

## Seguimiento de trayectorias de un robot móvil (3,0) mediante control acotado

J.F. Guerrero-Castellanos<sup>a</sup>, M. G. Villarreal-Cervantes<sup>b</sup>, J. P. Sánchez-Santana<sup>a,c</sup>, S. Ramírez-Martínez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Ciudad universitaria, C. P. 72570, Puebla, México

<sup>b</sup>CIDETEC, Instituto Politécnico Nacional, Av. Juan de Dios Bátiz s/n, Col. Nueva Industrial Vallejo, Deleg. Gustavo A. Madero, C.P. 07700, México D.F.

<sup>c</sup>Universidad Politécnica de Puebla (UPPUE), Tercer Carril del Ejido “Serrano” s/n, San Mateo Cuanalá, Juan C. Bonilla, C. P. 72640, Puebla, México.

### Resumen

El presente trabajo aborda el problema de seguimiento de trayectoria para el robot (3,0) basado en su modelo cinemático y propone una solución mediante el diseño de una estrategia de control que a priori toma en cuenta las cotas máximas permitidas de la señal de control *i.e.* la velocidad lineal y angular máximas que puede alcanzar el robot móvil. El objetivo es maximizar el uso de los actuadores sin poner en riesgo la estabilidad del sistema. La ley de control no lineal resultante se compone de un compensador no lineal basado en el modelo cinemático y de funciones de saturación anidadas. Esta ley de control contiene parámetros de sintonización que permiten que las trayectorias de la dinámica del error ingresen a una vecindad del origen, en un tiempo finito y se mantengan de ahí en adelante. Resultados experimentales sustentan los resultados teóricos, muestran el desempeño del sistema de control en lazo cerrado y lo comparan con una estrategia que no toma en cuenta los límites de la señal de control. Debido a su simplicidad, la estrategia de control propuesta permite ser implementada en sistemas embebidos con bajo coste computacional. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Robot móvil (3,0), control acotado, función de saturación, control no lineal, seguimiento de trayectoria.

### 1. Introducción

En los últimos años los avances en sensores, actuadores, sistemas de cómputo embebido, sistemas de comunicaciones y sistemas de alimentación, han permitido que se mantenga un fuerte interés por la robótica móvil terrestre (Dierks and Jaggannathan, 2007; Yandong et al., 2010; Shen et al., 2011; Saindon et al., 2011; Arias et al., 2011), y en particular, por el robot móvil omnidireccional también conocido como robot móvil (3,0). Este interés se debe a las múltiples aplicaciones en las que este tipo de vehículos pueden ser considerados, operando de manera individual (Rivera, 2006; Velasco-Villa et al., 2007; El-Shenawy et al., 2008) o cooperativa como es el caso del robot manipulador paralelo móvil omnidireccional propuesto en (Villarreal-Cervantes et al., 2012a). A diferencia de los robots no-holónomos (e.g. configuración diferencial o Ackerman) que requieren previamente un movimiento de rotación antes de realizar la traslación (Araújo et al., 2014), el robot móvil (3,0) posee “total movilidad en el plano”, lo que significa que en

cualquier instante se puede mover en cualquier dirección independientemente de su orientación. Esta capacidad los hace muy atractivos en ambientes dinámicos donde una gran capacidad de movilidad y respuesta es deseable (Villarreal-Cervantes et al., 2012a).

En general el desarrollo de algoritmos de control de movimiento de los robots móviles se clasifican en dos categorías: el control basado en el modelo dinámico (Cañas et al., 2014) y el control basado en el modelo cinemático (Campion and Bastin, 1996; Sira-Ramirez et al., 2011). Un modelo dinámico describe directamente la relación entre las fuerzas y pares generados por cada uno de los motores conjuntamente con las ruedas y el movimiento del robot. En este caso los pares aplicados a cada rueda son considerados la entrada del sistema y el movimiento del robot, en términos de posición y velocidad angular y lineal, la salida. Una gran número de trabajos han abordado este enfoque con sólidos resultados (Rivera, 2006). Desafortunadamente, este enfoque muestra algunas desventajas, ya que en general las leyes de control son dependientes del modelo por lo que las variaciones dinámicas causadas por los cambios en el momento de inercia del robot o cambio en los parámetros del sistema debido a imperfecciones mecánicas o desgaste, hacen que la robustez del sistema en lazo cerrado esté altamente comprometida y los algoritmos de control sean complejos y difíciles de implemen-

Correos electrónicos: [fguerrero@ece.buap.mx](mailto:fguerrero@ece.buap.mx) (J.F. Guerrero-Castellanos), [mwillarreal@ipn.mx](mailto:mwillarreal@ipn.mx) (M. G. Villarreal-Cervantes), [jose.sanchez@uppuebla.edu.mx](mailto:jose.sanchez@uppuebla.edu.mx) (J. P. Sánchez-Santana), [sramirez@ece.buap.mx](mailto:sramirez@ece.buap.mx) (S. Ramírez-Martínez)  
URL: [www.fguerrero.ece.buap.mx](http://www.fguerrero.ece.buap.mx) (J.F. Guerrero-Castellanos)

tar en sistemas embebidos donde el poder de cálculo se reduce. Asumiendo que no existe deslizamiento de las ruedas, que el terreno es totalmente plano y que se tienen los sensores suficientes, el uso del modelo cinemático en el desarrollo de leyes de control es bastante útil ya que la estructura de los mismos resultan relativamente simples y fáciles a implementar. Bajo este enfoque, las entradas del sistema son las velocidades angulares en cada una de las ruedas del robot y se considera como salida la velocidad lineal y angular del centro de masas del robot. En este caso el comportamiento dinámico de los actuadores se considera lo suficientemente rápido, en comparación al comportamiento dinámico del robot mismo, lo que permite ser ignorado. De esta forma se asume que las velocidades deseadas en cada una de las ruedas se pueden alcanzar inmediatamente, es decir, la respuesta del motor es instantánea. Sin embargo, estas consideraciones son bastante conservativas ya que en la realidad existe un límite en la respuesta dinámica del actuador lo que puede degradar el desempeño en los movimientos del robot, sobre todo cuando las leyes de control son discontinuas. Otro aspecto fundamental en el control de robots es el aspecto estático de los actuadores, es decir, los límites de saturación. Puesto que en la práctica las velocidades que puede alcanzar cualquier motor están acotadas por las características físicas, estos límites deben ser tomados en cuenta dentro del diseño del control, ya que de lo contrario estos efectos pueden provocar un desempeño pobre e incluso la inestabilidad del sistema en lazo cerrado (Scolari Conceição et al., 2006; Indiveri et al., 2006).

El desarrollo de leyes de control que permitan obtener señales de control acotadas es de constante interés ya que todos los dispositivos de control (actuadores) están sujetos a restricciones de amplitud, fuerzas, torques, voltaje, flujo, etc. En realidad, todas las entradas físicas en cada tecnología están restringidas, así que es una necesidad, el diseño de controladores que tomen en cuenta estas características.

En las últimas décadas, varios métodos se han propuesto para el diseño de este tipo de controladores con un enfoque completamente no lineal. Este eje fue iniciado por (Teel, 1992), quien propone un control basado en funciones de saturación anidadas para la estabilización de la cadena de integradores. A partir de éste, varios trabajos fueron desarrollados extendiendo los resultados y proponiendo mejoras respecto a la velocidad de convergencia y robustez (Sussmann et al., 1994; Johnson and Kannan, 2003; Marchand and Hably, 2005; Kaliora and Astolfi, 2005; Yong and Ru-Ning, 2010) y aplicados en una gran cantidad de áreas, como la robótica de manipuladores (Álvarez et al., 2003), ingeniería civil (Arfiadi and Hadi, 2006), robótica aérea y terrestre (Guerrero-Castellanos et al., 2011; Rifai et al., 2012; Chaos et al., 2013) y sistemas con retardos (Fischer et al., 2013). Sin embargo, hasta donde llega el conocimiento de los autores, no se ha encontrado en la literatura estrategias de control no lineal para el robot (3,0) que permita obtener señales de control acotadas de manera explícita y que garantice la convergencia asintótica global de las trayectorias del sistema en lazo cerrado a las trayectorias deseadas.

El presente trabajo aborda el problema de seguimiento de trayectoria para el robot (3, 0) y propone una solución mediante el diseño de una estrategia de control que a priori toma en cuenta

las cotas máximas permitidas de la señal de control *i.e.* la velocidad lineal y angular máximas que puede alcanzar el robot móvil. Esto permite maximizar el uso de los actuadores, sin poner en riesgo la estabilidad del sistema. El resultado es una ley de control no lineal relativamente simple basada en funciones de saturación anidadas que permite ser implementada en sistemas embebidos con bajo poder computacional. Además, la ley de control contiene parámetros de sintonización que permiten modificar la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se establece el modelo cinemático del robot móvil. La sección 3 corresponde al diseño de la estrategia de control. En la sección 4 se presenta el prototipo experimental y se analizan los resultados experimentales obtenidos. Finalmente, las conclusiones y perspectivas se presentan en la sección 5.

## 2. Modelo Cinemático

De acuerdo a la clasificación establecida por Campion and Bastin (1996) el robot móvil (3,0) es un robot holónomo con tres ruedas omnidireccionales que tiene la capacidad de moverse en cualquier dirección con cualquier orientación. Presenta tres grados de movilidad y no contempla grado de direccionalidad.

La representación esquemática del robot móvil (3,0), se muestra en la Figura 1. Un sistema de coordenadas inercial  $\{w\}$  y un sistema de coordenadas  $\{m\}$  se fijan en el plano de movimiento y en el robot móvil, respectivamente. Sea  $\dot{\eta}_w = [\dot{x}_w \dot{y}_w \dot{\phi}_w]^T$  y  $\dot{\eta}_m = [\dot{x}_m \dot{y}_m \dot{\phi}_m]^T$  la velocidad lineal y angular del robot móvil con respecto al sistema de coordenadas inercial  $\{w\}$  y al sistema de coordenadas del móvil  $\{m\}$ , respectivamente. Se asume que el robot móvil tiene una estructura rígida, con ruedas que no se deforman, no deslizan y su movimiento es en un plano horizontal (suelo) con un punto de contacto entre la rueda y el suelo; considerando los ángulos descritos por el eje  $Y_m$  y el eje axial de la rueda como  $\delta_1 = \frac{\pi}{6}$  y  $\delta_3 = \frac{\pi}{3}$  (ver Figura 1), el modelo cinemático se puede representar en (1). Cabe mencionar que los valores de los ángulos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  forman parte del diseño del robot móvil ya que maximizan su destreza (Villarreal-Cervantes et al., 2012b).

$$\begin{aligned}\dot{x}_w &= \dot{x}_m \cos \phi_w - \dot{y}_m \sin \phi_w \\ \dot{y}_w &= \dot{x}_m \sin \phi_w + \dot{y}_m \cos \phi_w \\ \dot{\phi}_w &= \dot{\phi}_m\end{aligned}\quad (1)$$

El mapeo entre la velocidad lineal de las ruedas y la velocidad angular y lineal del sistema de coordenadas del robot móvil se representa en (2) donde  $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3]^T$  es la velocidad angular de las ruedas,  $r_r = 0.0625m$  es el radio de las ruedas y la distancia entre el centro geométrico del móvil y la rueda se representa como  $L = 0.287m$ .

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 r_r &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \dot{x}_m + \frac{1}{2} \dot{y}_m + L \dot{\phi}_m \\ \dot{\theta}_2 r_r &= -\dot{y}_m + L \dot{\phi}_m \\ \dot{\theta}_3 r_r &= -\frac{1}{2} \sqrt{3} \dot{x}_m + \frac{1}{2} \dot{y}_m + L \dot{\phi}_m\end{aligned}\quad (2)$$

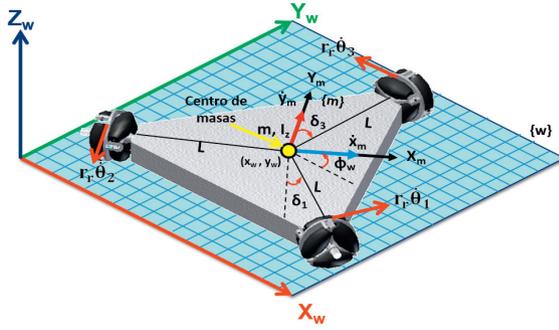


Figura 1: Diagrama esquemático del robot móvil (3,0).

### 3. Diseño del sistema de control

Sea el vector de estado  $x = [x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22} \ x_{31} \ x_{32}]^T = [\int x_w \ x_w \ \int y_w \ y_w \ \int \phi_w \ \phi_w]^T$  y el vector de señal de control  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T = [\dot{x}_m \ \dot{y}_m \ \dot{\phi}_m]^T$ , la representación en el vector de variables de estado  $x$  del sistema (1) se define en (3).

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= x_{12} \\ \dot{x}_{12} &= u_1 \cos(x_{32}) - u_2 \sin(x_{32}) \\ \dot{x}_{21} &= x_{22} \\ \dot{x}_{22} &= u_1 \sin(x_{32}) + u_2 \cos(x_{32}) \\ \dot{x}_{31} &= x_{32} \\ \dot{x}_{32} &= u_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Considere el siguiente compensador no lineal:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(x_{32})r_1 + \sin(x_{32})r_2 \\ u_2 &= -\sin(x_{32})r_1 + \cos(x_{32})r_2 \\ u_3 &= r_3 \end{aligned} \quad (4)$$

donde las señales  $r_i$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$  son señales de control cuya estructura será definida posteriormente.

Aplicando el compensador no lineal (4) a la cinemática del robot móvil (3,0) denotada por (3) resulta en las ecuaciones (5)-(7). Se observa que el modelo cinemático se desacopla y resulta en tres subsistemas. Los subsistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  representan las ecuaciones del movimiento de traslación, mientras que el subsistema  $\Sigma_3$  representa la ecuación del movimiento de rotación.

$$\Sigma_1 := \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = r_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\Sigma_2 := \begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = r_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\Sigma_3 := \begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} \\ \dot{x}_{32} = r_3 \end{cases} \quad (7)$$

Sea  $\xi_{1d}$  y  $\xi_{2d}$  la posición deseada del origen del sistema de coordenadas del robot móvil con respecto al sistema inercial  $\{w\}$  y  $\xi_{3d}$  la orientación deseada con respecto al mismo sistema de referencia, la dinámica de error queda determinada por:

$$\Sigma_i^e := \begin{cases} \dot{z}_{i1} = \tilde{z}_{i2} \\ \dot{z}_{i2} = r_i - \dot{\xi}_{id} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ \dot{\varphi}_{id} = \xi_{id} \end{cases} \quad (8)$$

donde  $\tilde{z}_{i1} = x_{i1} - \varphi_{id}$ ,  $\tilde{z}_{i2} = x_{i2} - \xi_{id} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Definición 1.** (Función de Saturación) Se denota a  $\sigma_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como la función de saturación definida por:

1.  $\sigma_M(s) = s \text{ si } |s| < M$  ;
2.  $\sigma_M(s) = \text{sign}(s)M$  en caso contrario.

Además, esta función satisface  $s\sigma_M(s) > 0$  para todo  $s \neq 0$ .

**Observación 1.** En lo que sigue, y con el objetivo de generalizar el resultado, los límites de la función de saturación serán denotados como  $M_{ij}$  donde el subíndice  $i \in \{1, 2, 3\}$  indican que el límite de saturación corresponde a la señal de control  $r_i$  en (4). El subíndice  $j \in \{1, 2, 3\}$ , denota los tres niveles de saturación en cada una de las señales de control  $r_i$ .

Una vez dada la definición anterior, podemos enunciar el resultado principal.

**Teorema 1.** Considere la dinámica del error dada por (8) con la ley de control (9) y asuma que  $|\dot{\xi}_{id}| \leq M_{i3} - \delta_i$ ,  $M_{i2} \leq \delta_i$ ,  $M_{i2} > 2M_{i1} \quad \forall t > t_0$ ,  $\delta_i > 0$ ,  $a_{i1}, a_{i2} \in \mathbb{R}^+$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

$$r_i = \sigma_{M_{i3}} \left( \dot{\xi}_{id} - \sigma_{M_{i2}} \left( a_{i1} \tilde{z}_{i2} + \sigma_{M_{i1}} (a_{i2} \tilde{z}_{i2} + a_{i1} a_{i2} \tilde{z}_{i1}) \right) \right) \quad (9)$$

Entonces, el origen de (8) es asintóticamente estable, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_{i1}, \tilde{z}_{i2} = 0$  lo que implica que  $x_{i1} \rightarrow \varphi_{id}$  y  $x_{i2} \rightarrow \xi_{id}$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además, la señal de control  $r_i$  se mantiene acotada, i.e.  $|r_i| \leq M_{i3}$ .

La demostración del Teorema 1 se da en el Apéndice A. Con el fin de no perder de vista la motivación física del presente trabajo, se mencionan a continuación algunos aspectos primordiales de la ley de control:

1. El objetivo de la estrategia de control no lineal (9) es hacer que el robot móvil sea capaz de seguir una trayectoria determinada, garantizando que la acción de control esté limitada a una cota previamente establecida por el diseñador y la cual a su vez está determinada por los límites físicos de los actuadores. Esta cota se establece mediante el límite de la función de saturación  $\sigma_{M_{i3}}(\star)$  conjuntamente con (4) (ver observación 2).
2. La importancia de la estrategia de control radica en la estructura de funciones de saturación anidadas y en la elección de los niveles de saturación  $M_{i3}$ ,  $M_{i2}$  y  $M_{i1}$ , lo cual asegura la convergencia global a cero de las trayectorias de la dinámica del error definida por (8). Cabe mencionar que una elección arbitraria de los límites de las funciones de saturación pueden provocar la inestabilidad del sistema en lazo cerrado.

3. Los parámetros  $a_{i1}, a_{i2} \in \mathbb{R}^+$  son parámetros de sintonización y permiten regular la velocidad de convergencia a cero de las trayectorias de la dinámica del error. Además, y como se observa en la demostración, cuando las trayectorias de la dinámica del error se encuentran en una vecindad del origen y las funciones de saturación se encuentran funcionando en la región lineal, los parámetros  $a_{i1}, a_{i2} \in \mathbb{R}^+$  se convierten en los polos de la dinámica del error en lazo cerrado.

**Observación 2.** De acuerdo a (4) y al resultado mencionado en el Teorema anterior, las señales de control i.e. la velocidad lineal y angular, quedan acotadas de acuerdo a (10), donde  $\max(\star)$  es el elemento con el valor más grande del vector  $\star$ .

$$\begin{aligned} |u_1| &\leq \max(M_{13}, M_{23}, 0.707(M_{13} + M_{23})) \\ |u_2| &\leq \max(M_{13}, M_{23}, 0.707(M_{13} + M_{23})) \\ |u_3| &\leq M_{33} \end{aligned} \quad (10)$$

**Observación 3.** Como fue mencionando en la sección 2, el mapeo entre la velocidad lineal de las ruedas y la velocidad angular y lineal del sistema de coordenadas del robot móvil se representa mediante (2). Entonces, de acuerdo a la relación (10), las velocidades angulares de las ruedas del robot quedan acotadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\dot{\theta}_1| &\leq \frac{1}{r_r} \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \max(M_{13}, M_{23}, 0.707(M_{13} + M_{23})) + LM_{33} \right) \\ |\dot{\theta}_2| &\leq \frac{1}{r_r} (\max(M_{13}, M_{23}, 0.707(M_{13} + M_{23})) + LM_{33}) \\ |\dot{\theta}_3| &\leq \frac{1}{r_r} \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \max(M_{13}, M_{23}, 0.707(M_{13} + M_{23})) + LM_{33} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

#### 4. Resultados experimentales

La estrategia de control propuesta fue implementada experimentalmente en el robot móvil (3,0) que se muestra en la Fig. 2. El prototipo fue diseñado y manufacturado en el Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, México. D.F. El robot móvil cuenta con una tarjeta madre de la marca Gigabyte modelo Mini-ITX GA-D425TUD dotada de un procesador Intel® Atom™ D525, 4GB de RAM, 250GB disco duro, una tarjeta de adquisición de datos de la marca Sensoray modelo 626, tres controladores de potencia de la marca Advanced Motion modelo 12A8 y dos baterías de ácido-plomo de 12 Voltios a 12Ah.

Con el propósito de obtener la posición y velocidad del origen del sistema de coordenadas del robot móvil  $\{m\}$  con respecto al sistema de referencia inercial  $\{w\}$  y denotadas por  $\bar{n}_w = [\bar{x}_w(t) \ \bar{y}_w(t) \ \bar{\phi}_w(t)]^T$  y  $\dot{\bar{n}}_w = [\dot{\bar{x}}_w(t) \ \dot{\bar{y}}_w(t) \ \dot{\bar{\phi}}_w(t)]^T$ , respectivamente, se implementó un sistema de localización absoluta con base en odometría. Así, para un tiempo de muestreo  $\Delta t$ , la posición absoluta del robot móvil se estima mediante (12) - (14), donde  $\Delta S_i \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ , es el desplazamiento lineal de la  $i$ -ésima rueda.



Figura 2: Prototipo experimental.

$$\begin{aligned} \bar{x}_w(t + \Delta t) &= \bar{x}_w(t) - \frac{1}{3} \Delta S_1 (\sin \bar{\phi}_w(t) + \sqrt{3} \cos \bar{\phi}_w(t)) \\ &\quad - \frac{1}{3} \Delta S_3 (\sin \bar{\phi}_w(t) - \sqrt{3} \cos \bar{\phi}_w(t)) \\ &\quad + \frac{2}{3} \Delta S_2 \sin \bar{\phi}_w(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_w(t + \Delta t) &= \bar{y}_w(t) + \frac{1}{3} \Delta S_1 (\cos \bar{\phi}_w(t) + \sqrt{3} \sin \bar{\phi}_w(t)) \\ &\quad + \frac{1}{3} \Delta S_3 (\cos \bar{\phi}_w(t) - \sqrt{3} \sin \bar{\phi}_w(t)) \\ &\quad - \frac{2}{3} \Delta S_2 \cos \bar{\phi}_w(t) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{\phi}_w(t + \Delta t) = \bar{\phi}_w(t) + \frac{1}{3L} (\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3) \quad (14)$$

Es necesario mencionar que la velocidad de cada motor del robot móvil se controla de forma local mediante un control proporcional integral (PI). De esta forma, la estrategia de control adquiere una estructura en cascada, siendo el control en el lazo interno cada uno de los controles PI y el control en el lazo externo el propuesto mediante (4) y (9). La Fig. 3 muestra el diagrama a bloques de la implementación de la estrategia de control.

Para realizar los experimentos, se seleccionó el tiempo de muestreo  $\Delta t = 5ms$  y las ganancias del controlador PI para la velocidad angular de las ruedas (lazo interno de control) como  $k_{p_i} = 0.7$ ,  $k_{i_i} = 2.5 \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ . Además, experimentalmente se observó que la máxima velocidad angular de los motores es de  $4.3 \text{ rad/s}$ , así para satisfacer la desigualdad (11) se obtienen los siguientes parámetros de la función de saturación  $\sigma_{M_{ij}}$ :  $M_{11} = 0.012$ ,  $M_{12} = 0.027$ ,  $M_{13} = 0.1565$ ,  $M_{21} = 0.015$ ,  $M_{22} = 0.030$ ,  $M_{23} = 0.1615$ ,  $M_{31} = 0.052$ ,  $M_{32} = 0.117$ ,  $M_{33} = 0.517$ . Los parámetros restantes de la ley de control acotado se establecen de la siguiente manera:  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = a_{22} = 0.3$ ,  $a_{21} = 2$ ,  $a_{31} = 10$ ,  $a_{32} = 1$ . Note que estos últimos parámetros permiten regular la velocidad de convergencia, ya que representan los valores propios del sistema en lazo cerrado cuando las funciones de saturación trabajan en su región lineal.

La trayectoria deseada a seguir por el robot móvil (3,0) se parametriza mediante una lemniscata de Bernoulli contenida en

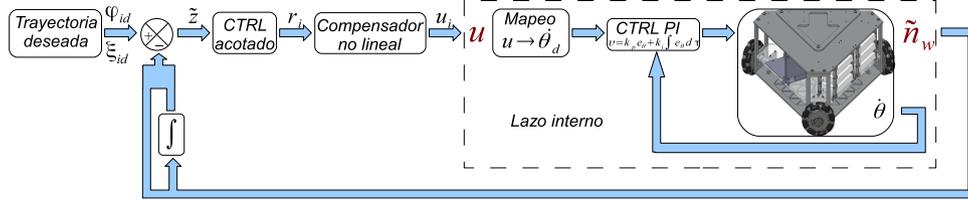
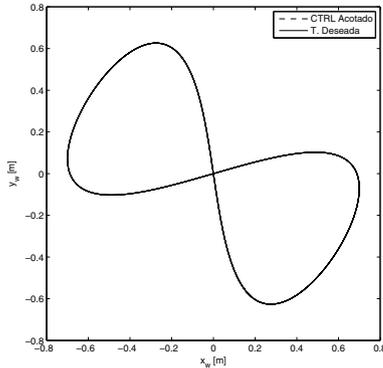


Figura 3: Diagrama a bloques de la estrategia de control acotado.

Figura 4: Posición deseada (línea continua) y real (línea discontinua) del centro de masa del robot móvil, expresado en el sistema de referencia inercial  $\{w\}$  considerando el sistema de control acotado.

un área de  $1.4m \times 1.4m$ , centrada en  $(0,0)$  y con un periodo de  $50s$  (tiempo en el que el robot móvil  $(3,0)$  debe realizar un recorrido completo de la trayectoria). Además, la orientación del robot móvil debe seguir una señal sinusoidal con amplitud de  $\pi \text{ rad}$  y periodo de  $50s$ . Dicha trayectoria se describe en (15).

$$\begin{aligned}\xi_{1d} &= 0.2161 \sin(0.2513t) - 0.5890 \sin(0.1256t) \\ \xi_{2d} &= 0.3365 \sin(0.2513t) + 0.3782 \sin(0.1256t) \\ \xi_{3d} &= \pi \sin(0.1256t)\end{aligned}\quad (15)$$

En la Fig. 4 y la Fig. 5 se muestran los resultados experimentales del desempeño del sistema de control propuesto en el seguimiento de la trayectoria sobre el plano  $X_w$ - $Y_w$  y alrededor del eje  $Z_w$  (posición angular  $\phi_w$ ), respectivamente. Además la Fig. 6a y Fig. 6b muestran la evolución de la magnitud del vector de error de posición lineal:  $e_{xy} = \|[\tilde{z}_{12} \ \tilde{z}_{22}]^T\|$  y la magnitud del error de posición angular:  $e_\phi = \|\tilde{z}_{32}\|$ , respectivamente. Note que estas magnitudes evolucionan en una vecindad de cero, lo cual indica que el sistema en lazo cerrado tiene el comportamiento deseado.

Con el propósito de evaluar las ventajas del esquema de control propuesto con respecto a un esquema clásico, se propone un segundo experimento considerando una trayectoria deseada descrita en (16), cuya diferencia con la trayectoria mostrada en (15) radica en el periodo. La intención es obligar que el robot móvil recorra la trayectoria completa ahora en  $40s$ , en lugar de  $50s$  como en el caso anterior, y en consecuencia obligar que la velocidad deseada de las ruedas 1 y 3 del robot móvil alcance el valor de velocidad angular máxima permitida por los motores,

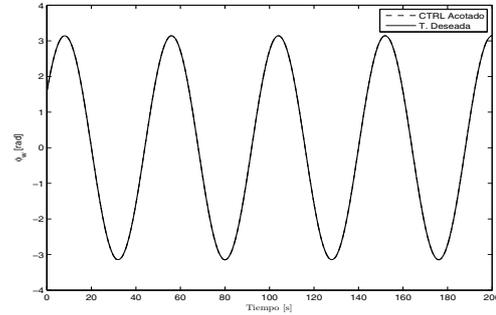


Figura 5: Evolución de la posición angular deseada (línea continua) y real (línea discontinua) del robot móvil considerando el sistema de control acotado.

i.e.,  $|\dot{\theta}_{dk}| \geq |\dot{\theta}_{dk}^{max}| = 4.3 \text{ rad/s}$  con  $k \in \{1, 3\}$ .

$$\begin{aligned}\xi_{1d} &= 0.2161 \sin(0.3141t) - 0.5890 \sin(0.1570t) \\ \xi_{2d} &= 0.3365 \sin(0.3141t) + 0.3782 \sin(0.1570t) \\ \xi_{3d} &= \pi \sin(0.1570t)\end{aligned}\quad (16)$$

Los resultados experimentales usando la estrategia de control acotado propuesto, el cual es una ley de control no lineal, se compara con un enfoque totalmente lineal, el cual tiene una estructura similar a la ley de control (9), pero cuya diferencia radica en que no se consideran las funciones de saturación  $\sigma_{M_{ij}}$ , esto significa que no existen cotas  $M_{ij}$  en la señal de control, i.e.  $M_{ij} = \infty \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ . En lo que sigue se le nombra a esta última estrategia de control como *control no acotado*, mientras que al propuesto se le llamará simplemente *control acotado*. Note que los valores de los parámetros de sintonización  $a_{i1}, a_{i2} \in \mathbb{R}^+$  se mantienen sin cambios para ambas estrategias.

En la Fig. 7 y la Fig. 8 se muestran y comparan los resultados experimentales del desempeño de ambas estrategias de control en el seguimiento de la trayectoria sobre el plano  $X_w$ - $Y_w$  y alrededor del eje  $Z_w$  (posición angular  $\phi_w$ ), respectivamente. La Fig. 9a y Fig. 9b muestran la evolución de la magnitud del vector de error de posición lineal:  $e_{xy} = \|[\tilde{z}_{12} \ \tilde{z}_{22}]^T\|$  y la magnitud del error de posición angular:  $e_\phi = \|\tilde{z}_{32}\|$ , respectivamente. De la misma forma, en la Tabla 1 se muestra el promedio (*mean*) y la desviación estándar (*std*) del error de posición lineal y angular, datos obtenidos mediante diez ejecuciones de ambas estrategias de control sobre la plataforma experimental. Se observa claramente que el promedio y la desviación estándar del error de posición lineal del control acotado es menor que del control no acotado. El error originado por la estrategia de control no acotado es muy visible en el el plano  $X_w$  -  $Y_w$  (ver Fig.

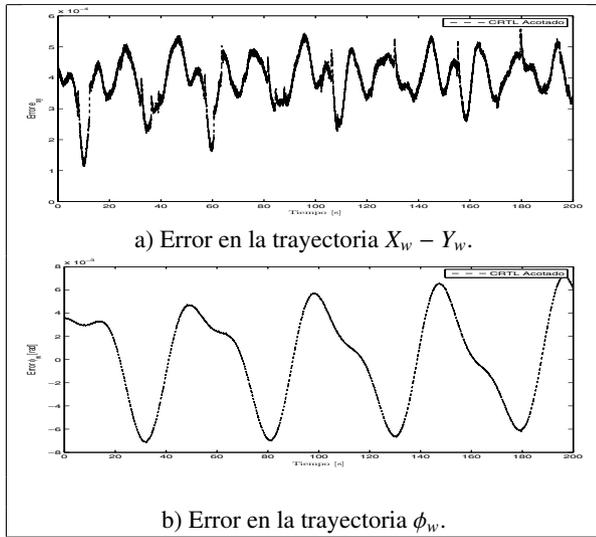


Figura 6: Evolución de las variables de error de posición lineal y angular para la trayectoria (15).

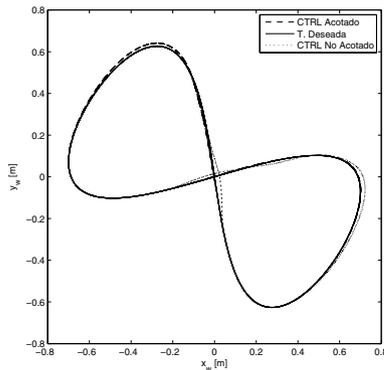


Figura 7: Posición deseada (línea continua) y real del centro de masa del robot móvil, expresado en el sistema de referencia inercial  $\{w\}$  considerando el sistema de control acotado (línea discontinua) y el sistema de control no acotado (línea de puntos).

7). Se observa en la misma Tabla que el promedio del error de posición angular  $e_\phi$  es menor en el caso del sistema de control acotado, aunque su desviación estándar aumenta ligeramente en comparación con el sistema de control no acotado debido a que se presenta un pico de error de posición angular cada 20s aproximadamente (ver Fig. 9b), el cual se origina por el acoplamiento de las señales de control.

Como se mencionó al inicio de esta sección, la estrategia de control posee una estructura en cascada, siendo el control en el lazo interno cada uno de los controles PI que controlan la velocidad angular de los motores y el control en el lazo externo, el propuesto mediante (4) y el control acotado (9), así como el control no acotado descrito anteriormente. La Fig. 10 muestra la evolución de las velocidades angulares deseadas utilizando el control acotado y el control no acotado. Note que en el caso del control acotado, las velocidades angulares deseadas nunca sobrepasarán el límite establecido ( $|\dot{\theta}_{d_k}^{max}| = 4.3 \text{ rad/s}$ ,  $\forall$

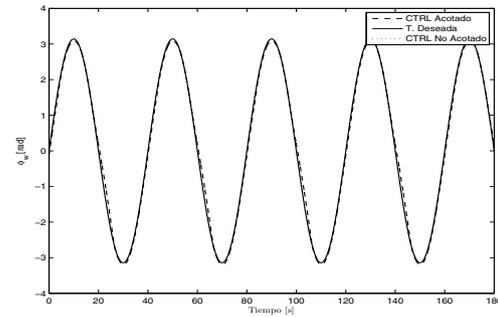


Figura 8: Evolución de la posición angular deseada (línea continua) y real del robot móvil considerando el sistema de control acotado (línea discontinua) y el sistema de control no acotado (línea de puntos).

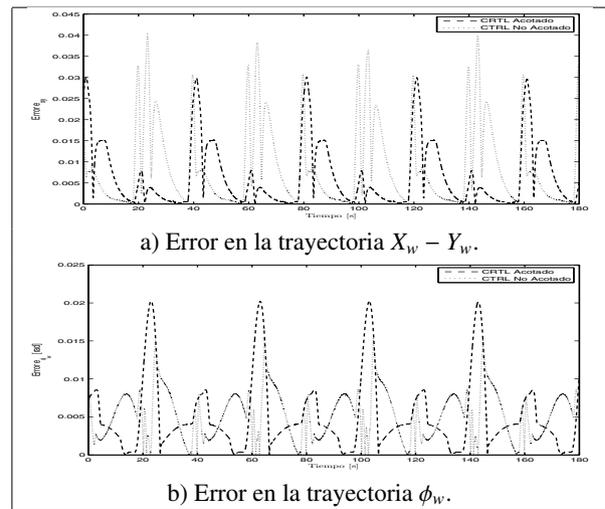


Figura 9: Evolución de las variables de error de posición lineal y angular, considerando el sistema de control acotado (línea discontinua) y el sistema de control no acotado (línea de puntos).

$k \in \{1, 2, 3\}$ ), puesto que los límites de las funciones de saturación fueron seleccionadas de acuerdo a estos límites físicos (ver Observación 2 y 3). Sin embargo, en el caso del control no acotado, las velocidades angulares deseadas no tienen ninguna restricción y en consecuencia se corre el riesgo que éstas sobrepasen el valor máximo permitido, como es el caso mostrado durante los instantes 40s, 80s, 120s, para la rueda 1 y 3 (ver Fig. 10a y Fig. 10b). Es necesario mencionar que durante estos instantes los controladores PI provocan la saturación de los motores y que el lazo de control externo se abra, dejando al sistema en lazo abierto temporalmente (Aström and Murray (2010), Cap.10). Este efecto provoca precisamente los errores en posición lineal y angular descritos anteriormente. En el caso de que el sistema se mantenga en lazo abierto, durante un tiempo considerable, la inestabilidad podría ocurrir. Afortunadamente, esto no pasa con el control acotado ya que los límites máximos permitidos por los actuadores son tomados en cuenta a priori en el diseño del control, dotando al sistema de control de robustez.

Finalmente, la evolución de las señales de control (9) *i.e.*

Tabla 1: Datos estadísticos del desempeño del sistema de control en diez experimentos.  $e_{xy} = \|[\bar{z}_{12} \bar{z}_{22}]^T\|$ ,  $e_\phi = \|\bar{z}_{32}\|$ ,  $mean(x)$  y  $std(x)$  representan el promedio y la desviación estándar de  $x$ , respectivamente.

Sistema de control	$mean(e_{xy})$	$mean(e_\phi)$	$std(e_{xy})$	$std(e_\phi)$
CTRL Acotado	6.78e-3	5.20e-03	8.91e-3	4.92e-03
CTRL No Acotado	8.91e-3	6.33e-03	9.75e-3	3.13e-03

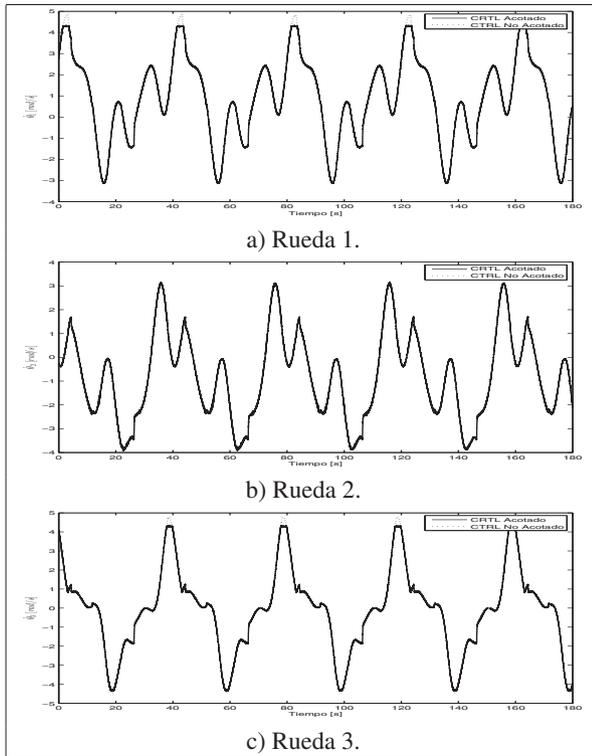


Figura 10: Velocidad angular de las ruedas con el control acotado y no acotado.

$r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$  y del precompensador no lineal (4) *i.e.*  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  para el caso del control acotado se muestran en la Fig. 11 y en la Fig. 12, respectivamente. Note que la señal de control dada por (9) se forma por tres funciones de saturación anidadas y donde los límites de las funciones de saturación se seleccionan de acuerdo a los límites físicos del sistema. La evolución de las funciones de saturación anidadas para la señal  $r_i$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$  se muestran en la Fig. 13, donde se nota la gran dinámica presente en cada una de ellas, así como la manera en que éstas se saturan. Note que este comportamiento en cada una de las funciones anidadas es acorde con el desarrollo de la demostración del Teorema 1 (ver Apéndice A).

Los resultados descritos anteriormente, muestran que el algoritmo de control acotado es capaz de hacer que el robot móvil siga las trayectorias deseadas, manteniendo las señales de control acotadas, maximizando el uso de los motores y todo esto sin poner en riesgo la estabilidad del sistema completo. Un vídeo mostrando el seguimiento de las trayectorias (15) y (16), es disponible en la siguiente liga:

[www.dropbox.com/s/50p0m6wnbw1bnyr/Seguimiento.wmv](http://www.dropbox.com/s/50p0m6wnbw1bnyr/Seguimiento.wmv)

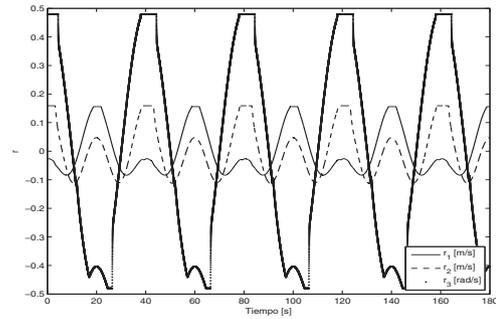


Figura 11: Señal de la ley de control no lineal (9) para el enfoque del control acotado.

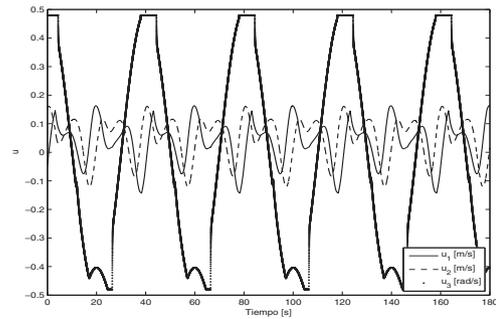


Figura 12: Señal del compensador no lineal (4) para el enfoque de control acotado.

## 5. Conclusión

En este trabajo se desarrolla una estrategia de control no lineal que da solución al problema de seguimiento de trayectoria de un robot móvil (3,0) con condiciones iniciales arbitrarias. Esta estrategia está compuesta de dos partes fundamentales. Primeramente el compensador no lineal  $u_i$  que permite que la cinemática del robot dependa de tres subsistemas desacoplados para los movimientos del robot de traslación y rotación. En seguida, la ley de control  $r_i$  basada en un conjunto de funciones de saturación anidadas asegura que la dinámica del error tienda a cero asintóticamente, garantizando que el robot móvil siga las trayectorias deseadas. En su conjunto, la estrategia de control toma en cuenta las cotas máximas de la velocidad lineal y angular que puede alcanzar el robot móvil. Esto permite maximizar el uso de los actuadores sin poner en riesgo la estabilidad del sistema. La demostración de la convergencia del sistema en lazo cerrado se realizó en el sentido de Lyapunov. Además, la estrategia de control propuesta se implementó experimentalmente en un prototipo de robot móvil (3,0) y fue comparada con una estrategia que no toma en cuenta los límites de la señal de

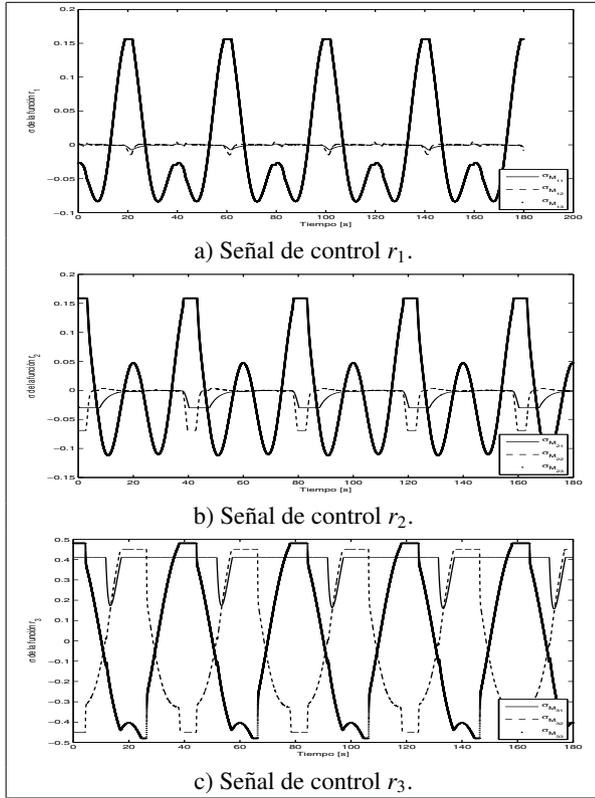


Figura 13: Evolución de las tres funciones de saturación anidadas que conforman la señal de control acotado

control. Los resultados experimentales muestran la efectividad de la estrategia de control acotado con respecto a un control no acotado; el promedio de la magnitud del vector de error de la posición lineal y angular para el control propuesto en este trabajo son:  $mean(e_{xy}) = 6.78e-3$ ,  $mean(e_\phi) = 5.20e-03$  respectivamente, mientras que para un control con señales de control no acotadas son:  $mean(e_{xy}) = 8.91e-3$ ,  $mean(e_\phi) = 6.33e-03$ . En el futuro se explorará el diseño de un control disparado por eventos (Guerrero-Castellanos et al., 2014) para la estabilización y/o seguimiento de trayectorias para el robot (3,0) y donde los métodos de navegación combinen la odometría, sistemas de navegación inercial y GPS.

## English Summary

### Trajectory tracking of a mobile robot (3,0) by means of bounded control.

#### Abstract

The present work deals with the tracking problem of a mobile robot (3,0) based on the kinematic model and proposes a control strategy that takes into account a priori input signals bounds *i.e.* the linear and angular velocity of the robot. The objective of this control approach is to maximize the effectiveness of the actuators without taking a risk in the system stabi-

lity. The resulting nonlinear control is composed of a nonlinear compensator based on the kinematic model and nested saturation approach. The control law can be tuned to force the error dynamics trajectories to enter in a neighborhood of the origin in a finite time and remain thereafter. Experimental results show the performance of the closed loop system. Furthermore, owing to simplicity, the proposed control law is suitable for application where on-board computational resources are limited.

#### Keywords:

Mobile robot (3,0), bounded control, nested function, nonlinear control, trajectory tracking.

#### Agradecimientos

El primer autor agradece a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP por el apoyo brindado en esta investigación bajo el proyecto GUCJING14-I. El segundo autor agradece el apoyo de la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas (COFAA) y a la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional bajo los proyectos No. 20131053, 20140926 y al CONACYT bajo el apoyo 182298. El tercer autor agradece el apoyo brindado por Facultad de Ciencias de la Electrónica de la BUAP y a la UPPUE por el otorgamiento del año sabático que permitió la culminación del presente trabajo. El cuarto autor agradece al CONACYT por la beca de estudios de maestría.

#### Apéndice A. Demostración del Teorema 1

*Demostración.* Dada la ley de control, si la magnitud de  $\dot{\xi}_{id}$  cumple siempre con  $|\dot{\xi}_{id}| \leq M_{i3} - \delta_i$  para todo  $t > t_0$  con  $M_{i2} \leq \delta_i$ , entonces  $\sigma_{M_{i3}}(\cdot)$  se encuentra funcionando en la región lineal, resultando (A.1).

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i1} &= \tilde{z}_{i2} \\ \dot{z}_{i2} &= -\sigma_{M_{i2}}(a_{i1}\tilde{z}_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(a_{i2}\tilde{z}_{i2} + a_{i1}a_{i2}\tilde{z}_{i1})) \end{aligned} \quad (A.1)$$

Para proseguir con la demostración, se define el siguiente cambio de variables:

$$\zeta_{i1} = a_{i1}a_{i2}\tilde{z}_{i1} - a_{i2}\tilde{z}_{i2}, \quad \zeta_{i2} = a_{i1}\tilde{z}_{i2} \quad (A.2)$$

En consecuencia, el sistema (A.1) se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{i1} &= a_{i2}[\zeta_{i2} - \sigma_{M_{i2}}(\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}))] \\ \dot{\zeta}_{i2} &= -a_{i1}\sigma_{M_{i2}}(\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})) \end{aligned} \quad (A.3)$$

Con el fin de analizar la convergencia de las variables del sistema, considere primeramente la evolución del estado  $\zeta_{i2}$ . Considere la función candidata de Lyapunov  $V_{i2} = \zeta_{i2}^2$ . Derivando esta función y evaluándola a lo largo de la trayectoria de  $\zeta_{i2}$ , se obtiene  $\dot{V}_{i2} = 2\zeta_{i2}\dot{\zeta}_{i2} = -2a_{i1}\zeta_{i2}\sigma_{M_{i2}}(\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}))$ . Suponiendo que  $|\zeta_{i2}| > 2M_{i1}$ , *i.e.*  $|\zeta_{i2}| \in ]2M_{i1}, +\infty]$ , lo que implica que

$|\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})| > M_{i1} + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Por lo tanto, se puede afirmar que  $\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})$  es del mismo signo que  $\zeta_{i2}$  y en consecuencia  $\dot{V}_{i2} < 0$ . Lo anterior implica que  $\zeta_{i2}$  entra al conjunto  $\Phi_{i2} = \{\zeta_{i2} : |\zeta_{i2}| \leq 2M_{i1}\}$  en un tiempo finito  $t_1$  y va a permanecer en él para todo  $t > t_1$ . Por tanto, el Lema 4 presente en Marchand and Hably (2005) garantiza que el estado  $\zeta_{i1}$  se mantiene acotado.

Una vez probado esto,  $\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}) \in [-2M_{i1}, 2M_{i1}]$ , y esto significa que  $\sigma_{M_{i2}}(\cdot)$  no está saturada, por lo tanto el sistema (A.3) se convierte en:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{i1} &= -a_{i2}\sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}) \\ \dot{\zeta}_{i2} &= -a_{i1}[\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})]\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov para considerar la evolución de  $\zeta_{i1}$ :  $V_{i1} = \zeta_{i1}^2$ . Derivando esta función y evaluándola a lo largo de la trayectoria de  $\zeta_{i1}$ , se obtiene,  $\dot{V}_{i1} = 2\zeta_{i1}\dot{\zeta}_{i1} = -2a_{i2}\zeta_{i1}\sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})$ . De acuerdo a la definición de la función de saturación, esto implica que  $\dot{V}_{i1} < 0$  y  $\zeta_{i1}$  decrece e ingresa al conjunto  $\Phi_{i1} = \{\zeta_{i1} : |\zeta_{i1}| \leq M_{i1}\}$  en un tiempo finito  $t_2 > t_1$  y se mantiene en él para todo  $t > t_2$ . Esto significa que  $\sigma_{M_{i1}}(\cdot)$  no está saturada y el sistema (A.4) se convierte en:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{i1} &= -a_{i2}\zeta_{i1} \\ \dot{\zeta}_{i2} &= -a_{i1}(\zeta_{i2} + \zeta_{i1})\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{i1} \\ \dot{\zeta}_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{i2} & 0 \\ -a_{i1} & -a_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{i1} \\ \zeta_{i2} \end{pmatrix}\quad (\text{A.6})$$

que tiene la forma  $\dot{\zeta}_i = A_i \zeta_i$ , cuya solución  $\zeta_i = e^{A_i t} \zeta_i(0)$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , puesto que  $A_i$  es estable. Por lo tanto, el sistema (A.1) que representa la dinámica del error, es global y asintóticamente estable y además es exponencialmente estable de manera local. En consecuencia,  $z_{i1}, z_{i2} \rightarrow 0$  lo que implica  $x_{i1} \rightarrow \varphi_{id}$  y  $x_{i2} \rightarrow \xi_{id}$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## Referencias

- Araújo, A., Portugal, D., Couceiro, M., Sales, J., Rocha, P., 2014. Desarrollo de un robot móvil compacto integrado en el middleware ros. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 11 (3), 315–326.
- Arfiadi, Y., Hadi, M. N. S., 2006. Continuous bounded controllers for active control of structures. *Computers & Structures* (84), 798–807.
- Arias, J. M. G., Angulo, L. H., Castillo, M. M. M., Mena, J. E. F., 2011. Control Óptimo para trayectorias circulares en un robot móvil. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 8 (3), 229–240.
- Aström, K., Murray, R., 2010. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press.  
URL <http://books.google.com.mx/books?id=cdG9fNqTDS8C>
- Cañas, N., Hernández, W., González, G., Sergiyenko, O., 2014. Controladores multivariables para un vehículo autónomo terrestre: Comparación basada en la fiabilidad del software. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 11 (2), 179–190.
- Campion, G., d.-N. B., Bastin, G., 1996. Structural properties and classification on kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*.
- Chaos, D., Moreno-Salinas, D., Muñoz, R., Aranda, J., 2013. Control no lineal de un aerodeslizador no holonómico con acciones de control limitadas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 10 (4), 402–412.
- Dierks, T., Jagannathan, S., 2007. Control of nonholonomic mobile robot formations: Backstepping kinematics into dynamics. In: *Proc. IEEE International Conference on Control Applications*. pp. 94–99.
- El-Shenawy, A., Wellenreuther, A., Badreddin, E., 2008. Practical evaluation for two different holonomic wheeled mobile robots. In: *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. pp. 3102–3107.
- Fischer, N., Dani, A., Dixon, W. E., 2013. Saturated control of an uncertain nonlinear system with input delay. *Automatica* (49), 1741–1747.
- Guerrero-Castellanos, J., Marchand, N., Hably, A., Lesecq, S., Delamare, J., 2011. Bounded attitude control of rigid bodies: Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter. *Control Engineering Practice* 19 (8), 790–797.
- Guerrero-Castellanos, J. F., Téllez-Guzmán, J., Marchand, N., Durand, S., Alvarez-Muñoz, J., González-Díaz, V., 2014. Attitude stabilization of a quadrotor by means of event-triggered nonlinear control. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 73 (1-4), 123–135.
- Indiveri, G., Paulus, J., Plöger, P. G., 2006. Motion control of swedish wheeled mobile robots in the presence of actuator saturation. In: *Proc. 10th annual RoboCup International Symposium*.
- Johnson, E. N., Kannan, S. K., 2003. Nested saturation with guaranteed real poles. In: *Proc. American Control Conference (ACC)*.
- Kaliora, G., Astolfi, A., 2005. On the stabilization of feedforward systems with bounded control. *Systems and Control Letters* (54), 263–270.
- Marchand, N., Hably, A., 2005. Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 2147–2152.
- Rifai, H., Marchand, N., Poulin-Vittrant, G., 2012. Bounded control of an underactuated biomimetic aerial vehicle - validation with robustness tests. *Robotics and Autonomous Systems* (60), 1165–1178.
- Rivera, Z. G. F., 2006. *Diseño, construcción y control para seguimiento de trayectorias de un robot móvil omnidireccional*. Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México.
- Saidonr, M., Desa, H., Rudzuan, M., 2011. A differential steering control with proportional controller for an autonomous mobile robot. In: *Proc. IEEE 7th International Colloquium on Signal Processing and its Applications (CSPA)*. pp. 90–94.
- Scolari Conceição, A., Moreira, A., Costa, J., 2006. Trajectory tracking for omnidirectional mobile robots based on restrictions of the motor's velocities. In: *Proc. 8th International IFAC Symposium on Robot Control*.
- Shen, D., Sun, Z., Qiao, Y., 2011. Second-order sliding mode control for non-holonomic mobile robots formation. In: *Proc. 30th Chinese Control Conference (CCC)*. pp. 4860–4864.
- Sira-Ramírez, H., Luviano-Juárez, A., Cortés-Romero, J., 2011. Control lineal de sistemas no lineales diferencialmente planos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 8 (1), 14–28.
- Sussmann, H. J., Sontag, E. D., Yang, Y., 1994. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control* 39(12), 2411–2425.
- Teel, A. R., 1992. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems and Control Letters*, 165–171.
- Velasco-Villa, M., Alvarez-Aguirre, A., Rivera-Zago, G., 2007. Discrete-time control of an omnidirectional mobile robot subject to transport delay. In: *Proc. American Control Conference (ACC)*.
- Villarreal-Cervantes, M. G., Cruz, V. C. A., Saldívar, B. S. A., García, S. L. E., 2012a. Dynamic coupling between a parallel manipulator and an omnidirectional mobile platform. In: *Proc. XV Latinamerican Control Conference (CLCA)*.
- Villarreal-Cervantes, M. G., Cruz-Villar, C. A., Álvarez Gallegos, J., Portilla-Flores, E. A., 2012b. Kinematic dexterity maximization of an omnidirectional wheeled mobile robot: A comparison of metaheuristic and SQP algorithms. *International Journal Advanced Robot System* 9 (161), 1–12.
- Yandong, L., Zongyi, W., Ling, Z., 2010. Adaptive neural network pid sliding mode dynamic control of nonholonomic mobile robot. In: *Proc. IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*. pp. 753–757.
- Yong, W., Ru-Ning, M., 2010. Global stabilization of feedforward nonlinear system based on nested saturated control. *Acta Automatica Sinica* 36 (4).
- Álvarez, R. J., Kelly, R., Cervantes, I., 2003. Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators. *Automatica* (39), 989–995.