



ELSEVIER



CrossMark

ScienceDirect

Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



RIAI

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 13 (2016) 247–257

[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

## Análisis Cinemático de un Novedoso Robot Paralelo Reconfigurable

Róger E. Sánchez-Alonso\*, José-Joel González-Barbosa, Eduardo Castillo-Castañeda,

Mario A. García-Murillo

*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional  
Cerro Blanco, N° 141, Colinas del Cimatario, Querétaro, QRO, México.*

### Resumen

Este trabajo presenta el análisis cinemático de un manipulador reconfigurable integrado por dos sub-manipuladores paralelos que comparten una plataforma móvil. Una solución en forma semi-cerrada para el análisis directo de posición del robot es obtenida tomando ventaja de la geometría no plana de la plataforma móvil, mientras que los análisis de velocidad, aceleración y singularidades son desarrollados por medio de teoría de tornillos. Finalmente se propone una aproximación basada en el índice de manipulabilidad de la matriz jacobiana para determinar la configuración geométrica que optimiza el desempeño del manipulador dada una determinada postura de la plataforma móvil.

*Palabras Clave:* Robot paralelo, Reconfiguración, Cinemática, Teoría de tornillos, Matriz jacobiana, Índice de manipulabilidad.

### 1. Introducción

Actualmente los diversificados requerimientos del mercado y el desarrollo de políticas de optimización de costos en la industria, han conducido a la robótica hacia el diseño de manipuladores más flexibles, enfatizando en los manipuladores paralelos debido a sus ventajas sobre los tipo serie, por ejemplo, mayor capacidad de carga, rigidez, aceleraciones, entre otras.

La reconfiguración de un robot es probablemente la estrategia más factible para incrementar su flexibilidad. En el caso de los manipuladores paralelos, existen dos enfoques para reconfigurar este tipo de arquitectura mecánica (Zhang y Shi, 2012); el diseño modular y el diseño de geometría variable.

Un manipulador paralelo con un diseño modular está integrado por un conjunto de partes estandarizadas que pueden ser fácilmente ensambladas y desensambladas para obtener diferentes configuraciones (Yang *et al.*, 2001; Brisan, 2007; Xi *et al.*, 2011; Yu *et al.*, 2012; Plitea *et al.*, 2013; Carbonari *et al.*, 2014).

Por otro lado, un manipulador paralelo con un diseño de geometría variable es capaz de modificar sus dimensiones para alcanzar nuevas configuraciones. La plataforma Gough-Stewart presentada en (Ji y Song, 1998), el dodecápodo (Bande *et al.*, 2005), el robot planteado en (Zhang y Shi, 2012), la familia de mecanismos introducida en (Ye *et al.*, 2014) y el manipulador de múltiples modos de operación analizado en (Kong, 2014) son ejemplos de este enfoque, sin embargo, son trabajos que se limitan al planteamiento de la arquitectura mecánica, a su análisis

cinemático, al desarrollo de algunas simulaciones dinámicas o bien al análisis del efecto de la variación geométrica sobre el espacio de trabajo del manipulador. Algunos trabajos profundizan más al definir ciertos índices de desempeño como criterios para determinar la configuración geométrica óptima del manipulador, por ejemplo la rigidez (Simaan y Shoham, 2003; Kumar, *et al.*, 2009), el torque requerido por los actuadores (du Plessis y Snyman, 2006) y la capacidad de carga (Chen, 2012).

Hasta el día de hoy el desarrollo de un manipulador paralelo reconfigurable funcional y de alto desempeño sigue siendo un reto. Los prototipos basados en un diseño modular se limitan al planteamiento de arquitecturas que modifican su espacio de trabajo y sus grados de libertad, y en el caso de los basados en un diseño de geometría variable siguen sin definir una metodología efectiva para determinar la configuración adecuada del manipulador dada una tarea. Por lo anterior, todos los esfuerzos que se destinen para el diseño de un manipulador reconfigurable de gran potencial son altamente justificados para la robótica.

En este trabajo se presenta el análisis cinemático de un robot paralelo reconfigurable basado en un enfoque de geometría variable. El manipulador tiene una estrategia de diseño que simplifica su análisis directo de posición y que además evita algunas singularidades típicas de los robots paralelos. El resto de la contribución es organizada como sigue: en la Sección 2 el manipulador es presentado; en la Sección 3 se propone el modelo de posición, velocidad y aceleración del robot, al igual que se analizan sus singularidades evidentes; en la sección 4 se muestra la aplicación del índice de manipulabilidad para definir la configuración geométrica que optimiza el desempeño del manipulador; y finalmente las conclusiones y trabajos futuros son expuestos en las Secciones 5 y 6 respectivamente.

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [rogersan1984@hotmail.es](mailto:rogersan1984@hotmail.es) (Róger E. Sánchez Alonso)

## 2. Descripción del manipulador propuesto

El manipulador propuesto está basado en la reconfiguración de un robot paralelo de 6-GDL (grados de libertad) que se encuentra en proceso de patentamiento ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial (folio: MX/a/2013/011009), el cual de aquí en adelante será llamado modelo base. La descripción del modelo base y la estrategia de reconfiguración implementada se muestra a continuación.

### 2.1. Modelo Base

El robot está integrado por dos sub-manipuladores paralelos tipo 3-RUS que comparten una plataforma móvil en forma de prisma triangular (Figura 1a). R, U y S representan respectivamente articulaciones de revoluta, universales y esféricas, y el subrayado indica la articulación activa. A menos que se especifique lo contrario para referirse a los elementos del sub-manipulador llamado  $M_1$  se utiliza los subíndices  $i = 1, 2, 3$ , por otro lado, se utiliza los subíndices  $i = 4, 5, 6$  para referirse a los elementos del sub-manipulador llamado  $M_2$ .

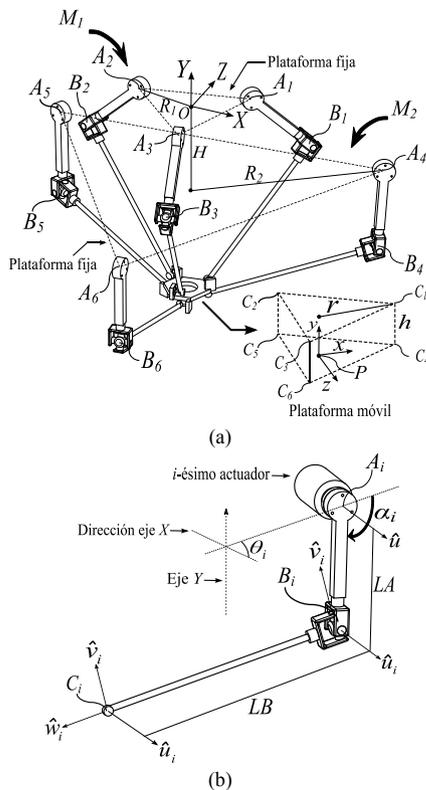


Figura 1: Modelo base para la reconfiguración. (a) Vista general. (b)  $i$ -ésima cadena cinemática.

La plataforma fija del manipulador está definida por los triángulos equiláteros  $A_1A_2A_3$  y  $A_4A_5A_6$ , los cuales son paralelos y están separados entre sí por una distancia  $H$ . En el centro  $O$  del triángulo  $A_1A_2A_3$  es localizado el sistema de referencia global del robot, sus ejes  $X$  y  $Z$  yacen sobre el plano definido por el triángulo y el eje  $Y$  apunta hacia arriba. Los vértices  $A_i = (A_{xi}, A_{yi}, A_{zi})$  de los triángulos  $A_1A_2A_3$  y  $A_4A_5A_6$  denotan las posiciones, definidas por los vectores  $A_i$ , de las articulaciones activas de revoluta del robot, en donde  $R_1$  y  $R_2$  representan los circunradios de estos

triángulos, y  $\theta_i$  representa la disposición radial alrededor del eje  $Y$  de la  $i$ -ésima cadena cinemática, la cual es medida a partir de la dirección positiva del eje  $X$  (Figura 1b). Por otro lado, en una misma cadena cinemática, el eslabón de longitud  $LA$  está conectado al de longitud  $LB$  en el punto  $B_i = (B_{xi}, B_{yi}, B_{zi})$  a través de una articulación universal cuya posición está definida por el vector  $B_i$ . De forma similar, la plataforma móvil y cualquiera de los eslabones de longitud  $LB$  están conectados en el punto  $C_i = (C_{xi}, C_{yi}, C_{zi})$  mediante una articulación esférica cuya posición está definida por el vector  $C_i$ . Los puntos  $C_i$  forman un prisma triangular de altura  $h$  definido por los triángulos equiláteros  $C_1C_2C_3$  y  $C_4C_5C_6$ , donde  $r$  representa el circunradio de dichos triángulos. Los ejes de rotación de las articulaciones activas de revoluta, definidos como  $\hat{u}_i$ , son tangentes a la circunferencia circunscrita de los triángulos  $A_1A_2A_3$  y  $A_4A_5A_6$ . Además, los ejes de rotación de las articulaciones universales son  $\hat{u}_i$  y  $\hat{v}_i$ , donde  $\hat{v}_i$  es ortogonal a  $\hat{u}_i$  y a la dirección  $\hat{w}_i$  del eslabón de longitud  $LB$ . En el caso de las articulaciones esféricas los ejes de rotación son  $\hat{u}_i$ ,  $\hat{v}_i$  y  $\hat{w}_i$ . Finalmente, el vector  $P$  define la posición del punto de interés  $P = (P_x, P_y, P_z)$  de la plataforma móvil (efector final), el cual está ubicado convenientemente en el centro del triángulo  $C_4C_5C_6$ , en donde es definido un sistema de referencia móvil  $xyz$ .

### 2.2. Estrategia de reconfiguración

Se selecciona un enfoque de reconfiguración por geometría variable pues éste, a diferencia del enfoque modular, puede implementarse fácilmente sin necesidad de interrumpir el proceso de operación del robot.

Cualquiera de los parámetros que define la geometría del modelo base puede considerarse para la reconfiguración, sin embargo la selección del parámetro adecuado debe estar sujeta a algunos aspectos técnicos. En el caso de los parámetros  $\theta_i$ , seleccionarlos parece implicar un diseño mecánico complicado para modificarlos uno a la vez o de forma simultánea, aparte esto generaría un espacio de trabajo asimétrico, lo cual no es el propósito en este trabajo. Por otro lado, la selección de los parámetros  $h$  o  $r$  no parece tener caso, pues implicaría montar sobre la plataforma móvil una serie de actuadores para modificar estos parámetros, cosa que parece difícil de implementar y que traería consecuencias negativas sobre la capacidad de carga del manipulador, su rigidez y por tanto la exactitud del mismo. Desventajas similares parece implicar la selección de los parámetros  $LA$  o  $LB$ , pues sería necesario montar en cada cadena cinemática los actuadores necesarios para generar la reconfiguración. De igual forma seleccionar el parámetro  $R_2$  parece no viable, pues implicaría un diseño con muchas interferencias mecánicas dentro del espacio de trabajo operable del robot. De esta manera quedan disponibles los parámetros  $R_1$  y  $H$ , los cuales parecen requerir diseños más simples, con mayor utilidad y menos desventajas que las alternativas anteriores.

En la Figura 2 se presenta una estrategia de reconfiguración basada en la modificación simultánea de los parámetros  $R_1$  y  $H$ . La reconfiguración se logra al agregar en las  $i = 1, 2, 3$  cadenas cinemáticas de  $M_1$  un eslabón de longitud  $R_i$ , el cual será llamado eslabón de reconfiguración. El posicionamiento angular definido por  $\beta$  del eslabón de reconfiguración implica un reposicionamiento de los puntos  $A_i$ , lo cual es visto como un redimensionamiento simultáneo de los parámetros  $R_1$  y  $H$  (Figura 2a). La posición  $F_i = (F_{xi}, F_{yi}, F_{zi})$  de la articulación activa de

revoluta que permite la movilidad del eslabón de reconfiguración está definida por el vector  $F_i$ , cuya magnitud es  $R_f$  y cuya dirección está asociada a  $\theta_i$ . De lo anterior se puede decir que la plataforma fija del robot reconfigurable está representada por los triángulos equiláteros paralelos  $F_1F_2F_3$  y  $A_4A_5A_6$ .

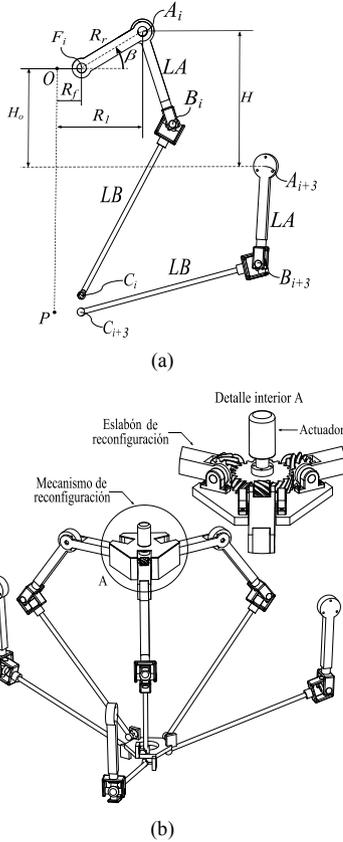


Figura 2: Estrategia de reconfiguración. (a) Estructura de la  $i$ -ésima y la  $i+3$ -ésima cadena cinemática. (b) Vista general del robot reconfigurable.

La Figura 2b muestra una propuesta de diseño para el robot reconfigurable basada en la incorporación de un mecanismo compuesto por un arreglo de engranes helicoidales cruzados. El eje de giro del engrane localizado en el centro del mecanismo es perpendicular al de cada engrane conducido conectado a cada eslabón de reconfiguración, lo cual hace que cuando el actuador acoplado al engrane central sea accionado, se genere el posicionamiento angular simultáneo e idéntico de los eslabones de reconfiguración. Este mecanismo modifica la geometría del robot mediante la inclusión de un grado de libertad al sistema, lo cual significa que el problema de redundancia generado al reconfigurar el robot es llevado a su expresión más simple.

La idea de agregar un eslabón a las cadenas cinemáticas de un manipulador paralelo para reconfigurarlo no es la contribución de este trabajo. Esta estrategia ya ha sido implementada anteriormente, por ejemplo en (Balmaceda, et al., 2014) se propone una familia de manipuladores tipo Delta reconfigurables basada en ese concepto. Más allá de lo anterior, la aportación de este trabajo recae, tal y como se evidenciará en las secciones subsiguientes, en el análisis cinemático de un manipulador hexápodo capaz reconfigurarse para optimizar su desempeño dentro de ciertos parámetros geométricos preestablecidos.

### 3. Análisis cinemático del manipulador propuesto

En esta sección se resuelve el modelo cinemático en posición, velocidad y aceleración del manipulador reconfigurable propuesto. Dado que el mecanismo de reconfiguración está basado en un arreglo de engranes helicoidales cruzados, ya muy estudiados en la literatura y cuyo análisis no implica ninguna contribución, se realizará el análisis considerando únicamente el movimiento angular definido por  $\beta$  de los eslabones de reconfiguración (Figura 2a), el cual junto con el movimiento angular definido por  $\alpha_i$  en  $A_i$  (Figura 1b), para  $i = 1, 2, \dots, 6$ , constituyen los parámetros de entrada del robot. Los parámetros de salida están definidos por las tres traslaciones y las tres orientaciones capaces de generar la plataforma móvil del robot.

#### 3.1. Análisis de posición

El manipulador propuesto está provisto de una plataforma móvil que tiene forma de prisma triangular (Figura 1a), esta característica muy particular permite, tal y como se expone más adelante, reducir considerablemente la complejidad del modelo directo de posición del robot, el cual para manipuladores hexápodos ha sido considerado como uno de los tópicos más atractivos y desafiantes de la teoría cinemática moderna.

El análisis directo de posición consiste en encontrar la postura (posición y orientación) de la plataforma móvil con respecto a la plataforma fija dado un conjunto de coordenadas generalizadas  $\alpha_i$  y  $\beta$ . Para ello, es necesario calcular previamente las coordenadas de  $F_i$  de la siguiente forma:

$$F_i = \begin{bmatrix} R_f \cos \theta_i \\ 0 \\ R_f \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Además, las coordenadas de  $A_i$  y  $B_i$  se obtienen de:

$$A_i = \begin{bmatrix} R \cos \theta_i \\ D \\ R \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (2) \quad B_i = \begin{bmatrix} A_{xi} + LA \cos \alpha_i \cos \theta_i \\ A_{yi} + LA \sin \alpha_i \\ A_{zi} + LA \cos \alpha_i \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde:  $R = R_f + R_c \cos \beta$ ,  $D = R_c \sin \beta$ , para  $i = 1, 2, 3$ ; y  $R = R_2$ ,  $D = -H_0$ , para  $i = 4, 5, 6$ .

Por otro lado, tomando en cuenta que la plataforma móvil es un prisma de altura  $h$ , las coordenadas de  $C_4, C_5$  y  $C_6$  pueden ser especificadas en función de  $C_1, C_2$  y  $C_3$  de la siguiente forma:

$$C_{i+3} = C_i + h \hat{g} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

donde  $\hat{g}$  es un vector unitario normal al triángulo  $C_1C_2C_3$ , el cual es calculado a través del producto cruz como sigue:

$$\hat{g} = \frac{2/\sqrt{3}(C_2 - C_3) \times (C_1 - C_3)}{e^2} \quad (5)$$

con  $e = 2r \cos(\pi/6)$  representando el lado del prisma triangular definido por la plataforma móvil.

De lo anterior, el análisis directo de posición se reduce a encontrar las coordenadas de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ . Para ello considérese las siguientes ecuaciones de restricciones geométricas del robot:

$$(C_i - B_i) \bullet (C_i - B_i) = LB^2 \quad i = 1, 2 \dots 6 \quad (6)$$

$$(C_i - C_j) \bullet (C_i - C_j) = e^2 \quad (i, j) \in \{(1,2) (2,3) (1,3)\} \quad (7)$$

donde el operador  $(\bullet)$  denota el producto punto.

Las expresiones (6) y (7) forman un sistema de nueve ecuaciones cuadráticas y nueve incógnitas;  $C_{xi}$ ,  $C_{yi}$ ,  $C_{zi}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Una vez solucionado el sistema,  $C_{xi}$ ,  $C_{yi}$ ,  $C_{zi}$ , para  $i = 4, 5, 6$ , pueden ser calculadas fácilmente a través de la expresión (4).

Para determinar la postura de la plataforma móvil es necesario considerar el sistema de referencia móvil definido en el centro del triángulo equilátero  $C_4C_5C_6$  (Figura 1a). Este sistema de referencia tiene sus ejes  $x$  y  $z$  yaciendo en el plano definido por este triángulo, con el eje  $x$  apuntando hacia  $C_4$ . Por tanto, la posición de la plataforma móvil es definida por el vector  $P$ :

$$P = \frac{1}{3} \sum_{i=4}^6 C_i \quad (8)$$

mientras la orientación es definida por una matriz de rotación  $R_m$  usando el método presentado en (Gallardo-Alvarado *et al.*, 2008):

$$R_m = \begin{bmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde  $\hat{u}_x$ ,  $\hat{u}_y$ ,  $\hat{u}_z$  son vectores unitarios a lo largo de los ejes del sistema de referencia móvil, y pueden ser calculados por:

$$\hat{u}_x = \frac{C_4 - P}{\|C_4 - P\|} \quad (10) \quad \hat{u}_z = \frac{C_6 - C_5}{\|C_6 - C_5\|} \quad (11) \quad \hat{u}_y = \hat{u}_z \times \hat{u}_x \quad (12)$$

Finalmente, la postura de la plataforma móvil puede ser expresada a través de la matriz de transformación homogénea  $T$ :

$$T = \begin{bmatrix} R_m & P \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

El modelo directo de posición propuesto está basado, al igual que muchos en la literatura, en la solución de un sistema de ecuaciones polinomiales no lineales de múltiples incógnitas. Sin embargo, debido al diseño prismático de la plataforma móvil, es posible expresar la posición de tres de sus articulaciones esféricas como una combinación lineal de otras tres, lo que deriva en un sistema de ecuaciones más simple de resolver.

Diversos algoritmos han sido desarrollados para solucionar este tipo de sistemas de ecuaciones aplicados al modelo directo de posición de manipuladores hexápodos; métodos de eliminación (Husty, 1996; Lee y Shim, 2003), métodos de continuación (Raghavan, 1993; Mu y Kazerounian, 2002), métodos fundamentados en las bases de Gröbner (Rolland, 2005; Gan *et al.*, 2009), análisis de intervalos (Merlet, 2004; Shen y Wu, 2004) y más recientemente algoritmos genéticos (Omrán *et al.*, 2008; Rolland y Chandra, 2010) y redes neuronales (Parikh y Lam, 2005; Yurt *et al.*, 2007). Todos ellos tienen debilidades y fortalezas, y discutir las no es el objeto de este trabajo, sin

embargo es claro que el modelo directo de posición propuesto potencializa las ventajas de cualquiera de estos algoritmos.

En lo que respecta al análisis inverso de posición, aunque éste es un problema simple para robots paralelos, cuando se trata de mecanismos redundantes el problema se torna algo complejo. En el caso del manipulador en estudio, una configuración está definida por siete coordenadas generalizadas,  $\alpha_i$  y  $\beta$ , es decir siete grados de libertad, mientras que una tarea a realizar por el robot requiere a lo máximo de seis grados de libertad, lo anterior supone que una postura determinada del robot puede ser alcanzada por una infinidad de posibles configuraciones.

Solucionar el problema de redundancia implica determinar una configuración de entre todas las posibles basándose en algún criterio de desempeño. En la sección 4 se presenta una propuesta muy práctica para la aplicación del índice de manipulabilidad como criterio para definir la configuración geométrica del manipulador dada una postura. En (Landeira *et al.*, 2015) se puede encontrar más información acerca de robots redundantes.

En esta sección por lo pronto se presenta una aproximación simplificada del modelo inverso, en donde dada una postura  $T$  de la plataforma móvil y un determinado posicionamiento angular  $\beta$  de los eslabones de reconfiguración, es necesario determinar las coordenadas generalizadas  $\alpha_i$ . Para ello, las coordenadas de  $C_i$  pueden ser calculadas basándose en la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} C_i \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} C_i^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde  $C_i^*$  es un dato conocido que representa las coordenadas de  $C_i$  pero expresadas en el sistema de referencia móvil.

La sustitución de (3) y (14) en (6) permite obtener una expresión para  $\alpha_i$  tal y como se presenta a continuación:

$$\tan \frac{\alpha_i}{2} = \frac{2C_{yi} - 2D \pm \sqrt{4(D - 2C_{yi})^2 + 4R^2 - S_i^2 - Q_i \left(4R + \frac{2S_i R}{LA}\right) + Q_i^2 \left(1 - \frac{R^2}{LA^2}\right)}}{-2R - S_i - Q_i \left(\frac{R}{LA} - 1\right)} \quad (15)$$

donde:

$$S_i = \frac{1}{LA} (LB^2 - LA^2 - R^2 - D^2 + 2DC_{yi} - C_{xi}^2 - C_{yi}^2 - C_{zi}^2) \quad (16)$$

$$Q_i = 2C_{xi} \cos \theta_i + 2C_{zi} \cos \theta_i \quad (17)$$

### 3.2. Análisis de velocidad y aceleración

El análisis de velocidad y aceleración es desarrollado mediante teoría de tornillos. Para una explicación detallada de esta metodología consultar (Rico y Duffy, 2000).

Los tornillos asociados a las articulaciones de las  $i = 1, 2, 3$  cadenas cinemáticas de  $M_i$  (Figura 3a) son:  $\$'_i$ , denota el tornillo asociado a la articulación activa de revoluta definida en  $F_i$ ;  $\$^1_i$ , es el tornillo asociado a la articulación activa de revoluta definida en  $A_i$ ;  $\$^2_i$  y  $\$^3_i$ , son los tornillos asociados a la articulación universal definida en  $B_i$ , y finalmente  $\$^4_i$ ,  $\$^5_i$  y  $\$^6_i$  son los tornillos asociados a la articulación esférica definida en  $C_i$ . Estos tornillos

son también asociados a las articulaciones definidas en  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  para las  $i = 4, 5, 6$  cadenas cinemáticas de  $M_2$  (Figura 3b), sin embargo el tornillo  $\mathcal{S}_i^r$  no es considerado, y  $\mathcal{S}_i^f$  es convenientemente agregado en forma colineal a  $\mathcal{S}_i^6$  como un tornillo asociado a una articulación prismática virtual.

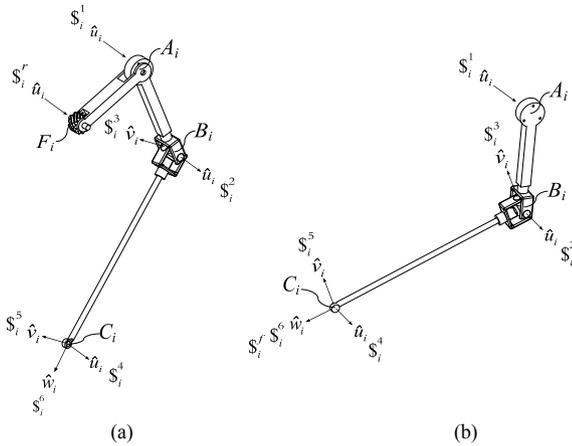


Figura 3: Tornillos infinitesimales. (a) Cadena cinemática del sub-manipulador  $M_1$ . (b) Cadena cinemática del sub-manipulador  $M_2$ .

Un tornillo asociado a una articulación de revoluta se define en coordenadas de Plücker como:  $\mathcal{S} = [\hat{S} \quad \bar{S}_O]^T$ , donde la parte primal,  $\hat{S}$ , es un vector unitario a lo largo del eje de rotación de la articulación asociada al tornillo, mientras que la parte dual,  $\bar{S}_O$ , es el momento producido por  $\hat{S}$  respecto al polo de referencia  $O$ . Por otro lado, un tornillo asociado a una articulación prismática se define en coordenadas de Plücker como:

$\mathcal{S} = [0 \quad \hat{S}]^T$ , donde  $\hat{S}$  es un vector unitario a lo largo del eje de traslación de la articulación prismática. Teniendo esto en cuenta:  $\mathcal{S}_i^r = [\hat{u}_i \quad F_i \times \hat{u}_i]^T$ ,  $\mathcal{S}_i^1 = [\hat{u}_i \quad A_i \times \hat{u}_i]^T$ ,  $\mathcal{S}_i^2 = [\hat{u}_i \quad B_i \times \hat{u}_i]^T$ ,  $\mathcal{S}_i^3 = [\hat{v}_i \quad B_i \times \hat{v}_i]^T$ ,  $\mathcal{S}_i^4 = [\hat{u}_i \quad C_i \times \hat{u}_i]^T$ ,  $\mathcal{S}_i^5 = [\hat{v}_i \quad C_i \times \hat{v}_i]^T$ ,  $\mathcal{S}_i^6 = [\hat{w}_i \quad C_i \times \hat{w}_i]^T$ ,  $\mathcal{S}_i^f = [0 \quad \hat{w}_i]^T$ .

El estado de velocidad  $V$  de la plataforma móvil del robot puede ser expresado en forma de tornillo de la siguiente forma:

para  $i = 1, 2, 3$

$$V = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \omega_1^i \mathcal{S}_i^r + \omega_1^i \mathcal{S}_i^1 + \omega_2^i \mathcal{S}_i^2 + \omega_3^i \mathcal{S}_i^3 + \omega_4^i \mathcal{S}_i^4 + \omega_5^i \mathcal{S}_i^5 + \omega_6^i \mathcal{S}_i^6 \quad (18)$$

para  $i = 4, 5, 6$

$$V = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \omega_1^i \mathcal{S}_i^1 + \omega_2^i \mathcal{S}_i^2 + \omega_3^i \mathcal{S}_i^3 + \omega_4^i \mathcal{S}_i^4 + \omega_5^i \mathcal{S}_i^5 + \omega_6^i \mathcal{S}_i^6 + \omega_f^i \mathcal{S}_i^f \quad (19)$$

donde  $\omega$  y  $v$  son respectivamente los vectores de velocidad angular y lineal de la plataforma móvil vista desde la plataforma fija, mientras que  $\omega_r^i$ ,  $\omega_n^i$  (para  $n = 1, 2 \dots 6$ ) y  $\omega_f^i = 0$

representan las magnitudes de velocidad asociadas a los tornillos definidos en las cadenas cinemáticas del robot, con  $\omega_r^i = \dot{\beta}$  y  $\omega_1^i = \dot{\alpha}_i$  como las velocidades generalizadas del robot. Nótese que la magnitud de velocidad asociada a cada tornillo virtual es nula, lo cual evita algún efecto sobre el estado de velocidad por la inclusión de dichos tornillos.

Con el propósito de obtener una ecuación de entrada-salida de velocidad para el robot es necesario considerar que el tornillo  $\mathcal{S}_i^6$  es recíproco a todos los tornillos definidos en las cadenas cinemáticas del robot, excepto a los tornillos  $\mathcal{S}_i^r$  y  $\mathcal{S}_i^1$  para  $i = 1, 2, 3$ , y a los tornillos  $\mathcal{S}_i^1$  y  $\mathcal{S}_i^f$  para  $i = 4, 5, 6$ . De lo anterior, la aplicación de la forma de Klein  $\{*,*\}$ , la cual es una forma bilineal simétrica del algebra de Lie, del tornillo  $\mathcal{S}_i^6$  a ambos lados de las ecuaciones (18) y (19), permite obtener, con la reducción de términos, las siguientes expresiones:

para  $i = 1, 2, 3$

$$\{V; \mathcal{S}_i^6\} = \dot{\beta} \{\mathcal{S}_i^r; \mathcal{S}_i^6\} + \dot{\alpha}_i \{\mathcal{S}_i^1; \mathcal{S}_i^6\} \quad (20)$$

para  $i = 4, 5, 6$

$$\{V; \mathcal{S}_i^6\} = \dot{\alpha}_i \{\mathcal{S}_i^1; \mathcal{S}_i^6\} + \omega_f^i \{\mathcal{S}_i^f; \mathcal{S}_i^6\} \quad (21)$$

Para una revisión rápida acerca de las operaciones básicas en el álgebra de tornillos, incluida la forma de Klein, consultar (Gallardo-Alvarado *et al.*, 2006).

Considerando que  $\omega_r^i = 0$  y que  $\{\mathcal{S}_i^r; \mathcal{S}_i^6\} = 1$  (ya que son tornillos colineales), las expresiones (20) y (21) se pueden agrupar en forma matricial para representar la ecuación de entrada-salida de velocidad del robot tal y como sigue:

$$J_x^T \Delta V = J_q' \dot{q}_\beta + J_q \dot{q}_\alpha \quad (22)$$

donde:

$$J_x = [\mathcal{S}_1^6 \quad \mathcal{S}_2^6 \quad \mathcal{S}_3^6 \quad \mathcal{S}_4^6 \quad \mathcal{S}_5^6 \quad \mathcal{S}_6^6] \quad (23)$$

es la matriz jacobiana de cinemática directa, mientras que  $J_q'$  y

$J_q$  son las matrices jacobianas de cinemática inversa dadas por:

$$J_q' = \text{diag} \left[ \{\mathcal{S}_1^r; \mathcal{S}_1^6\} \quad \{\mathcal{S}_2^r; \mathcal{S}_2^6\} \quad \{\mathcal{S}_3^r; \mathcal{S}_3^6\} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right] \quad (24)$$

$$J_q = \text{diag} \left[ \{\mathcal{S}_1^1; \mathcal{S}_1^6\} \quad \{\mathcal{S}_2^1; \mathcal{S}_2^6\} \quad \{\mathcal{S}_3^1; \mathcal{S}_3^6\} \quad \{\mathcal{S}_4^1; \mathcal{S}_4^6\} \quad \{\mathcal{S}_5^1; \mathcal{S}_5^6\} \quad \{\mathcal{S}_6^1; \mathcal{S}_6^6\} \right] \quad (25)$$

por otro lado,  $\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  es un operador de polaridad definido

por la matriz identidad  $\mathbf{I}$  (3x3) y la matriz nula  $\mathbf{0}$  (3x3). Además,  $\dot{q}_\beta = [\dot{\beta} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\beta} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  y  $\dot{q}_\alpha = [\dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2 \quad \dot{\alpha}_3 \quad \dot{\alpha}_4 \quad \dot{\alpha}_5 \quad \dot{\alpha}_6]^T$  son las matrices de velocidades generalizadas.

Continuando con el análisis cinemático, el estado de aceleración reducido de un cuerpo rígido se define como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \mathbf{a} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  y  $\mathbf{a}$  son respectivamente los vectores de aceleración angular y lineal de la plataforma móvil vista desde la plataforma fija. De lo anterior el estado de aceleración  $\mathbf{A}$  puede ser expresado en forma de tornillo de la siguiente forma:

para  $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{A} = \dot{\omega}_1^i \mathcal{S}_i^r + \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^1 + \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^2 + \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^3 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^6 + L_i \quad (27)$$

para  $i = 4, 5, 6$

$$\mathbf{A} = \dot{\omega}_1^i \mathcal{S}_i^1 + \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^2 + \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3 + \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^f + L_i \quad (28)$$

donde  $\dot{\omega}_r^i$ ,  $\dot{\omega}_n^i$  (para  $n = 1, 2 \dots 6$ ) y  $\dot{\omega}_f^i = 0$  representan las magnitudes de aceleración asociadas a los tornillos definidos en las cadenas cinemáticas del robot, con  $\dot{\omega}_r^i = \ddot{\beta}$  y  $\dot{\omega}_1^i = \ddot{\alpha}_i$  como las aceleraciones angulares activas del robot. Por otro lado,  $L_i$  es el  $i$ -ésimo tornillo de Lie de aceleración, el cual es calculado a través de las siguientes expresiones:

para  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} L_i = & \left[ \dot{\omega}_1^i \mathcal{S}_i^r \quad \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^1 + \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^2 + \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^3 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^6 \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_1^i \mathcal{S}_i^1 \quad \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^2 + \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3 + \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^2 \quad \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3 + \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3 \quad \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 \quad \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 \right] + \left[ \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 \quad \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 \right] \end{aligned} \quad (29)$$

para  $i = 4, 5, 6$

$$\begin{aligned} L_i = & \left[ \dot{\omega}_1^i \mathcal{S}_i^1 \quad \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^2 + \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3 + \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^f \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_2^i \mathcal{S}_i^2 \quad \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3 + \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^f \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_3^i \mathcal{S}_i^3 \quad \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 + \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^f \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_4^i \mathcal{S}_i^4 \quad \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 + \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^f \right] + \\ & \left[ \dot{\omega}_5^i \mathcal{S}_i^5 \quad \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 + \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^f \right] + \left[ \dot{\omega}_6^i \mathcal{S}_i^6 \quad \dot{\omega}_7^i \mathcal{S}_i^f \right] \end{aligned} \quad (30)$$

donde los corchetes  $[* \ *]$  denotan el producto del Lie del álgebra de Lie. Naturalmente el cálculo del tornillo de Lie de aceleración requiere previamente la solución del modelo de velocidad. Para una revisión rápida acerca de las operaciones básicas en el álgebra de tornillos, incluido el producto de Lie, consultar (Gallardo-Alvarado et al., 2006).

Nótese que debido a que la magnitud de aceleración asociada a cada tornillo virtual es nula, no se genera ningún efecto sobre el estado de aceleración ni sobre el tornillo de Lie por la inclusión de estos tornillos.

De forma similar que en análisis de velocidad, la aplicación sistemática de la forma de Klein  $\{*,*\}$  del tornillo  $\mathcal{S}_i^6$  a ambos lados de las ecuaciones (27) y (28), permite obtener, con la reducción de términos, las siguientes expresiones:

para  $i = 1, 2, 3$

$$\{\mathbf{A}; \mathcal{S}_i^6\} = \ddot{\beta} \{\mathcal{S}_i^r; \mathcal{S}_i^6\} + \ddot{\alpha}_i \{\mathcal{S}_i^1; \mathcal{S}_i^6\} + \{L_i; \mathcal{S}_i^6\} \quad (31)$$

para  $i = 4, 5, 6$

$$\{\mathbf{A}; \mathcal{S}_i^6\} = \ddot{\alpha}_i \{\mathcal{S}_i^1; \mathcal{S}_i^6\} + \dot{\omega}_f^i \{\mathcal{S}_i^f; \mathcal{S}_i^6\} + \{L_i; \mathcal{S}_i^6\} \quad (32)$$

Presentando las expresiones (31) y (32) en forma matricial, la ecuación de entrada-salida de aceleración del robot resulta en:

$$\mathbf{J}_x^T \Delta \mathbf{A} = \mathbf{J}_q' \ddot{\mathbf{q}}_\beta + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}}_\alpha + \mathbf{C} \quad (33)$$

donde las matrices de aceleraciones angulares activas son  $\ddot{\mathbf{q}}_\beta = [\ddot{\beta} \ \ddot{\beta} \ \ddot{\beta} \ 0 \ 0 \ 0]^T$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_\alpha = [\ddot{\alpha}_1 \ \ddot{\alpha}_2 \ \ddot{\alpha}_3 \ \ddot{\alpha}_4 \ \ddot{\alpha}_5 \ \ddot{\alpha}_6]^T$ , y  $\mathbf{C} = \left[ \{L_1; \mathcal{S}_1^6\} \ \{L_2; \mathcal{S}_2^6\} \ \{L_3; \mathcal{S}_3^6\} \ \{L_4; \mathcal{S}_4^6\} \ \{L_5; \mathcal{S}_5^6\} \ \{L_6; \mathcal{S}_6^6\} \right]^T$  es la matriz complementaria de aceleración.

Las expresiones (22) y (33) fueron obtenidas en esa forma matricial gracias a la conveniente inclusión de los tornillos virtuales  $\mathcal{S}_i^6$  en las  $i = 4, 5, 6$  cadenas cinemáticas del robot. Lo anterior no significa que el análisis cinemático del robot no puede realizarse sin la inclusión de estos tornillos. El uso de ellos es un mero recurso algebraico que permite expresar matricialmente las ecuaciones de entrada-salida de velocidad y aceleración del robot al hacer que  $\mathbf{J}_q'$  y  $\mathbf{J}_q$  sean del mismo tamaño. La búsqueda de esta representación matricial es debido a que de esta forma se favorece el análisis de las singularidades del robot, el cual es un tópico que se trata a continuación.

### 3.3. Análisis de singularidades

Las singulares en robots paralelos son configuraciones donde la plataforma móvil gana o pierde grados de libertad. Dichas configuraciones pueden ser clasificadas en tres tipos (Gosselin y Angeles, 1990).

*Singularidad tipo 1.* Esta singularidad, llamada de cinemática inversa, ocurre cuando  $\det(\mathbf{J}_q) = 0$ , lo cual sucede cuando cualquiera de los elementos de la diagonal de  $\mathbf{J}_q$  se vuelve cero. Esto significa que en al menos una cadena cinemática del robot los eslabones de longitud  $LA$  y  $LB$  están completamente extendidos o contraídos, causando que  $\{\mathcal{S}_i^1; \mathcal{S}_i^6\} = 0$ . Un ejemplo de esta singularidad es mostrado en la Figura 4a, en donde los eslabones de longitud  $LA$  y  $LB$  de las cadenas cinemáticas de  $M_i$  están completamente extendidos.

Singularidades de cinemática inversa puede también aparecer cuando  $\det(\mathbf{J}'_q) = 0$ , lo cual ocurre cuando cualquiera de los elementos de  $\mathbf{J}'_q$  se vuelve cero. Esto significa que en al menos una cadena cinemática de  $M_I$  los eslabones de longitud  $R_r$  y  $LB$  son colineales. Esta situación sucede en tres casos; (i) cuando los eslabones de longitud  $R_r$ ,  $LA$  y  $LB$  están completamente extendidos (Figura 4b), (ii) cuando los eslabones de longitud  $R_r$  y  $LA$  están completamente extendidos formando un segmento que se encuentra contraído respecto al eslabón de longitud  $LB$ , (iii) cuando los eslabones de longitud  $LA$  y  $LB$  están completamente extendidos formando un segmento que se encuentra contraído respecto al eslabón de longitud  $R_r$ . En cualquiera de los casos anteriores, los eslabones de longitud  $LA$  y  $LB$  están completamente extendidos o contraídos, lo cual significa que una singularidad asociada a  $\mathbf{J}'_q$  puede ocurrir sólo cuando ocurra una asociada a  $\mathbf{J}_q$ , esto es:  $\det(\mathbf{J}'_q) = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{J}_q) = 0$ .

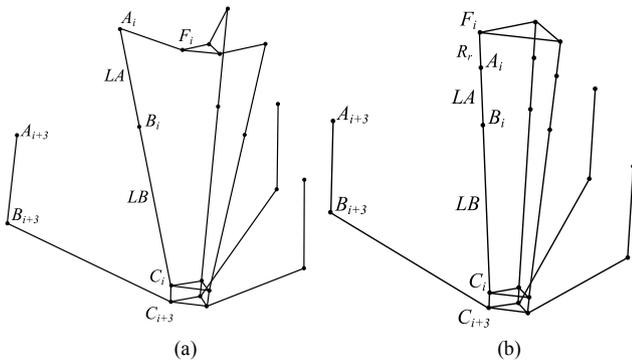


Figura 4: Algunas configuraciones singulares de cinemática inversa. (a) Cuando  $\mathbf{J}_q$  es singular. (b) Cuando  $\mathbf{J}'_q$  es singular.

**Singularidad tipo 2.** Esta singularidad, llamada de cinemática directa, ocurre cuando  $\det(\mathbf{J}_x) = 0$ , lo cual sucede cuando los tornillos recíprocos  $\mathcal{S}_i^6$  son linealmente dependientes. Debido al arreglo articular de la plataforma móvil en dos planos paralelos, la probabilidad de ocurrencia de esta condición es baja. A pesar de esto, el robot estaría en una configuración singular si los tornillos  $[\mathcal{S}_1^6 \ \mathcal{S}_2^6 \ \mathcal{S}_3^6]$  o  $[\mathcal{S}_4^6 \ \mathcal{S}_5^6 \ \mathcal{S}_6^6]$  son linealmente dependientes, lo anterior es debido a que el manipulador puede ser visto como dos sub-manipuladores. Esta situación puede ocurrir, por ejemplo, cuando para cualquier sub-manipulador los eslabones de longitud  $LB$  están localizados en el mismo plano con sus tornillos recíprocos convergiendo hacia un punto común o siendo paralelos, tal y como sucede en un mecanismo plano (Bonev et al., 2003). Un ejemplo de esta situación es mostrado en la Figura 5. Para evitar esto, se debe satisfacer que:  $LB + r > LA + R$ , con  $R = R_f + R_r \cos \beta$  para  $M_1$  y  $R = R_2$  para  $M_2$ . Si la condición anterior se cumple sólo para un sub-manipulador, éste sería capaz de tirar o empujar el otro para liberarlo de alguna singularidad.

Un caso muy especial de este tipo de singularidad ocurre cuando toda una fila o columna de  $\mathbf{J}_x$  está formada por ceros. Esta situación puede ocurrir, por ejemplo, cuando los triángulos

equiláteros  $F_1F_2F_3$ ,  $A_4A_5A_6$ ,  $C_1C_2C_3$  y  $C_4C_5C_6$  son todos coincidentes, esto es, concéntricos y con la misma orientación. Naturalmente, esta condición puede aparecer únicamente a lo largo de la dirección negativa del eje  $Y$ . Si la condición anterior se cumple, los tornillos  $\mathcal{S}_i^6$  de la matriz  $\mathbf{J}_x$  tendrán en el segundo elemento de su parte dual un cero, causando que  $\det(\mathbf{J}_x) = 0$ . Esto es debido a que la dirección de  $\mathcal{S}_i^6$  (parte primal) y el vector de posición  $C_i$  de cada articulación esférica formarán un plano ortogonal al plano  $XZ$ , haciendo que la parte dual de  $\mathcal{S}_i^6$  sea un vector perteneciente al plano  $XZ$ . Esta configuración singular puede ser fácilmente evitada si la orientación de  $F_1F_2F_3$  y  $A_4A_5A_6$  son seleccionadas apropiadamente, previniendo que los triángulos sean todos coincidentes, es decir considerando la siguiente condición:  $\theta_i \neq \theta_{i+3}$ , tal y como se muestra en la Tabla 1 de la sección 4. Esta condición podría en algunos casos generar colisiones entre las cadenas cinemáticas, por esta razón seleccionar la orientación de  $F_1F_2F_3$  y  $A_4A_5A_6$  es en definitiva una tarea interesante que podría ser discutida en un trabajo futuro relacionado con la síntesis dimensional del mecanismo.

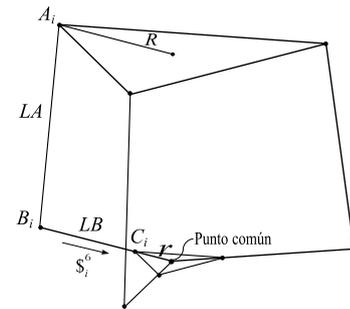


Figura 5: Singularidad de cinemática directa.

**Singularidad tipo 3.** Esta singularidad, llamada combinada, ocurre cuando simultáneamente existen singularidades de cinemática inversa y directa. Esta situación puede ocurrir en dos casos; (i)  $\det(\mathbf{J}_q) = \det(\mathbf{J}_x) = 0$ , (ii)  $\det(\mathbf{J}'_q) = \det(\mathbf{J}_q) = \det(\mathbf{J}_x) = 0$ . La opción donde solamente  $\det(\mathbf{J}'_q) = 0$  y  $\det(\mathbf{J}_x) = 0$  no puede existir, recuérdese que  $\det(\mathbf{J}'_q) = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{J}_q) = 0$ .

Un ejemplo del primer caso ocurre si en al menos una cadena cinemática de los sub-manipuladores los eslabones de longitud  $LA$  y  $LB$  están completamente extendidos o contraídos, mientras en el otro sub-manipulador los tornillos recíprocos son coplanares y convergen hacia un punto común. Por otro lado, el segundo caso puede ocurrir si la plataforma fija y móvil tienen el mismo tamaño, es decir,  $F_1F_2F_3 = A_4A_5A_6 = C_1C_2C_3 = C_4C_5C_6$ , y las cadenas cinemáticas están todas dispuestas verticalmente (paralelas), lo cual puede solamente ocurrir si la plataforma móvil está localizada entre los triángulos  $F_1F_2F_3$  y  $A_4A_5A_6$ , una configuración sin sentido para el robot (Figura 6).

La existencia de múltiples singularidades es uno de los principales inconvenientes en los manipuladores hexápodos. Muchos trabajos se han desarrollado para la identificación de estas configuraciones (Mayer y Gosselin, 2000; Jiang y Gosselin, 2009) y para el seguimiento de trayectorias libres de éstas

(Dasgupta y Mruthunjaya, 1998; Sen *et al.*, 2003), sin embargo, el desarrollo de una estrategia práctica y alcanzable para maximizar el espacio de trabajo libre de singularidades en estos mecanismos es todavía objeto de estudio. Es ahí donde aparece una de las principales ventajas del manipulador propuesto, pues gracias a la forma de su plataforma móvil las singularidades de cinemática directa se ven prácticamente eliminadas.

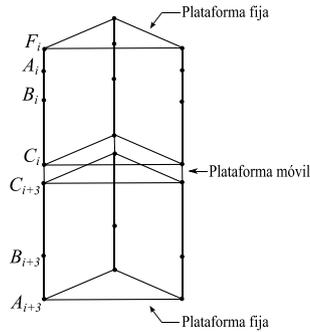


Figura 6: Singularidad combinada.

#### 4. Determinación de la configuración óptima del robot

El problema de determinar la configuración óptima del robot consiste en definir un posicionamiento angular  $\beta$  de los eslabones de reconfiguración que optimice el desempeño del manipulador para una determinada postura.

Tal y como se presenta en (Moreno, *et al.*, 2012), son muchos los índices que permiten evaluar el desempeño de un manipulador, sin embargo, son los índices de desempeño cinetostáticos los que mayor interés han despertado en los últimos años dentro de la comunidad científica, pues ofrecen información valiosa referente a la capacidad de transformar velocidades de los actuadores en velocidades en el efector final, lo que está muy relacionado con el detección de configuraciones singulares y con el diseño de manipuladores isotrópicos.

Los índices de desempeño cinetostáticos comúnmente utilizados (número de condición, manipulabilidad y mínimo valor singular) están definidos en función de la matriz jacobiana del manipulador, sin embargo, cuando el efector final del manipulador es capaz de posicionarse y orientarse estos índices no pueden ser evaluados consistentemente, pues la matriz jacobiana de estos manipuladores está formada por elementos dimensionalmente no homogéneos.

Muchos trabajos se han desarrollado con el objetivo de hacer una evaluación cinetostática a partir de una matriz jacobiana de elementos no homogéneos (Sung-Gaun y Ryu, 2003; Ueberle, *et al.*, 2004; Voglewede y Ebert-Uphoff, 2004; Angeles, 2007). Después de evaluar la aplicabilidad de estos métodos, se decide aplicar la aproximación propuesta en (Ueberle, *et al.*, 2004), la cual sugiere dividir la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  en dos sub-matrices,  $\mathbf{J}_{rot}$  para la orientación y  $\mathbf{J}_{tras}$  para la traslación, tal y como sigue:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_{rot} \quad \mathbf{J}_{tras}]^T \quad (34)$$

De esta manera se puede obtener una medida de manipulabilidad de rotación  $w_{rot}$  y de traslación  $w_{tras}$  de la siguiente forma:

$$w_{rot} = \sqrt{\det(\mathbf{J}_{rot} \mathbf{J}_{rot}^T)} \quad (35) \quad w_{tras} = \sqrt{\det(\mathbf{J}_{tras} \mathbf{J}_{tras}^T)} \quad (36)$$

A mayores valores de estos índices el robot tiene mayor capacidad de realizar movimientos en el efector final. Cuando tiendan a cero el robot se encuentra cercano a una singularidad.

El modelo de velocidad presentado en la expresión (22) no permite obtener fácilmente una representación de la matriz jacobiana del robot tal y como se presenta en la ecuación (34), sin embargo, considerando los hallazgos del análisis de singularidades realizado en la sub-sección 3.3, es posible omitir el efecto de  $\mathbf{J}'_q$  en la evaluación cinetostática del manipulador y de esa manera obtener la siguiente expresión:

$$\mathbf{V}' = (\mathbf{J}_x^T \Delta)^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}_a \quad (37)$$

donde  $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_x^T \Delta)^{-1} \mathbf{J}_q$  es la matriz jacobiana que será utilizada para la evaluación cinetostática.

La expresión (37) representa la ecuación de velocidad para el modelo base del robot en estudio (Figura 1), es decir sin considerar el eslabón de reconfiguración incluido en las cadenas cinemáticas de  $M_i$  (Figura 2), de ahí que no aparece la matriz  $\mathbf{J}'_q$  en dicha ecuación. Del análisis de singularidades se determinó que  $\mathbf{J}'_q$  es singular sólo si  $\mathbf{J}_q$  también lo es, por lo tanto, al buscar una configuración geométrica del modelo base que evite que  $\mathbf{J}_q$  sea singular, también se está evitando que  $\mathbf{J}'_q$  lo sea en el robot reconfigurable, es por ello la omisión de esta matriz en la evaluación cinetostática.

Los cálculos presentados en esta sección se realizan considerando los valores de referencia mostrados en Tabla 1.

Tabla 1: Valores de referencia para los parámetros geométricos del robot.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$R_f$	50 mm	$r$	50 mm
$R_r$	150 mm	$\theta_1$	35°
$R_2$	450 mm	$\theta_2$	155°
$H_o$	200 mm	$\theta_3$	275°
$LA$	200 mm	$\theta_4$	25°
$LB$	400 mm	$\theta_5$	145°
$h$	34 mm	$\theta_6$	265°

El análisis consiste en calcular  $w_{rot}$  y  $w_{tras}$  para el intervalo  $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$  dada una serie de posturas de la plataforma móvil. Con el objetivo de describir los principales hallazgos se muestran los resultados para la siguiente postura (ver ecuación 13):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.9623 & -0.1306 & -0.2388 & 0 \\ 0.0842 & 0.9771 & -0.1952 & -350 \\ 0.2588 & 0.1677 & 0.9513 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la Figura 7, pese a que el análisis se hizo para un intervalo mayor, únicamente se obtuvo resultados dentro del intervalo  $-60^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ , esto significa que la postura en estudio no puede

ser alcanzada por el manipulador en configuraciones que impliquen un posicionamiento de los eslabones de reconfiguración inferior a  $-60^\circ$ . En esta figura se observa además cómo la manipulabilidad de rotación y traslación tienen un comportamiento muy similar, ambas empiezan a mejorar a partir de la configuración del robot que implica un posicionamiento angular más bajo, hasta alcanzar un punto donde ya no mejora y empieza a decaer. Tanto el estudio de la manipulabilidad de rotación como de traslación señalan que la configuración del robot que ofrece el mejor desempeño cinetostático es cuando los eslabones de reconfiguración están posicionados a aproximadamente  $-11^\circ$  (Figura 8).

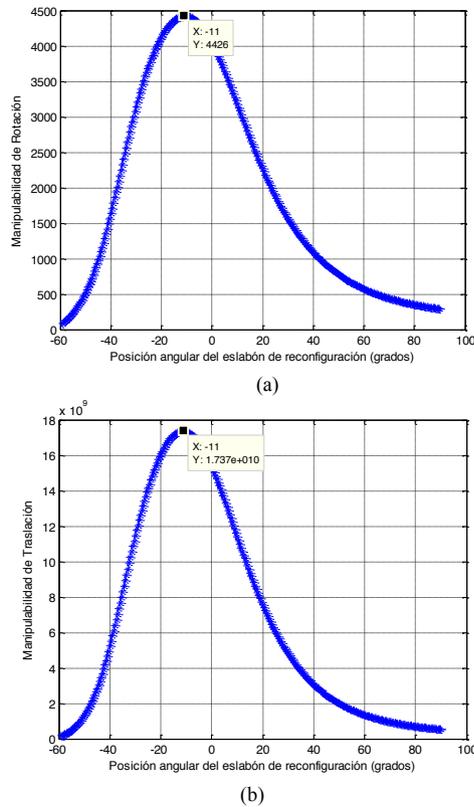


Figura 7: Relación entre la posición angular del eslabón de reconfiguración y la manipulabilidad. (a) Manipulabilidad de rotación. (b) Manipulabilidad de traslación.

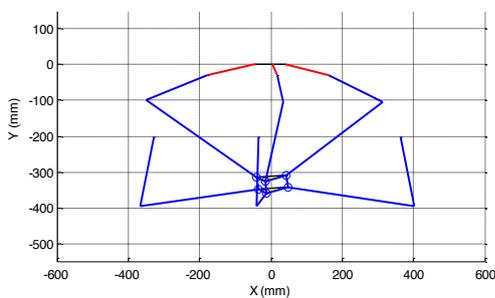


Figura 8: Una configuración óptima del robot.

El comportamiento de estos índices para la pose mostrada anteriormente es similar en todo el espacio de trabajo del robot. Es decir, dado un intervalo de posibles configuraciones, la

manipulabilidad de rotación y traslación tienden a mejorar hasta alcanzar un punto donde ya no lo hacen, lo cual significa que la función que relaciona la posición angular del eslabón de reconfiguración y la manipulabilidad de rotación y traslación tienen un máximo global que puede ser fácilmente identificado. Es importante acotar que dicho punto no siempre coincide para ambos indicadores, pero siempre son relativamente cercanos. Esto se puede evidenciar a continuación.

Considérese una trayectoria en forma de espiral descendente definida de la siguiente manera:

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0.9811 & -0.0558 & 0.1855 & 25\cos(2\pi s) \\ 0.0858 & 0.9837 & -0.1581 & -250-100s \\ -0.1736 & 0.1710 & 0.9698 & 25\sin(2\pi s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $s = 0, 0.01, 0.02, \dots, 1$ .

La Figura 9 muestra, para la trayectoria en estudio, una comparación entre el comportamiento de la manipulabilidad de rotación (Figura 9a) y de traslación (Figura 9b) del robot sin reconfigurar (modelo base) y bajo la estrategia de reconfiguración propuesta. Durante los primeros 30 puntos de la trayectoria la mejora de la manipulabilidad de rotación y traslación no parece ser tan evidente, sin embargo, a partir de aproximadamente el punto 40 de la trayectoria, la mejora es muy clara, lo que significa que bajo esta estrategia de reconfiguración se está optimizando el desempeño cinetostático del manipulador.

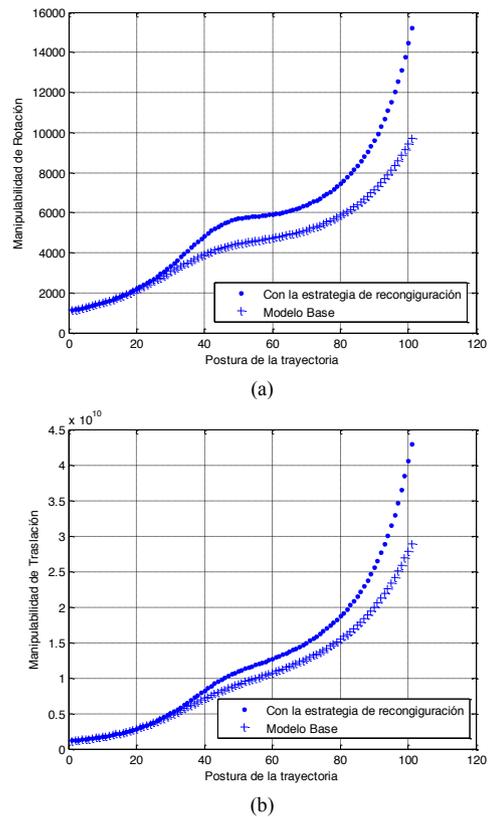


Figura 9: Comparativa de la manipulabilidad del modelo base y la manipulabilidad obtenida bajo la estrategia de reconfiguración. (a) Manipulabilidad de rotación. (b) Manipulabilidad de traslación.

En la Figura 10 se muestra el comportamiento del posicionamiento angular del eslabón de reconfiguración durante el proceso de reconfiguración para la trayectoria en estudio. Tal y como se había mencionado anteriormente, la configuración del robot no siempre es la misma si se considera la manipulabilidad de rotación o de traslación, sin embargo, las diferencias parecen no ser tan grandes (alrededor de dos grados como máxima desviación para este caso). El comportamiento del eslabón de reconfiguración es similar con cualquiera de los dos tipos de manipulabilidad, pero sobre todo vale la pena resaltar la continuidad de los resultados para ambos casos, lo que resulta muy conveniente durante el proceso de operación del robot, pues se evitan cambios bruscos en la configuración del mismo.

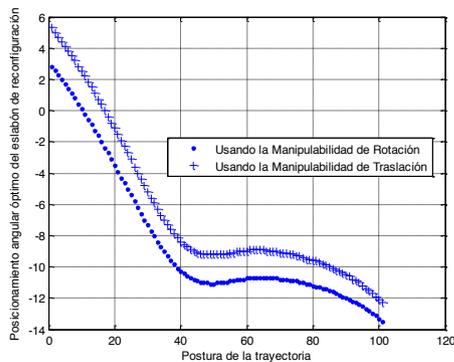


Figura 10: Posicionamiento del eslabón de reconfiguración considerando la manipulabilidad de rotación y traslación.

La selección entre la manipulabilidad de rotación y de traslación para determinar la configuración geométrica del robot dependerá de la aplicación que se esté desarrollando, es decir dependerá de si la tarea que se está realizando dada una determinada pose es principalmente de traslación o de rotación.

## 5. Conclusiones

Se presentó el análisis cinemático de un robot reconfigurable inspirado en un robot paralelo que está integrado por dos sub-manipuladores que comparten plataforma móvil. Después de estudiar la geometría y el modelo cinemático del robot, dos características resaltan en éste: (i) la relativa independencia entre los sub-manipuladores  $M_1$  y  $M_2$ , y (ii) la forma prismática de la plataforma móvil. La independencia entre los sub-manipuladores permite que se pueda agregar un eslabón a las cadenas cinemáticas de uno de ellos sin afectar el otro, de hecho si se analiza detenidamente, cualquier posicionamiento angular del eslabón de reconfiguración perteneciente al sub-manipulador  $M_1$  no implica ninguna modificación en la configuración del sub-manipulador  $M_2$ . Esta característica no sólo favorece la aplicación de la estrategia de reconfiguración, sino que también ayuda a evitar colisiones entre las cadenas cinemáticas del manipulador debido al arreglo de las articulaciones esféricas de la plataforma móvil en dos planos paralelos.

Las características anteriores pertenecen a una estrategia de diseño que provee al manipulador reconfigurable una serie de ventajas cinemáticas. Desde el punto de vista teórico, una solución en forma semi-cerrada es obtenida fácilmente aprovechando la geometría de la plataforma del robot, lo cual

para un manipulador paralelo de múltiples cadenas cinemáticas no es una tarea fácil. En el caso de aplicaciones prácticas, el robot propuesto es capaz de realizar las mismas tareas que un manipulador hexápodo convencional, sin embargo, sus aplicaciones aumentan debido a la presencia de pocas configuraciones singulares, especialmente singularidades de cinemática directa. Además debido a la estrategia de reconfiguración implementada, se garantiza que el desempeño del robot se puede optimizar dentro de ciertos parámetros geométricos preestablecidos.

En este trabajo se utilizó el índice de manipulabilidad para determinar la configuración del robot que optimiza su desempeño cinetostático, sin embargo, cualquier otro índice puede ser aplicado para este fin. Sea cual sea el índice a implementar, su estimación dependerá en su totalidad o al menos en parte (en el caso de índices de desempeño dinámicos) del modelo cinemático presentado en este trabajo.

El robot presentado en esta contribución constituye una propuesta interesante de manipulador con fines industriales. Este mecanismo conserva las ventajas tradicionales de los manipuladores paralelos sobre los seriales, sin embargo ofrece otras ventajas asociadas a la simplicidad de un modelo cinemático, a la reducción de configuraciones singulares y a la versatilidad durante la operación debido a que es reconfigurable.

## 6. Trabajo Futuro

El estudio de la arquitectura propuesta debe ser complementado con un análisis dinámico y un análisis de espacio de trabajo.

En la actualidad se dispone de muchos métodos para el análisis dinámico de un manipulador paralelo (Newton-Euler, Lagrange, principio de trabajo virtual, etc.), por lo que esta tarea no parece suponer mayor inconveniente, caso contrario al análisis del espacio de trabajo, el cual por el simple hecho de ser para un robot cuya plataforma móvil se traslada y rota en tres ejes, involucra un elevado costo computacional para la determinación del espacio de trabajo diestro del robot, problema que se vuelve más complejo cuando se considera que el robot es reconfigurable, pues el volumen y la forma del espacio de trabajo del robot es variable.

Otro aspecto que debe ser tratado a futuro, y que de hecho está muy relacionado con el espacio de trabajo, es la síntesis dimensional del robot. Un estudio de este tipo permitiría determinar las dimensiones óptimas de cada sub-manipulador y del eslabón de reconfiguración no sólo pensando en maximizar el espacio de trabajo del robot, sino que también de cara a mejorar su desempeño cinetostático desde la etapa de diseño.

## English Summary

### Kinematic Analysis of a Novel Reconfigurable Parallel Robot.

#### Abstract

This work presents the kinematic analysis of a reconfigurable manipulator composed of two parallel sub-manipulators that share a common moving platform. A semi-closed form solution is easily obtained to solve the forward displacement analysis of the

robot taking advantage of the non-planar geometry of the moving platform, while the velocity, acceleration and singularity analyses are developed by resorting to screw theory. Finally a very practical approach based on the manipulability index of the jacobian matrix of the robot is proposed in order to determine the geometric configuration that optimizes the performance of the manipulator given a pose of the moving platform.

#### Keywords:

Parallel robot, Reconfiguration, Kinematics, Screw theory, Jacobian matrix, Manipulability index.

#### Referencias

- Angeles, J., 2007. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods, and Algorithms*, Springer International Publishing.
- Balmaceda-Santamaría, A., Castillo-Castañeda, E., Gallardo-Alvarado, J., Sánchez-Alonso, R., 2014. Una familia de manipuladores paralelos reconfigurables tipo Delta. In XVI Congreso Mexicano de Robótica, Mazatlán, México.
- Bande, P., Seibt, M., Uhlmann, E., Saha, S., Rao, P., 2005. Kinematics Analyses of Dodekapod, *Mechanism and Machine Theory*, 40 (6), 740-756.
- Brisan, C., 2007. Designing Aspects of a Special Class of Reconfigurable Parallel Robots, In *Innovative Algorithms and Techniques in Automation, Industrial Electronics and Telecommunications*, edited by Tarek Sobh, Khaled Elleithy, Ausif Mahmood and Mohammed Karim, 101-106: Springer International Publishing.
- Bonev, I., Zlatanov, D., Gosselin, C., 2003. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory, *Journal of Mechanical Design*, 125 (3), 573-581.
- Carbonari, L., Callegari, M., Palmieri, G., Palpacelli, M.-C., 2014. A new class of reconfigurable parallel kinematic machines, *Mechanism and Machine Theory*, 79, 173-183.
- Chen, Ch-T., 2012. Reconfiguration of a parallel kinematic manipulator for the maximum dynamic load-carrying capacity, *Mechanism and Machine Theory*, 54, 62-75.
- Dasgupta, B., Mruthyunjaya, T.S., 1998. Singularity-free path planning for the Stewart platform manipulator, *Mechanism and Machine Theory*, 33 (6), 711-725.
- du Plessis, L.J., Snyman, J.A., 2006. An Optimally Re-Configurable Planar Gough-Stewart Machining Platform, *Mechanism and Machine Theory*, 41 (3), 334-357.
- Gallardo-Alvarado, J., Rico, J.M., Alici, G., 2006. Kinematics and singularity analyses of a 4-dof parallel manipulator using screw theory, *Mechanism and Machine Theory*, 41 (9), 1048-1061.
- Gallardo-Alvarado, J., Aguilar-Nájera, C.R., Casique-Rosas, L., Pérez González, L., Rico-Martínez, J., 2008. Solving the kinematics and dynamics of a modular spatial hyper-redundant manipulator by means of screw theory, *Multibody System Dynamics*, 20 (4), 307-325.
- Gan, D., Liao, Q., Dai, J., Wei, Sh., Seneviratne, L.D., 2009. Forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism using Gröbner bases, *Mechanism and Machine Theory*, 44 (9), 1640-1647.
- Gosselin, C., Angeles, J., 1990. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6 (3), 281-290.
- Husty, M., 1996. An algorithm for solving the direct kinematic of Stewart-Gough type platforms, *Mechanism and Machine Theory*, 31 (4), 365-379.
- Ji, Z., Song, P., 1998. Design of a Reconfigurable Platform Manipulator, *Journal of Field Robotics*, 15 (6), 341-346.
- Jiang, Q., Gosselin, C., 2009. Determination of the maximal singularity-free orientation workspace for the Gough-Stewart platform, *Mechanism and Machine Theory*, 44 (6), 1281-1293.
- Kong, X., 2014. Reconfiguration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method, *Mechanism and Machine Theory*, 74, 188-201.
- Kumar, S., Nagarajan, T., Srinivasa, Y.G., 2009. Characterization of reconfigurable Stewart platform for contour generation, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25 (4-5), 721-731.
- Ladeira Freire, M., Sánchez, E., Tejada, S., Diez, R., 2015. Desarrollo e implementación de una estrategia de gestión de singularidades para un sistema robótico redundante cooperativo destinado a la asistencia en intervenciones quirúrgicas, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 12 (1), 80-91.
- Lee, T.-Y., Shim, J.-K., 2003. Improved dyalytic elimination algorithm for the forward kinematics of the general Stewart-Gough platform, *Mechanism and Machine Theory*, 38 (6), 563-577.
- Mayer, B., Gosselin, C., 2000. Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform, *The International Journal of Robotics Research*, 19(3), 271-288.
- Merlet, J.-P., 2004. Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis, *The International Journal of Robotics Research*, 23 (3), 221-235.
- Moreno, H., Saltaren, R., Carrera, I., Puglisi, L., Aracil, R., 2012. Índices de Desempeño de Robots Manipuladores: Una Revisión del Estado del Arte, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 9 (2), 111-122.
- Mu, Z., Kazerounian, K., 2002. A real parameter continuation method for complete solution of forward position analysis of the general Stewart, *Journal of Mechanical Design*, 124 (2), 236-244.
- Omran, A., El-Bayiumi G., Bayoumi, M., Kassem A., 2008. Genetic algorithm based optimal control for a 6-dof non redundant stewart manipulator, *International Journal of Mechanical Systems Science and Engineering*, 2 (2), 73-79.
- Parikh, P.J., Lam, S.S.Y., 2005. A hybrid strategy to solve the forward kinematics problem in parallel manipulators, *IEEE Transactions on Robotics*, 21 (1), 18-25.
- Plitea, N., Lese, D., Pislá, D., Vaida, C., 2013. Structural design and kinematics of a new parallel reconfigurable robot, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 29 (1), 219-235.
- Raghavan, M., 1993. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations, *Journal of Mechanical Design*, 115 (2), 277-282.
- Rico, J.M., Duffy, J., 2000. Forward and inverse acceleration analyses of in-parallel manipulators, *Journal of Mechanical Design*, 122 (3), 299-303.
- Rolland, L., 2005. Certified solving of the forward kinematics problem with an exact algebraic method for the general parallel manipulator, *Advanced Robotics*, 19 (9), 995-1025.
- Rolland, L., Chandra, R., 2010. On Solving the Forward Kinematics of the 6-6 General Parallel Manipulator with an Efficient Evolutionary Algorithm, In *ROMANSY 18 Robot Design, Dynamics and Control*, edited by Vincenzo Parenti Castelli and Werner Schiehlen, 524, 117-124. CISM International Centre for Mechanical Sciences: Springer International Publishing.
- Sen, S., Dasgupta, B., Mallik, A., 2003. Variational approach for singularity-free path-planning of parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, 38 (11), 1165-1183.
- Shen, H., Wu, X., 2004. Numerical solution of direct kinematic problems for parallel manipulators based on interval dividing search algorithms, *Mechanical Science and Technology*, 23.
- Simaan, N., Shoham, M., 2003. Stiffness Synthesis of a Variable Geometry Six-Degrees-of-Freedom Double Planar Parallel Robot, *The International Journal of Robotics Research*, 22 (9), 757-775.
- Sung-Gaun, K., Ryu, J., 2003. New dimensionally homogeneous jacobian matrix formulation by three end-effector points for optimal design of parallel manipulators, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 19 (4), 731-736.
- Ueberle, M., Mock, N., Buss, M., 2004. Vishard10, a novel hyper-redundant haptic interface, In *12th International Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems*, 58-65. IEEE.
- Voglewede, P.A., Ebert-Uphoff, I., 2004. Measuring "closeness" to singularities for parallel manipulators, In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 5, 4539-4544.
- Yu, H., Li, B., Wang, Y., Hu, Y., 2012. Conceptual design and workspace analysis of reconfigurable fixturing robots for sheet metal assembly, *Assembly Automation*, 32 (3), 293-299.
- Xi, F., Li, Y., Wang, H., 2011. Module-Based Method for Design and Analysis of Reconfigurable Parallel Robots, *Frontiers of Mechanical Engineering*, 6 (2), 151-159.
- Yang, G., Chen, I.-M., Kiat, W., Huat, S., 2001. Kinematic Design of Modular Reconfigurable in-Parallel Robots, *Autonomous Robots*, 10 (1), 83-89.
- Ye, W., Fang, Y., Zhang, K., Guo, S., 2014. A new family of reconfigurable parallel mechanisms with diamond kinematotropic chain, *Mechanism and Machine Theory*, 74, 1-9.
- Yurt, S.N., Anli, E., Ozkol, I., 2007. Forward kinematics analysis of the 6-3 SPM by using neural networks, *Meccanica*, 42 (2), 187-96.
- Zhang, D., Shi, Q., 2012. Novel Design and Analysis of a Reconfigurable Parallel Manipulator Using Variable Geometry Approach. In *Practical Applications of Intelligent Systems*, edited by Yingling Wang and Tianrui Li, 124, 447-457. *Advances in Intelligent and Soft Computing*. Shanghai, China: Springer International Publishing.