

Un Nuevo Método de Identificación Basado en la Respuesta Escalón en Lazo Abierto de Sistemas Sobre-amortiguados

Luis A. Mora^{a,*}, Jhon E. Amaya^b

^aLaboratorio de Instrumentación, Control y Automatización, Universidad Nacional Experimental del Táchira, Av. Universidad. San Cristóbal 5001, Venezuela

^bLaboratorio de Computación de Alto Rendimiento, Universidad Nacional Experimental del Táchira, Av. Universidad. San Cristóbal 5001, Venezuela

Resumen

En este documento se presenta un nuevo método de identificación basado en la respuesta escalón en lazo abierto de sistemas sobre-amortiguados. Inicialmente el comportamiento transitorio de funciones de transferencia con polos reales múltiples es analizado, estableciendo formulas analíticas para estimar los tiempos que tardan dichos sistemas en alcanzar determinados puntos de su curva de reacción ante estímulos del tipo escalón, incluyendo el tiempo de asentamiento para los criterios del 2 % y 5 % de error. Posteriormente se ha desarrollado un método de identificación utilizando 3 puntos característicos (t_k, y_k) de la curva de reacción, permitiendo estimar el orden proceso N , la constante de tiempo T de los polos múltiples y el tiempo muerto L del modelo aproximado. Para evaluar el rendimiento del método propuesto, 3 funciones de transferencia de fase mínima y 1 de fase no mínima son utilizadas para comparar con otros métodos de identificación, así como también, un modelo de un reactor químico no isotérmico; estableciendo como índice de eficiencia la raíz del error cuadrático promedio (RMSE) de la respuesta transitoria y en frecuencia de los modelos identificados respecto a las respuestas de los sistemas originales con diferentes valores relación señal a ruido (SNR). A partir de los resultados obtenidos se observó que el método propuesto logra buenas aproximaciones de las respuestas transitorias y en frecuencia, siendo un método sencillo y que requiere una baja carga computacional en comparación con otros métodos.

Palabras Clave:

Identificación de Procesos, Polos reales múltiples, Respuesta escalón, Raíz del error cuadrático promedio, Respuesta transitoria, Entrada escalón, Respuesta en lazo abierto, Relación señal a ruido.

1. Introducción

En ingeniería de control los métodos de identificación son técnicas de modelado matemático de sistemas a partir de datos experimentales, cuyo objetivo obtener modelos apropiados para estudios de simulación, diseño de algoritmos de predicción, detección de fallas, síntesis de controladores, entre otras aplicaciones (Söderström y Stoica, 1989). Esencialmente los métodos de identificación utilizan diferentes tipos de pruebas donde se introduce un estímulo predeterminado al sistema para luego adquirir la información necesaria para la estimación del modelo (Keesman, 2011), siendo la prueba de respuesta escalón en lazo abierto una de las más antiguas y utilizada en procesos industriales debido a la simplicidad de su implementación (Liu y Gao, 2010), y es utilizada para obtener modelos basados en funciones de transferencia (Wang et al., 2001). Una práctica común la aproximación a modelos de primer orden con

tiempo de retardo o FOPDT por sus siglas en inglés, ya que son capaces de representar la dinámica de muchos procesos en el rango de frecuencia de interés para el diseño de controlador de realimentación. Sin embargo, para muchos procesos los modelos FOPDT no describen adecuadamente su comportamiento dinámico, donde los modelos orden superior podrían mejorar significativamente la precisión de la aproximación. Por ejemplo, en la identificación de procesos con relaciones internas complejas, como el tratamiento de aguas residuales utilizando lodos activados mediante bioreactores aerobios con recirculación de lodos, así como también, en reactores químicos no-isotérmicos continuamente agitados.

Para la prueba de respuesta escalón la variable manipulada del proceso $x(t)$ es fijada en un valor inicial x_0 y se espera a que proceso se estabilice, para posteriormente someter a $x(t)$ a un cambio brusco del tipo escalón en un instante de tiempo t_0 , es decir,

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & t < t_0 \\ x_{\infty} & t \geq t_0 \end{cases} \quad (1)$$

* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: lmora@unet.edu.ve (Luis A. Mora),

jedgar@unet.edu.ve (Jhon E. Amaya)

URL: 1car.unet.edu.ve (Jhon E. Amaya)

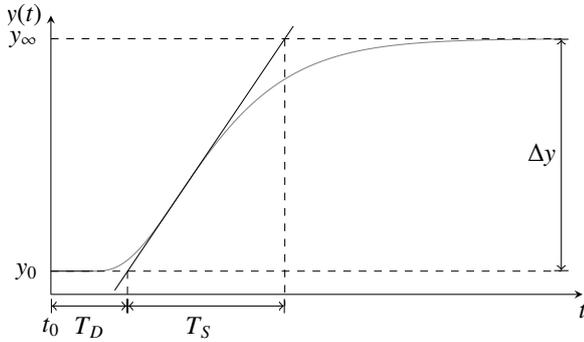


Figura 1: Método de identificación de Strejc (1959).

para posteriormente observar la salida del proceso $y(t)$.

Como se recoge en Liu et al. (2013), se han desarrollado múltiples métodos de identificación basados en una prueba escalón en lazo abierto utilizando diferentes estrategias, entre ellos hay métodos basados en integrales, métodos que utilizan una recta tangente al punto de máxima pendiente y métodos que se basan en puntos característicos de la respuesta transitoria, entre otros.

Uno de los primeros métodos de aproximación para modelos de orden superior fue propuesto por Strejc (1959), donde se utiliza una tangente al punto de máxima pendiente de la curva de reacción para aproximar el comportamiento dinámico de proceso a un modelo de la forma:

$$P(s) = \frac{k_p}{(T_s + 1)^N} \quad (2)$$

En este método se utilizan los instantes en los cuales la recta tangente alcanza el valor inicial y el valor de asentamiento de la respuesta dinámica para determinar los diferenciales de tiempo T_D y T_S , como se observa en la figura 1. Para la identificación de los parámetros del modelo Strejc (1959) tabuló los valores característicos de las relaciones T_D/T_S , T_D/T y T_S/T de funciones de transferencia como la presentada en (2), para $N \geq 1$; por lo que a partir del valor de T_D/T_S obtenido de la respuesta escalón del proceso a identificar, se establece el orden N relacionado a dicho valor y T se obtiene promediando los resultados estimados a partir de los valores de T_D/T y T_S/T relacionados al orden estimado.

La estimación de k_p se realiza mediante:

$$k_p = \frac{y_\infty - y_0}{A_x} \quad (3)$$

donde $A_x = x_\infty - x_0$, es la amplitud del escalón de entrada. Este método es muy utilizado debido a la facilidad de poder estimar de forma gráfica T_D y T_S , sin necesidad de algoritmos computacionales, haciéndolo atractivo para aplicarlo en campo.

Más recientemente Wang et al. (2001) propuso un método basado en integrales múltiples de la respuesta escalón y variables instrumentales para realizar una aproximación a modelos de orden superior con asignación arbitraria de polos y ceros, como se observa en (4), donde a diferencia del método de Strejc (1959), se incluye la estimación de un tiempo muerto L .

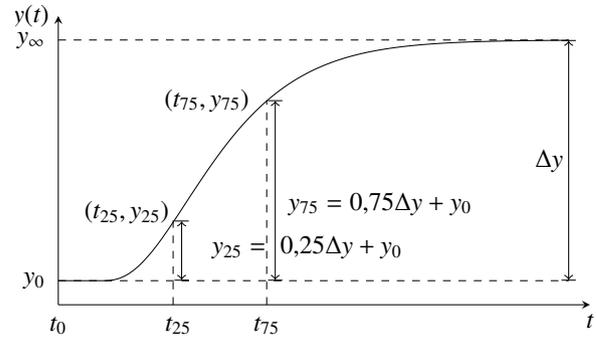


Figura 2: Instantes de la respuesta transitoria usados por el método 123c para polos múltiples de Alfaro (2006).

$$P(s) = \frac{b_1 s^{N-1} + b_2 s^{N-2} + \dots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + a_N} e^{-Ls} \quad (4)$$

Para aplicar este método es necesario establecer previamente el valor N para posteriormente estimar los coeficientes del numerador y denominador de la función de transferencia junto con L .

Otro método basado en integrales fue presentado por Liu y Gao (2010), el cual se centra en la definición de la transformada de Laplace, proponiendo 4 algoritmos para realizar aproximaciones a distintos tipos de modelos. En el primer algoritmo se define un parámetro α , que representa la parte real de S en la función de transferencia, para realizar una aproximación de la función de transferencia y sus primeras 2 derivadas, para estimar los valores de T , L y k_p de un modelo como el observado en (8).

En lo referente a métodos basados en puntos característicos de curva de reacción, Jhonson y Moradi (2005) utiliza los instantes de tiempo en el cual la curva de reacción alcanza el 30 %, 50 %, 70 % y 90 % de su valor de estabilización y un parámetro adicional llamado M_∞ el cual se determina mediante:

$$M_\infty = \int_0^{t_\infty} (y_\infty - y(t)) dt \quad (5)$$

donde y_∞ y t_∞ son el valor de asentamiento del proceso y el tiempo final de adquisición de datos en la prueba escalón respectivamente. A partir de estos valores obtenidos de la respuesta transitoria se aplica un simple algoritmo de 4 pasos para obtener un modelo de segundo orden con polos reales diferentes y tiempo muerto.

Otro método que utiliza puntos característicos de la respuesta transitoria fue presentado por Alfaro (2006), denominado método 123c y permite obtener modelos de primer y segundo orden, en el caso de aproximaciones a sistemas de segundo orden con polos reales múltiples y tiempo muerto, se utilizan los instantes donde la respuesta transitoria alcanza el 25 % y 75 % de y_∞ (figura 2), para estimar T y L mediante (6) y (7) respectivamente. El valor de k_p se estima como se indica en (3).

$$T = 0,5776(t_{75} - t_{25}) \quad (6)$$

$$L = 1,5552t_{25} - 0,5552t_{75} \quad (7)$$

Otro trabajo a destacar es el realizado por Ljung (1987), donde se describen diversos métodos computacionales para la estimación de parámetros y su aplicación en la identificación de sistemas. Lo cual ha servido como base para el desarrollo del "System Identification Toolbox" presente el software Matlab y que permite la estimación de diversos tipos de modelos a partir de datos recolectados experimentalmente, entre ellos, modelos de procesos con 1, 2 o 3 polos, con presencia ceros y tiempos de retardo.

Por otro lado, el objetivo de este trabajo es presentar un método de identificación sencillo, que no requiera de conocimientos avanzados para su aplicación. Para ello se establece un modelo basado en sistemas de polos reales múltiples con tiempo muerto de la forma:

$$P(s) = \frac{k_p e^{-Ls}}{(Ts + 1)^N} \quad (8)$$

donde N representa el orden proceso, T la constante de tiempo de los polos, L el tiempo muerto o retardo y k_p la ganancia. El motivo de establecer un modelo de la forma presentada en (8), es realizar buenas aproximaciones de la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia del sistema o proceso a identificar, estimando solo 4 parámetros (k_p , L , T y N) independientemente del orden del modelo obtenido. Dichos parámetros son calculados a partir de la información de 3 puntos característicos de la respuesta transitoria ante estímulos del tipo escalón en lazo abierto, permitiendo obtener modelos con mejor aproximación, tanto al orden del sistema original como de sus respuestas en frecuencia y transitoria.

El documento ha sido dividido en las siguientes partes. En la Sección 2 se realiza un estudio de la respuesta transitoria de sistemas de polos múltiples, desarrollando formulas analíticas que permiten estimar varios instantes de la respuesta transitoria de este tipos sistemas, incluyendo el tiempo de asentamiento según los criterios del 2% y 5% de error. En la Sección 3 se describen los fundamentos matemáticos del desarrollo del método de identificación propuesto y se establecen las formulas analíticas para aproximar el comportamiento de la respuesta escalón de sistemas sobre-amortiguados a modelos como el que se observa en (8). En la Sección 4 se analiza la eficiencia del método propuesto, comparándolo con otros 5 métodos de identificación, considerando la presencia de ruido en la señal de salida de las funciones de transferencia de referencia utilizadas.

2. Comportamiento de Sistemas con Polos Reales Múltiples

Un sistema con polos reales múltiples, también conocido como modelo general con polos repetidos (GRP) es aquel cuya función de transferencia tiene la forma:

$$G(s) = \frac{Y_G(s)}{X(s)} = \frac{K_G}{(Ts + 1)^N} \quad (9)$$

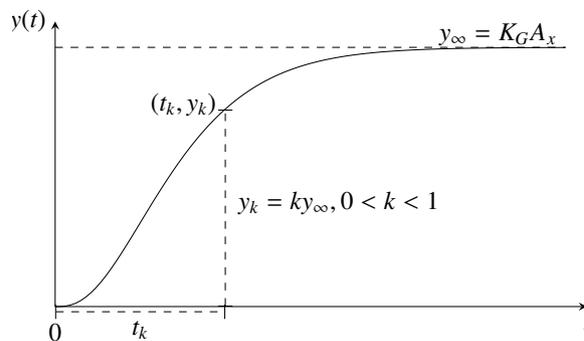


Figura 3: Respuesta escalón de un GRP

donde $Y_G(s)$ representa la variable de salida, $X(s)$ la entrada, K_G la ganancia del sistema, T la constante de tiempo y N el orden del proceso. Considerando una entrada del tipo $x(t) = A_x u(t)$, entonces $y_G(t)$ exhibirá un comportamiento sin oscilaciones descrito por:

$$y_G(t) = K_G A_x \left(1 - e^{-t/T} \sum_{i=1}^N \frac{(t/T)^{i-1}}{(i-1)!} \right) \quad (10)$$

cuyo valor de estabilización es $y_\infty = K_G A_x$. Considerando que en un tiempo t_k , la respuesta del proceso alcanza un valor $y_G(t_k) = y_k = K_G A_x k$ con $0 < k < 1$, como se muestra en la figura 3. El tiempo en que el proceso alcanza dicho valor se puede aproximar por $t_k \approx f_k(N)T$, donde $f_k(N)$ es una función relacionada al valor específico de k . Si se sustituye esta aproximación en (10), se puede establecer una relación entre los valores de k , N y $f_k(N)$, como se observa en (11).

$$(1 - k) = e^{-f_k(N)} \sum_{i=1}^N \frac{(f_k(N))^{i-1}}{(i-1)!} \quad (11)$$

Esto permite que los valores de $f_k(N)$ puedan ser estimado para cualquier k y N , generando una familia de curvas¹ que están relacionadas con los valores particulares de k . En la figura 4 se observan 7 de estas curvas para diferentes valores de k y $1 \leq N \leq 20$; y en la Tabla 1 se muestran los valores específicos de $f_k(N)$ de cada una de estas curvas para $N \leq 6$.

El comportamiento de estas curvas son aproximadas a una función $f_k^*(N)$, también llamada predictor, utilizando el principio de mínimos cuadrados, minimizando la suma de los cuadrados de los errores entre los valores reales de $f_k(N)$ y el predictor, para cada punto de la curva, es decir,

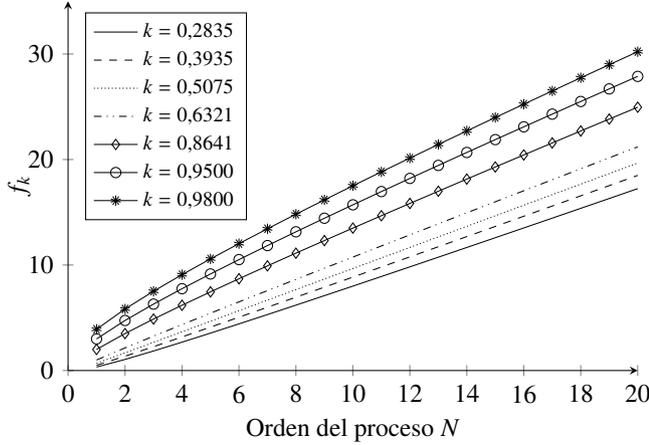
$$\min_{\text{parametros de } f_k^*(N)} J = \sum (f_k(N) - f_k^*(N))^2 \quad (12)$$

A partir de la forma de las curvas que se observan en la figura 4 el predictor fue establecido como una ecuación de potencia descrita por:

¹Los valores de $f_k(N)$ de estas curvas son estimados a partir de (11) utilizando el algoritmo trust-region dogleg descrito por Powell (1970).

Tabla 1: Valores particulares de $f_k(N)$

N	k						
	0.2835	0.3935	0.5075	0.6321	0.8647	0.9500	0.9800
1	0.333	0.500	0.708	1	2	3	3.912
2	1.052	1.357	1.702	2.146	3.505	4.743	5.833
3	1.852	2.260	2.704	3.258	4.878	6.295	7.516
4	2.689	3.182	3.708	4.351	6.186	7.753	9.084
5	3.547	4.114	4.711	5.434	7.456	9.153	10.580
6	4.420	5.053	5.715	6.507	8.698	10.513	12.027

Figura 4: Comportamiento de diferentes curvas de $f_k(N)$

$$f_k^*(N) \approx aN^b + c \quad (13)$$

por lo tanto el problema de minimización descrito en (12) se reduce a:

$$\min_{a,b,c} J = \sum_{N=1}^{20} (f_k(N) - (aN^b + c))^2 \quad (14)$$

Los valores de a , b y c que cumple con (14) son estimados utilizando el algoritmo trust-region-reflective (Coleman y Li, 1994), y son presentados en la Tabla 2. A partir de estos resultados se puede destacar que $f_{0,5075}(N)$ puede ser descrito mediante la ecuación de una recta, así como también se puede estimar el tiempo de asentamiento de los procesos de forma simple mediante $f_{0,95}(N)$ o $f_{0,98}(N)$, para los criterios de 5 % y 2 % de error, respectivamente.

3. Método de Identificación Propuesto

3.1. Bases matemáticas

En los métodos de identificación experimental como los desarrollados por Alfaro (2006) y Jhonson y Moradi (2005), a partir de la respuesta escalón en lazo abierto de un proceso o sistema, se realiza una aproximación a una función de transferencia con tiempo muerto. Para este trabajo los procesos serán

Tabla 2: Valores de los parámetros de $f_k^*(N)$ para los diferentes valores de k

k	a	b	c	RMSE
0.2835	0.7174	1.070	-0.4444	$2,30 \times 10^{-2}$
0.3935	0.857	1.033	-0.3888	$1,20 \times 10^{-2}$
0.5075	1.003	1	-0.3002	$2,02 \times 10^{-3}$
0.6321	1.175	0.9679	-0.1546	$8,52 \times 10^{-3}$
0.8647	1.626	0.9051	0.4451	$2,92 \times 10^{-2}$
0.95	1.966	0.8707	1.126	$4,00 \times 10^{-2}$
0.98	2.226	0.8495	1.796	$4,62 \times 10^{-2}$

aproximados a un modelo general con tiempo muerto (GRPDT) de la forma

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_G e^{-Ls}}{(Ts + 1)^N} \quad (15)$$

donde K_G , T , L y N representan la ganancia, la constante de tiempo, el tiempo muerto y el orden del proceso respectivamente. Considerando el comportamiento de los sistema de polos múltiples descrito en la sección 2 se tiene que ante un estímulo de tipo escalón la salida de un proceso como el indicado en (15) esta representado por:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 & , t < L + t_0 \\ y_G(t) + y_0 & , t \geq L + t_0 \end{cases} \quad (16)$$

donde $y_G(t)$ esta definida en (10) y los instantes de tiempo t_k ahora están definidos por:

$$t_k = f_k(N)T + L \quad (17)$$

Seleccionando tres instantes de tiempo de la respuesta transitoria, $t_{k1} < t_{k2} < t_{k3}$, los valores de N , T y L pueden ser estimados. Para ello inicialmente se define un factor de relación r entre los instantes de tiempo, como se indica en (18). Sustituyendo (17) se obtiene que r depende únicamente del orden del proceso (19), es decir, el parámetro r caracteriza el comportamiento de la respuesta transitoria y esta asociado directamente con el orden del sistema. Por lo tanto N puede ser estimado a partir de r , a partir de una relación como la que se observa en (20).

$$r = \frac{t_{k3} - t_{k2}}{t_{k2} - t_{k1}} \quad (18)$$

$$r = \frac{f_{k3}(N) - f_{k2}(N)}{f_{k2}(N) - f_{k1}(N)} \quad (19)$$

Tabla 3: Intervalos de tiempo sugeridos para estimar los parámetros en (23)

Parámetro	t_1	t_2
x_0	0	$< t_0$
x_∞	$> t_0$	t_∞^*
y_0	0	t_0
y_∞	$> (t_{0,98} + t_0)$	t_∞^*

Nota: * t_∞ es el instante de tiempo donde culmina la adquisición de datos de la prueba escalón.

$$N = f_N(r) \quad (20)$$

De acuerdo a la definición descrita en (17), desarrollando la diferencia entre dos instantes de tiempo se tiene que:

$$t_{ki} - t_{kj} = (f_{ki}(N) - f_{kj}(N))T, ki \neq kj$$

Por lo tanto T se puede estimar como:

$$T = \frac{t_{ki} - t_{kj}}{f_{ki}(N) - f_{kj}(N)} \quad (21)$$

$$T = f_T(N)(t_{ki} - t_{kj}) \quad (22)$$

La estimación de L se realiza a partir de cualquier punto mediante la ecuación (17). Finalmente para estimar K_G , se recurre a la expresión descrita en (23), la cual es muy simple de aplicar cuando para sistemas sin ruido.

$$K_G = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_\infty - y_0}{x_\infty - x_0} = \frac{y_\infty - y_0}{A_x} \quad (23)$$

En caso de existir presencia de ruido, se puede usar el principio propuesto por Paplinski y Zuchowski (2013); el cual es descrito en siguiente Lema.

Lema 1. Si en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, una señal esta definida como

$$m(t) = m_0 + \eta(t) \quad (24)$$

$$m_0^* = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} m(t)dt \quad (25)$$

donde m_0 es una constante y $\eta(t)$ es ruido blanco. Entonces $m_0^* \rightarrow m_0$ si la longitud del intervalo $[t_1, t_2]$ es lo suficientemente grande.

De acuerdo al Lema 1 los parámetros x_0 , x_∞ , y_0 y y_∞ pueden ser estimados aplicando (25) a las señales de entrada y salida, seleccionando de forma adecuada los intervalos de integración. En la Tabla 3 se resumen los valores sugeridos para t_1 y t_2 de acuerdo al parámetro a estimar.

3.2. Selección de los puntos característicos de la respuesta transitoria

Como se puede apreciar del desarrollo anterior, los parámetros N , T y L se pueden computar a partir de cualquier combinación de puntos transitorios t_k , dando lugar a que se puedan

proponer múltiples opciones para su estimación. Para realizar una selección adecuada de los puntos característicos de la respuesta transitoria a utilizar, se establecieron ternas de la forma $\varphi = \{k1; k2; k3\}$ en base a los valores de k presentados en la Tabla 1. Se estableció como punto central $k2 = 0,5075$, ya que como se observa en la tabla 2, para dicho punto $f_k(N)$ se define como una recta, simplificando la estimación de L a partir de (17), definiendo las siguientes ternas: $\varphi_1 = \{0,2835; 0,5075; 0,8647\}$, $\varphi_2 = \{0,3935; 0,5075; 0,8647\}$, $\varphi_3 = \{0,2835; 0,5075; 0,6321\}$, $\varphi_4 = \{0,3935; 0,5075; 0,6321\}$.

A partir de (19) y (20), se establecen las funciones que se observan en la tabla 4 para estimar el valor de N según el caso.

Tabla 4: Aproximaciones de $f_N(r)$ para la estimación de N para cada terna

Terna	Aproximación	RMSE
φ_1	$f_N(r) = \frac{0,2657r^2 - 0,4154r + 0,9003}{r^2 - 3,863r + 3,731}$	$5,29 \times 10^{-4}$
φ_2	$f_N(r) = \frac{0,2588r^2 - 1,3600r + 4,551}{r^2 - 8,174r + 16,7}$	$4,79 \times 10^{-4}$
φ_3	$f_N(r) = \frac{0,2788r^2 - 0,2547r + 0,0841}{r^2 - 1,18r + 0,3481}$	$4,72 \times 10^{-4}$
φ_4	$f_N(r) = \frac{0,2432r^2 - 0,5294r + 0,3419}{r^2 - 2,501r + 1,564}$	$6,18 \times 10^{-4}$

Para seleccionar una terna, se realizó un análisis del comportamiento del valor de r y su efecto en la estimación de N ante un error en la medición de los instantes de tiempo t_k . Considerando que el tiempo medido t_{ki}^* como:

$$t_{ki}^* = f_{ki}(N)T + L \pm e_{tk} \quad (26)$$

siendo $e_{tk} = \varepsilon T$ el error en la medición y ε es una constante que permite establecer e_{tk} como una fracción de T .

Sustituyendo (26) en (18) se tiene que los peores casos en la estimación de r se pueden establecer en (27) y (28). Por lo tanto el orden estimado esta determinado por $N^* = f_N(r^*)$, siendo $r^* = r^+ \circ r^* = r^-$, según el caso que se desee evaluar. Con ello se puede establecer un error en la determinación del orden del proceso definido por $E_N = |N^* - N|$.

$$r^+ = \frac{f_{k3}(N) - f_{k2}(N) + 2\varepsilon}{f_{k2}(N) - f_{k1}(N) - 2\varepsilon} \quad (27)$$

$$r^- = \frac{f_{k3}(N) - f_{k2}(N) - 2\varepsilon}{f_{k2}(N) - f_{k1}(N) + 2\varepsilon} \quad (28)$$

En la figura 5, se puede observar el comportamiento de E_N para cada φ , considerando diversos valores de ε para los casos r^+ y r^- . A partir de estos resultados se destaca el menor E_N obtenido por la terna φ_1 , a excepción del caso r^- con $\varepsilon = 0,05$ que se observa en la figura 5(c), donde también hay que destacar que para la terna φ_2 los valores de E_N están fuera de escala.

Otro detalle destacable en la figura 5, es que de forma general las condiciones de error de r^+ son preferibles a las presentadas en r^- ya que producen menor error en la estimación de N .

A partir de estos resultados y de φ_1 , se establecen los puntos transitorios $k1 = 0,2835$, $k2 = 0,5075$ y $k3 = 0,8647$, con

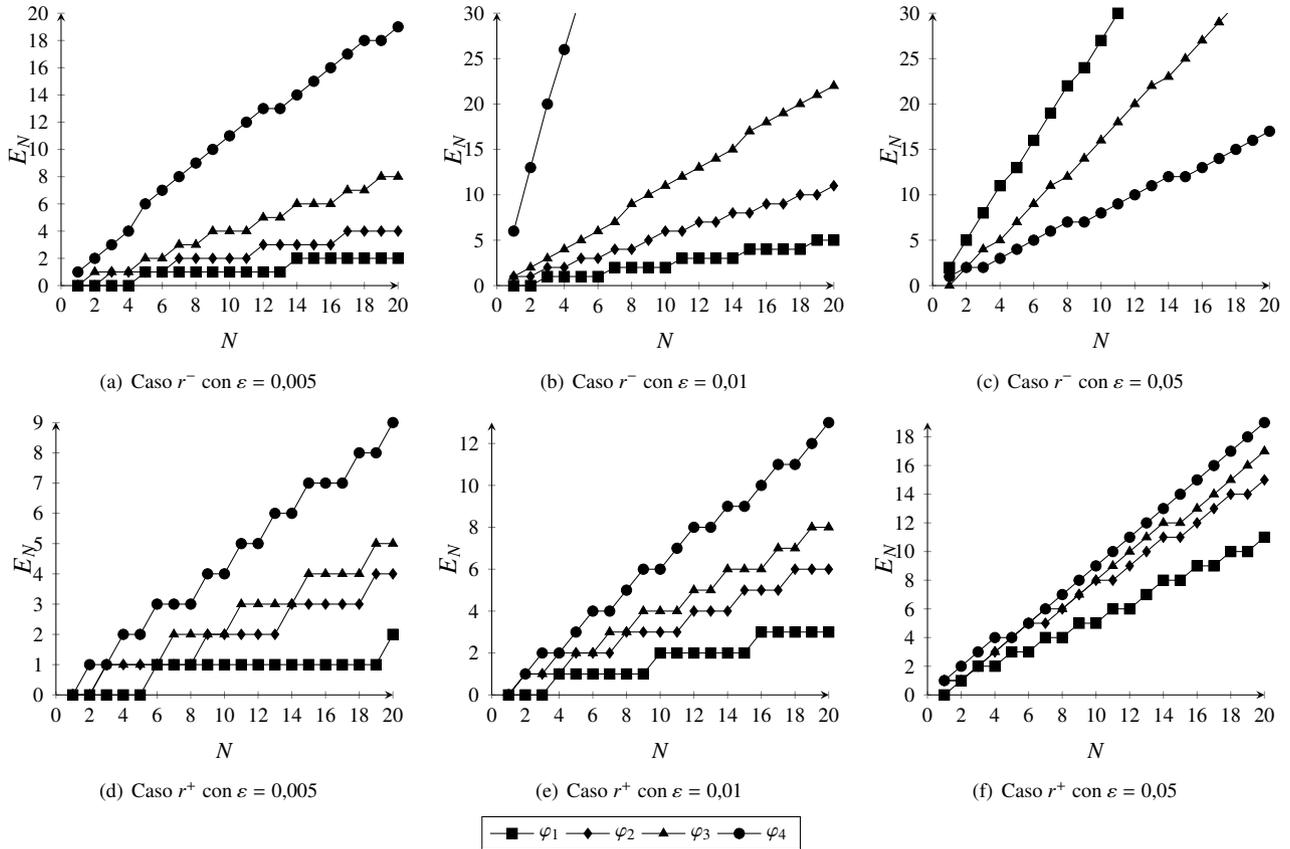


Figura 5: Error en la estimación de N

los cuales se obtienen los instantes de tiempo t_{28} , t_{50} y t_{86} respectivamente. Una vez establecidos los puntos característicos, se procedió a seleccionar la mejor combinación de los mismos para la estimación de T . A partir de (21) y (22) se establece una relación entre $f_T(N)$ y el par de instantes de tiempo $\rho = \{t_{ki}; t_{kj}\}$.

En la tabla 5 se pueden observar las aproximaciones de $f_T(N)$ obtenidas para los pares $\rho_1 = \{t_{86}; t_{28}\}$, $\rho_1 = \{t_{86}; t_{50}\}$, $\rho_1 = \{t_{50}; t_{28}\}$.

Tabla 5: Aproximaciones de $f_T(N)$ para las diferentes combinaciones de puntos

Par	Aproximación	RMSE
ρ_1	$f_T(N) = \frac{6,183N + 32,71}{N^2 + 39,11N + 28,4}$	$6,29 \times 10^{-4}$
ρ_2	$f_T(N) = \frac{9,435N + 50,28}{N^2 + 41,42N + 39,56}$	$8,36 \times 10^{-4}$
ρ_3	$f_T(N) = \frac{17,95N + 93,9}{N^2 + 34,79N + 7,70}$	$2,47 \times 10^{-3}$

Si se considera la constante de tiempo estimada T^* como:

$$T^* = f_T(N) (t_{ki}^* - t_{kj}^*) \quad (29)$$

siendo t_{ki}^* y t_{kj}^* los instantes de tiempo estimados con un error como se detalla en (26). Entonces el error relativo Er_T en la estimación de la constante de tiempo se puede definir como:

$$Er_T = \frac{|T^* - T|}{T} = 2\varepsilon f_T(N) \quad (30)$$

Esto indica que mientras menor sea la magnitud de $f_T(N)$, menor sera el error en la estimación de T . En la figura 6 se observa el comportamiento de las aproximaciones de $f_T(N)$ descritas en la Tabla 5 para cada ρ , donde se destaca que la mejor opción para estimación de T es utilizar el par ρ_1 .

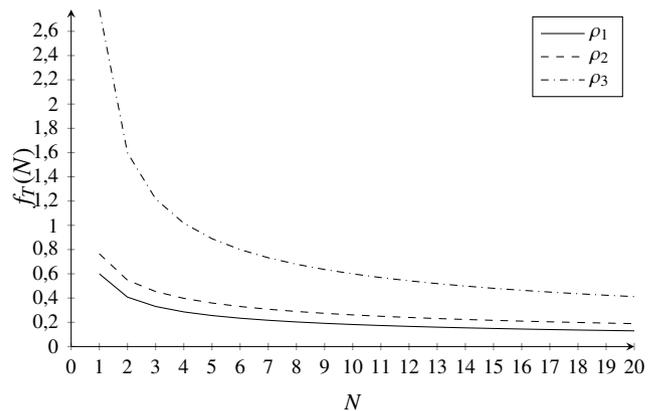


Figura 6: Comportamiento de $f_T(N)$ para los diferentes ρ

3.3. Método propuesto

Se acuerdo al desarrollo anterior, se propone el siguiente procedimiento para la identificación de procesos no oscilatorios mediante la prueba escalón en lazo abierto.

1. Estabilizar el proceso en un punto de su región de operación; iniciar la adquisición de datos; generar un cambio adecuado tipo escalón en la variable de entrada del proceso; esperar a que la respuesta del proceso se estabilice de nuevo y finalizar la adquisición de datos.
2. Determinar los parámetros x_0 , x_∞ , y_0 y y_∞ utilizando (25) y las consideraciones establecidas en la tabla 3, y estimar K_G mediante (23).
3. Estimar los tiempos t_{28} , t_{50} y t_{86} y determinar r mediante

$$r = \frac{t_{86} - t_{50}}{t_{50} - t_{28}} \quad (31)$$

4. Estimar N^2 , T y L^3 mediante:

$$N \approx \frac{0,2657r^2 - 0,4154r + 0,9003}{r^2 - 3,863r + 3,731} \quad (32)$$

$$T = \frac{6,183N + 32,71}{N^2 + 39,11N + 28,4} (t_{86} - t_{28}) \quad (33)$$

$$L = t_{50} - (1,003N - 0,3002) T \quad (34)$$

3.4. Implementación computacional

Para una implementación computacional del método propuesto, es necesario considerar que las señales de entrada y salida del sistema identificar son adquiridas como secuencias discretas $x[n]$ y $y[n]$ respectivamente, con $n \geq 0 \in \mathbb{N}$ y un periodo de muestreo T_s . Por lo que los instantes de tiempo t_{86} , t_{50} y t_{28} , se pueden estimar como:

$$t_{86} \approx n_{86} T_s - t_0 \quad (35)$$

$$t_{50} \approx n_{50} T_s - t_0 \quad (36)$$

$$t_{28} \approx n_{28} T_s - t_0 \quad (37)$$

Determinando los valores aproximados de n_{86} , n_{50} y n_{28} , mediante:

$$n_{86} = \max\{n_{86}^+, n_{86}^-\} \quad (38)$$

$$n_{50} = \min\{n_{50}^+, n_{50}^-\} \quad (39)$$

$$n_{28} = \max\{n_{28}^+, n_{28}^-\} \quad (40)$$

siendo los valores de n_k^- y n_k^+ obtenidos de la siguiente forma:

- $n_k^- = \max n$ sujeto a $y[n] \leq y_k$
- $n_k^+ = \min n$, sujeto a $y[n] > y_k$

Por otro lado t_0 se estima como:

$$t_0 \approx n_0 T_s \quad (41)$$

siendo $n_0 = \max n$, sujeto a $x[n] \leq (x_\infty - x_0)/2 + x_0$.

En casos donde la señal adquirida contiene ruido de gran intensidad se pueden producir errores en las estimación computacional de los puntos característicos, los cuales pueden alterar en gran medida el orden del modelo obtenido, como se observó en la sección 3.2. Por ello, en estas situaciones se recomienda el uso de filtros FIR de fase lineal, los cuales presentan un retardo de grupo de $N_f/2$ muestras, siendo N_f el orden del filtro. La ventaja de este tipo de filtro, es que todas la componentes frecuenciales de la señal tienen el mismo retardo, por lo que se puede obtener una estimación sin alteraciones en el comportamiento de frecuencia utilizando el método propuesto y modificando la estimación de L de siguiente forma:

$$L = t_{50} - (1,003N - 0,3002) T - \frac{N_f}{2} T_s \quad (42)$$

4. Estudio de Simulación

Para analizar la calidad del método propuesto se realizaron ensayos con tres diferentes funciones de transferencia de fase mínima y una de fase no mínima. Para realizar los ensayos se consideró que las unidades de las señales de entrada y salida de los modelos están en porcentaje, la señal de entrada comienza en $x_0 = 10\%$ y cambia a 35% en el instante $t_0 = 5$ segundos, inicialmente los modelos están en estado estacionario y la señal de salida es de $y_0 = 20$, con un tiempo total de simulación de 35 segundos y periodo de muestreo $T_s = 0,007$ segundos. Finalmente, un ensayo de identificación para un reactor químico no isotérmico fue realizado, donde las dinámicas no lineales del proceso, los retardos de transporte de los flujos, la dinámica de los instrumentos de medición y la precisión nominal de los mismos, fueron tomados en cuenta para establecer las condiciones de simulación del reactor.

Para comparar los diferentes métodos de identificación, ensayos con y sin presencia de ruido fueron realizados, utilizando como índice de eficacia el error cuadrático promedio (RMSE), el cual para la respuesta transitoria (RT) queda definido como:

$$RMS E_t = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n_\infty} (y[n] - y_m[n])^2}{n_\infty}} \quad (43)$$

siendo $y_s[n]$ la respuesta escalón de los modelos obtenidos, $y[n]$ la respuesta de las funciones de referencia utilizadas sin ruido y n_∞ el numero total de muestras adquiridas.

En el caso de la respuesta en frecuencia (RF) el RMSE es obtenido mediante:

$$RMS E_\omega = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_k} |G(\omega_k) - G_m(\omega_k)|^2}{N_k}} \quad (44)$$

donde, $G(\omega_k)$ es la RF de la función de transferencia original, $G_m(\omega_k)$ la respuesta en frecuencia del modelo obtenido, N_k es

²El valor de N debe ser aproximado al entero mas cercano

³El valor de L siempre debe ser positivo, en caso de obtener valores negativos entonces $L = 0$

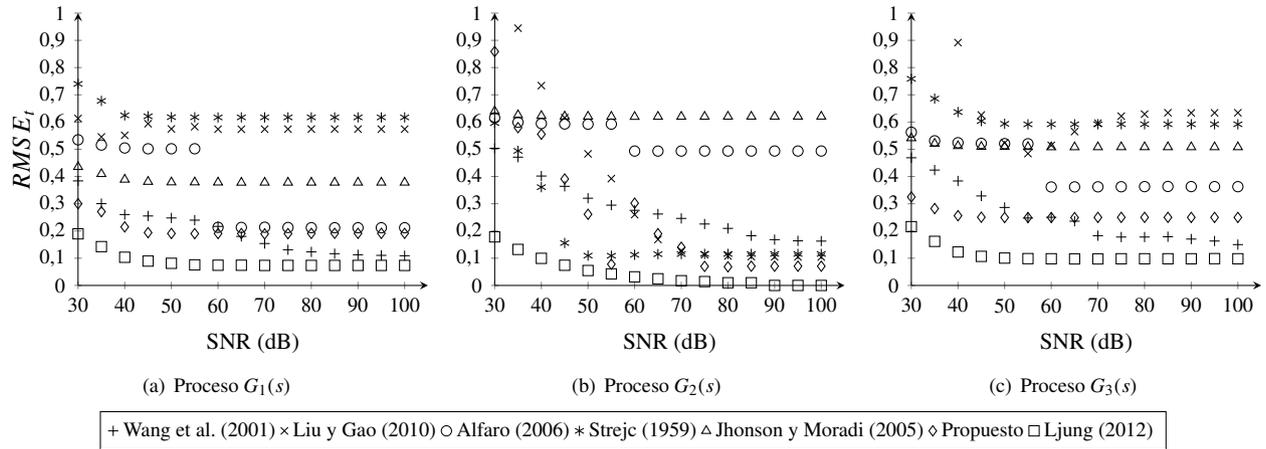


Figura 7: Comportamiento del RMSE promedio de la respuesta transitoria para los procesos $G_1(s)$, $G_2(s)$ y $G_3(s)$ con diferentes niveles de ruido

número de puntos a evaluar de la RF, $\omega_k = \frac{k\omega_M}{N_k}$ y ω_M es la frecuencia máxima a evaluar.

Para la implementación computacional del método de identificación de Strejc (1959) se presenta la dificultad de determinar el punto de máxima pendiente de la respuesta dinámica en presencia de ruido y establecer la recta tangente a dicho punto. En este trabajo se dividió la respuesta transitoria de los sistemas en pequeñas secciones de 10 muestras, aproximando cada una de ellas a una recta utilizando el método de mínimos cuadrados, seleccionando como tangente la recta con mayor pendiente.

Por otro lado, los métodos de Wang et al. (2001) y Liu y Gao (2010), requieren de la definición previa del orden del modelo para la posterior estimación de los parámetros de la función de transferencia a obtener. Adicionalmente en caso particular del método de Liu y Gao (2010), es necesario suministrar un valor α que debe cumplir con diversas condiciones para su selección (ver Liu y Gao, 2010, ecuaciones (7), (10), (17) y (18)), según dicho estudio. A partir de estas condiciones, en cada ocasión que se ejecutó el algoritmo de Liu y Gao (2010), un rango de valores validos fue establecido, seleccionando automáticamente el valor de α mediante:

$$\alpha = \frac{3}{4}\alpha_{\max} + \frac{1}{4}\alpha_{\min}$$

Estos métodos han sido programados en el software Matlab versión R2012b, ejecutado sin entorno gráfico bajo una plataforma Debian 8.1, en un ordenador Intel i3 con 2GB de RAM.

Adicionalmente fue utilizada la herramienta de identificación encontrada en el “System Identification Toolbox” (Ljung, 2012) de Matlab. Esta herramienta permite la construcción de modelos matemáticos para sistemas dinámicos continuos y discretos a partir de datos de entrada y salida del sistema original. Para aproximaciones de modelos lineales continuos, el “System Identification Toolbox” provee dos herramientas de estimación como son *procest* y *tfest*.

Con *procest* se pueden estimar modelos de orden 0 hasta 3^{er} orden con tiempo muerto, pudiendo configurar los polos para sean completos conjugado o reales según el caso, adicional-

mente esta función permite forzar a modelos con acción integral y añadir un *zero* al numerador para ajustar el modelo. En este trabajo, a utilizar esta herramienta los resultados obtenidos presentaron un bajo rendimiento dado que *procest* no está diseñada para realizar aproximaciones de modelos con un orden cercano a las funciones de transferencia estudiadas.

Por otro lado, con *tfest* se puede realizar aproximaciones a funciones de transferencia de la forma:

$$P(s) = \frac{e^{-Ls} \sum_{i=0}^n b_i s^i}{s^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j s^j} \quad (45)$$

indicando la cantidad de polos m y ceros n de la función de transferencia, incluyendo la estimación del tiempo muerto L ⁴. Siendo esta herramienta la utilizada para representar los métodos de Ljung (2012).

4.1. Sistemas de fase mínima

En el estudio de sistemas de fase mínima se seleccionaron tres funciones de transferencia. La función $G_1(s)$ representa un sistema con retardo y polos diferentes utilizada en Alfaro (2006). En el caso de $G_2(s)$ se aprecia un sistema de polos múltiples puro que se encuentra en Jhonson y Moradi (2005). Para $G_3(s)$ se propone un sistema con varios polos múltiples, retardo y un cero.

$$G_1(s) = \frac{e^{-0,5s}}{(s+1)(2s+1)(0,5s+1)} \quad (46)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^5} \quad (47)$$

$$G_3(s) = \frac{(2s+1)e^{-1,5s}}{(1,5s+1)(2,5s+1)(0,5s+1)^2(s+1)^2} \quad (48)$$

Para el analizar el comportamiento del método de identificación propuesto a la señal de salida de cada función de transferencia le fue añadido ruido blanco gaussiano con diferentes

⁴Para la estimación de los parámetros con *tfest* se usó el algoritmo de Levenberg-Marquardt.

niveles de intensidad para obtener una relación señal a ruido (SNR) entre 100dB y 30dB. En los casos donde $SNR \leq 55dB$ fue utilizado un filtro FIR de orden 40 con frecuencia de corte de $0,01\pi$ radianes/muestra diseñado a partir de una ventana Hamming. Debido a la naturaleza aleatoria del ruido, para cada nivel de SNR el ensayo fue repetido 100 veces, utilizando una realización del ruido distinta en cada ocasión.

En la figura 7, se puede observar el comportamiento del $RMS E_t$ promedio de los modelos estimados con diferentes métodos de identificación. Para las funciones de transferencia $G_1(s)$ y $G_3(s)$ se aprecia como el método propuesto obtiene modelos con aproximaciones de la respuesta transitoria de calidad similar a los obtenidos con el método de Wang et al. (2001), incluso lo mejora para valores de SNR bajos. En el caso de $G_2(s)$ se observa como la respuesta transitoria de las modelos obtenidos con método propuesto presenta los menores niveles de $RMS E_t$ a excepción del método de Ljung (2012) para bajos niveles de ruido; a medida que la intensidad del ruido aumenta la calidad de los resultados arrojados por el método propuesto son equiparables a los demás métodos de identificación.

Para apreciar las diferencias de los modelos estimados con los diferentes métodos de identificación estudiados, el comportamiento transitorio de los modelos más representativos de cada método (que presentan valores de $RMS E_t$ promedios) para un $SNR=35dB$ es mostrado en la figura 8, a excepción del método de Alfaro (2006) cuyo comportamiento es similar al obtenido por Jhonson y Moradi (2005). En dicha figura se puede observar como las respuestas transitorias obtenidas con los métodos de Ljung (2012), Wang et al. (2001) y el propuesto son muy similares entre sí.

Por su parte, en la aproximación obtenida con el método de Liu y Gao (2010) presenta un error considerable en el valor de estabilización, lo cual es debido al error en la estimación de la ganancia del modelo estimado con dicho método.

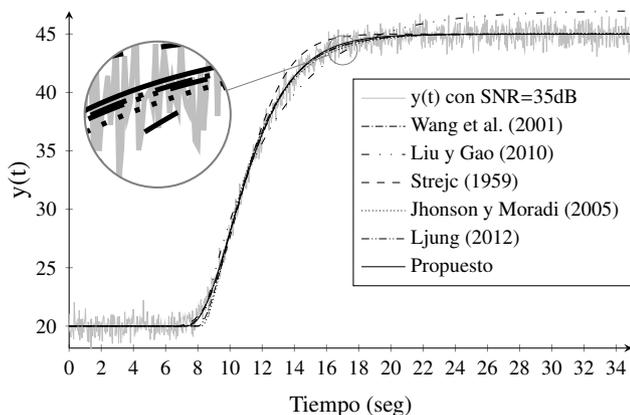


Figura 8: Respuesta transitoria de modelos obtenidos para describir $G_3(s)$ con $SNR=35dB$

Por otro lado, el comportamiento del $RMS E_\omega$ ⁵ promedio de los modelos obtenidos con diferentes métodos de identifica-

⁵Para este estudio se establecieron $\omega_M = 2\pi$ y $N_k = 500$ para determinar el comportamiento de la RF de cada función de transferencia.

ción, se puede observar en la figura 9, donde el método propuesto presenta excelentes resultados al encontrarse junto a los métodos de Ljung (2012) y Wang et al. (2001), entre las mejores aproximaciones de la RF en los diferentes niveles de ruido.

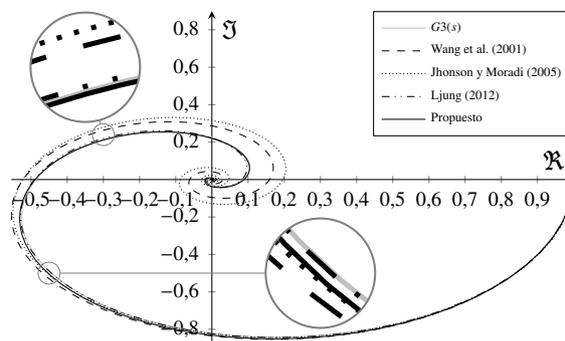


Figura 10: Diagrama de Nyquist de los mejores modelos obtenidos en la identificación de $G_3(s)$ con $SNR=35dB$

En la figura 10, se observa el comportamiento de la respuesta en frecuencia, representado mediante un diagrama de Nyquist, de los modelos más representativos de los métodos de identificación que presentan un menor $RMS E_\omega$ ⁶ para $G_3(s)$ con $SNR=35dB$, donde se aprecia que el modelo estimado con el método propuesto presenta una excelente aproximación del comportamiento de la respuesta en frecuencia de $G_3(s)$, tanto a baja como en alta frecuencia. Si se compara el comportamiento de la RF del método propuesto con el de Ljung (2012), se puede apreciar como a bajas frecuencias el modelo obtenido con método propuesto presenta leves desviaciones respecto a la RF de la $G_3(s)$, mientras que el modelo obtenido con Ljung (2012) la sigue perfectamente y a medida que se aumenta la frecuencia ambas aproximaciones se acercan a la RF de $G_3(s)$.

4.2. Sistema de fase no mínima

Para el estudio de la eficiencia del método propuesto ante sistemas de fase no mínima, se utilizó como ejemplo la siguiente función de transferencia:

$$G_4(s) = \frac{-4s + 1}{(1,5s + 1)^7} \quad (49)$$

Estableciendo las mismas condiciones de simulación utilizadas para los ejemplos de fase mínima anteriormente estudiados. En las figuras 11(a) y 11(b) se observa el comportamiento del RMSE promedio de la RT y la RF respectivamente, donde se destaca que el método propuesto logra un excelente equilibrio en la calidad de la aproximación de ambos tipos de comportamientos, a diferencia de los otros métodos, como por ejemplo el método de Wang et al. (2001) logra la mejor aproximación de la RT, sin embargo, la RF de los modelos obtenidos con dicho método, no se aproximan bien a la RF del modelo original,

⁶El método de Alfaro (2006) es descartado de la figura 10 debido a que su comportamiento es similar al de Jhonson y Moradi (2005). El comportamiento de los modelos obtenidos con los métodos de Liu y Gao (2010) y Strejc (1959) son descartados debido al gran error en la aproximación con la respuesta en frecuencia de $G_3(s)$ a $SNR=35dB$.

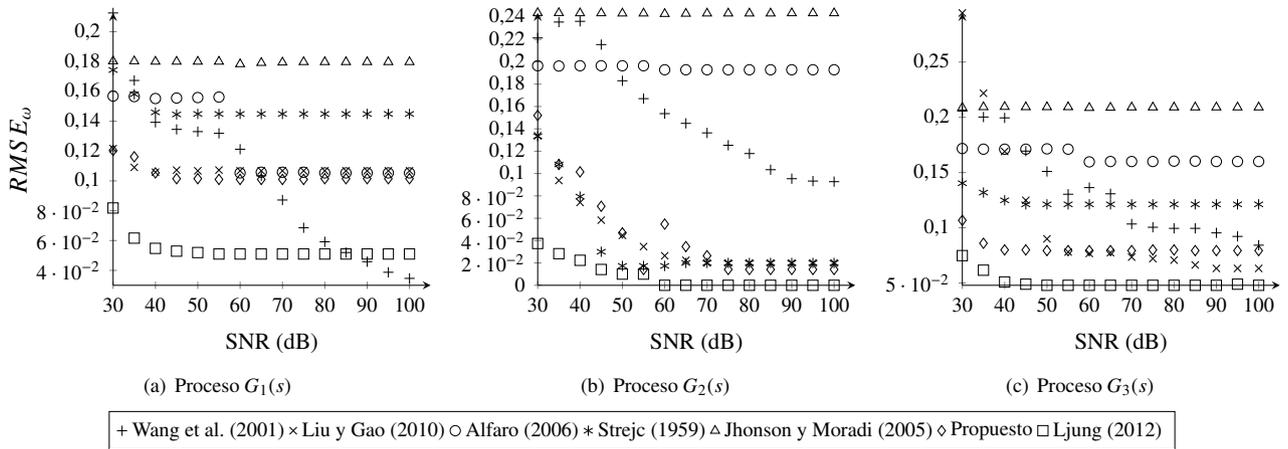


Figura 9: Comportamiento del RMSE promedio de la respuesta en frecuencia para los procesos $G_1(s)$, $G_2(s)$ y $G_3(s)$ con diferentes niveles de ruido

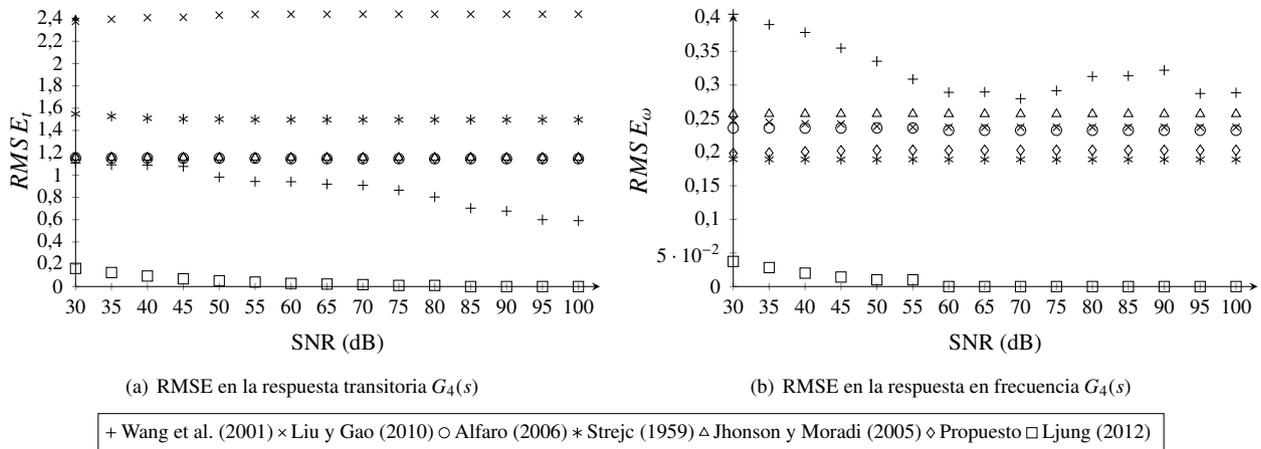


Figura 11: Valores promedio del RMSE de las respuestas transitoria y en frecuencia de $G_4(s)$

en comparación con los demás métodos. Siendo los modelos obtenidos con el método de Ljung (2012), aquellos obtienen la mejor aproximación tanto para la respuesta transitoria como para la respuesta en frecuencia.

En la figura 12, se observan las respuestas transitorias de los modelos más representativos estimados utilizando diferentes métodos de identificación, destacando el método de Ljung (2012) cuyo modelo obtenido sigue perfectamente la RT de $G_4(s)$ y el método de Wang et al. (2001) por lograr reproducir el sub-impulso característico de los sistemas de fase mínima⁷. Por su parte, el método propuesto incluye dicho sub-impulso como parte del tiempo de retardo de la respuesta transitoria del modelo a estimar.

Por otro lado, en la figura 13 se muestra el comportamiento estadístico del $RMSE E_t$ obtenido con el método de Wang et al. (2001) y el método propuesto a través de un diagrama de cajas, donde aprecia una menor dispersión en la distribución de

los resultados obtenidos mediante el método propuesto. Lo cual indica una mayor precisión, a pesar de tener una exactitud levemente inferior al método de Wang et al. (2001).

4.3. Costo computacional

En lo referente al costo computacional, en la tabla 6 se resumen los tiempos de computo requeridos por cada método para obtener una aproximación, representados por el valor promedio y la desviación estándar de los tiempos de computo requeridos en los 1500 ensayos de identificación (100 ensayos por cada uno de los 15 niveles de SNR analizados) realizados con cada método para cada una de funciones de transferencia estudiadas.

A partir de estos resultados se observa como los métodos basados en puntos característicos de respuesta transitoria, como son los métodos de Alfaro (2006), Jhonson y Moradi (2005) y el método propuesto, permiten obtener modelos con mayor rapidez que el resto de los métodos. Seguidos por el método matricial de Wang et al. (2001), el método basado en integración de Liu y Gao (2010), el método de Ljung (2012) y el método de la pendiente de la curva de Strejc (1959), respectivamente. En particular el método de Strejc (1959) eleva los tiempos de

⁷En la figura 12 no se representa el método de Liu y Gao (2010) debido al gran error que genera para SNR=35dB. El método de Jhonson y Moradi (2005), tampoco es representado porque su comportamiento es similar al obtenido por el método de Alfaro (2006)

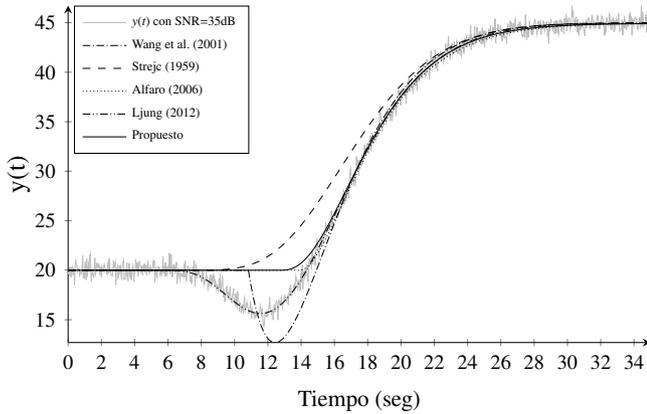


Figura 12: Respuesta transitoria de modelos obtenidos para describir $G4(S)$ con $SNR=35dB$

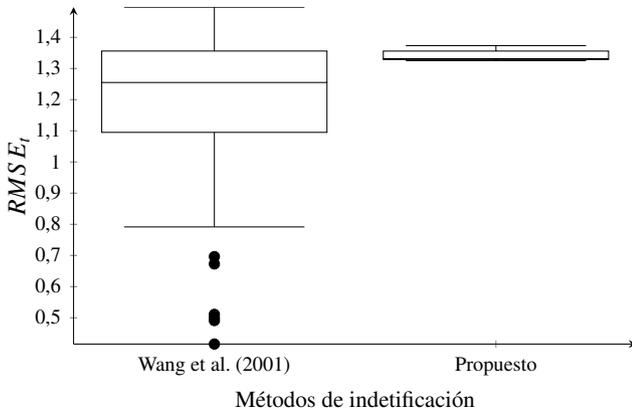


Figura 13: Comportamiento estadístico del $RMSE_t$ de los modelos obtenidos con el método propuesto y el de Wang et al. (2001), para $G4(s)$ con $SNR=35dB$.

computo debido a la necesidad de aproximar el valor de la pendiente en ambientes con ruido.

Al concatenar tiempos de computo requeridos por cada método con los valores de $RMSE_t$ y $RMSE_{\omega}$ presentados en las figuras 7, 9 y 11, se aprecia como para las funciones de transferencia de referencia estudiadas, el método de identificación propuesto presenta una excelente relación entre calidad de los modelos obtenidos y la velocidad en que los mismos son determinados.

4.4. Reactor Químico no Isotérmico

Para probar los diferentes métodos de identificación estudiados bajo condiciones más realistas, se estudia a continuación un reactor químico no isotérmico, el consiste un tanque continuamente agitado (CSTR) donde ocurre una reacción exotérmica $A \rightarrow B$.

Para remover el calor de la reacción, el reactor es envuelto por una chaqueta a través de la cual fluye un líquido refrigerante. Considerando que el calor generado por la reacción química es contante (ΔH_r del reactante A), y que la tasa de reacción es descrita por:

$$r_A(t) = k_r e^{-\frac{E}{RT(t)}} C_A^2(t) \quad (50)$$

Siendo $C_A(t)$ y $T(t)$ la concentración y la temperatura en grados Ranking ($^{\circ}R$) del reactante dentro del tanque, respectivamente; E la energía de activación; k_r la frecuencia de reacción y R . Entonces el comportamiento de este proceso puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (ver Smith y Corripio, 1997, pág. 154):

$$V \frac{dC_A(t)}{dt} = f(t)C_{Ai}(t) - Vr_A(t) - f(t)C_A(t) \quad (51)$$

$$VC_v \frac{dT(t)}{dt} = f(t)C_p(T_i(t) - T(t)) - \frac{V\Delta H_r}{\rho} r_A(t) - \frac{UA}{\rho}(T(t) - T_c(t)) \quad (52)$$

$$V_c C_{vc} \frac{dT_c(t)}{dt} = f_c(t)C_{pc}(T_{ci}(t) - T_c(t)) + \frac{UA}{\rho_c}(T(t) - T_c(t)) \quad (53)$$

Siendo V y V_c , el volumen del CSTR y de la chaqueta de enfriamiento respectivamente; ρ , ρ_c , C_p , C_{pc} las densidades y capacidades caloríficas a presión constante del reactante y refrigerante, respectivamente; U el coeficiente de transferencia de calor y A el área de transferencia de calor.

Adicionalmente se considera como actuadores bombas ideales para manipular los flujos de entrada, estando ubicadas a 5 pies de distancia del CSTR, conectadas mediante una tubería con área transversal de $0,0491 \text{ pies}^2$, lo cual implica que un tiempo de retardo en los flujos de entrada al CSTR, es decir:

$$f(t) = f^*(t - t_L) \quad (54)$$

$$f_c(t) = f_c^*(t - t_{Lc}) \quad (55)$$

siendo $f^*(t)$ y $f_c^*(t)$ los flujos instantáneos en los actuadores para el reactante y refrigerante, respectivamente; por lo tanto: $t_L = 2,455/f^*(t)$ y $t_{Lc} = 2,455/f_c^*(t)$.

Por otro lado para medir las temperaturas de salida en ambos flujos plantea el uso de un termopar tipo T con rango de medición entre $-200^{\circ}C$ y $400^{\circ}C$ ($131,67^{\circ}R$ – $1211,67^{\circ}R$), con una precisión de $0,27\%$ del Span y que para su estabilización presenta un comportamiento de primer orden, es decir:

$$2 \frac{dx(t)}{dt} = T(t) - x(t) \quad (56)$$

$$T^*(t) = x(t) + \eta(t) \quad (57)$$

siendo $T^*(t)$ la temperatura del reactante observada a través del instrumento de medición y $\eta(t)$ el ruido en la transmisión, con $E(\eta(t)) = 0$ y $\sigma^2(\eta(t)) = 2,16$ ($0,27\%$ del Span).

Con el fin estudiar este proceso se tomaron en cuenta los valores que se observan en la tabla 7 para los parámetros y condiciones iniciales del CSTR, realizando un cambio de tipo escalón a los 15 minutos de la adquisición de los datos reduciendo a la mitad el flujo del refrigerante. Realizando 100 simulaciones con una duración 100 minutos y periodo de muestreo de 3 segundos, para identificar el modelo que determina el comportamiento de $T(t)$ respecto a las variaciones $f_c(t)$.

En la tabla 8, se pueden observar los valores del $RMSE_t$ obtenidos y los tiempos de computación requeridos para cada método. Donde se destaca una paridad en la calidad de las aproximaciones obtenidas con los métodos de Wang et al. (2001), Jhonson y Moradi (2005) y el propuesto; siendo el método de Ljung (2012), el que permite la mejor aproximación.

Tabla 6: Tiempos de computo requeridos por cada método de identificación estudiado

	Wang et al. (2001)	Liu y Gao (2010)	Alfaro (2006)	Strejc (1959)	Jhonson y Moradi (2005)	Ljung (2012)	Propuesto
$G_1(s)$	0,0923($\pm 0,02$)	0,1496($\pm 0,02$)	0,0482($\pm 7 \times 10^{-3}$)	1,6106($\pm 0,21$)	0,0478($\pm 7 \times 10^{-3}$)	0,7762($\pm 0,13$)	0,0328($\pm 5 \times 10^{-3}$)
$G_2(s)$	0,1139($\pm 0,02$)	0,2664($\pm 0,04$)	0,0501($\pm 8 \times 10^{-3}$)	1,5436($\pm 0,19$)	0,0498($\pm 8 \times 10^{-3}$)	0,7587($\pm 0,11$)	0,0354($\pm 6 \times 10^{-3}$)
$G_3(s)$	0,1307($\pm 0,03$)	0,3025($\pm 0,48$)	0,0578($\pm 0,01$)	1,5923($\pm 0,23$)	0,0577($\pm 0,01$)	1,3321($\pm 0,49$)	0,0399($\pm 7 \times 10^{-3}$)
$G_4(s)$	0,1010($\pm 0,02$)	0,1212($\pm 0,04$)	0,0470($\pm 7 \times 10^{-3}$)	0,9983($\pm 0,11$)	0,0466($\pm 6 \times 10^{-3}$)	1,0511($\pm 0,24$)	0,0324($\pm 5 \times 10^{-3}$)

Tabla 7: Parámetros y condiciones iniciales del proceso de reacción química no-isotérmica

Parámetros					
ΔH_r	-12000 BTU/lbmole	E	27820 BTU/lbmole	V	13.26 pie ³
R	1.987 BTU/(lbmole °R)	C_p	0.88 BTU/(lbmole °R)	V_c	1.56 pies ³
k_r	$8,33 \times 10^8$ pies ³ /(lbmole min)	C_{pc}	1,0 BTU/(lbmole °R)	A	36 pies ²
U	1.2475 BTU/(pies ² min °R)	ρ	55 lbmole/pies ³	ρ_c	62.4 lbmole/pies ³
Condiciones iniciales					
$C_A(0)$	0.2068 lbmole/pie ³	$T(0)$	678.9 °R	$T_c(0)$	602.7 °R
$C_{Ai}(0)$	0.5975 lbmole/pie ³	$T_i(0)$	635 °R	$T_{ci}(0)$	540 °R
$f(0)$	1.3364 pie ³ /min	$f_c(0)$	0.8771 pie ³ /min	$T^*(0)$	678.9 °R

Tabla 8: Resultados de la identificación del CSTR utilizando diferentes métodos

	Wang et al. (2001)	Liu y Gao (2010)	Alfaro (2006)	Strejc (1959)	Jhonson y Moradi (2005)	Ljung (2012)	Propuesto
$RMS E_r$	0,4357($\pm 0,08$)	0,9008($\pm 0,21$)	0,8709($\pm 0,10$)	1,4442($\pm 2,25$)	0,4430($\pm 0,15$)	0,2958($\pm 0,05$)	0,4919($\pm 0,30$)
Tiempo	0,0471($\pm 0,01$)	0,3007($\pm 0,09$)	0,0470($\pm 7 \times 10^{-3}$)	0,7816($\pm 0,53$)	0,0473($\pm 7 \times 10^{-3}$)	1,0402($\pm 0,30$)	0,0322($\pm 3 \times 10^{-3}$)

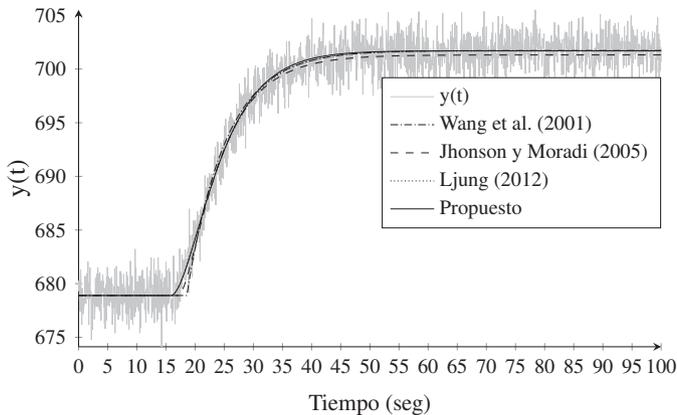


Figura 14: Comportamiento de la respuesta transitoria de algunos modelos obtenidos para describir el reactor químico no isotérmico

Para apreciar mejor dicha paridad, en la figura 14 se muestra el comportamiento de la respuesta transitoria de las aproximaciones obtenidas con los métodos de Wang et al. (2001); Jhonson y Moradi (2005); Ljung (2012) y el método propuesto. Donde se pueden observar las similitudes entre las diferentes curvas, ya que se encuentran casi superpuestas entre sí.

Respecto al costo computacional se observa como en el uso del algoritmo de Ljung (2012) el consumo de tiempo es mayor a los demás métodos; siendo el método propuesto el que requiere menor tiempo promedio para obtener un modelo.

5. Conclusión

En este documento fue presentado un nuevo método de identificación para procesos con respuesta escalón sobre-amortiguada, el cual a partir de tres puntos característicos de la respuesta transitoria permite obtener una aproximación a un modelo de polos múltiples con tiempo muerto, aplicando formulas sencillas para estimar el orden del proceso, su ganancia, el retardo y la constante de tiempo del mismo. Se puede observar como para las tres funciones de transferencia de fase mínima estudiadas, el método propuesto presenta buenas aproximaciones tanto en la RT como en la RF, en comparación con otros métodos mas avanzados como los encontrados en Ljung (2012) y Wang et al. (2001); los cuales, si bien logran mejores aproximaciones, su carga computacional es mucho mayor. Para el caso de sistemas de fase no mínima, el método propuesto absorbe el sub-impulso de la respuesta transitoria como parte del tiempo muerto del modelo aproximado, aumentando así el error en la RT, sin embargo, para la función de transferencia de referencia utilizada en la sección 4.2, se encontró que la RF obtenida se aproximaba mejor a la RF original que el método de Wang et al. (2001), el cual si permite identificar el sub-impulso. Finalmente, se estudió un caso no lineal en la identificación de un reactor químico no isotérmico, donde se observa como la respuesta transitoria obtenida por el modelo linealizado obtenido con el método propuesto es similar las obtenidas con Jhonson y Moradi (2005), Ljung (2012) y Wang et al. (2001). A partir de lo mencionado anteriormente, se puede indicar que el propuesto es un método de identificación sencillo, que requiere poco esfuerzo computacional y permite obtener modelos que se aproximan a la respuesta transitoria y en frecuencia de sistema original con relativa buena calidad.

Por otro lado, como se observa en la Sección 2, la metodología seguida para el desarrollo del método propuesto, permite utilizar cualquier conjunto de puntos característicos de la respuesta escalón y solo fueron estudiados un conjunto de puntos, por lo que como trabajo futuro se plantea el estudio de los puntos óptimos $\{t_k, y_k\}$ que permitan al método propuesto obtener los modelos más robustos en ambientes con ruido. En lo referente al método de Liu y Gao (2010), se ha observado una alta sensibilidad del mismo ante el parámetro α , en ambientes con ruido, por lo que se recomienda un análisis para establecer metodologías para determinar el valor ideal de α para dicho método.

English Summary

A New Identification Method Based on Open Loop Step Response of Overdamped System.

Abstract

In this paper a new process identification method based in open loop step response of overdamped systems is presented. Initially the transient behavior of transfer functions with multiple real poles is analyzed, establishing analytical formulas to estimate the time it takes for these systems to reach certain points of his reaction curve to stimuli of the step type, including settling time for error criteria of 2 % and 5 %. Subsequently developed a method of identification using 3 points characteristic of the reaction curve (t_k, y_k) , allowing estimate the order process N , the time constant T of multiple poles and delay time L of the approximate model. To evaluate the performance of the proposed method, 3 minimum phase and 1 non minimum phase transfer functions are used to compare the proposed method with other of identification methods found in the literature, as well as also, one model of a non-isothermal chemical reactor; establishing as efficiency index the root mean square error (RMSE) of the transient response and the frequency response of the identified models with respect to the original transfer functions with different signal to noise ratio (SNR) values. From the results obtained show that the proposed method achieves excellent approximation of the transient responses and frequency compared to other methods. From the results, it was observed that the proposed method obtains good approximations of the transient and frequency responses, being a simple method and requires a low computational load compared with others methods.

Keywords:

Process Identification, Step function responses, Multiple real poles, Root mean square error, Transient responses, Signal-to-noise ratio, Open-loop response, Step input.

Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollado gracias a los recursos aportados por el Decanato de Investigación de la Universidad Nacional Experimental del Táchira.

Referencias

- Alfaro, V., 2006. Identificación de modelos de orden reducido a partir de la curva de reacción del proceso. *Ciencia y Tecnología: Revista de la Universidad de Costa Rica* 24 (2), 197–216.
- Coleman, T. F., Li, Y., 1994. On the convergence of interior-reflective newton methods for nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming* 67 (1), 189–224.
DOI: 10.1007/BF01582221
- Jhonson, M., Moradi, M., 2005. *PID Control: New Identification and Design Methods*. Springer-Verlag, London.
DOI: 10.1007/1-84628-148-2
- Keesman, K. J., 2011. *System Identification: An Introduction*. Springer London.
- Liu, T., Gao, F., 2010. A frequency domain step response identification method for continuous-time processes with time delay. *Journal of Process Control* 20 (7), 800–809.
DOI: 10.1016/j.jprocont.2010.04.007
- Liu, T., Wang, Q. G., Huang, H. P., 2013. A tutorial review on process identification from step or relay feedback test. *Journal of Process Control* 23 (10), 1597–1623.
DOI: 10.1016/j.jprocont.2013.08.003
- Ljung, L., 1987. *System Identification: Theory for the User*. Pentice Hall, United States of America.
- Ljung, L., 2012. *System Identification Toolbox™ Users Guide (R2012b)*. The MathWorks, Inc.
- Papilinski, J. P., Zuchowski, A., 2013. The strejc model parameters identification with analysis of influence of random disturbances. En: 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). IEEE, Miedzydroje, pp. 666–671.
DOI: 10.1109/MMAR.2013.6669990
- Powell, M., 1970. A fortran subroutine for solving systems of nonlinear algebraic equations. En: Rabinowitz, P. (Ed.), *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Gordon and Breach, Ch. 7, pp. 115–161.
- Smith, C. A., Corripio, A. B., 1997. *Principles and Practice of Automatic Process Control*. John Wiley & Sons, Inc.
- Söderström, T., Stoica, P., 1989. *System Identification*. Prentice-Hall International, Cambridge, United Kingdom.
- Strejc, V., 1959. Näherungsverfahren für aperiodische übergangscharakteristiken. *Regelungstechnik*, 124–128.
- Wang, Q.-G., Guo, X., Zhang, Y., 2001. Direct identification of continuous time delay systems from step responses. *Journal of Process Control* 11 (5), 531–542.
DOI: 10.1016/S0959-1524(00)00031-7