

## Estimador para un Proceso Estocástico de Tercer Orden

Jesús Medel J<sup>a,\*</sup>, Romeo Urbieto P<sup>a</sup>, Juan C. García I<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigación en Computación, Calle Venus S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo, CP. 07738.

<sup>b</sup> Escuela Profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Av. Santa Ana No. 1000, Col. San Francisco Culhuacán, México D. F.

### Resumen

En este artículo se propone un estimador basado en el segundo momento de probabilidad aplicado a un modelo estocástico de tercer orden en diferencias finitas. Modelo que comúnmente es usado para describir sistemas con amortiguamiento como es el caso de los motores síncronos. Los valores que se consideran en el modelo son resultado de la estimación con respecto a la señal de referencia. En el diseño se realiza el cálculo de los tres parámetros usando las covariancias  $P_k$  y  $Q_k$ . Es así como la variable estocástica observable está en función sus ganancias y del proceso de innovación, lo que permite el desarrollo de un identificador con convergencia en casi todos los puntos a la señal de referencia. Para contar con los resultados en línea así como lograr una implementación se realiza la estimación recursiva. En la sección de resultados se presenta un experimento teórico utilizando la herramienta de Matlab<sup>®</sup> para determinar los parámetros y lograr la convergencia del modelo de tercer orden con la señal de referencia, lo cual se logró en menos de diez iteraciones. La convergencia se puede observar a través del funcional del error. La aproximación del identificador con la estimación recursiva hacia la referencia fue de milésimas y es descrita como una supermartingala. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S. L. Todos los derechos reservados

### Palabras Clave:

Estimación, Probabilidad, Identificación, Filtrado, Algoritmo, Recursivo.

### 1. Introducción

En la literatura existen diversos trabajos de investigación sobre estimación estocástica (Kailath, *et al.*, 2000), (Pérez, *et al.*, 2007), (Robert, *et al.*, 2008). Muy pocos de ellos han experimentado algoritmos basados en el segundo momento de probabilidad aplicados a modelos de procesos tipo caja negra de tercer orden. Pero al observar que varios de esos sistemas tienen amortiguamiento, se convierten en sistemas de tercer orden, tal como (Pérez, *et al.*, 2007), en donde se realiza la estimación para un motor síncrono, utilizando la interpolación, lo que no permite contar con una buena descripción paramétrica. Por tal motivo, es relevante la estimación para un sistema de tercer orden.

Los modelos tipo caja negra son del tipo experimental (Medel *et al.*, 2009). Su análisis se logra mediante la evaluación de las señales de entrada y salida del sistema a observar (Medel *et al.*, 2010). En donde la respuesta de salida se describe como una variable aleatoria con resultados medidos en instantes de tiempo  $T$  (Isabelle *et al.*, 1996) (János, 2003).

La teoría de estimación estocástica tiene como propósito determinar que la respuesta del modelo sea aproximadamente igual a la señal de salida del sistema tipo caja negra de acuerdo a un tipo de excitación. De esta manera, la variable de salida

estocástica se encuentra en función de los estados estocásticos estimados (Alok, 2007).

Por otra parte, los modelos que se emplean en una implementación digital son modelos de tipo recursivos; que son obtenidos de los modelos estocásticos de estimación. Donde la versión recursiva tiene una dependencia del estado anterior y tienen como una de sus finalidades permitir observar la evolución de los parámetros y en consecuencia de manera aproximada, conocer las condiciones de estabilidad que tiene el sistema de referencia.

La estructura de este trabajo contiene una breve revisión de la teoría del modelo simplificado, del modelo propuesto, los resultados y las conclusiones.

### 2. Breve Revisión de la Teoría del Modelo Simplificado

El modelo estocástico simplificado es obtenido del modelo de variables de estados de tercer orden hasta lograr una expresión recursiva, como sugiere (Medel *et al.*, 2010) y que es descrito en diferencias finitas.

**Teorema 1.** El sistema de tercer orden  $\left(\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right)$  es descrito en diferencias finitas

$$\frac{f(t) - 3f(t-T) + 3f(t-2T) - f(t-3T)}{T^3} \quad (1)$$

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [jjmedel1j@yahoo.com.mx](mailto:jjmedel1j@yahoo.com.mx) (Jesús Medel),  
URL: [www.cic.ipn.mx](http://www.cic.ipn.mx) (Jesús Medel)

**Prueba.** Considérese que  $\frac{df(t)}{dt}$  es descrito por límites

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right) \quad (2)$$

Sin perder ninguna de sus propiedades, considerando que el lado derecho de (2) con  $t \equiv t + \Delta t$ , la primera derivada tiene la siguiente forma

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t} \right) \quad (3)$$

La variación de  $\Delta t$  en función  $T$  que es el tiempo de muestreo de acuerdo con (Medel et al, 2010) corresponde a  $(\frac{1}{2}f_{\max})$ . Que se describe aproximadamente

$$\frac{df(t)}{dt} \cong \frac{f(t) - f(t-T)}{T} \quad (4)$$

Al realizar la derivada de (4), se tiene la segunda derivada de  $f(t-T)$ .

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \cong \frac{df(t) - df(t-T)}{T} \quad (5)$$

En (6), la derivada de  $df(t-T)$  de acuerdo con (4) considera el desplazamiento como  $\Delta t$  y que será constante e igual a  $T$ .

$$\frac{df(t-T)}{dt} \cong \frac{f(t-T) - f(t-2T)}{T} \quad (6)$$

De forma tal que en (7) se describe de manera explícita la segunda derivada (5) considerando a (6) y a (4)

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \cong \frac{\frac{df(t) - df(t-T)}{T} - \frac{f(t-T) - f(t-2T)}{T}}{T} \quad (7)$$

En (8) se muestra la simplificación de (7)

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \cong \frac{f(t) - 2f(t-T) + f(t-2T)}{T^2} \quad (8)$$

Ahora en (9) se da la descripción de la derivada de (8)

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \cong \frac{\frac{df(t)}{dt} - 2\frac{df(t-T)}{dt} + \frac{df(t-2T)}{dt}}{T} \quad (9)$$

La derivada de  $df(t-2T)$  se describe en (10) de acuerdo con (4) considerando que el desplazamiento de  $\Delta t$  será constante e igual a  $T$ .

$$\frac{df(t-2T)}{dt} \cong \frac{f(t-2T) - f(t-3T)}{T} \quad (10)$$

En (11) está la descripción en diferencias finitas de (9) sustituyendo a (4), (6) y (10), la forma desarrollada

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \cong \frac{f(t) - f(t-T)}{T} - 2\frac{f(t-T) - f(t-2T)}{T} + \frac{f(t-2T) - f(t-3T)}{T} \quad (11)$$

En (12) se resume de forma simplificada a (11) agrupando los términos, y se observa que el orden de la ecuación diferencial se ve reflejado en el grado del denominador, que en este último caso corresponde a  $T^3$  y el máximo retardo de la función será  $f(t-3T)$ .

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \cong \frac{f(t) - 3f(t-T) + 3f(t-2T) - f(t-3T)}{T^3} \quad (12)$$

Y que corresponde al resultado mostrado en (1).■

Al hacer el cambio de variables de (12), se obtiene (13) con un sistema afín de acuerdo a  $x_{k+1} = f(t)$ ,  $x_k = f(t-T)$ ,

$x_{k-1} = f(t-2T)$ ,  $x_{k-2} = f(t-3T)$  y la velocidad de cambio

$$w_k = \left( \frac{d^3 f(t)}{dt^3} \right).$$

$$x_{k+1} = a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + a_3 x_{k-2} + b w_k \quad (13)$$

Con salida observable (14) de acuerdo con (13)

$$y_k = c x_k + d v_k \quad (14)$$

En donde  $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}$  son las secuencias: de adelante y retardos de las variables de estado,  $w_k$  y  $v_k$  son ruidos de entrada y salida Gaussianos con esperanza igual a cero y varianza acotada. Mientras que  $a_1, a_2, a_3$  son los parámetros a ser estimados y  $b, d$  son ganancias proporciones de los ruidos Gaussianos, y  $c$  una relación unitaria entre la variable de salida y el estado (Armando et al., 2001).

En (15) se observa de manera explícita a los parámetros de (13), conjugando las propiedades de (14), sustituyendo de manera implícita a los estados internos  $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}$  por su descripción correspondiente a la señal de salida retardada.

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + a_3 y_{k-3} - a_1 d v_{k-1} - a_2 d v_{k-2} - a_3 d v_{k-3} + c b w_k + d v_k \quad (15)$$

Que es la expresión de la respuesta del modelo de salida de tercer orden, considerando: a)  $y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-3}$ ; b)  $v_{k-1}, v_{k-2}, v_{k-3}, w_k, v_k$ ; c)  $a_1, a_2, a_3$ ; d)  $b, c, d$  las ganancias proporcionales que afectan a los ruidos gaussianos.

El ruido equivalente del sistema tiene la forma.

$$V_k = -a_1 d v_{k-1} - a_2 d v_{k-2} - a_3 d v_{k-3} + c b w_k + d v_k \quad (16)$$

De tal manera que dada (16) en (15), se obtiene (17) con los parámetros de manera explícita con relación a la señal observable retardada y al ruido generalizado  $V_k$

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + a_3 y_{k-3} - V_k \quad (17)$$

En (18) la señal observable de acuerdo con (17) está formada por el vector de  $[a_1 \ a_2 \ a_3]$  y vector de estados  $[y_{k-1} \ y_{k-2} \ y_{k-3}]^T$ .

$$y_k = [a_1 \ a_2 \ a_3] [y_{k-1} \ y_{k-2} \ y_{k-3}]^T + V_k \quad (18)$$

En (19) se muestra la forma simbólica de (18).

$$y_k = A Y_k - V_k \quad (19)$$

Con  $Y_k \in \mathbb{R}^{[3 \times 1]}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{[1 \times 3]}$ , y

$\{V_k\} \subseteq N(\mu, \sigma^2 < \infty)$ ,  $y_k \in \mathbb{R}$ .

De (19), se tiene que las perturbaciones generalizadas  $V_k$  el estado observable  $y_k$ , y el vector de estados observable  $Y_k$  son elementos conocidos aplicados en el modelo estocástico; quedando por conocer qué valores debe tomar  $A$  para que la respuesta del modelo (19) sea convergente a la respuesta del sistema de referencia tipo caja negra, a la cual se le llamará de ahora en adelante  $y_{d,k}$ .

En la siguiente sección se considerará el cómo realizar la estimación del vector de parámetros  $A \in \mathbb{R}^{[1 \times 3]}$ , considerando a  $y_{d,k}$  así como la selección de una variable instrumental.

### 3. Modelo Propuesto de Estimación Estocástica

En el teorema 2, se presenta el estimador de  $A$  con respecto a (19), considerando el segundo momento de probabilidad usando a la variable instrumental para el vector de ruidos sea minimizado y lograr describir la dinámica interna de  $a_1, a_2, a_3$ .

**Teorema 2.** Sea (20) el estimador para el modelo descrito en (19).

$$\hat{A}_k = Q_k P_k \quad (20)$$

$$\hat{A}_k \in \mathbb{R}^{[1 \times 3], k}, k \in \mathbb{N}, P_k \in \mathbb{R}^{[3 \times 3], k}, Q_k \in \mathbb{R}^{[1 \times 3], k}.$$

**Prueba.** En (21) se desarrolla el producto del modelo (19) con la variable instrumental de la forma  $Z_k = f(Y_k)$ , y que cumpla las condiciones de (Christian et al., 2007) y (Frank et al., 2008).

$$y_k Z_{k-1}^T = A Y_k Z_{k-1}^T + V_k Z_{k-1}^T \quad (21)$$

De acuerdo con (Paul et al., 1971) al considerar en (21) el operador de esperanza matemática, se obtiene la forma.

$$E\{y_k Z_{k-1}^T\} = A E\{Y_k Z_{k-1}^T\} + E\{V_k Z_{k-1}^T\} \quad (22)$$

El segundo momento del proceso de innovación de (22), se describe a continuación

$$P_k := E\{y_k Z_{k-1}^T\} - E\{V_k Z_{k-1}^T\} \quad (23)$$

Al no garantizar que  $E\{Y_k Z_{k-1}^T\}$  sea invertible, se considera aplicable la pseudo-inversa, como se describe en (24), como el vector de ganancias.

$$Q_k := (E\{Y_k Z_{k-1}^T\})^+ \quad (24)$$

El estimador de  $A$ , de acuerdo con (23) y (24) en (21), tiene la forma

$$\hat{A}_k = Q_k P_k \quad (25)$$

Que corresponde a (20). ■

En el teorema 3 se desarrolla la forma recursiva para la estimación de  $A$  con respecto a (19) de acuerdo con (25), considerando que el sistema (19) tiene propiedades estacionarias.

**Teorema 3.** El estimador recursivo de acuerdo con (25), está descrito en (26) para condiciones estacionarias de  $y_{d,k}$

$$\hat{A}_k = \alpha_k \hat{A}_{k-1} + \beta_k \quad (26)$$

Con  $\alpha_k = f(Q_k, k)$ ,  $\beta_k = f(z_k, y_k, V_k, Q_k)$ .

**Prueba** Considérese el desarrollo de (25) con respecto a sus últimos términos y al segundo momento de probabilidad con respecto a  $P_{k-1}$ .

$$\hat{A}_k = \left( \frac{y_k Z_k^T - V_k Z_k^T + (k-1)^2 P_{k-1}}{k^2} \right) Q_k \quad (27)$$

El estimador (25) bajo condiciones estacionarias y retardado en el tiempo, tiene la forma

$$\hat{A}_{k-1} = P_{k-1} Q_{k-1} \quad (28)$$

Despejando de (28) a  $P_{k-1}$  y sustituyéndolo en (27), se logra el desarrollo del vector estimado  $\hat{A}_k$  en función de  $\hat{A}_{k-1}$ , así como de  $y_k, z_k^T$ , de los ruidos generalizados  $v_k$ , y de  $Q_k$ .

$$\hat{A}_k = \left( \frac{y_k Z_k^T - V_k Z_k^T + (k-1)^2 \hat{A}_{k-1} Q_{k-1}^+}{k^2} \right) Q_k \quad (29)$$

En (30) el estimador tiene la forma recursiva de (29)

$$\hat{A}_k = \alpha_k \hat{A}_{k-1} + \beta_k \quad (30)$$

Y en (31) son descritos  $\alpha_k, \beta_k$ .

$$\alpha_k = \left( \frac{k-1}{k^2} \right) Q_{k-1}^+ Q_k, \quad \beta_k = \left( \frac{y_k Z_k^T - V_k Z_k^T}{k^2} \right) Q_k \quad (31)$$

Lo que corresponde a (26). ■

El desarrollo del segundo momento del proceso de innovación (23) cuenta con tres componentes, como se observa.

$$P_k = [\bar{p}_{1,k} \quad \bar{p}_{2,k} \quad \bar{p}_{3,k}] \quad (32)$$

Mientras que el segundo término  $Q_k$ , se define como la covarianza.

$$Q_k = \begin{bmatrix} \bar{q}_{11,k} & \bar{q}_{12,k} & \bar{q}_{13,k} \\ \bar{q}_{21,k} & \bar{q}_{22,k} & \bar{q}_{23,k} \\ \bar{q}_{31,k} & \bar{q}_{32,k} & \bar{q}_{33,k} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Al considerar que  $Z_k := [y_{k-1} \quad y_{k-2} \quad y_{k-3}]$  se resuelve para (32) en tres términos:

$$T_{1,k} = y_k y_{k-1} - V_k y_{k-1}, \quad (34)$$

$$T_{2,k} = y_k y_{k-2} - V_k y_{k-2},$$

$$T_{3,k} = y_k y_{k-3} - V_k y_{k-3}.$$

Entonces, los términos de (34) en forma recursiva bajo condiciones estacionarias

$$\bar{p}_{1,k} = \left( \frac{1}{k^2} \right) T_{1,k} + (k-1)^2 \bar{p}_{1,k-1}, \quad (35)$$

$$\bar{p}_{2,k} = \left( \frac{1}{k^2} \right) T_{2,k} + (k-1)^2 \bar{p}_{2,k-1},$$

$$\bar{p}_{3,k} = \left( \frac{1}{k^2} \right) T_{3,k} + (k-1)^2 \bar{p}_{3,k-1}.$$

Al desarrollar (33) considerando el segundo momento, se obtiene

$$\left( \frac{1}{k^2} \right) \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k y_{i-1}^2 & \sum_{i=0}^k y_{i-1} y_{i-2} & \sum_{i=0}^k y_{i-1} y_{i-3} \\ \sum_{i=0}^k y_{i-2} y_{i-1} & \sum_{i=0}^k y_{i-2}^2 & \sum_{i=0}^k y_{i-2} y_{i-3} \\ \sum_{i=0}^k y_{i-3} y_{i-1} & \sum_{i=0}^k y_{i-3} y_{i-2} & \sum_{i=0}^k y_{i-3}^2 \end{bmatrix}^+ \quad (36)$$

En (30) se encuentran las componentes de la matriz de covarianza  $Q_k$  y que es descrita por la matriz pseudo-inversa  $[ ]^+$  de los  $\bar{q}_{ij}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  de acuerdo con (David, 2002) (Medel et al., 2009).

El segundo término de (26) se define como la covarianza en (33) y con condiciones estacionarias se desarrolla el teorema 4.

**Teorema 4.** La forma recursiva de (24) en condiciones estacionarias se describe para  $Q_k^+$ .

$$Q_k^+ = \frac{1}{k^2} (Y_k Z_k^T + (k-1)^2 Q_{k-1}^+) \quad (37)$$

**Prueba.** Considérese a (24) con respecto a su último término, considerando que es igual a la inversa de la matriz de covarianza, i. e., que sin perder la estacionariedad se tiene

$$Q_k^+ = \frac{1}{k^2} \left( Y_k Z_k^T + \sum_{i=0}^{k-1} Y_i Z_i^T \right) \quad (38)$$

Bajo condiciones estacionarias (24) un intervalo de tiempo posterior, la sumatoria de (38) tiene la forma

$$\sum_{i=0}^{k-1} Y_i Z_i^T = (k-1)^2 Q_{k-1}^+ \tag{39}$$

Al ser sustituida en (38) a (39) y sacar la pseudo-inversa, se obtiene

$$Q_k^+ = \frac{1}{k^2} (Y_k Z_k^T + (k-1) Q_{k-1}^+) \tag{40}$$

Que es la pseudo-inversa de la matriz de covarianzas y que corresponde al resultado descrito en (37). ■

La pseudo-inversa se calcula utilizando el comando de Matlab® *pinv* de la siguiente forma

$$Q_k = \text{pinv}(\begin{bmatrix} \bar{q}_{11,k} & \bar{q}_{12,k} & \bar{q}_{13,k} \\ \bar{q}_{21,k} & \bar{q}_{22,k} & \bar{q}_{23,k} \\ \bar{q}_{31,k} & \bar{q}_{32,k} & \bar{q}_{33,k} \end{bmatrix}) \tag{41}$$

Con los resultados obtenidos en (34) y (35) para  $P_k$  así como en (37) para  $Q_k$ , se describe en (42) el vector estimado de acuerdo con (Robert et al., 2008) y (24).

$$\bar{a}_k = [\bar{p}_k \bar{Q}_k]^+ \tag{42}$$

En (43) el vector estimado  $\bar{a}_k$  cuenta con sus tres componentes.

$$\bar{a}_k = [\bar{a}_{1,k} \quad \bar{a}_{2,k} \quad \bar{a}_{3,k}] \tag{43}$$

Y en (44) se desarrollan cada una de ellas.

$$\begin{aligned} \bar{a}_{1,k} &= p_{1,k} Q_{1,1,k} + p_{2,k} Q_{2,1,k} + p_{3,k} Q_{3,1,k} \\ \bar{a}_{2,k} &= p_{1,k} Q_{1,2,k} + p_{2,k} Q_{2,2,k} + p_{3,k} Q_{3,2,k} \\ \bar{a}_{3,k} &= p_{1,k} Q_{1,3,k} + p_{2,k} Q_{2,3,k} + p_{3,k} Q_{3,3,k} \end{aligned} \tag{44}$$

El vector de estimación (45) se obtiene al sustituir (44) en la salida estocástica (17) de acuerdo con (Daniel et al., 1994).

$$\bar{y}_k = \bar{a}_{1,k} y_{k-1} + \bar{a}_{2,k} y_{k-2} + \bar{a}_{3,k} y_{k-3} - V_k \tag{45}$$

En la estimación estocástica recursiva se consideraron a (Reginfo, 2004) y a (Justino, 2007), lo que permite describir a  $p_k$  en (46), en función de las componentes de  $Q_{1,k}$ .

$$\begin{aligned} \bar{p}_{r1,k} &= \left( \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} T_1 + (k-1)^2 Q_{1,1} a_{1,k-1} \\ + (k-1)^2 Q_{1,2} a_{2,k-1} + Q_{1,3} a_{3,k-1} \end{pmatrix} \right) \\ \bar{p}_{r2,k} &= \left( \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} T_2 + (k-1)^2 Q_{2,1} a_{1,k-1} \\ + (k-1)^2 Q_{2,2} a_{2,k-1} + Q_{2,3} a_{3,k-1} \end{pmatrix} \right) \\ \bar{p}_{r3,k} &= \left( \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} T_3 + (k-1)^2 Q_{3,1} a_{1,k-1} \\ + (k-1)^2 Q_{3,2} a_{2,k-1} + Q_{3,3} a_{3,k-1} \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \tag{46}$$

En (47) de manera explícita se muestra la matriz de covarianza  $Q_{1,k}$ , cuyos elementos contribuyen en (46), al igual que en (44) y así describir a (43).

$$Q_{1,k} = (\begin{bmatrix} \bar{q}_{11,k-1} & \bar{q}_{12,k-1} & \bar{q}_{13,k-1} \\ \bar{q}_{21,k-1} & \bar{q}_{22,k-1} & \bar{q}_{23,k-1} \\ \bar{q}_{31,k-1} & \bar{q}_{32,k-1} & \bar{q}_{33,k-1} \end{bmatrix}) \tag{47}$$

Las expresiones estocásticas recursivas de los estimados se dan en (48) de acuerdo con (46) y (47).

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,k} &= p_{r1,k} \bar{q}_{11,k-1} + p_{r2,k} \bar{q}_{21,k-1} + p_{r3,k} \bar{q}_{31,k-1} \\ \hat{a}_{2,k} &= p_{r1,k} \bar{q}_{12,k-1} + p_{r2,k} \bar{q}_{22,k-1} + p_{r3,k} \bar{q}_{32,k-1} \\ \hat{a}_{3,k} &= p_{r1,k} \bar{q}_{13,k-1} + p_{r2,k} \bar{q}_{23,k-1} + p_{r3,k} \bar{q}_{33,k-1} \end{aligned} \tag{48}$$

Conforme con (Lokenath et al., 2005) y (Medel et al., 2010), la salida estocástica de forma recursiva es obtenida sustituyendo a (48) en (45), logrando la identificación  $\hat{y}_k$  y considerando que se conoce el vector de perturbaciones  $V_k$ , por lo menos en un sentido e distribución.

$$\hat{y}_k = \hat{a}_{1,k} y_{k-1} + \hat{a}_{2,k} y_{k-2} + \hat{a}_{3,k} y_{k-3} - V_k \tag{49}$$

#### 4. Resultados

De acuerdo con (Pérez, et al., 2007) el motor síncrono queda descrito en (49) y representa la respuesta de la caja negra a través de un modelo de tercer orden en diferencias finitas y con perturbación acotada por una función de distribución conocida. El ruido en (45) incluye a la señal de excitación al motor. Cabe mencionar que las perturbaciones son del tipo aditivas y que solo representan un porcentaje de la señal eléctrica.

La finalidad de (49) es encontrar la convergencia del modelo descrito en (45) a la señal de referencia  $y_{d,k}$ . Esto requiere de la estimación de  $\bar{a}_{1,k}$ ,  $\bar{a}_{2,k}$ ,  $\bar{a}_{3,k}$  se base con respecto al segundo momento de probabilidad como se observa en (25) y el algoritmo recursivo opere para condiciones estacionarias, considerado las propiedades aditivas de (31) (Wilfredo, 1999) (Medel et al., 2010).

Aplicando el método de Montecarlo (Rao, 2006), se realiza la selección del mejor resultado de identificación  $\hat{y}_k$ , con respecto a  $\hat{a}_{1,k}$ ,  $\hat{a}_{2,k}$ ,  $\hat{a}_{3,k}$  descritos en (48) y que aplicados en (49), se realiza la comparación con la señal de referencia  $y_{d,k}$  como se muestra en la Figura 1. De acuerdo con (42) y (43), cada componente de  $Q_k$  es descrita en (46) y la matriz de covarianza  $Q_{1,k}$  con un retardo en (47). Permite realizar la estimación recursiva de  $\bar{a}_{1,k}$ ,  $\bar{a}_{2,k}$ ,  $\bar{a}_{3,k}$  en (48) y que al ser aplicados en (49) con la señal retardada de la repuesta del sistema, se tiene la identificación  $\hat{y}_k$ .

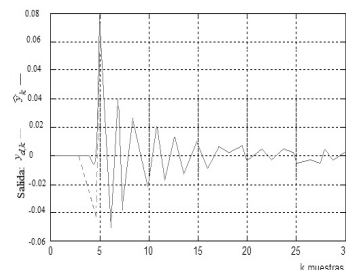


Figura 1. Respuesta del Modelo Estocástico (49) (gris) con respecto a la señal de referencia  $y_{d,k}$  (gris punteado).

En la Figura 2, se comparan las respuestas del modelo recursivo (31) con respecto al modelo no recursivo (25), ambas aplicadas en (49). Los ruidos generalizados  $V_k$  tienen la misma función de distribución de los ruidos que afectan a  $y_{d,k}$ , considerando que se cumplen con los cuatro primeros momentos de probabilidad; lo que no garantiza que se tenga de forma idéntica, la misma función de distribución.

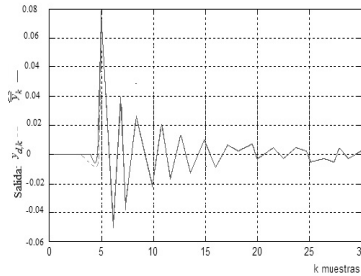


Figura 2. Respuesta del Modelo Estocástico de 3<sup>er</sup> Orden (gris claro) y Recursivo (gris punteado), usando el Algoritmo Estimador conforme al Segundo Momento de Probabilidad.

En las Figuras 1 y 2, los parámetros estimados hacen que la respuesta de los modelos sea convergente en casi todos los puntos a la respuesta del sistema de referencia  $y_{d,k}$ . Así como sus histogramas respectivos como se ven en la Figura 3, considerado la descripción a través de Matlab®  $[k, F(y)] = hist(y_{d,k})$  así como para la identificación  $[k, F(y)] = hist(\hat{y}_k)$ , respectivamente.

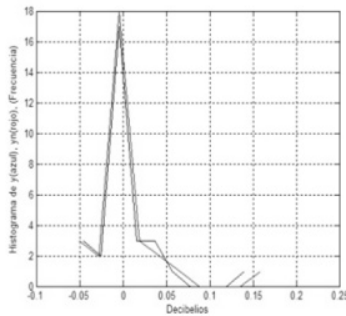


Figura 3. Histograma del modelo sin recursividad: Salida estocástica (gris) y Recursiva (gris, línea inferior). Trayectoria de las Supermartingalas.

En la Figura 4, muestra los histogramas del modelo recursivo descritos en (49) y la señal de referencia  $y_{d,k}$  considerando el comando de Matlab® *hist* de la siguiente forma para la señal de referencia  $y_{d,k}$  y de la identificada  $\hat{y}_k$  de la forma  $hist(y_{d,k})$  y  $hist(\hat{y}_k)$ , respectivamente. En donde el vector de perturbaciones  $V_k$  usa el comando de Matlab® *randn* con la señal  $\hat{y}_k$ . Y que en los resultados se observa que se tiene una descripción de acuerdo a (Lagunas., 2007) como una Supermartingala.

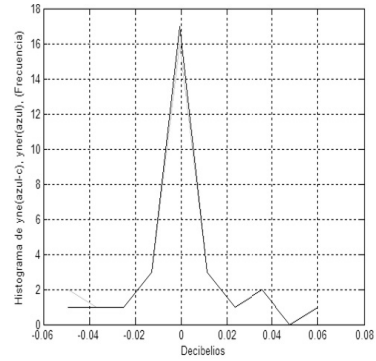


Figura 4. Histograma del sistema de referencia  $y_{d,k}$  (gris), y el modelo Recursivo (31) aplicado en (49) en (gris claro).

El funcional de error para cada uno de los parámetros se ilustra en la Figura 5.

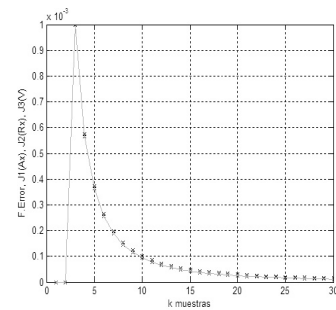


Figura 5. Respuesta de la Funcional de Error:  $J_1$  (asteriscos claros),  $J_2$  (asteriscos oscuros),  $J_3$  (gris).

En la Figura 6 ilustra el desarrollo del funcional de error recursivo para cada parámetro, en este caso se consideró que se contaban con los valores finales del sistema de referencia  $y_{d,k}$ .

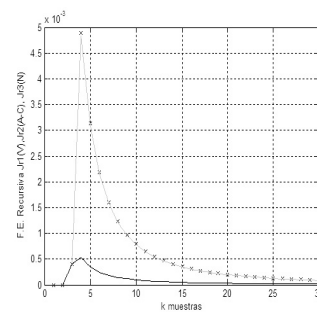


Figura 6. Respuesta de los funcionales de error recursivos para:  $J_1$  (asteriscos),  $J_2$  (gris claro),  $J_3$  (Negro).

En ambas Figuras 5 y 6, los funcionales tienen a converger en una vecindad acotada después de que  $k$  es mayor a 30 muestras. Los estimados, al considerar el menor error de convergencia, se muestran en la Figura 7, en donde se puede observar que tienen un comportamiento estacionario después de que  $k$  es mayor a 4 muestras.

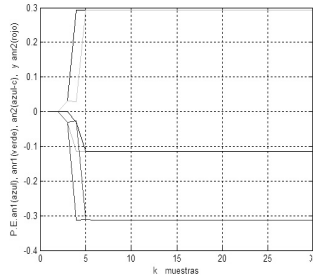


Figura 7. Parámetros estimados (48) entre  $[-0.3, 0.3]$  para diferentes condiciones de operación del sistema de referencia (17).

## 5. Conclusiones

El problema a que se enfrenta un seguidor de una señal con un comportamiento de tercer orden, en el que queda marcada la velocidad de cambio de la aceleración, es la estimación de los parámetros del modelo recursivo que corresponde a un modelo de tercer orden con tres ganancias del tipo estocásticas con dinámicas no conocidas. La descripción del estimador se realiza a través del segundo momento de probabilidad y permite la construcción de dos modelos de estimación: uno que describe los parámetros que requiere el modelo para seguir de manera aproximada a la señal de referencia y el otro, del tipo recursivo, que se encarga de ir dando una estimación conforme el sistema evoluciona en  $k$  unidades de tiempo. En cualquiera de las dos formas, en sus histogramas de frecuencias se observan que las estimaciones son del tipo Supermartingalas. Los estimados hacen que la respuesta de los modelos sea convergente en casi todos los puntos a la respuesta del sistema real, como se pueden observar en las Figuras 1 y 2. Además, la estimación se basó en las condiciones estacionarias de la señal de referencia  $y_{d,k}$ . Las Figuras 5 y 6 muestran que el nivel de convergencia al sistema de referencia, es en casi todos los puntos. La Figura 7, muestra que dadas las características estacionarias del sistema de referencia, la estimación después de que llegan a su estado estacionario, que es de 4 muestras y que al aplicarlas en (49), converge en casi todos los puntos con la señal de referencia  $y_{d,k}$ . El seguidor converge a la señal de referencia ya que la función de distribución de ruidos generalizada  $V_k$  es la misma para ambos casos. Lo que permitió ver la bondad del estimador de tercer orden recursivo.

## English Summary

### Estimation Applied to a Third Stochastic Process Order

#### Abstract

This paper presents the estimation considering the Second Probability Moment applied to a simplified Third Order Stochastic Process. Model commonly used to describe smoothing systems as a synchronous motor. Its values used into the model describe and estimate the Black Box system behavior. In the design three parameters based on covariance  $P_k$  and  $Q_k$  are

calculated. The stochastic variable depends on the three gains and three functional estimation errors, respectively, developing the stochastic identification by a reference model that converges in almost all points with 10 iterations in recursive estimation. The results demonstrate a theoretical experiment using the Matlab® obtaining the parameters and the third order model to converge in accordance to the reference signal. The accuracy achieved in thousandths was in a Supermartingale sense and implementation performed as a function of recursive estimation.

#### Keywords:

Probability, Identification, Filtering, Recursive Algorithm

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del IPN, al CIC, a la ESIME Unidad Culhuacán y del Conacyt, sin los cuales no se hubiera logrado la conjunción de los profesores y con registro ante la Secretaría de Investigación y Posgrado SIP: 20140728.

## Referencias

- Alok, S., 2007. Taylor & Francis Group, Optimal and Robust Control. CRC Press, 179-228. DOI: 10.1109/TAC.2008.918772
- Armando, J., Graciela, G., Ramón, M., 2001. Un procedimiento práctico para estimar el parámetro de forma de la distribución Gaussiana Generalizada. Centro de Investigación de Matemáticas. México, 6.
- Rengifo, C., 2004. Una Herramienta para Identificación Recursiva de Sistemas Dinámicos, 1-12.
- Christian, H., Andre, Ran., Freek, Schagen., 2007. Introduction to Mathematical System Theory. Linear Systems, Identification and Control, Springer, Germany, 115-132.
- Daniel, W., 1994. Probability Theory, an Analytic View. Cambridge University Press, USA, 193-256.
- David, S., 2002. La Matriz Fundamental y la Matriz esencial. Conceptos y aplicaciones, 3-38.
- Frank, L., Liua, X., Dan, Popa., 2008. Optimal Estimation and Robust Estimation. CRC Press, pp. 423-442.
- Isabelle, R., Léon, P., 1996. Black Box Modeling with State Space Neural Networks. Neural Adaptive Control Technology, 237-264.
- János, A., 2003. Fuzzy Model Identification for Control. International Journal of Robust and Nonlinear Control 14, 1079-1081. DOI: 10.1002/rnc.882
- Justino, A., 2007. Estimación de Parámetros en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Identificabilidad y Aplicaciones a Medicina. UNAM. México, 1-34.
- Kailath, T., Ali, H., Babak H., 2000. Linear Estimation, Prentice Hall, USA.
- Lagunas M., 2007. Procesos Estocásticos y Estimación de Parámetros.
- Lokenath, D., Piotr, M., 2005. Hilbert Spaces with Applications. Elsevier Academy Press, USA, 93-135.
- Medel, J., García, M., 2009. Estimación de Parámetros Usando la deconvolución y la Pseudo-inversa: Descripción e Implementación Recursiva. Revista Mexicana de Física 56, 54-60.
- Medel, J., María, Z., 2010. Estimación-Identificación como Filtro Digital Integrado: Descripción e Implementación Recursiva. Revista Mexicana de Física 56, 1-8.
- Paul, G., Sidney, C., Charles, Stone., 1971. Introduction to Probability Theory. Editorial Houghton Mifflin Company, USA, 92-95.
- Pérez A., Romeo Y., Pérez S., 2007. Identificación de los parámetros de un modelo de tercer orden para una máquina síncrona utilizando mediciones en línea, Revista Scientia Et Technica, 13, 67-71.
- Rao, D., 2006. Analysis and Design of Control Systems Using Matlab. New Age International, USA.
- Robert, J., Lakhdar, A., John, Moore., 2008. Hidden Markov Models. Estimation and Control. Springer, 19.
- Wilfredo, D., 1999. Convergencia Aleatoria en Espacios de Hilbert. Revista de la F. C. M. de la Universidad mayor de San Marcos, 2 69-70.