

## Análisis Cinemático del Manipulador Paralelo 4-PRUR Mediante la Teoría de Tornillos

Jaime Gallardo-Alvarado<sup>a</sup>, Mario A. Garcia-Murillo<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Ingeniería Mecánica, Instituto Tecnológico de Celaya, 38010 Celaya, Gto., México

<sup>b</sup>Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, 36885 Salamanca, Gto., México

### Resumen

En este trabajo se presenta el análisis cinemático de un robot paralelo generador del movimiento de Schönflies por medio de la teoría de tornillos. Como un paso intermedio, el análisis de posición se obtiene en forma semi-cerrada con base en las coordenadas de dos puntos de la plataforma móvil. Esta estrategia requiere de sólo un marco de referencia, evitando así el cálculo de la matriz de rotación. Las ecuaciones entrada-salida de velocidad y de aceleración se obtienen sistemáticamente recurriendo a la teoría de tornillos recíprocos. Para ello, el robot se modela como si fuese un manipulador paralelo de seis grados de libertad gracias a la incorporación de pares cinemáticos ficticios que conectan las extremidades con la plataforma fija y una cadena cinemática virtual con la finalidad de aplicar sin restricciones el álgebra de Lie  $se(3)$  del grupo Euclideo  $SE(3)$ . El análisis de singularidades se aborda con base en la ecuación entrada-salida de velocidad. Se incluyen ejemplos numéricos que muestran la aplicación del método.

**Palabras Clave:** Robot paralelo, movimientos de Schönflies, Teoría de tornillos, Cinemática

### 1. Introducción

Tres traslaciones independientes y una rotación alrededor de un eje de orientación fija son las características del movimiento de Schönflies (Schönflies, 1887), el cual es producido típicamente por los robots SCARA (*Selective Compliant Assembly Robot Arm* o *Selective Compliant Articulated Robot Arm*). Este último término fue acuñado por Makino y Furuya (Makino and Furuya, 1982).

El movimiento de Schönflies se ha implementado exitosamente en manipuladores paralelos (Pierrot et al., 2009) superando con ello las altas velocidades de las arquitecturas de lazo abierto tipo SCARA, además de presentar mayor rigidez y precisión. Esta aplicación es una validación de la brillante idea de incorporar paralelogramos como extremidades en manipuladores paralelos, propuesta hace más de tres décadas por Clavel (Clavel, 1988). En ese sentido, en la actualidad la formidable contribución de Pierrot y colaboradores (Pierrot et al., 2009) representa una de las más eficientes aplicaciones de los manipuladores paralelos en la industria. Por otra parte, es destacable el esfuerzo dedicado por diversos investigadores en la introducción, diseño y análisis de topologías diferentes capaces de producir también el movimiento de Schönflies (Angeles et al., 2006b; Rolland, 1999; Zhao et al., 2006; Cao et al., 2016; Kang et al., 2015).

En la literatura se pueden encontrar un amplio número de trabajos dedicados al estudio de manipuladores paralelos tipo 3T1R, por ejemplo su destreza y espacio de trabajo (Altuzarra et al., 2011), el análisis de singularidades de un robot paralelo 4-RUU usando geometría de Grassmann (Amine et al., 2012), el análisis directo de posición mediante álgebra de cuaterniones (Masouleh et al., 2011b), diseño óptimo basado en el desempeño dinámico (Liu et al., 2012), propuestas de robots con redundancia en su actuación (Yi et al., 2013; Corves et al., 2016), análisis elastodinámico (Alessandro and Rosario, 2014), diseño de robots de alta velocidad rotacional para operaciones *pick-and-place* (Xie and Liu, 2015) o con un número reducido de extremidades (Angeles et al., 2006a; Kim et al., 2015), topologías reconfigurables (Nurahmi et al., 2016), síntesis de tipo mediante la teoría de tornillos de manipuladores 3R1T (tres rotaciones y una traslación) desacoplados (Cao et al., 2016), análisis del espacio de trabajo y de singularidades basados en la cinemática inversa (Cervantes-Sánchez et al., 2016). Sin embargo, entre los manipuladores paralelos que desarrollan movimiento de Schönflies destaca uno por su particularmente complicada cinemática: el robot paralelo 3T1R (tres traslaciones y una rotación) con extremidades tipo PRUR (cadena cinemática Prismática-Revoluta-Universal-Revoluta).

En cuanto al análisis cinemático de estos mecanismos se refiere, en la literatura se pueden encontrar diversas formas de abordar el problema. El análisis de posición generalmente es planteado usando ecuaciones de lazo vectorial y utilizando al menos dos marcos de referencia (Chen et al., 2009), por ejem-

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx](mailto:jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx) (Jaime Gallardo-Alvarado), [garcia.mario@ugto.mx](mailto:garcia.mario@ugto.mx) (Mario A. Garcia-Murillo)

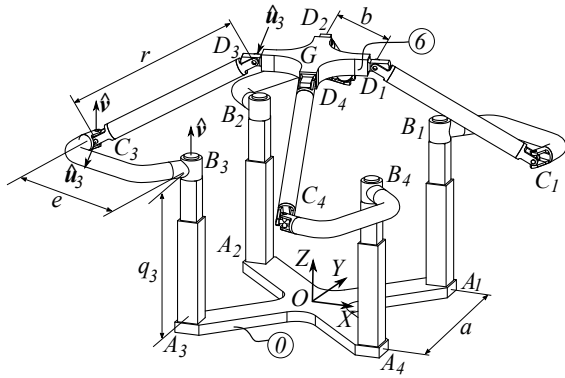


Figura 1: Esquema del manipulador generador de movimientos de Schönflies

plo revise los trabajos recientes de Kim (Kim et al., 2014), de Wu (Wu, 2016) y de Xie (Xie and Liu, 2016). En algunas otras publicaciones, se resuelve el análisis de posición con ecuaciones de restricción tomando ventaja de las limitaciones en la movilidad de este tipo de mecanismos, aunque se emplean dos sistemas de referencia en su planteamiento, lo que implica la tediosa tarea de calcular la matriz de rotación entre ellos (Richard et al., 2007). También es común resolver el problema del análisis de desplazamientos mediante el método de Denavit-Hartenberg (Lee, 2013; Lee and Lee, 2016), lo que lógicamente conduce al empleo de un número elevado de marcos de referencia y al cálculo de variables articulares en su solución.

Por otro lado, tradicionalmente se ha resuelto el análisis de velocidad obteniendo el jacobiano diferenciando las ecuaciones de restricción o las de lazo vectorial del análisis de posición (Richard et al., 2007; Salgado et al., 2008; Lee and Lee, 2016). Algunos autores plantean este análisis mediante el uso de la teoría de tornillos (Kim et al., 2013, 2014; Solazzi et al., 2014) aunque la matriz jacobiana resulta no ser cuadrada, lo que dificulta la obtención de una ecuación de entrada/salida de velocidad de forma simple y compacta.

En esta contribución se investiga la cinemática de un manipulador paralelo 4-PRUR generador del movimiento de Schönflies. El resto de la contribución está organizada como sigue: en la Sección 2 se presenta una descripción detallada de la geometría del manipulador bajo estudio. En la Sección 3 se desarrolla el análisis de desplazamientos del robot, mientras que en la Sección 4 son resueltos los de velocidad y aceleración mediante la teoría de tornillos. Por otro lado, con la finalidad de mostrar el potencial del método aquí expuesto, en la Sección 5 se detalla un ejemplo numérico y se validan los resultados usando ADAMS, un software de simulación dinámica disponible comercialmente. Finalmente, se concluye este trabajo en la Sección 6.

## 2. Descripción del manipulador

El manipulador bajo estudio, mostrado en la Fig. 1, se compone de una plataforma móvil cuadrada (6) de lado  $b$  conectada a una plataforma fija (0), también cuadrada, de lado  $a$ . Cada extremidad del robot se forma por cuatro pares cinemáticos,

comenzando desde la plataforma fija y terminando en la móvil, del tipo prismático, revoluto, universal y revoluto, donde el par prismático es el actuador lineal. De acuerdo al marco de referencia  $O_{XYZ}$  colocado al centro de la plataforma fija, las posiciones nominales de los pares cinemáticos antes citados están caracterizadas por los puntos  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$ , localizados a su vez por los vectores  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$ , respectivamente, mientras que el punto  $G$ , localizado por el vector  $g$ , marca la ubicación del centro de la plataforma móvil.

Con el fin de ejecutar movimiento de Schönflies, en cada cadena cinemática del manipulador, el eje de la primera revoluta, descrito por el vector unitario  $\hat{v}$ , es normal al plano de la plataforma fija y paralelo al primer eje del par universal. Por otro lado, el eje  $\hat{u}_i$  de la revoluta unida a la plataforma móvil es paralelo al segundo eje de aquella. Evidentemente, el movimiento del par prismático se produce a lo largo del eje de la primera revoluta y paralelo al eje  $Z$ . Cabe mencionar que desde un punto de vista cinemático el espacio entre esos dos pares cinemáticos, tal y como se reporta en algunas contribuciones (Cervantes-Sánchez et al., 2016; Varshovi-Jaghargha et al., 2014), en realidad no afecta el desempeño del robot y por lo tanto tal desfase debería ser eliminado con el propósito de simplificar el análisis cinemático del manipulador. Por otra parte,  $e$  denota el desfase entre los puntos  $B_i$  y  $C_i$  mientras que  $r$  denota la distancia entre los puntos  $C_i$  y  $D_i$ . Finalmente, la  $i$ -ésima coordenada generalizada  $q_i$  corresponde a la distancia variable entre los puntos  $A_i$  y  $B_i$ . Con esta topología la plataforma móvil puede trasladarse arbitrariamente y rotar alrededor de un eje cuya dirección es fija y paralela al eje  $Z$ .

En esta contribución no se presenta el análisis de movilidad del manipulador, esto es la determinación del número y tipo de grados de libertad, debido a que tal tópico está fuera de los objetivos de la misma. Sin embargo, es fácil llevar a cabo esta tarea siguiendo las metodologías existentes en la literatura, por ejemplo la detallada en (Chen et al., 2009).

## 3. Análisis de desplazamientos

Es bien sabido que el análisis de posición de manipuladores paralelos compuestos por cadenas tipo PRUR es una tarea compleja debido a la necesidad de calcular variables intermedias, Masouleh et al. (2011a).

Con el fin de abordar el análisis de desplazamiento del robot 4-PRUR, los puntos  $D_1 = (w_1, w_2, w_3)$  y  $D_3 = (w_4, w_5, w_3)$  se seleccionan como los puntos de control del manipulador bajo estudio (Gallardo-Alvarado, 2014). Note que, debido a las limitaciones en la movilidad de la plataforma móvil, ambos puntos comparten la misma coordenada en  $Z$ . Más aún, las coordenadas de los puntos  $D_2$  y  $D_4$  pueden expresarse en términos de las de  $D_1$  y  $D_3$  como sigue

$$\begin{aligned} D_2 &= (w_1 + w_4 - w_2 + w_5, w_2 + w_5 + w_1 - w_4, 2w_3)/2 \\ D_4 &= (w_1 + w_4 + w_2 - w_5, w_2 + w_5 - w_1 + w_4, 2w_3)/2 \end{aligned} \quad (1)$$

Con base en estas consideraciones, las ecuaciones de clausura del robot pueden generarse fácilmente sin necesidad de calcular la matriz de rotación. Por ejemplo, tomando en cuenta

que los ejes de los pares de revoluta de la plataforma móvil son tangentes al círculo de radio  $b/2$  generado por los puntos  $D_i$ , es posible escribir cuatro ecuaciones de clausura:

$$(\mathbf{d}_i - \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

donde  $\mathbf{n}_i$  es un vector que yace en el plano de la plataforma móvil y es perpendicular al eje de la  $i$ -ésima revoluta, tal que  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{d}_4 - \mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{d}_4 - \mathbf{d}_2$  y  $\mathbf{n}_4 = \mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_1$ , en donde  $(\cdot)$  denota el producto interno del álgebra vectorial usual de tres dimensiones.

Más aún, de acuerdo a los parámetros  $r$  y  $e$ , es posible escribir ocho ecuaciones como sigue:

$$(\mathbf{d}_i - \mathbf{c}_i) \cdot (\mathbf{d}_i - \mathbf{c}_i) = r^2, \quad (\mathbf{c}_i - \mathbf{b}_i) \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{b}_i) = e^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

Finalmente, se puede obtener una ecuación de compatibilidad considerando los puntos de control  $D_1$  y  $D_3$  como se muestra:

$$(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_3) \cdot (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_3) = 2b^2 \quad (4)$$

El análisis directo de posición consiste en calcular la *pose* de la plataforma móvil, como se observa desde la plataforma fija, de acuerdo a las coordenadas generalizadas  $q_i$ . Evidentemente, este problema es equivalente al cálculo de las coordenadas de los puntos de control  $D_1$  y  $D_3$ . Para este fin, considere que  $B_i = (bx_i, by_i, bz_i) = A_i + (0, 0, q_i)$  y  $C_i = (cx_i, cy_i, qi)$ . De esta manera, las Ecs. (2)-(4) conducen a un sistema de once ecuaciones, las cuales en la presente contribución se resuelven con la ayuda del software *PHCpack* de Verschelde (J, 1999), el cual es de acceso gratuito.

Por otro lado, el análisis inverso de posición del robot presentado consiste en determinar las coordenadas generalizadas  $q_i$  dada la *pose* de la plataforma móvil. Este análisis es sencillo si se le compara con el análisis de posición directo. En efecto, dados los valores  $w_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  y con base en (2) y (3), se pueden formular tres ecuaciones cuyas incógnitas son  $cx_i$ ,  $cy_i$  y  $q_i$  para cada extremidad del robot. Dichas ecuaciones se resuelven por el método de la eliminación dialítica de Sylvester (Tsai, 1999).

#### 4. Cinemática infinitesimal

Con la finalidad de resolver la cinemática infinitesimal del manipulador, es necesario tomar en cuenta que cualquier planteamiento basado en la teoría de tornillos debe modificarse cuando ésta se aplica en robots no-redundantes con menos de seis grados de libertad. En tales casos, si  $n < 6$  es el número de grados de libertad del mecanismo, los estados de velocidad y aceleración pueden tratarse como  $n$ -dimensionales de tal forma que sus correspondientes matrices sean de orden  $n \times n$  (Bonev et al., 2003). De esta manera, el álgebra de Lie  $se(3)$  puede emplearse para formular las ecuaciones de velocidad y de aceleración del robot en forma de tornillos infinitesimales considerando los estados de velocidad y aceleración como vectores de seis dimensiones. Ello facilita la implementación de las ecuaciones surgidas de tales análisis en códigos de cómputo simbólico. Sin embargo, para aprovechar esta posibilidad, la topología de los

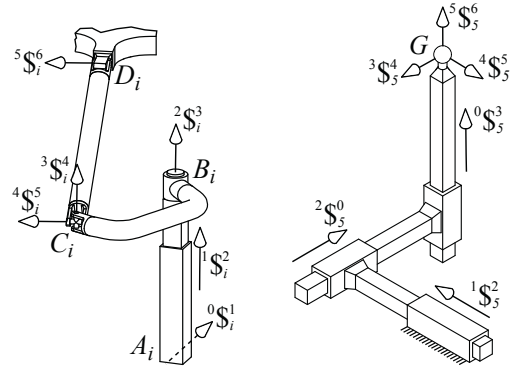


Figura 2: Tornillos asociados a los pares cinemáticos de la  $i$ -ésima cadena (izquierda) y de la cadena virtual (derecha)

manipuladores paralelos de grados de libertad limitados debe modificarse para completar seis grados de libertad para cada extremidad. En ese sentido, se hacen dos suposiciones en esta contribución: i) las extremidades se conectan a la plataforma fija por medio de pares de revoluta ficticios, es decir, se generan cadenas cinemáticas del tipo (R)PRUR, donde (R) denota a la revoluta imaginaria, la cual lógicamente posee una velocidad articular nula; ii) se introduce una cadena virtual pasiva central PPPS que conecta a la plataforma móvil con la fija. Con estas modificaciones en mente, en la Fig. 2 se muestran los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos del manipulador. Para mayores detalles sobre los tópicos desarrollados en esta sección, se sugiere consultar la referencia (Gallardo-Alvarado, 2016).

##### 4.1. Ecuación entrada-salida de velocidad

El estado de velocidad de un cuerpo rígido es una entidad cinemática que se compone de dos vectores: la velocidad angular del cuerpo rígido y la velocidad de un punto de dicho cuerpo. El estado de velocidad de la plataforma móvil (6) con respecto a la plataforma fija (0), el vector  ${}^0V_G^6$ , se expresa en forma de tornillos a través de cualquiera de las cadenas RPRUR como sigue:

$${}^0V_G^6 = {}_0\omega_1^i {}^0S_i^1 + {}_1\omega_2^i {}^1S_i^2 + {}_2\omega_3^i {}^2S_i^3 + {}_3\omega_4^i {}^3S_i^4 + {}_4\omega_5^i {}^4S_i^5 + {}_5\omega_6^i {}^5S_i^6 \quad (5)$$

donde, debido a la limitada movilidad del robot, se tiene que:

$${}^0V_G^6 = (0, 0, \omega_z; v_X, v_Y, v_Z) \quad (6)$$

Similar al análisis de posición, la solución del análisis de velocidad del robot, es decir, la obtención de la ecuación entrada-salida de velocidad del robot requiere del cálculo de algunas de las velocidades angulares pasivas del mismo. En ese sentido, aplicando la forma de Klein entre el tornillo  ${}^3S_i^4$  y ambos lados de la Ec. (5) permite obtener la velocidad articular pasiva  ${}^5\omega_6^i$  como:

$${}^5\omega_6^i = \frac{\{ {}^3S_i^4, {}^0V_G^6 \} - \dot{q}_i \{ {}^3S_i^4, {}^1S_i^2 \}}{\{ {}^3S_i^4, {}^5S_i^6 \}} \quad (7)$$

Más aún, considere que  $L_i$  es una línea en coordenadas de Plücker dirigida del punto  $B_i$  al  $C_i$ . Entonces, si se aplica la forma de Klein entre  $L_i$  y ambos lados de la Ec. (5), después de reducir términos se obtiene que

$${}^5\omega_6^i = \frac{\{L_i; {}^0V_G^6\} - \dot{q}_i \{L_i; {}^1\mathcal{S}_i^2\}}{\{L_i; {}^5\mathcal{S}_i^6\}} \quad (8)$$

Igualando (7) y (8) se obtiene

$$\{\tilde{\mathcal{S}}_i; {}^0V_G^6\} = \dot{q}_i \{\tilde{\mathcal{S}}_i; {}^1\mathcal{S}_i^2\} \quad (9)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{S}}_i = \{L_i; {}^5\mathcal{S}_i^6\} {}^3\mathcal{S}_i^4 - \{{}^3\mathcal{S}_i^4; {}^5\mathcal{S}_i^6\} L_i \quad (10)$$

Por otro lado, con base en la cadena cinemática virtual pueden escribirse dos expresiones como:

$$\{{}^0\mathcal{S}_5^1; {}^0V_G^6\} = \omega_X = 0, \quad \{{}^1\mathcal{S}_5^2; {}^0V_G^6\} = \omega_Y = 0 \quad (11)$$

Arreglando matricialmente las Ecs. (9)-(11), la ecuación entrada-salida de velocidad del manipulador resulta ser

$$\mathbf{A} {}^0V_G^6 = \mathbf{B} \mathbf{q}_v \quad (12)$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son dos matrices de orden  $6 \times 6$  dadas por  $\mathbf{A} = \mathbf{J}^T \Delta$ ,

$$\mathbf{B} = \text{diag} \left[ \{\tilde{\mathcal{S}}_1; {}^1\mathcal{S}_1^2\} \quad \{\tilde{\mathcal{S}}_2; {}^1\mathcal{S}_2^2\} \quad \{\tilde{\mathcal{S}}_3; {}^1\mathcal{S}_3^2\} \quad \{\tilde{\mathcal{S}}_4; {}^1\mathcal{S}_4^2\} \quad 1 \quad 1 \right]$$

y

$$\mathbf{J} = [\tilde{\mathcal{S}}_1 \quad \tilde{\mathcal{S}}_2 \quad \tilde{\mathcal{S}}_3 \quad \tilde{\mathcal{S}}_4 \quad {}^0\mathcal{S}_5^1 \quad {}^1\mathcal{S}_5^2] \quad (13)$$

es la matriz Jacobiana expandida (Choi and Ryu, 2012) de orden  $6 \times 6$ , mientras que  $\Delta$  es un operador de polaridad. Además,

$$\mathbf{q}_v = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad 0 \quad 0]^T \quad (14)$$

es el vector actuador de primer orden.

#### 4.2. Ecuación entrada-salida de aceleración

El estado de aceleración de un cuerpo rígido se define como un vector de 6 dimensiones que se forma por medio de dos vectores: la aceleración angular del cuerpo rígido y una componente dual que se obtiene a partir de la aceleración de un punto del cuerpo rígido y el estado de velocidad del mismo.

El estado de aceleración de la plataforma móvil (6) con respecto a la plataforma fija (0), el vector  ${}^0A_G^6$ , puede expresarse en forma de tornillos infinitesimales como

$${}^0A_G^6 = {}_0\alpha_1^i {}^0\mathcal{S}_1^1 + {}_1\alpha_2^i {}^1\mathcal{S}_2^2 + {}_2\alpha_3^i {}^2\mathcal{S}_3^3 + {}_3\alpha_4^i {}^3\mathcal{S}_4^4 + {}_4\alpha_5^i {}^4\mathcal{S}_5^5 + {}_5\alpha_6^i {}^5\mathcal{S}_6^6 + \mathcal{L}_i \quad (15)$$

donde  $\mathcal{L}_i$  es el  $i$ -ésimo tornillo de Lie de aceleración:

$$\mathcal{L}_i = \sum_{j=0}^4 \left[ j\omega_{j+1}^i \quad j\mathcal{S}_i^{j+1} \right], \quad \sum_{k=j+1}^5 k\omega_{k+1}^i \quad k\mathcal{S}_i^{k+1} \quad (16)$$

Es interesante mencionar que la parte primaria de  $\mathcal{L}_i$ , el vector de tres dimensiones  $P(\mathcal{L}_i)$ , es el vector cero debido a

los limitados grados de libertad del mecanismo. A continuación se prueba que efectivamente  $P(\mathcal{L}_i) = \mathbf{0}$  en el manipulador 4-PRUR.

Tomando en cuenta que la  $i$ -ésima velocidad articular  ${}^0\omega_1^i$  está asociada a su correspondiente par cinemático ficticio, tenemos que  ${}^0\omega_1^i = 0$ . Así, el vector de velocidad angular  $\omega$  de la plataforma móvil puede calcularse en términos de los pares de la  $i$ -ésima cadena del manipulador como sigue

$$\omega = {}^0\omega_1^1 + {}^1\omega_2^2 + {}^2\omega_3^3 + {}^3\omega_4^4 + {}^4\omega_5^5 + {}^5\omega_6^6 \quad (17)$$

o

$$\begin{aligned} \omega \hat{\mathbf{k}} &= {}_2\omega_3^i \hat{\mathbf{k}} + {}_3\omega_4^i \hat{\mathbf{k}} + {}_4\omega_5^i \hat{\mathbf{u}}_i + {}_5\omega_6^i \hat{\mathbf{u}}_i \\ \rightarrow \omega &= {}_2\omega_3^3 + {}_3\omega_4^4, \quad {}_4\omega_5^4 + {}_5\omega_6^6 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (18)$$

De aquí que  $P(\mathcal{L}_i)$  resulta ser

$$\begin{aligned} P(\mathcal{L}_i) &= {}^0\omega_1^1 \times ({}^1\omega_2^2 + {}^2\omega_3^3 + {}^3\omega_4^4 + {}^4\omega_5^5 + {}^5\omega_6^6) + \\ &\quad + {}^1\omega_2^2 \times ({}^2\omega_3^3 + {}^3\omega_4^4 + {}^4\omega_5^5 + {}^5\omega_6^6) + \\ &\quad + {}^2\omega_3^3 \times ({}^3\omega_4^4 + {}^4\omega_5^5 + {}^5\omega_6^6) + {}^3\omega_4^4 \times ({}^4\omega_5^5 + {}^5\omega_6^6) + \\ &\quad + {}^4\omega_5^5 \times {}^5\omega_6^6 = {}_2\omega_3^3 \times {}_3\omega_4^4 = {}_2\omega_3^3 \hat{\mathbf{k}} \times {}_3\omega_4^4 \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (19)$$

Por otro lado, debido a la movilidad limitada del robot algunos términos de  ${}^0A_G^6$  son nulos. Más específicamente

$${}^0A_G^6 = (\alpha; v_G - \omega \times v_G) = (0, 0, \alpha_z; a_G - \omega \times v_G) \quad (20)$$

Finalmente, siguiendo un procedimiento similar al del análisis de velocidad, la ecuación entrada-salida de aceleración del manipulador bajo estudio resulta ser

$$\mathbf{A} {}^0A_G^6 = \mathbf{B} \mathbf{q}_a + \mathbf{C}^T \quad (21)$$

donde  $\mathbf{q}_a = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_3 \quad \ddot{q}_4 \quad 0 \quad 0]$  es el vector actuador de segundo orden mientras que

$$\mathbf{C} = [\{\tilde{\mathcal{S}}_1; \mathcal{L}_1\} \quad \{\tilde{\mathcal{S}}_2; \mathcal{L}_2\} \quad \{\tilde{\mathcal{S}}_3; \mathcal{L}_3\} \quad \{\tilde{\mathcal{S}}_4; \mathcal{L}_4\} \quad 0 \quad 0]$$

es la matriz complementaria de aceleración.

#### 4.3. Análisis de singularidades

El medio para explicar las singularidades del robot es la Ec. (12). En efecto, estudiando el rango de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , es posible elucidar las singularidades del manipulador. Para mayor claridad, es recomendable simplificar las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  con la finalidad de obtener resultados comprensibles.

La arquitectura del robot 4-PRUR es tal que  $\{{}^3\mathcal{S}_i^4; {}^1\mathcal{S}_i^2\} = 1$  y  $\{L_i; {}^1\mathcal{S}_i^2\} = 0$ . Entonces, de las Ecs. (7) y (8) puede escribirse

$$\tilde{\mathcal{S}}_i = k_i {}^3\mathcal{S}_i^4 - L_i \quad (22)$$

donde

$$k_i = \frac{\{L_i; {}^5\mathcal{S}_i^6\}}{\{{}^3\mathcal{S}_i^4; {}^5\mathcal{S}_i^6\}} \quad (23)$$

Así, la matriz  $\mathbf{B}$  se reduce a

$$\mathbf{B} = \text{diag} [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad 1 \quad 1] \quad (24)$$

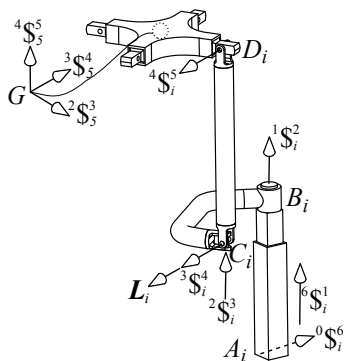


Figura 3: Singularidad estructural:  ${}^3S_i^4$  y  ${}^5S_i^6$  son concurrentes.

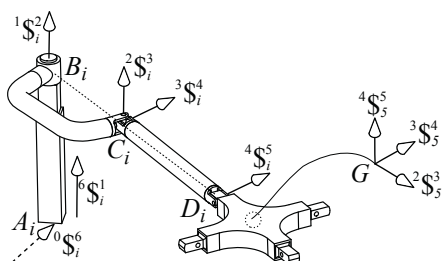


Figura 4: Singularidad inversa:  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$  son colineales

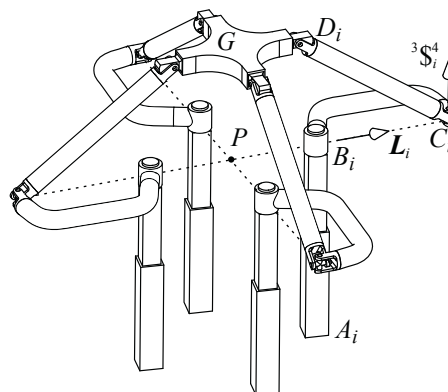


Figura 5: Singularidad directa: las líneas  $L_i$  intersectan un punto común  $P$ .

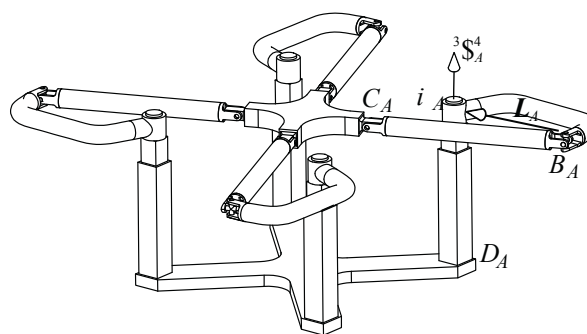


Figura 6: Singularidad combinada

Por otro lado, es evidente que la matriz **A** y la matriz **J** poseen las mismas singularidades.

Las ecuaciones anteriores son la base el análisis de singularidades del manipulador paralelo 4-PRUR. Como un paso inicial, considere que las matrices **J** y **B** dependen de  $k_i$ . Acorde a la Ec. (23), si los tornillos  ${}^3S_i^4$  y  ${}^5S_i^6$  son concurrentes entonces el término  $\{{}^3S_i^4, {}^5S_i^6\}$  se anula y las matrices **J** y **B** son indeterminadas, produciendo una singularidad estructural como la que se muestra en la Fig. 3.

Por otra parte, una singularidad inversa ocurre cuando la matriz **B** es singular; lo anterior se presenta, por ejemplo, cuando  $\det \mathbf{B} = k_1 k_2 k_3 k_4 = 0$  o sea cuando los puntos  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$  de cualquier extremidad  $i$  del manipulador son colineales, tal y como se muestra en la Fig. 4.

Más aún, una singularidad directa surge cuando la matriz **A** es singular, por ejemplo cuando  $\det \mathbf{J} = 0$ . Es evidente que en este caso la matriz Jacobiana **J** no es invertible. Debido a que la solución del análisis directo de posición del robot bajo estudio no está dada de forma cerrada, la determinación de las singularidades directas es más complicado que la obtención de las singularidades inversas debido a que el  $\det \mathbf{J}$  no está expresado explícita o simbólicamente en términos de las coordenadas generalizadas  $q_i$ . Sin embargo, la contribución contiene las herramientas necesarias para detectar las singularidades directas evidentes del manipulador.

Con referencia a la Fig. 5 considere que las líneas  $L_i$  concurren en el punto  $P$ . De esta manera, si se considera el punto  $P$  como polo de referencia, y con la finalidad de calcular las coordenadas de Plücker de los tornillos, las componentes sobre el eje  $Z$  de la parte dual de los cuatro tornillos  ${}^3S_i^4$  y las de las

líneas  $L_i$  son cero, haciendo que todos los elementos de la sexta fila de **J**, ver (13), causando que  $\det \mathbf{J} = 0$ .

Otra singularidad directa puede encontrarse cuando  $\tilde{S}_1$  y  $\tilde{S}_3$  son paralelas. Si lo anterior ocurre, es posible escribir la combinación lineal  $\lambda_1 \tilde{S}_1 + \lambda_3 \tilde{S}_3 = \mathbf{0}$ , donde  $\lambda_{1,2} \neq 0$ , lo que implica dos hechos: a)  $L_1$  y  $L_3$  yacen en el plano  $XY$ , y por supuesto, pueden ser paralelos el uno del otro; b) Las partes primarias de los tornillos  ${}^3S_1^4$  y  ${}^3S_3^4$  son paralelos al eje  $Z$ . En tales casos se pierde el control de la plataforma móvil. A este respecto, es interesante observar que en una postura simétrica, el manipulador está en una configuración singular. Obviamente, es posible encontrar otras singularidades directas mediante el análisis de la matriz **J**. Sin embargo, el cálculo de singularidades directas en forma *loci* está fuera del alcance de la presente contribución.

Finalmente, se presenta una singularidad combinada cuando ambas matrices **A** y **B** son singulares. Esto se da, por ejemplo, cuando las líneas  $L_i$  son coplanares y en al menos una de las cadenas los puntos  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$  son colineales, tal y como se muestra en la Fig. 6.

### 5. Caso de estudio

Con la finalidad de ejemplificar el método, en esta sección se presenta un caso de estudio. Para ello, considere que los parámetros geométricos del robot, expresados en milímetros, están dados por  $a = 400$ ,  $b = 140$ ,  $r = 200$ ,  $e = 100$ ,  $A_1 =$

$(200, 200, 0)$ ,  $A_2 = (-200, 200, 0)$ ,  $A_3 = (-200, -200, 0)$ ,  $A_4 = (200, -200, 0)$ .

La primera parte del ejemplo consiste en calcular todas las soluciones del análisis directo de posición dadas las coordenadas generalizadas  $q_1 = 200, q_2 = 180, q_3 = 210, q_4 = 150$ . Aplicando el método se obtienen 256 soluciones, donde 10 son reales y se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Soluciones reales del análisis directo de posición del ejemplo numérico, en milímetros

Sol.	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$
23	164.57	97.953	120.25	21.805	-39.230
39	91.204	41.484	288.77	-88.876	-40.802
110	9.9384	-7.3031	283.48	-130.19	-147.17
114	-29.374	56.875	115.16	-172.61	-79.815
121	42.839	89.620	182.50	-42.013	-89.266
125	40.136	89.122	288.55	-42.199	-90.936
160	40.285	89.479	75.540	-41.853	-90.669
200	89.020	42.267	182.65	-89.865	-42.586
252	91.282	40.856	75.531	-88.839	-41.342
254	161.97	111.11	277.08	25.043	-31.901

La siguiente parte del caso de estudio está dedicada a la obtención del espacio de trabajo. Debido a que la solución del análisis directo de posición no es de forma cerrada, la estrategia más conveniente para estimarlo consiste en calcular el espacio de trabajo discretizado. Para ello, considere que las coordenadas generalizadas están restringidos a los intervalos  $180 \leq q_1 \leq 220$ ,  $160 \leq q_2 \leq 200$ ,  $190 \leq q_3 \leq 230$ ,  $130 \leq q_4 \leq 180$ . Además, considere que cada coordenada generalizada se incrementa 20 mm a cada paso. De esta manera, las coordenadas resultantes del punto  $G$  del manipulador se muestran en la Fig. 7.

En ese sentido cabe mencionar que dada la falta de una solución en forma cerrada del análisis de posición directo del manipulador bajo estudio, cualquier intento de generar el espacio de trabajo con base en dicho análisis será solo una mera aproximación. La estrategia para obtener el espacio de trabajo que se muestra en la Fig. 7 se fundamenta en aplicar, por separado, el método de Newton-Raphson tomando como valores iniciales cada una de las 10 soluciones del análisis directo de posición.

La parte final del caso de estudio tiene que ver con los análisis de velocidad y de aceleración del robot. Para esta tarea, se elige como configuración de referencia la solución 39 de la Tabla 1. Además, las coordenadas generalizadas están dadas por las funciones periódicas  $q_1 = -40 \sin(t) \cos(t)$ ,  $q_2 = 50 \sin(t) \cos(t)$ ,  $q_3 = 60 \sin(t) \cos(t)$ ,  $q_4 = 30 \sin(t) \cos(t)$ . El comportamiento temporal de la cinemática infinitesimal del centro de la plataforma móvil se muestra en la Fig. 8, los cuales concuerdan con los obtenidos en un software especializado en la simulación dinámica de sistemas multicuerpo, como ADAMS, los cuales se presentan en la Fig. 9.

## 6. Conclusión

En este trabajo fue presentado el análisis cinemático del manipulador paralelo generador del movimiento de Schönflies

de topología 4-PRUR. El análisis de posición se planteó de tal forma que para la generación de las ecuaciones vectoriales de clausura fueron usados dos puntos de la plataforma móvil y con ello se evitó el uso de un segundo marco de referencia así como el cálculo de su correspondiente matriz de rotación respecto al marco global, lo que representa una ventaja importante sobre otros métodos reportados en la literatura. Por otro lado, las ecuaciones de entrada-salida de velocidad y de aceleración del robot fueron obtenidas sistemáticamente mediante el uso de la teoría de tornillos recíprocos. Para ello, se introdujo una cadena virtual entre las plataformas móvil y fija, y se incluyeron además pares cinemáticos ficticios en las cadenas del manipulador con lo que se evitó el manejo de matrices Jacobianas de rango deficiente y permitiendo plantear las ecuaciones de entrada-salida de velocidad y aceleración de forma simple y compacta. Además, con base en la ecuación resultante del análisis de velocidad, se abordó el análisis de singularidades señalando algunos casos donde estas configuraciones pueden presentarse. Finalmente, con la finalidad de ilustrar el método, se presentó un ejemplo numérico cubriendo la mayoría de los puntos tratados en la contribución.

## English Summary

### Kinematics by Means of Screw Theory of The 4-PRUR Parallel Manipulator

#### Abstract

In this work the kinematics of a parallel manipulator performing Schönflies motion is investigated by means of the theory of screws. As an intermediate step, the displacement analysis is reported in semi-closed form solution based on the coordinates of two points embedded in the moving platform. This strategy allows to employ only one reference frame avoiding the computation of the rotation matrix. The input-output equations of velocity and acceleration are systematically obtained by resorting to reciprocal-screw theory. To this aim, the robot is treated as a six-degrees-of-freedom parallel manipulator incorporating pseudo kinematic pairs connecting the limbs to the fixed platform and one virtual kinematic chain in order to apply without restrictions the Lie algebra  $se(3)$  of the Euclidean group  $SE(3)$ . The singularity analysis is investigated based on the input-output equation of velocity. Numerical examples are included in order to show the application of the method.

#### Keywords:

Parallel robot, Schönflies motion, Screw theory, Kinematics

## Agradecimiento

Los autores agradecen el apoyo brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México, a través de su Sistema Nacional de Investigadores, para la realización de la presente contribución.

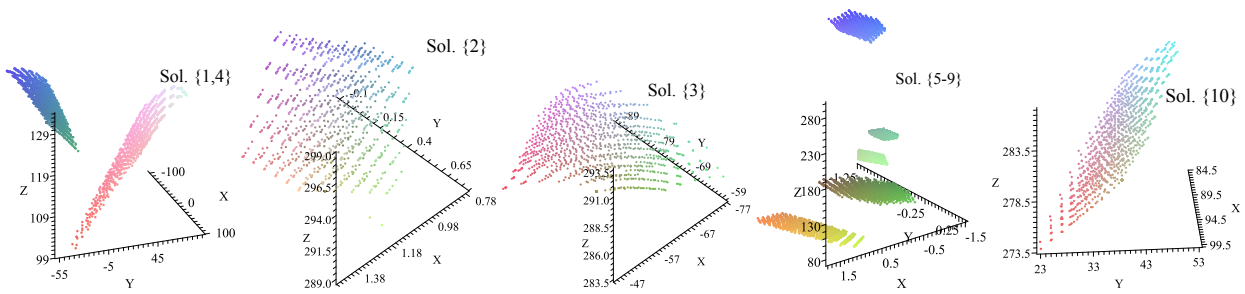


Figura 7: Espacio de trabajo del manipulador paralelo Schönflies 4-PRUR obtenido del análisis directo de posición

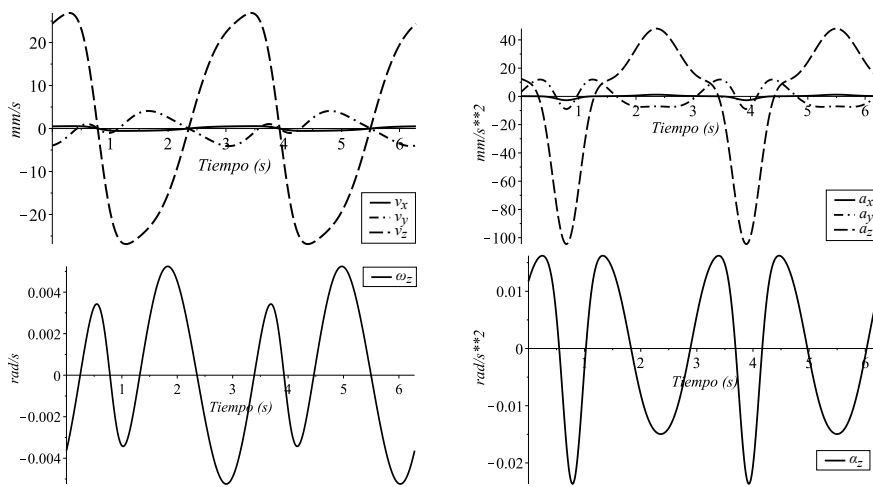


Figura 8: Cinemática infinitesimal del manipulador usando teoría de tornillos

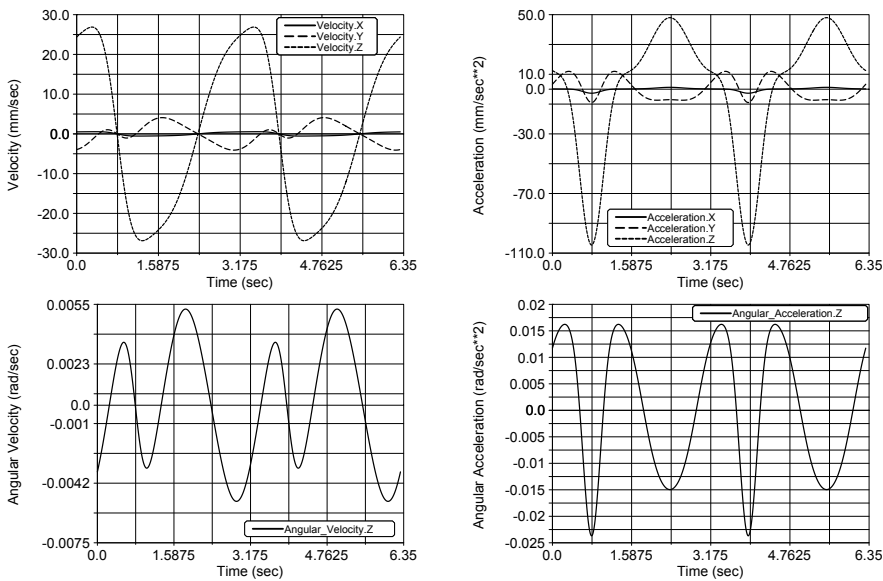


Figura 9: Cinemática infinitesimal del manipulador usando ADAMS

## Referencias

- Alessandro, C., Rosario, S., 2014. Elastodynamic optimization of a 3T1R parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory* 73, 184–196.
- Altuzarra, O., Pinto, C., Sandru, B., Hernandez, A., 2011. Optimal dimensioning for parallel manipulators: Workspace, dexterity, and energy. *Journal of Mechanical Design* 133 (4), 041007.
- Amine, S., Masouleh, M. T., Caro, S., Wenger, P., Gosselin, C., 2012. Singularity conditions of 3T1R parallel manipulators with identical limb structures. *Journal of Mechanisms and Robotics* 4 (1), 011011.
- Angeles, J., Caro, S., Khan, W., Morozov, A., 2006a. The design and prototyping of an innovative schönflies motion generator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science* 220 (C7), 935–944.
- Angeles, J., Caro, S., Khan, W., Morozov, A., 2006b. Kinetostatic design of an innovative schönflies-motion generator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 220 (7), 935–943.
- Bonev, I. A., Zlatanov, D., Gosselin, C. M., 2003. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory. *Journal of Mechanical Design* 125 (3), 573–581.
- Cao, Y., Chen, H., Qin, Y., Liu, K., Ge, S., Zhu, J., Wang, K., Yu, J., Ji, W., Zhou, H., 2016. Type synthesis of fully-decoupled three-rotational and one-translational parallel mechanisms. *Int J Adv Robot Syst* 13, 79.
- Cervantes-Sánchez, J. J., Rico-Martínez, J. M., Pérez-Muñoz, V. H., 2016. An integrated study of the workspace and singularity for a schönflies parallel manipulator. *Journal of applied research and technology* 14 (1), 9–37.
- Chen, Q., Li, Q., Wu, C., Hu, X., Huang, Z., June 2009. Mobility analysis of 4-RPRPR and 4-RRRPR parallel mechanisms with bifurcation of schönflies motion by screw theory. In: 2009 ASME/IFToMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots. pp. 279–284.
- Choi, H.-B., Ryu, J., 2012. Singularity analysis of a four degree-of-freedom parallel manipulator based on an expanded  $6 \times 6$  jacobian matrix. *Mechanism and Machine Theory* 57, 51–61.
- Clavel, R., April 1988. Delta, a fast robot with parallel geometry. In: *Proceedings 18th international symposium on industrial robots*. Lausanne: IFS Publications, Switzerland, pp. 91–100.
- Corves, B., Brinker, J., Lorenz, M., Wahle, M., 2016. Design methodology for translational parallel manipulators exhibiting actuation redundancy. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 230 (3), 425–436.
- Gallardo-Alvarado, J., 2014. A simple method to solve the forward displacement analysis of the general six-legged parallel manipulator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 30 (1), 55–61.
- Gallardo-Alvarado, J., 2016. Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory. Springer International Publishing Switzerland.
- J, V., 1999. Algorithm 795: PHCpack: a general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Trans Math Soft* 25, 251–76.
- Kang, L., Oh, S.-M., Kim, W., Yi, B.-J., 2015. Design of a new gravity balanced parallel mechanism with schönflies motion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. DOI: 10.1177/0954406215605862
- Kim, S. M., Shin, K., Yi, B.-J., Kim, W., 2014. Development of a novel two-limbed parallel mechanism having schönflies motion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 0954406214532633.
- Kim, S. M., Shin, K., Yi, B.-J., Kim, W., 2015. Development of a novel two-limbed parallel mechanism having schönflies motion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 229 (1), 136–154.
- Kim, S. M., Yi, B.-J., Kim, W., 2013. Forward kinematic singularity avoiding design of a schönflies motion generator by asymmetric attachment of subchains. *International Journal of Control, Automation and Systems* 11 (1), 116–126.
- Lee, P.-C., 2013. One novel isoconstrained parallel robot with schönflies-motion. In: *ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, pp. V06BT07A005–V06BT07A005.
- Lee, P.-C., Lee, J.-J., 2016. On the kinematics of a new parallel mechanism with schönflies motion. *Robotica* 34 (9), 2056–2070.
- Liu, S., Huang, T., Mei, J., Zhao, X., Wang, P., Chetwynd, D. G., 2012. Optimal design of a 4-DOF SCARA type parallel robot using dynamic performance indices and angular constraints. *Journal of Mechanisms and Robotics* 4 (3), 031005.
- Makino, H., Furuya, N., 1982. Scara robot and its family. In: *Proc. 3rd Int. Conf. on Assembly Automation*. pp. 433–444.
- Masouleh, M. T., Gosselin, C., Saadatzi, M. H., Kong, X., Taghirad, H. D., 2011a. Kinematic analysis of 5-RPUR (3T2R) parallel mechanisms. *Mechanica* 46 (1), 131–146.
- Masouleh, M. T., Walter, D. R., Husty, M., Gosselin, C., 2011b. Solving the forward kinematic problem of 4-DOF parallel mechanisms (3T1R) with identical limb structures and revolute actuators using the linear implicitization algorithm. In: *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, pp. 969–978.
- Nurahmi, L., Caro, S., Wenger, P., Schadlbauer, J., Husty, M., 2016. Reconfiguration analysis of a 4-RUU parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory* 96, 269–289.
- Pierrot, F., Nabat, V., Company, O., Krut, S., Poignet, P., 2009. Optimal design of a 4-dof parallel manipulator: from academia to industry. *IEEE Transactions on Robotics* 25 (2), 213–224.
- Richard, P.-L., Gosselin, C. M., Kong, X., 2007. Kinematic analysis and prototyping of a partially decoupled 4-DOF 3T1R parallel manipulator. *Journal of Mechanical Design* 129 (6), 611–616.
- Rolland, L., 1999. The manta and the kanuk: Novel 4-dof parallel mechanisms for industrial handling. *Proc. of ASME Dynamic Systems and Control Division IMECE* 99, 831–844.
- Salgado, O., Altuzarra, O., Petuya, V., Hernández, A., 2008. Synthesis and design of a novel 3T1R fully-parallel manipulator. *Journal of Mechanical Design* 130 (4), 042305.
- Schönflies, A., 1887. Über gruppen von bewegungen. *Mathematische Annalen* 28 (3), 319–342.
- Solazzi, M., Gabardi, M., Frisoli, A., Bergamasco, M., 2014. Kinematics analysis and singularity loci of a 4-UPU parallel manipulator. In: *Advances in Robot Kinematics*. Springer, pp. 467–474.
- Tsai, L.-W., 1999. Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators. John Wiley & Sons.
- Varshovi-Jaghargha, P., Naderia, D., Tale-Masouleh, M., 2014. Forward kinematic problem of three 4-DOF parallel mechanisms (4-PRUR1, 4-PRUR2 and 4-PUU) with identical limb structures performing 3T1R motion pattern. *Scientia Iranica B*.
- Wu, G., 2016. Kinematic analysis and optimal design of a wall-mounted four-limb parallel schönflies-motion robot for pick-and-place operations. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 1–15.
- Xie, F., Liu, X.-J., 2015. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform. *Journal of Mechanisms and Robotics* 7 (4), 041015.
- Xie, F., Liu, X.-J., 2016. Analysis of the kinematic characteristics of a high-speed parallel robot with schönflies motion: Mobility, kinematics, and singularity. *Frontiers of Mechanical Engineering* 11 (2), 135–143.
- Yi, B.-J., Kim, S. M., Kwak, H. K., Kim, W., 2013. Multi-task oriented design of an asymmetric 3T1R type 4-DOF parallel mechanism. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 227 (10), 2236–2255.
- Zhao, J.-S., Fu, Y.-Z., Zhou, K., Feng, Z.-J., 2006. Mobility properties of a schönflies-type parallel manipulator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 22 (2), 124–133.