang, J., Zhang, Y., 2011. Optimal linear modeling and its applications on swing-up and stabilization control for rotary inverted pendulum. In: *Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese*. IEEE, pp. 493–500.