



ELSEVIER



CrossMark

ScienceDirect

Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



RIAI

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 12 (2015) 365–375

[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

## Control Predictivo Distribuido Óptimo Aplicado al Control de Nivel de un Proceso de Cuatro Tanques Acoplados

Felipe D. J. Sorcia-Vázquez<sup>a</sup>, Carlos D. Garcia-Beltran<sup>a</sup>, Guillermo Valencia-Palomo<sup>b</sup>, Gerardo Guerrero-Ramírez<sup>a</sup>, Manuel Adam-Medina<sup>a</sup>, Ricardo Escobar-Jiménez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior Internado Palmira S/N, Palmira, 62490, Cuernavaca, Morelos, México

<sup>b</sup>Instituto Tecnológico de Hemosillo, Av. Tecnológico S/N, El Sahuaro, 83170, Hermosillo, Sonora, México

### Resumen

En este artículo se presenta el desarrollo de un control predictivo distribuido óptimo (DOMPC) el cual está basado en el control predictivo óptimo centralizado (OMPC) y el control predictivo en modo dual. Esta adaptación engloba la partición del sistema a controlar en  $s$  subsistemas y la optimización de manera distribuida de las señales de control. Se considera que los controladores se comunican mediante una red de área local (LAN), la cual introduce un retardo de un instante de muestreo en la transmisión de los datos para la optimización. El esquema DOMPC propuesto se aplica a un sistema de 4 tanques y se realiza una comparación con el esquema OMPC centralizado. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Control distribuido, Control predictivo.

### 1. Introducción

Los procesos industriales se han vuelto cada vez más complejos. Tradicionalmente, para realizar el control de una planta industrial completa se diseñaban lazos de control locales o se empleaban controles centralizados. El uso de este tipo de controladores genera desventajas en la operación de la planta debido a la falta de interacción en los controladores locales o por el alto riesgo que conlleva depender de un solo controlador. Por lo que la tendencia se ha tornado en el uso de controladores distribuidos conectados a una red de comunicación. El control predictivo se ha utilizado como una alternativa para el desarrollo de controladores distribuidos. Una desventaja que se presenta al introducir una red de comunicación en el esquema de control es la presencia de retardos en la transmisión de datos, esto puede ocasionar una degradación en el desempeño del sistema de control e incluso generar inestabilidad.

En el control predictivo distribuido se realiza la partición del modelo del proceso de tal forma que se pueden obtener subsistemas que representen de forma local la dinámica del proceso,

al mismo tiempo que se considera la interacción entre las demás variables de estado y salidas con cada subsistema obtenido. A continuación se describen algunas propuestas sobre control predictivo distribuido. En (Jia and Krogh, 2001) y (Camponogara et al., 2002) se muestran las primeras propuestas de algoritmos de control predictivo distribuido, en este trabajo se considera que en el proceso únicamente existe interacción entre los estados, no hay interacción de entradas ni de salidas. En (Venkat et al., 2008) se reporta otra estrategia de control predictivo distribuido, en la que se considera la interacción entre los estados del sistema así como de las entradas de control. En (Maestre et al., 2009) se desarrolla un algoritmo de control predictivo que considera únicamente dos subsistemas que interactúan entre sí. En (Morosan et al., 2011) se realiza el diseño de un control predictivo distribuido basado en descomposición de Benders aplicado al control de la temperatura de las habitaciones de un edificio. En (Leirens et al., 2010) se presenta el problema de control del sistema de suministro de agua de una ciudad donde se desarrolla el esquema de control predictivo distribuido considerando las características específicas de este sistema. En (Alvarado et al., 2011) se realiza un estudio de diferentes esquemas de control predictivo centralizado, descentralizado y distribuido aplicado a un sistema de cuatro tanques interconectados. En (Mercangöz and Doyle-III, 2007) se desarrolla un esquema de control predictivo distribuido aplicado a un proceso de 4 tanques interconectados, el cual utiliza una matriz de transforma-

Correos electrónicos: [fsorcia@cenidet.edu.mx](mailto:fsorcia@cenidet.edu.mx) (Felipe D. J. Sorcia-Vázquez), [cgarcia@cenidet.edu.mx](mailto:cgarcia@cenidet.edu.mx) (Carlos D. Garcia-Beltran), [gvalencia@ith.mx](mailto:gvalencia@ith.mx) (Guillermo Valencia-Palomo), [garardog@cenidet.edu.mx](mailto:garardog@cenidet.edu.mx) (Gerardo Guerrero-Ramírez), [adam@cenidet.edu.mx](mailto:adam@cenidet.edu.mx) (Manuel Adam-Medina), [esjiri@cenidet.edu.mx](mailto:esjiri@cenidet.edu.mx) (Ricardo Escobar-Jiménez)

ción para el desacoplo del modelo. En (Alessio et al., 2011) se reporta en control predictivo descentralizado con restricciones en las entradas aplicado al control de temperatura de un vagón de tren de pasajeros. En (Fukushima et al., 2005) se realiza el control de una flota de vehículos, el objetivo de este esquema es evitar que los vehículos colisionen mientras cada uno sigue una trayectoria de referencia. En (Zafra-Cabeza et al., 2011) se presenta un control predictivo jerárquico aplicado a un sistema de canales de irrigación. En (Vaccarini et al., 2009) se presenta un esquema de control predictivo distribuido basado en el control predictivo en espacio de estados que considera interacciones de estados, entradas de control y salidas. Este esquema se valida en simulación con sistemas numéricos de carácter académico. En (Maestre et al., 2011) se presenta un control predictivo distribuido basado en negociación de agentes para una clase de sistemas lineales distribuidos que se encuentran acoplados a través de las entradas. En este esquema, los agentes proponen una solución inicial factible en cada instante de muestreo, la cual se acepta si mejora el costo correspondiente a la solución actual.

El controlador propuesto en este trabajo, llamado control predictivo distribuido óptimo DOMPC se centra en las ideas de control predictivo de modo dual (Rossiter et al., 1998; Scokaert and Rawlings, 1998), el control predictivo óptimo (OMPC) (Rossiter, 2003) y en el esquema de control predictivo distribuido de (Vaccarini et al., 2009). Una de las principales suposiciones en el desarrollo del esquema DOMPC es que la red de comunicación únicamente introduce un retardo de un instante de muestreo en la comunicación. La aportación básica de este trabajo es la introducción del esquema DOMPC, que presenta un enfoque distinto al de los esquemas introducidos por (Vaccarini et al., 2009) y (Mercangöz and Doyle-III, 2007), ya que se incorpora el manejo de restricciones y la variable de decisión ya no es la variable de control  $\mathbf{u}$ .

Este artículo se encuentra organizado de la forma siguiente: en la Sección 2 se presenta el control predictivo óptimo centralizado (Rossiter, 2003). En la Sección 3 se muestra el desarrollo del control predictivo óptimo distribuido desarrollado. En la Sección 4 se realiza la implementación en simulación de los esquemas OMPC y DOMPC aplicados a un sistema de 4 tanques interconectados. Finalmente, en la Sección 5 se dan las conclusiones del trabajo.

## 2. Control predictivo óptimo centralizado

El control predictivo óptimo se basa en el uso de predicciones en modo dual (Rossiter et al., 1998; Scokaert and Rawlings, 1998) y el paradigma de lazo cerrado (Rossiter, 2003). Al realizar las predicciones en lazo cerrado se garantiza la estabilidad del sistema al garantizar la inclusión de la cola de la predicción como posibles predicciones en el siguiente instante de muestreo y que la función costo sea una función de Lyapunov. En (Rossiter, 2003) se muestra el concepto de predicciones en modo dual y el concepto de predicciones en lazo cerrado.

El control predictivo óptimo centralizado se basa en el modelo lineal en espacio de estado estándar sin considerar perturbaciones, en este caso, de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k,\end{aligned}\quad (1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ , son el estado, las entradas de control y las salidas del sistema.

El sistema se regula mediante una ley de control basada en una ganancia de retroalimentación de estados óptima tipo LQ. Esta ley de control tiene la forma:

$$\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ss} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ss}), \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x}_{ss}$  y  $\mathbf{u}_{ss}$  son los valores de estado estable del sistema, en (Muske and Rawlings, 1993) se dan los detalles para la obtención de  $\mathbf{P}_x$  y  $\mathbf{P}_u$ , los cuales se obtienen mediante:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{ss} &= \mathbf{P}_x \mathbf{r}_k \\ \mathbf{u}_{ss} &= \mathbf{P}_u \mathbf{r}_k,\end{aligned}\quad (3)$$

donde  $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^p$  es la referencia.

En base a la ganancia de retroalimentación  $\mathbf{K}$ , las predicciones de la entrada de control se establecen de la manera siguiente:

$$\mathbf{u}_{k+i} - \mathbf{u}_{ss} = \begin{cases} -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{k+i} - \mathbf{x}_{ss}) + \mathbf{c}_{k+i} & i = 0, \dots, n_c - 1 \\ -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{k+i} - \mathbf{x}_{ss}) & i \geq n_c \end{cases}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{c}_{k+i}$  es una señal de compensación que se añade a la entrada de control. Dicha compensación es la que garantiza la satisfacción de las restricciones del control predictivo. El parámetro  $n_c$  representa los grados de libertad del controlador u horizonte de control. Al utilizar  $\mathbf{c}_k$  como variable de decisión, no se requieren grandes horizontes de control, lo que permite reducir la carga computacional que genera la optimización de la variable de decisión. Por lo tanto el modelo a utilizar para el desarrollo de las ecuaciones de predicción es:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+i,k} &= \Phi \mathbf{x}_{k+i} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+i} \\ \mathbf{u}_{k+i} &= -\mathbf{K}\mathbf{x}_{k+i} + \mathbf{P}_r \mathbf{r}_{k+i} + \mathbf{c}_{k+i},\end{aligned}\quad (5)$$

donde  $\Phi = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  y  $\mathbf{P}_r = \mathbf{K}\mathbf{P}_x + \mathbf{P}_u$ . Con este modelo se realizan las predicciones de los estados y de las entradas de control. Las ecuaciones de predicción están dadas por:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{P}_{cl} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_c \underline{\mathbf{c}}_k + \mathbf{P}_{rx} \mathbf{r}_k \\ \underline{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{P}_{cy} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{cy} \underline{\mathbf{c}}_k + \mathbf{P}_{ry} \mathbf{r}_k \\ \underline{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{P}_{cu} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{cu} \underline{\mathbf{c}}_k + \mathbf{P}_{ru} \mathbf{r}_k \\ \underline{\Delta \mathbf{u}}_k &= \mathbf{P}_{\Delta u} \underline{\mathbf{u}}_k - \mathbf{P}_{u_{k-1}} \mathbf{u}_{k-1}.\end{aligned}\quad (6)$$

Los vectores de predicción tienen las siguientes dimensiones:  $\underline{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^{(n)(n_y)}$ ,  $\underline{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^{(p)(n_y)}$  y  $\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\Delta \mathbf{u}}_k \in \mathbb{R}^{(m)(n_y)}$ , donde  $n_y$  es el horizonte de predicción. En el Apéndice A se definen las matrices de predicción.

### 2.1. Función costo y restricciones centralizadas

Una de los componentes esenciales del control predictivo es la función costo a optimizar que se deriva de una función costo de horizonte infinito. De aquí se demuestra que con la ganancia  $\mathbf{K}$ , siendo ésta una ganancia de retroalimentación de estado óptima LQ, la función costo es una función de Lyapunov, con lo cual se garantiza la estabilidad del control predictivo (Rossiter, 2003). Se define la siguiente función costo en términos de  $\underline{\mathbf{c}}_k$ :

$$J = \mathbf{z}_k^T \mathbf{P} \mathbf{z}_k + \sum_{i=0}^{n_c-1} \mathbf{c}_{k+i}^T [\mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R}] \mathbf{c}_{k+i} \quad (7)$$

$$= \|\mathbf{z}_k\|_{\mathbf{P}}^2 + \|\underline{\mathbf{c}}_k\|_{\mathbf{W}}^2,$$

donde  $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ss}$ ,  $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})$ , con  $\mathbf{R} > 0$ ,  $\mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{B} > 0 \Rightarrow \mathbf{W} > 0$ . El término  $\|\mathbf{z}_k\|_{\mathbf{P}}^2$  no depende de la variable de decisión y puede suprimirse en la minimización de la función costo (7), por lo tanto:

$$J_c = \|\underline{\mathbf{c}}_k\|_{\mathbf{W}}^2. \quad (8)$$

$\mathbf{P}$  se obtiene de la solución de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\Phi^T \mathbf{P} \Phi = \mathbf{P} - \Phi^T \mathbf{Q} \Phi - \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}. \quad (9)$$

Otro componente esencial del control predictivo es la definición de restricciones. Las restricciones ayudan a mantener al proceso dentro de los límites de operación deseados. Éstas pueden acotar las entrada de control, los incrementos de las entradas de control, los estados y las salidas del proceso. En forma general las restricciones tienen la forma:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{x}}_k \leq \bar{\mathbf{x}} \quad \underline{\mathbf{u}} \leq \underline{\mathbf{u}}_k \leq \bar{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{y}} \leq \underline{\mathbf{y}}_k \leq \bar{\mathbf{y}} \quad \underline{\Delta \mathbf{u}} \leq \underline{\Delta \mathbf{u}}_k \leq \bar{\Delta \mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (10)$$

De la sustitución de las ecuaciones de predicción (6) en las restricciones (10) se obtienen las restricciones de la forma:

$$\mathbf{M}_c \underline{\mathbf{c}}_k \leq \mathbf{q}_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{r}_k). \quad (11)$$

Donde  $\mathbf{M}_c$  es una matriz de coeficientes constantes que se calcula fuera de línea. Así entonces, con la función costo (8) y las restricciones (11) se plantea el siguiente problema de programación cuadrática para el control predictivo óptimo centralizado:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}_k^* = \arg \min_{\underline{\mathbf{c}}_k} J_c \\ \text{s.t. } \mathbf{M}_c \underline{\mathbf{c}}_k \leq \mathbf{q}_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{r}_k). \end{aligned} \quad (12)$$

En la Figura 1 se muestra el esquema OMPC. Como se observa en esta figura, el optimizador depende de los estados, de la señal de control y de la referencia.

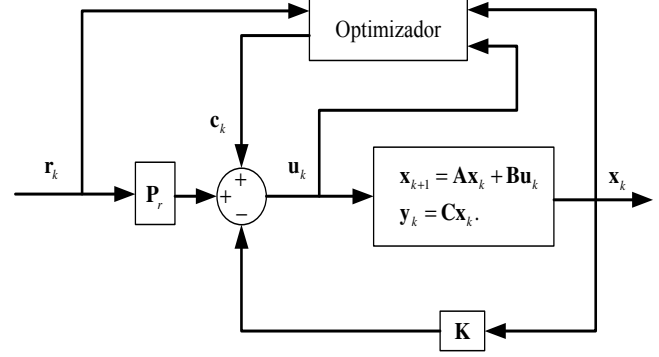


Figura 1: Esquema OMPC

### 3. Control predictivo distribuido óptimo

Para el diseño del esquema DOMPC se realizan las siguientes suposiciones: i) Los controladores son síncronos, ii) los controladores se encuentran interconectados a una red LAN. iii) En cada subcontrolador los horizontes de predicción y control son iguales  $n_{yi} = n_{yj}, n_{ci} = n_{cj}, \forall i, j = 1, \dots, s, j \neq i$ . Donde  $n_{yi}$  son los horizontes de predicción,  $n_{ci}$  son los horizontes de control respectivamente y  $s$  es el número de subsistemas. Debido a las condiciones de diseño, se induce un retardo de un instante de muestreo en la comunicación de los datos de interacción. Este retardo se induce porque en el instante actual de muestreo no se tienen datos a transmitir, y el subcontrolador calcula la señal de control únicamente con la información del estado actual del subsistema. En el instante siguiente de muestreo ya se tiene disponibles los vectores de predicción, los cuales se envían a los demás subcontroladores, sin embargo, esta información es del instante de tiempo anterior.

#### 3.1. Ecuaciones de predicción

Para el desarrollo del DOMPC se parte del siguiente modelo centralizado no perturbado el cual incluye la regulación a referencias constantes. El modelo está compuesto por  $s$  subsistemas:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{sk+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \dots & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{sk} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \dots & \mathbf{B}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \dots & \mathbf{B}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{sk} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{sk+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \dots & \mathbf{C}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{s1} & \dots & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{sk} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

La ecuación de entradas de control se define como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{sk} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{s1} & \dots & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{sk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{r11} & \dots & \mathbf{P}_{r1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{rs1} & \dots & \mathbf{P}_{rss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{sk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{sk} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Separando las ecuaciones individuales para cada subsistema se obtiene el siguiente modelo distribuido en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ik+1} &= \Phi_{ii}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{c}_{ik} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{rDii}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{w}_{ik} \\ \mathbf{y}_{ik} &= \mathbf{C}_{ii} + \mathbf{v}_{ik} \\ \mathbf{u}_{ik} &= -\mathbf{K}_{ii}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{c}_{ik} + \mathbf{P}_{rii}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{h}_{ik}, \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $\Phi_{ii} = \mathbf{A}_{ii} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{Dii}$ ,  $\mathbf{B}\mathbf{K}_{Dii} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip}\mathbf{K}_{pi}$ ,  $\mathbf{B}\mathbf{P}_{rDii} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip}\mathbf{P}_{rpi}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , donde  $s$  es el número de subsistemas que componen el proceso.  $\mathbf{x}_{ik} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{u}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $\mathbf{y}_{ik} \in \mathbb{R}^{p_i}$ ,  $\mathbf{r}_{ik} \in \mathbb{R}^{p_i}$  y  $\mathbf{c}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i}$  son el estado, las entradas de control, las salidas, las referencias y las compensaciones óptimas de cada subsistema respectivamente.

El modelo de interacción para cada subsistema está descrito por:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{ik} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s \Phi_{ij}\mathbf{x}_{jk} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{B}_{ij}\mathbf{c}_{jk} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{B}\mathbf{P}_{rDij}\mathbf{r}_{jk} \\ \mathbf{v}_{ik} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{C}_{ij}\mathbf{x}_{jk} \\ \mathbf{h}_{ik} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s -\mathbf{K}_{ij}\mathbf{x}_{jk} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{P}_{rij}\mathbf{r}_{jk}, \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $\Phi_{ij} = \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{Dij}$ ,  $\mathbf{B}\mathbf{K}_{Dij} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip}\mathbf{K}_{pj}$ ,  $\mathbf{B}\mathbf{P}_{rDij} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip}\mathbf{P}_{rpj}$ . Los modelos de predicción de interacción contarán con la información retrasada un instante de muestreo.

Iterando el modelo distribuido (15) se generan las siguientes ecuaciones de predicción:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{ik} &= \mathbf{P}_{cli}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{ci}\underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{rxi}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{cli}\underline{\mathbf{w}}_{ik} \\ \underline{\mathbf{y}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clyi}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cyi}\underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{ryi}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{clyi}\underline{\mathbf{w}}_{ik} + \underline{\mathbf{v}}_{ik} \\ \underline{\mathbf{u}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clui}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cui}\underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{P}_{ruu}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{clui}\underline{\mathbf{w}}_{ik} + \underline{\mathbf{h}}_{ik} \\ \underline{\Delta\mathbf{u}}_{i(k)} &= \mathbf{P}_{\Delta u_i}\underline{\mathbf{u}}_{ik} - \mathbf{P}_{u_{i(k-1)}}\mathbf{u}_{i(k-1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

donde los vectores de predicción tienen las siguientes dimensiones:  $\underline{\mathbf{x}}_{ik} \in \mathbb{R}^{(ni)(n_{yi})}$ ,  $\underline{\mathbf{y}}_{ik} \in \mathbb{R}^{(pi)(n_{yi})}$ ,  $\underline{\mathbf{u}}_{ik}, \underline{\Delta\mathbf{u}}_{ik} \in \mathbb{R}^{(mi)(n_{yi})}$  y  $\underline{\mathbf{c}}_{ik} \in \mathbb{R}^{(mi)(n_{ci})}$ . Estos vectores de predicción están compuestos de la manera siguiente:  $\underline{\mathbf{x}}_{ik} = [\mathbf{x}_{ik}^T, \dots, \mathbf{x}_{ik+n_{yi}}^T]^T$ ,  $\underline{\mathbf{y}}_{ik} = [\mathbf{y}_{ik}^T, \dots, \mathbf{y}_{ik+n_{yi}}^T]^T$ ,  $\underline{\mathbf{u}}_{ik} = [\mathbf{u}_{ik}^T, \dots, \mathbf{u}_{ik+n_{yi}}^T]^T$  y  $\underline{\mathbf{c}}_{ik} = [\mathbf{c}_{ik}^T, \dots, \mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}^T]^T$ .

Las ecuaciones de predicción de interacción se obtienen iterando el modelo (16), y considerando el retardo de un instante de muestreo se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{w}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clwi}\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_{uwi}\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{rwi}\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{v}}_{ik} &= \mathbf{C}_{vi}\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{h}}_{ik} &= \mathbf{K}_{hui}\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{rhi}\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

sustituyendo (18) en (17) se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{ik} &= \mathbf{P}_{cli}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{ci}\underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{rxi}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{cli}\mathbf{P}_{clwi}\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{cli}\mathbf{H}_{uwi}\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{cli}\mathbf{B}\mathbf{P}_{rwi}\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{y}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clyi}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cyi}\underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B}\mathbf{P}_{ryi}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{P}_{wcvyi}\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{clyi}\mathbf{H}_{uwi}\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{clyi}\mathbf{B}\mathbf{P}_{rwi}\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{u}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clui}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cui}\underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{P}_{ruu}\mathbf{r}_{ik} + \mathbf{P}_{wkui}\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{clui}\mathbf{H}_{uwi}\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{R}_{prwhi}\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\Delta\mathbf{u}}_{i(k)} &= \mathbf{P}_{\Delta u_i}\mathbf{P}_{clui}\mathbf{x}_{ik} + \mathbf{P}_{\Delta u_i}\mathbf{H}_{cui}\underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{P}_{\Delta u_i}\mathbf{P}_{ruu}\mathbf{r}_{ik} \\ &\quad + \mathbf{P}_{\Delta u_i}\mathbf{P}_{wkui}\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{\Delta u_i}\mathbf{W}_{clui}\mathbf{H}_{uwi}\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{P}_{\Delta u_i}\mathbf{R}_{prwhi}\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{u_{i(k-1)}}\mathbf{u}_{i(k-1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{(s)(ni)(n_{yi})}$  es el vector de estados de interacción total,  $\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{(s)(mi)(n_{ci})}$  es el vector de compensaciones óptimas de interacción total,  $\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{(s)(pi)(n_{yi})}$  es el vector de interacción de referencias total. Estos vectores totales, están constituidos de la forma siguiente:  $\underline{\mathbf{x}}_{k|k-1} = [\underline{\mathbf{x}}_{1k|k-1}^T, \dots, \underline{\mathbf{x}}_{sk|k-1}^T]^T$ ,  $\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} = [\underline{\mathbf{c}}_{1k|k-1}^T, \dots, \underline{\mathbf{c}}_{sk|k-1}^T]^T$ ,  $\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} = [\mathbf{r}_{1k|k-1}^T, \dots, \mathbf{r}_{sk|k-1}^T]^T$ . Estos vectores de interacción tienen la información retrasada un instante de muestreo.  $\mathbf{P}_{wcvyi} = \mathbf{W}_{clyi}\mathbf{P}_{clwi} + \mathbf{C}_{vi}$ ,  $\mathbf{P}_{wkui} = \mathbf{W}_{clui}\mathbf{P}_{clwi} + \mathbf{K}_{hui}$ ,  $\mathbf{R}_{prwhi} = \mathbf{W}_{clui}\mathbf{B}\mathbf{P}_{rwi} + \mathbf{P}_{rhi}$ .

### 3.2. Función costo Distribuida

La función costo para el esquema DOMPC se fundamenta en la función costo del control predictivo en modo dual. Para el caso distribuido se redefine la función como:

$$J_{ik} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{i(k+j+1)}^T \mathbf{Q}_{ii}\mathbf{x}_{i(k+j+1)} + \mathbf{u}_{i(k+j)}^T \mathbf{R}_{ii}\mathbf{u}_{i(k+j)}. \quad (20)$$

Para cada subsistema se definen las siguientes predicciones de estados y de entradas de control independientes de las interacciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i(k+j+1)} &= \Phi_{ii}\mathbf{x}_{i(k+j)} = \Phi_{ii}^j\mathbf{x}_{ik} \\ \mathbf{u}_{i(k+j)} &= -\mathbf{K}_{ii}\mathbf{x}_{i(k+j)} = -\mathbf{K}_{ii}\Phi_{ii}^j\mathbf{x}_{ik}. \end{aligned} \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20) se tiene:

$$\begin{aligned}
 J_{ik} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{ik}^T (\Phi_{ii}^{j+1})^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii}^{j+1} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{x}_{ik}^T \mathbf{K}_{ii}^T (\Phi_{ii}^j)^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii}^j \mathbf{x}_{ik} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{ik}^T \underbrace{[(\Phi_{ii}^{j+1})^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii}^{j+1} + \mathbf{K}_{ii}^T (\Phi_{ii}^j)^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii}^j]}_{\mathbf{P}_{ii}} \mathbf{x}_{ik} \\
 &= \mathbf{x}_{ik}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{x}_{ik},
 \end{aligned} \tag{22}$$

donde  $\mathbf{P}_{ii} = \sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_{ii}^{j+1})^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii}^{j+1} + \mathbf{K}_{ii}^T (\Phi_{ii}^j)^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii}^j$ .

Para cada subsistema se obtendrá una matriz  $\mathbf{P}_{ii}$  de la solución de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\Phi_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \Phi_{ii} = \mathbf{P}_{ii} - \Phi_{ii}^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{K}_{ii}. \tag{23}$$

La función costo a optimizar se plantea de manera similar a la función costo del caso centralizado, ésta se define de la siguiente manera en términos de  $\underline{\mathbf{c}}_{k-1}$ :

$$\begin{aligned}
 J_i &= \mathbf{z}_{ik}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{z}_{ik} + \sum_{j=0}^{n_{ic}-1} \mathbf{c}_{i(k+j)}^T [\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}] \mathbf{c}_{i(k+j)} \\
 &= \|\mathbf{z}_{ik}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 + \|\underline{\mathbf{c}}_{ik}\|_{\mathbf{W}_{ii}}^2,
 \end{aligned} \tag{24}$$

donde  $\mathbf{z}_{ik} = \mathbf{x}_{ik} - \mathbf{x}_{i,ss}$ ,  $\mathbf{W}_{ii} = \text{diag}(\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii})$ , con  $\mathbf{R}_{ii} > 0$ ,  $\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} > 0 \Rightarrow \mathbf{W}_{ii} > 0$ . Al igual que en el caso centralizado, el término  $\|\mathbf{z}_{ik}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2$ , ya que no depende de la variable de decisión, puede ignorarse en la minimización de la función costo (24), por tanto, se tiene que:

$$J_{ci} = \|\underline{\mathbf{c}}_{ik}\|_{\mathbf{W}_{ii}}^2. \tag{25}$$

Con la función costo ya definida, en el punto siguiente se definen las restricciones del DOMPC.

### 3.3. Restricciones

Las restricciones para el esquema DOMPC se definen de manera similar que en el caso centralizado. Obviamente no serán iguales debido a que las ecuaciones de predicción del DOMPC dependen de la información de los estados y de las entradas de los demás subsistemas. Las restricciones en las entradas, las salidas, los estados y los incrementos de las entradas de manera general tienen la forma:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{x}}_i &\leq \underline{\mathbf{x}}_{ik} \leq \bar{\mathbf{x}}_i & \underline{\mathbf{u}}_i &\leq \underline{\mathbf{u}}_{ik} \leq \bar{\mathbf{u}}_i \\
 \underline{\mathbf{y}}_i &\leq \underline{\mathbf{y}}_{ik} \leq \bar{\mathbf{y}}_i & \underline{\Delta \mathbf{u}}_i &\leq \underline{\Delta \mathbf{u}}_{ik} \leq \bar{\Delta \mathbf{u}}_i.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Por tanto, las restricciones tendrán la forma:

$$\mathbf{M}_{c_i} \underline{\mathbf{c}}_{ik} \leq \mathbf{q}_{c_i}(*), \tag{27}$$

donde  $* \Rightarrow \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{u}_{i(k-1)}, \mathbf{r}_{ik}, \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1}, \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}$ .

Con la función costo (25) y las restricciones (27) se obtiene el siguiente problema de programación cuadrática para cada subsistema considerando las interacciones:

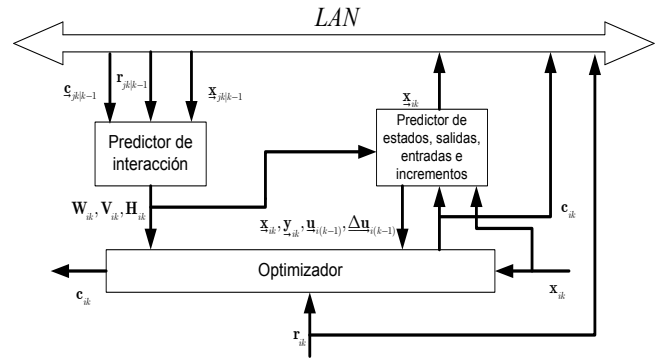


Figura 2: Esquema DOMPC conectado a una LAN

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{c}}_{ik}^* &= \arg \min_{\underline{\mathbf{c}}_{ik}} J_{c_i} \\
 \text{s.t. } & \mathbf{M}_{c_i} \underline{\mathbf{c}}_{ik} \leq \mathbf{q}_{c_i}(*).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Los términos de la función costo y la matriz  $\mathbf{M}_{c_i}$ , al igual que en el caso centralizado, se pueden calcular fuera de línea, mientras que la matriz  $\mathbf{q}_{c_i}(*)$  deberá ser actualizada por el estado actual, la entrada de control del instante anterior, la referencia del subsistema, el vector de interacción de estados, el vector de compensaciones óptimas y las referencias de los demás subsistemas. Una forma de medir la complejidad del problema de optimización a partir de la interacción de subcontroladores es a través del cálculo de la dimensión del vector  $\mathbf{q}_{c_i}(*)$  que concatena la información local y la información proveniente de los demás controladores, esta dimensión depende del número de subsistemas, del número de estados  $n_i$ , del número de entradas  $m_i$ , de la dimensión de las salidas  $p_i$ , de los horizontes de predicción y control  $n_{yi}$  y  $n_{ci}$ , por medio de la siguiente fórmula:

$$\dim\{\mathbf{q}_{c_i}(*)\} = n_i + m_i + n_i * n_{yi} * s + m_i * n_{ci} * s + p_i * s. \tag{29}$$

En la Figura 2 se muestra de manera esquemática la constitución de un subcontrolador DOMPC conectado a la red de comunicación. Cada subcontrolador incluye un predictor de interacciones, un predictor de estados, entradas de control y salidas y un optimizador que genera la señal de compensación óptima. Como puede interpretarse a través de la descripción del esquema de control, existe una comunicación bidireccional entre todos y cada uno de los subcontroladores, lo que genera un grafo de interacción completo, en el cual es posible calcular el número de interacciones mediante la siguiente fórmula:

$$\text{número de interacciones} = \frac{s * (s - 1)}{2}. \tag{30}$$

Es evidente que el tráfico de información a través de la red crece de a medida que el proceso se particiona en un mayor número de subsistemas, este tráfico debe ser gestionado por la LAN. Finalmente, en el Algoritmo 1 se muestra la secuencia de pasos para la aplicación del esquema DOMPC.

**Algoritmo 1 (DOMPC)**

- 1: Inicialización de los controladores e inicializar a cero los vectores de interacción.
- 2: Cada subcontrolador transmite y recibe, a través de la LAN los vectores de estado predichos  $\underline{\mathbf{x}}_{jk|k-1}$ , las señales de compensación  $\underline{\mathbf{c}}_{jk|k-1}$  y las referencias  $\underline{\mathbf{r}}_{jk|k-1}$ , se considera que los subcontroladores transmiten simultáneamente estos datos y la LAN se encarga de gestionar el tráfico de información.
- 3: El subcontrolador construye los vectores totales  $\underline{\mathbf{X}}_{k|k-1}$ ,  $\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1}$  y  $\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}$  mediante la concatenación de los vectores de estado  $\underline{\mathbf{x}}_{ik|k-1}$ , las señales de compensación  $\underline{\mathbf{c}}_{ik|k-1}$  y las referencias  $\underline{\mathbf{r}}_{ik|k-1}$  de los demás subcontroladores, (en el esquema propuesto se supone que los diferentes subsistemas interactúan, por lo que todos los subcontroladores se comunican entre si).
- 4: Medición a nivel de subsistema de las variables de estado, directamente del proceso  $\mathbf{x}_{ik}$ ; se considera que todos los subcontroladores realizan la adquisición con su propia instrumentación y de manera simultanea.
- 5: Resolución local del problema de programación cuadrática, considerando una función costo  $J_{c_i}$  particular para cada subsistema

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}_{ik}^* &= \arg \min_{\underline{\mathbf{c}}_{ik}} J_{c_i} \\ \text{s.t. } \mathbf{M}_{c_i} \underline{\mathbf{c}}_{ik} &\leq \mathbf{q}_{c_i}(*). \end{aligned}$$

- 6: Aplicación simultánea de las señales de control optimizada (escalar o vectorial) a cada subsistema local

$$\mathbf{u}_{ik} = -\mathbf{K}_{ii} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{c}_{ik}^* + \mathbf{P}_{rii} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{h}_{ik},$$

donde  $\mathbf{c}_{ik}^*$  es el primer elemento de  $\underline{\mathbf{c}}_{ik}^*$ , el cual es resultado de la optimización realizada en el paso 5.

- 7: Predicción de las trayectorias de estado futuras de cada subsistema  $i$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{ik} &= \mathbf{P}_{cli} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{ci} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rxi} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{P}_{clwi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ &+ \mathbf{W}_{cli} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}. \end{aligned}$$

- 8: Regresar al paso 2.

**4. Aplicación del Control DOMPC a un sistema de cuatro tanques acoplados**

El sistema de cuatro tanques acoplados es un proceso que presenta interacción en las entradas de control así como de los estados, dependiendo de la asignación de variables que se realice a los subsistemas. A este proceso, por su construcción, se puede aplicar una estrategia de control distribuido, ya que el modelo se puede particionar en dos subsistemas. Este sistema cuenta con 2 bombas de corriente directa y dos válvulas de tres vías que distribuyen el flujo que generan las bombas a los tanques. Los resultados obtenidos en la evaluación de los esquemas OMPC y DOMPC son en simulación. Para la simulación se utilizó Matlab<sup>®</sup> y para resolver el problema de programación cuadrática se utilizó la función “quadprog”.

En la Figura 3 se muestra el diagrama esquemático del sistema de tanques. El flujo de salida del tanque dos entra al tanque 1 y el flujo de salida del tanque 3 entra al tanque 4. Por otro lado, el flujo de la bomba 1 entra al tanque uno y al tanque 3, a través de la válvula 1; el flujo de la bomba 2 entra al tanque 2 y al tanque 4 a través de la válvula dos. Se puede realizar la partición del sistema de dos formas: i) en la que se considera como el subsistema 1 los tanques 1 y 2, y como el subsistema 2 los tanques 3 y 4, por lo tanto, se presenta interacción de entradas y no de estados. ii) La segunda forma de partición, es la que considera como el subsistema 1 los tanques 1 y 3 y como el subsistema 2 los tanques 2 y 4. Por lo tanto, esta partición presenta interacción de estados y no de entradas. Se utilizó la partición i) para realizar el control del sistema debido a que existe una mejor relación de sensibilidad entrada/salida en los subsistemas (Alvarado et al., 2011).

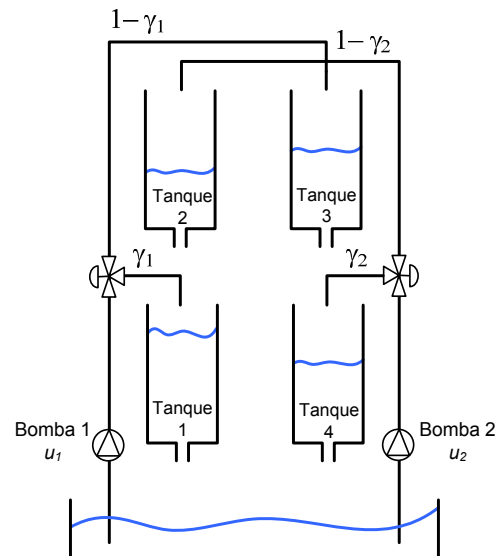


Figura 3: Diagrama esquemático del sistema de 4 tanques

Los parámetros del sistema y el punto de linealización se tomaron de (Johansson, 2000), los cuales se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros del sistema de cuatro tanques

Parámetro	Variable	Valor	Unidades
Alturas 1 y 2	$(h_1^0, h_2^0)$	(12.4, 1.8)	[cm]
Alturas 3 y 4	$(h_3^0, h_4^0)$	(1.4, 12.7)	[cm]
Voltaje bombas	$(v_1^0, v_2^0)$	(3, 3)	[V]
Ganancias bombas	$(k_1, k_2)$	(3.33, 3.35)	[cm <sup>3</sup> /Vs]
Apertura de las válvulas	$(\gamma_1, \gamma_2)$	(0.7, 0.6)	
Área T1 y T2	$(A_1, A_2)$	28	[cm <sup>2</sup> ]
Área T3 y T4	$(A_3, A_4)$	32	[cm <sup>2</sup> ]
Restricciones salida T1 y T2	$(a_1, a_2)$	0.071	[cm <sup>2</sup> ]
Restricciones salida T3 y T4	$(a_3, a_4)$	0.057	[cm <sup>2</sup> ]
Ganancia sensores de nivel	$k_c$	0.5	[V/cm]
Constante gravitacional	$g$	981	[cm/s <sup>2</sup> ]

#### 4.1. Modelo del sistema

El modelo no lineal de los cuatro tanques acoplados se obtiene a partir de las relaciones de flujos de entrada y salida. El modelo para este caso tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_2}{A_1} \sqrt{2gh_2} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1 \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_2} v_2 \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_3} v_1 \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{a_3}{A_4} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_4} v_2
 \end{aligned} \tag{31}$$

El modelo lineal utilizado para la simulación de los esquemas OMPC y DOMPC se obtiene mediante linealización de Taylor, esto a través del cálculo de los Jacobianos  $\partial f_i / \partial h_i$  y  $\partial f_i / \partial v_i$ , por tanto, se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{A_2}{A_1 T_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3}{A_4 T_3} & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_2} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_3} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_4} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\
 \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{32}$$

donde  $T_i = \sqrt{2h_i^0(A_i/a_i)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

El modelo se discretizó con un periodo de muestreo de 3 s. Posteriormente se realizó la partición del sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 0.9533 & 0.1152 \\ 0 & 0.8820 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0 \\ 0.0936 & 0.9673 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 0.2439 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0.0085 \\ 0.1349 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} 0.0891 \\ 0.0045 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1853 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_{12} &= \mathbf{A}_{21} = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \\
 \mathbf{C}_{11} &= \begin{bmatrix} k_c & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & k_c \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{C}_{12} &= \mathbf{C}_{21} = \mathbf{0}_{1 \times 2}
 \end{aligned}$$

Las restricciones utilizadas para esta aplicación son:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \mathbf{u}_{1k} \leq 10 & \quad 0 \leq \mathbf{u}_{2k} \leq 10 \\
 0 \leq \mathbf{y}_{1k} \leq 19.9 & \quad 0 \leq \mathbf{y}_{2k} \leq 19.9
 \end{aligned} \tag{33}$$

No se utilizaron restricciones en los incrementos de la señal de control.

#### 4.2. Resultados

Es esta sección se muestran los resultados obtenidos en la aplicación en simulación de los esquemas OMPC y DOMPC al sistema de tanques. Los tanques sobre los que se tiene control de los niveles son el 1 y el 4, los niveles de los tanques 2 y 3 no se controlan. En la Figura 4 se muestra los resultados obtenidos con el esquema OMPC. En esta figura se puede observar que cuando existe una violación de las restricciones, en este caso en las entradas de control, se genera la señal de compensación necesaria para mantenerla dentro de los límites de la restricción.

En la Figura 5 se muestran los resultados obtenidos con el esquema DOMPC. En esta figura se puede observar que para que el esquema de control cumpla con las restricciones impuestas, se genera la señal de compensación necesaria para mantener las variables dentro de las restricciones. La diferencia con el caso centralizado es que cada una se optimiza por separado.

En la Tabla 2 se muestra el resultado de la evaluación de la función costo (34) para los esquemas OMPC, DOMPC. En esta tabla se puede observar que el costo obtenido con el esquema OMPC es menor que el obtenido con el esquema DOMPC. En esta misma tabla se muestran los costos para el error y el esfuerzo de control. Como se observa, los costos obtenidos de los esfuerzos de control no presentan gran diferencia, pero los costos del error sí tienen una diferencia significativa, donde el esquema OMPC es el que tiene el mejor índice. Sin embargo, aunque el costo del esquema DOMPC aumenta, se tiene la ventaja de la distribución de la optimización de las señales de control.

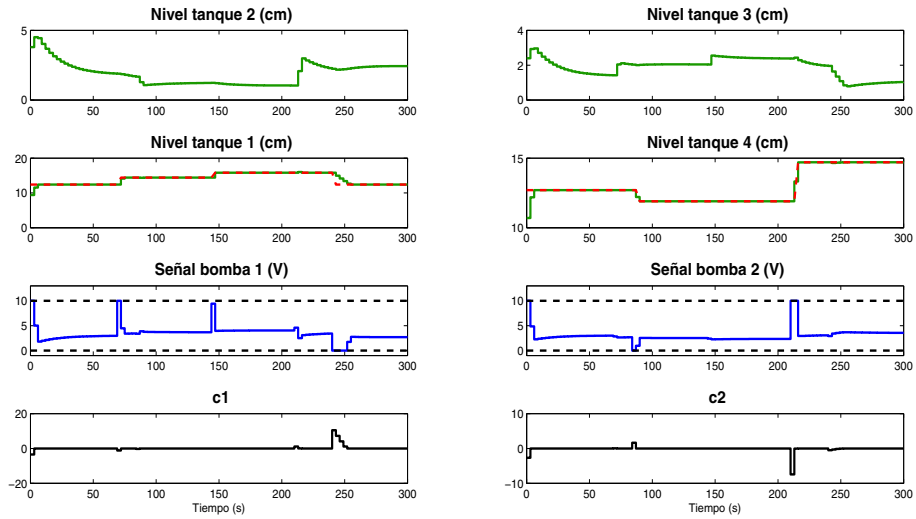


Figura 4: Niveles de los tanques 1 y 4 con el esquema OMPC

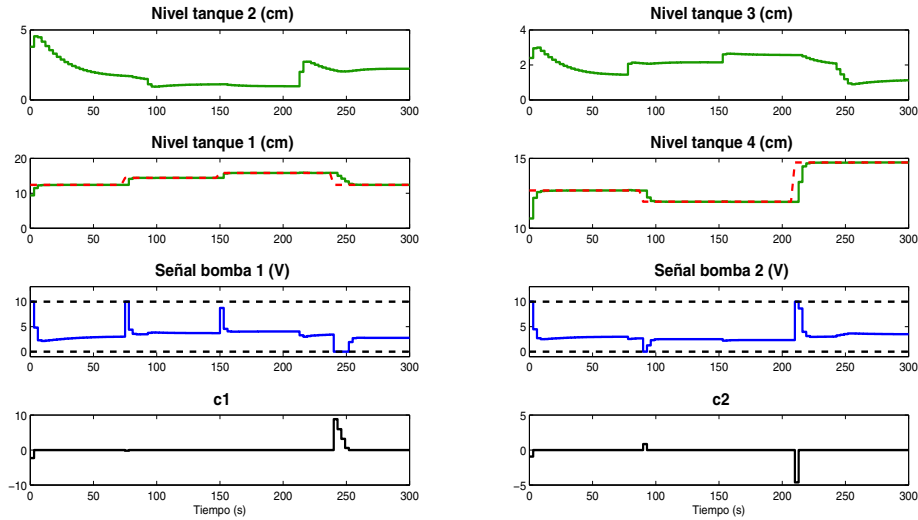


Figura 5: Niveles de los tanques 1 y 4 con el esquema DOMPC

Tabla 2: Costos obtenidos de los esquemas OMPC y DOMPC.

	Costo OMPC	Costo DOMPC
$J$	43.6069	77.1042
$J_e$	20.0180	53.0396
$J_u$	23.5889	24.0646

$$J = \sum_{k=1}^{k_f} \underbrace{\|y_k - r_k\|_Q^2}_{J_e} + \underbrace{\|u_k\|_R^2}_{J_u} \quad (34)$$

### 5. Conclusiones

Partiendo de los conceptos de control predictivo de modo dual y de los conceptos de control predictivo óptimo se desa-

rolló el esquema de control predictivo distribuido óptimo. Los resultados en simulación demuestran la factibilidad de la aplicación del esquema DOMPC y la realización de la optimización con restricciones de forma distribuida. En el diseño del esquema DOMPC no se considera el rechazo a perturbaciones, sólo la regulación a una referencia constante. En lo que respecta a los costos obtenidos de los esquemas OMPC y DOMPC, el costo del esquema DOMPC es mayor al costo del esquema OMPC.

El esquema DOMPC maneja las restricciones de forma distribuida y tiene como variable de decisión una compensación para hacer cumplir las restricciones, a diferencia del esquema presentado en (Vacarini et al., 2009), lo que hace del esquema una opción atractiva para la solución de problemas de control distribuido donde se consideren restricciones.

En el aspecto de ventajas y desventajas que el esquema DOMPC presenta se pueden enunciar las siguientes: i) una de



sus ventajas es la distribución del problema de optimización. ii) Otra ventaja con respecto al esquema propuesto en (Vaccarini et al., 2009) es el uso de restricciones y el uso de predicciones en lazo cerrado, lo cual asegura la estabilidad del sistema. iii) Una desventaja radica en el incremento del costo con respecto al esquema centralizado. iv) Debido al diseño del esquema DOMPC, se tiene un incremento exponencial de las variables en el problema de optimización. v) Cada subsistema se ve perturbado por los demás subsistemas debido a las señales de control generadas por cada subcontrolador, el porcentaje de perturbación  $\eta$  que introducen los subsistemas interactuantes se puede cuantificar a través del número de subsistemas  $s$ :

$$\eta = \frac{s-1}{s} * 100\%; \quad (35)$$

Por lo tanto, esto representa una desventaja cuando el proceso se particiona en un gran número de subsistemas. Como trabajo futuro se plantea la introducción de una estrategia de coordinación para la transmisión de datos entre los controladores, con el objetivo de poder estudiar el efecto de retardos mayores al instante de muestreo que introduce el diseño del esquema DOMPC. Los subcontroladores obtenidos del esquema DOMPC podrían ser capaces de calcular la señal de control a aplicar en el siguiente instante de muestreo sin los datos de interacción. Otro trabajo considerado es la comparación del desempeño del esquema DOMPC con otros esquemas distribuidos encontrados en la literatura.

## English Summary

### Distributed Model Predictive Control Applied to a Four Interconnected Tank Process.

#### Abstract

This paper presents the development of an distributed optimal predictive control (DOMPC), this controller is based on the centralized optimal predictive control (OMPC) and the dual-mode predictive control. This adaptation encompasses the partition of the system in  $s$  subsystems and the distributed optimization of the control signals. It is assumed that the controllers are connected by a local area network, which introduces a communication delay of one sampling instant. The proposed scheme is applied to a 4 tanks benchmark system and it is compared with the centralized OMPC scheme.

#### Keywords:

Predictive control, Distributed control.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México.

## Referencias

- Alessio, A., Barcelli, D., Bemporad, A., 2011. Decentralized model predictive control of dynamically coupled linear systems. *Journal of Process Control* 21 (5), 705–714.
- Alvarado, I., de la Peña, D. M., Maestre, J. M., Ridao, M. A., Scheu, H., Marquardt, W., Negenborn, R. R., Schutter, B. D., Valencia, F., Espinosa, J., 2011. A comparative analysis of distributed MPC techniques applied to the HD-MPC four-tank benchmark. *Journal of Process Control* 21 (5), 800–815.
- Camponogara, E., Jia, D., Krogh, B. H., Talukdar, S., 2002. Distributed model predictive control. *IEEE Control System Magazine* 22 (1), 44–52.
- Fukushima, H., Kon, K., Matsuno, F., 2005. Distributed model predictive control for multi-vehicle formation with collision avoidance constraints. In: *IEEE European Control Conference*. Sevilla, España, pp. 5480–5485.
- Jia, D., Krogh, B. H., 2001. Distributed model predictive control. In: *IEEE American Control Conference*. Arlington, VA, pp. 2767–2771.
- Johansson, K. H., 2000. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory with an adjustable zero. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* 8 (3), 456–465.
- Leirens, S., Zamora, C., Negenborn, R. R., Schutter, B. D., 2010. Coordination in urban water supply networks using distributed model predictive control. In: *IEEE American Control Conference*. Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA., pp. 3957–3962.
- Maestre, J. M., de la Peña, D. M., Alamo, T., 2011. Distributed model predictive control based on agent negotiation. *Journal of Process Control* 21 (5), 685–697.
- Maestre, J. M., de la Peña, D. M., Camacho, E. F., 2009. Distributed MPC based on a cooperative game. In: *IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, P. R. China, pp. 5390–5395.
- Mercangöz, M., Doyle-III, F. J., 2007. Distributed model predictive control of an experimental four-tank system. *Journal of Process Control* 17 (3), 297–308.
- Morosan, P. D., Bourdais, R., Dumur, D., Buisson, J., 2011. A distributed MPC strategy based on benders decomposition applied to multi-source multi-zone temperature regulation. *Journal of Process Control* 21 (5), 729–737.
- Muske, K. R., Rawlings, J. B., 1993. Model predictive control with linear models. *American Institute of Chemical Engineers (AIChE) Journal* 39 (2), 262–287.
- Pannocchia, G., Kerrigan, E. C., 2003. Offset-free receding horizon control of constrained linear systems subject to time-varying setpoints and persistent unmeasured disturbances. Technical report, University of Cambridge.
- Rossiter, J. A., 2003. *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. CRC PRESS.
- Rossiter, J. A., Kouvaritakis, B., Price, M. J., 1998. A numerically robust state-space approach to stable-predictive control strategies. *Automatica* 34 (4), 789–797.
- Scokaert, P. O. M., Rawlings, J. B., 1998. Constrained linear quadratic regulation. *IEEE Transaction on Automatic Control* 43 (8), 1163–1168.
- Vaccarini, M., Longhi, S., Katebi, M. R., 2009. Unconstrained networked decentralized model predictive control. *Journal of Process Control* 14 (2), 328–339.
- Venkat, A. N., Hiskens, I. A., Rawlings, J. B., Wright, S. J., 2008. Distributed MPC strategies with application to power system automatic generation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 16 (6), 1192–1206.
- Zafra-Cabeza, A., Maestre, J. M., Ridao, M. A., Camacho, E. F., Sánchez, L., 2011. A hierarchical distributed model predictive control approach to irrigation canals: A risk mitigation perspective. *Journal of Process Control* 21 (5), 787–799.

## Apéndice A. Matrices de predicción centralizada

Las matrices que componen las ecuaciones de predicción del esquema OMPC se muestran a continuación. Las matrices de la ecuación de predicción de estado son:

$$\mathbf{P}_{cli} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \vdots \end{bmatrix}; \mathbf{H}_{ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \Phi\mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots \\ \Phi^2\mathbf{B} & \Phi\mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{rx} = \begin{bmatrix} \mathbf{BP}_r \\ \mathbf{BP}_r + \Phi\mathbf{BP}_r \\ \mathbf{BP}_r + \Phi\mathbf{BP}_r + \Phi^2\mathbf{BP}_r \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Las matrices de la ecuación de predicción de salida son:

$$\mathbf{P}_{cly} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\Phi \\ \mathbf{C}\Phi^2 \\ \mathbf{C}\Phi^3 \\ \vdots \end{bmatrix}; \mathbf{H}_{cy} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{C}\Phi\mathbf{B} & \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{C}\Phi^2\mathbf{B} & \mathbf{C}\Phi\mathbf{B} & \mathbf{CB} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{ry} = \begin{bmatrix} \mathbf{CBP}_r \\ \mathbf{CBP}_r + \mathbf{C}\Phi\mathbf{BP}_r \\ \mathbf{CBP}_r + \mathbf{C}\Phi\mathbf{BP}_r + \mathbf{C}\Phi^2\mathbf{BP}_r \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Las matrices de la ecuación de predicción de entrada son:

$$\mathbf{P}_{clu} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K}\Phi \\ -\mathbf{K}\Phi^2 \\ \vdots \end{bmatrix}; \mathbf{H}_{cu} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ -\mathbf{KB} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots \\ -\mathbf{K}\Phi\mathbf{B} & -\mathbf{KB} & \mathbf{I} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{ru} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r \\ \mathbf{P}_r - \mathbf{KB}\mathbf{P}_r \\ \mathbf{P}_r - \mathbf{KB}\mathbf{P}_r - \mathbf{K}\Phi\mathbf{BP}_r \\ \vdots \end{bmatrix}$$

## Apéndice B. Matrices de predicción distribuida

Las matrices que componen las ecuaciones de predicción del esquema DOMPC se muestran a continuación. Las matrices de la ecuación de predicción de estado son:

$$\mathbf{P}_{cli} = \begin{bmatrix} \Phi_{ii} \\ \Phi_{ii}^2 \\ \Phi_{ii}^3 \\ \vdots \end{bmatrix}; \mathbf{H}_{ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \Phi_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{B}_{ii} & \mathbf{0} & \dots \\ \Phi_{ii}^2\mathbf{B}_{ii} & \Phi_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{B}_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BP}_{rxi} = \begin{bmatrix} \mathbf{BP}_{rDii} \\ \mathbf{BP}_{rDii} + \Phi_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} \\ \mathbf{BP}_{rDii} + \Phi_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} + \Phi_{ii}^2\mathbf{BP}_{rDii} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{cli} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \Phi_{ii} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots \\ \Phi_{ii}^2 & \Phi_{ii} & \mathbf{I} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Las matrices de la ecuación de predicción de salida son:

$$\mathbf{P}_{clyi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii} \\ \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}^2 \\ \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}^3 \\ \vdots \end{bmatrix}; \mathbf{H}_{cyi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{C}_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}^2\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{C}_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BP}_{ryi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} \\ \mathbf{C}_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} + \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} \\ \mathbf{C}_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} + \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} + \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}^2\mathbf{BP}_{rDii} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{clyi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii} & \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii}^2 & \mathbf{C}_{ii}\Phi_{ii} & \mathbf{C}_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Las matrices de la ecuación de predicción de entrada son:

$$\mathbf{P}_{clui} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ii} \\ -\mathbf{K}_{ii}\Phi_{ii} \\ -\mathbf{K}_{ii}\Phi_{ii}^2 \\ \vdots \end{bmatrix}; \mathbf{H}_{cui} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ -\mathbf{K}_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots \\ -\mathbf{K}_{ii}\Phi_{ii}\mathbf{B}_{ii} & -\mathbf{K}_{ii}\mathbf{B}_{ii} & \mathbf{I} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{ruu} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{rii} \\ \mathbf{P}_{rii} - \mathbf{K}_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} \\ \mathbf{P}_{rii} - \mathbf{K}_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} - \mathbf{K}_{ii}\Phi_{ii}\mathbf{BP}_{rDii} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{clui} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ -\mathbf{K}_{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ -\mathbf{K}_{ii}\Phi_{ii}^2 & -\mathbf{K}_{ii} & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Las matrices de predicción de interacción son:

$$\mathbf{P}_{cbwi} = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\Phi_{i,1}\} & \dots & \text{diag}\{\Phi_{i,i-1}\} & \mathbf{0} \\ & \text{diag}\{\Phi_{i,i+1}\} & \dots & \text{diag}\{\Phi_{i,s}\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{uwi} = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\mathbf{B}_{i,1}\} & \dots & \text{diag}\{\mathbf{B}_{i,i-1}\} & \mathbf{0} \\ & \text{diag}\{\mathbf{B}_{i,i+1}\} & \dots & \text{diag}\{\mathbf{B}_{i,s}\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BP}_{rwi} = \begin{bmatrix} \text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,1}\} & \dots & \text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,i-1}\} & \mathbf{0} \\ & \text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,i+1}\} & \dots & \text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,s}\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{vi} = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\mathbf{C}_{i,1}\} & \dots & \text{diag}\{\mathbf{C}_{i,i-1}\} & \mathbf{0} \\ & \text{diag}\{\mathbf{C}_{i,i+1}\} & \dots & \text{diag}\{\mathbf{C}_{i,s}\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{hui} = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\mathbf{K}_{i,1}\} & \dots & \text{diag}\{\mathbf{K}_{i,i-1}\} & \mathbf{0} \\ & \text{diag}\{\mathbf{K}_{i,i+1}\} & \dots & \text{diag}\{\mathbf{K}_{i,s}\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{rhi} = \begin{bmatrix} \text{col}\{\mathbf{P}_{ri,1}\} & \dots & \text{col}\{\mathbf{P}_{ri,i-1}\} & \mathbf{0} \\ & \text{col}\{\mathbf{P}_{ri,i+1}\} & \dots & \text{col}\{\mathbf{P}_{ri,s}\} \end{bmatrix}$$

### Apéndice C. Función costo de lazo cerrado

La función costo del esquema DOMPC se sintetizó a partir de los resultados mostrados en (Pannocchia and Kerrigan, 2003). Asuma que se tiene el siguiente sistema discreto en espacio de estado sin considerar las interacciones

$$\mathbf{z}_{ik+1} = \mathbf{A}_{ii}\mathbf{z}_{ik} + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{q}_{ik} \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathbf{z}_{ik} = \mathbf{x}_{ik} - \mathbf{x}_{iss}$  y  $\mathbf{q}_{ik} = \mathbf{u}_{ik} - \mathbf{u}_{iss}$ . La función costo a ser optimizada es:

$$J_{ik} = \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{q}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \quad (\text{C.2})$$

La ley de control predictiva se define como:

$$\mathbf{q}_{ik+j} = \begin{cases} -\mathbf{K}_{ii}\mathbf{z}_{ik+j} + \mathbf{c}_{ik+j} & \forall j \in \{0, 1, \dots, n_{ci} - 1\} \\ -\mathbf{K}_{ii}\mathbf{z}_{ik+j} & \forall j \in \{n_{ci}, n_{ci} + 1, \dots\} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Se asume que  $\mathbf{K}_{ii}$  es la ganancia de retroalimentación de estado óptima sin restricciones para  $J_i$  y se define  $\Phi_{ii} = \mathbf{A}_{ii} - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{K}_{ii}$ . Entonces, sustituyendo (C.3) en (C.1), se tiene la siguiente predicción de estados

$$\mathbf{z}_{ik+j+1} = \begin{cases} \Phi_{ii}\mathbf{z}_{ik+j} + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{c}_{ik+j} & \forall j \in \{0, 1, \dots, n_{ci} - 1\} \\ \Phi_{ii}\mathbf{z}_{ik+j} & \forall j \in \{n_{ci}, n_{ci} + 1, \dots\} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo (C.3, C.4) en (C.2) se tiene:

$$\begin{aligned} J_{ik} &= \|\mathbf{z}_{ik+n_{ci}}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 + \sum_{j=0}^{n_{ci}-1} \left[ \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \right] \\ &= \|\Phi_{ii}\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-1} + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 + \|\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n_{ci}-2} \left[ \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \right] \\ &= \|\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-1}\|_{-\Phi_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\Phi_{ii} + \mathbf{K}_{ii}^T\mathbf{R}_{ii}\mathbf{K}_{ii} + \mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2 \\ &\quad + 2\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-1}^T(\Phi_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T\mathbf{R}_{ii})\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n_{ci}-2} \left[ \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \right] \\ &= \|\mathbf{z}_{ik+n_{ci}}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2 \\ &\quad + 2\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-1}^T(\Phi_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T\mathbf{R}_{ii})\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n_{ci}-2} \left[ \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \right] \end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} \Phi_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T\mathbf{R}_{ii} &= (\mathbf{A}_{ii} - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{K}_{ii})^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{R}_{ii} \\ &= \mathbf{A}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T\mathbf{R}_{ii} \\ &= \mathbf{A}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} - \mathbf{A}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii}(\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii})^{-1}\mathbf{R}_{ii} \\ &\quad - \mathbf{A}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii}(\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii})^{-1}\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} \\ &= \mathbf{A}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii}[\mathbf{I} - (\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii})^{-1}(\mathbf{R}_{ii} + \mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J_{ik} &= \|\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n_{ci}-2} \left[ \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto el costo asociado con el instante de tiempo  $k + n_{ci}$  es  $\|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2$ . Del mismo modo:

$$\begin{aligned} J_{ik} &= \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2 + \|\Phi_{ii}\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-2} + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-2}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n_{ci}-3} \left[ \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \right] \\ &= \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-1}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+n_{ci}-2}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{z}_{ik+n_{ci}-2}\|_{\Phi_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\Phi_{ii} + \mathbf{K}_{ii}^T\mathbf{R}_{ii}\mathbf{K}_{ii} + \mathbf{Q}_{ii}}^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n_{ci}-3} \left[ \|\mathbf{z}_{ik+j}\|_{\mathbf{Q}_{ii}}^2 + \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{R}_{ii}}^2 \right] \end{aligned}$$

lo que eventualmente arrojaría:

$$J_{ik} = \sum_{j=0}^{n_{ci}-1} \|\mathbf{c}_{ik+j}\|_{\mathbf{B}_{ii}^T\mathbf{P}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}}^2 + \|\mathbf{z}_{ik}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 \quad (\text{C.5})$$