

## Control Robusto de Posición para un Sistema Mecánico Subactuado con Fricción y Holgura Elástica

Raúl Rascón<sup>a,\*</sup>, Joaquín Álvarez<sup>b</sup>, Luis T. Aguilar<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Universidad Autónoma de Baja California (UABC), Departamento de Ingeniería Aeroespacial, Blvd. Benito Juárez y Calle de la Normal S/N, 21280 Mexicali, México.

<sup>b</sup>Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, Carretera Ensenada-Tijuana 3918, 22860 Ensenada, B.C., México.

<sup>c</sup>Instituto Politécnico Nacional, CITEI, avenida del parque 1310 Mesa de Otay 22510 Tijuana B.C., México.

### Resumen

Se presenta una estrategia de control que combina las técnicas de modos deslizantes y control  $H_\infty$ , para regular la posición de un sistema mecánico subactuado con fricción y con una holgura elástica. Se muestra que el sistema controlado tiene una región de puntos de equilibrio, donde las trayectorias del sistema en lazo cerrado convergen de manera asintótica con un error de posición acotado en estado estacionario, incluso ante la presencia de cierto tipo de perturbaciones. La amplitud de dicho error puede reducirse mediante una sintonización adecuada de los parámetros del controlador. Además, el controlador atenúa el efecto de perturbaciones externas e incertidumbres en el modelado sobre la salida de la planta. La metodología es aplicada a una plataforma experimental, mostrándose el buen desempeño del controlador propuesto. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

sistemas mecánicos subactuados, control robusto, control por modos deslizantes, control  $H_\infty$ .

### 1. Introducción

#### 1.1. Motivación y metodología

Un problema de interés en el área de ingeniería de control es diseñar un controlador retroalimentado que estabilice la planta nominal y que atenúe la influencia, sobre la salida de la planta, de variaciones paramétricas y perturbaciones externas. En sistemas mecánicos este problema resulta más complicado cuando existen restricciones sobre el movimiento del sistema. Este problema fue intensamente estudiado en la última década, para sistemas con diversos tipos de restricciones, (Mansard and Khatib, 2008; Potini et al., 2006; Perez et al., 2010). Sin embargo, es frecuente que la presencia de incertidumbres paramétricas y de perturbaciones externas no sean tomadas en cuenta. Algunas referencias importantes al respecto se pueden encontrar en (Brogliato, 1999; Leine and Van de Wouw, 2010).

El control por modos deslizantes (Utkin, 1992), es una metodología ampliamente utilizada debido a su efectividad para cancelar el efecto de perturbaciones. La principal característica de

este tipo de controladores es que generan un modo deslizante sobre una superficie prescrita de conmutación, de manera que el sistema sea gobernado por una ecuación de orden reducido, que a la vez permanece insensible a cierta clase de perturbaciones externas y variaciones paramétricas (Utkin, 1978). Esta metodología ha sido probada satisfactoriamente para controlar el movimiento de innumerables sistemas, entre otros, de robots manipuladores (véase (Sabanovic et al., 2008) y las referencias contenidas ahí). Igualmente, un trabajo previo de control por modos deslizantes en robots con restricciones puede ser encontrado en (Lian and Lin, 1998).

Por otra parte, la metodología de control  $H_\infty$  (Doyle et al., 1989; Isidori, 2000) ha probado ser efectiva para controlar sistemas afectados por perturbaciones desconocidas y donde las mediciones de estados son incompletas e imperfectas.

Dadas las propiedades particulares de las metodologías mencionadas, resulta de interés diseñar una técnica de control que combine las características de robustez de modos deslizantes con las del control  $H_\infty$ , con el fin de desarrollar un controlador que reúna las ventajas de ambos controladores y que muestre buen desempeño. En trabajos de investigación recientes, la técnica de combinar modos deslizantes con  $H_\infty$  ha mostrado ser eficiente para controlar sistemas conmutados, véase por ejemplo

\* Autor en correspondencia

Correos electrónicos: [raul.rascon@uabc.edu.mx](mailto:raul.rascon@uabc.edu.mx) (Raúl Rascón), [jgalvar@cicese.mx](mailto:jgalvar@cicese.mx) (Joaquín Álvarez), [laguilarb@ipn.mx](mailto:laguilarb@ipn.mx) (Luis T. Aguilar)

(Castaños and Fridman, 2011; Lian and Zhao, 2010; Ghafari-Kashani et al., 2010).

El problema abordado en el presente artículo es la regulación de posición, a través de medición de la salida, de un sistema mecánico con una holgura entre partes mecánicas, que puede verse como una restricción del movimiento libre que tiene el elemento propulsor en su paso por la holgura. Algunas referencias de trabajos previos de sistemas mecánicos con restricciones pueden ser encontradas en (Mansard and Khatib, 2008; Menini and Tornambe, 2001).

Se han hecho algunos esfuerzos para controlar sistemas mecánicos con restricciones utilizando una amplia gama de metodologías, tales como modos deslizantes (Sabanovic et al., 2008), control predictivo (Adetola et al., 2009) y control óptimo (Christophersen, 2007). Existe poca literatura enfocada al control de sistemas mecánicos con restricciones sujetos a perturbaciones desacopladas e incertidumbres paramétricas. Por ejemplo, el problema de restricciones unilaterales en la posición es considerado en (Brogliato et al., 1997). En (Tseng, 2005) se considera un controlador PID para robots con restricciones, el cual es combinado con un control  $H_2/H_\infty$  para atenuar la influencia de perturbaciones e incertidumbre paramétrica. En (Chiu et al., 2004) es diseñado un controlador robusto para seguimiento de trayectoria/fuerza aplicado a robots con restricciones. Por otra parte, en (Chang and Lee, 1999) se propone un controlador dinámico para regulación de posición/fuerza en un robot con restricción activado por motores de CD.

Algunos trabajos anteriores sobre control por modos deslizantes aplicado a sistemas mecánicos con restricción de posición y perturbaciones acopladas, los cuales son antecesores al trabajo presentado aquí son (Rascón et al., 2010, 2012a,b). En (Rascón et al., 2010) se resuelve el problema de regulación de posición de un sistema mecánico actuado de un grado de libertad con una restricción de posición; además, se hace una comparación entre el algoritmo de control por modos deslizantes propuesto y un control PD. En (Rascón et al., 2012a) se diseña un controlador por modos deslizantes y se propone un criterio para reducir rebotes entre un sistema mecánico de un grado de libertad y una restricción de posición; también se hacen pruebas experimentales en un circuito electrónico que emula la dinámica del sistema mecánico y en la plataforma experimental ECP-210. En (Rascón et al., 2012b) se aborda el problema de regulación de posición de un sistema mecánico subactuado con una holgura elástica y fricción dinámica de Dahl en cada una de las articulaciones, y se compara a partir de simulaciones numéricas el algoritmo de control por modos deslizantes- $H_\infty$  propuesto con un algoritmo de control por modos deslizantes de primer orden.

### 1.2. Estrategia y contribución

En este artículo se propone el diseño de un controlador para una clase de sistemas mecánicos con holgura elástica, tomando en cuenta la fuerza de fricción viscosa. Además, se considera que el sistema puede ser afectado por perturbaciones externas acopladas o desacopladas. Se supone también que se mide únicamente la posición, no la velocidad. A su vez, la ley de control propuesta, basada en las técnicas de modos deslizantes

y de  $H_\infty$ , es diseñada para todas las condiciones de operación del sistema; es decir, en movimiento libre o en movimiento restringido. El controlador se diseña para, primeramente, forzar al sistema a llegar al movimiento restringido y, una vez logrado esto, lo dirige hacia la posición de referencia.

La estabilidad del sistema mecánico en lazo cerrado se prueba utilizando funciones cuadráticas; algunas referencias pueden ser encontradas en (Paden and Sastry, 1987; Shevitz and Paden, 1994; Kazerooni, 1990; Branicky, 1998). Esto nos permite asegurar que las coordenadas a controlar convergen hacia la superficie deslizante en tiempo finito.

El algoritmo de control propuesto, al combinar las técnicas de modos deslizantes y de  $H_\infty$ , es capaz de sobrellevar los factores no deseados, como son perturbaciones e incertidumbres, y aún así tener un buen desempeño. Un trabajo preliminar a éste, donde se utiliza la misma metodología de control puede consultarse en (Rascón et al., 2012b). Por otro lado, se muestran experimentos para ilustrar la validez del análisis teórico.

### 1.3. Organización

El resto del artículo se desarrolla de la siguiente manera: En la Sección 2 se describe el sistema mecánico y se presenta un cambio de variables en el modelo, basado en el error de posición, que facilita el desarrollo del controlador. El diseño de un control por retroalimentación de salida se presenta en la Sección 3. En la Sección 4 se presenta el análisis de estabilidad. Después, en la Sección 5, se presenta la síntesis de la parte de control  $H_\infty$ . En la Sección 6 se presentan resultados experimentales y en la Sección 7 se incluyen algunos comentarios y conclusiones.

## 2. Modelo del sistema mecánico

Se presenta aquí un sistema básico descrito por un modelo simple (véase la Figura 1). Este sistema es similar a otros sistemas mecánicos, especialmente a los que presentan espacios libres entre eslabones. En ellos se puede presentar un comportamiento dinámico importante tal como rebotes entre eslabones, debido a colisiones, lo cual podría poner en riesgo la integridad del dispositivo mecánico. El sistema se compone de dos masas sujetas a fricción viscosa, las cuales están unidas a través de un resorte con una holgura mecánica. Se propone diseñar un controlador con el propósito de reducir la presencia de rebotes en el espacio libre, además de presentar un buen desempeño de regulación.

Las ecuaciones de movimiento en lazo abierto del sistema mecánico pueden ser expresadas en coordenadas conjuntas como

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + f(x_1, x_2) &= u + w_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + w_2(t, x), \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $m_i$ ,  $x_i(t)$ ,  $\dot{x}_i(t)$ ,  $\ddot{x}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , representan la masa, el desplazamiento, velocidad y aceleración del  $i$ -ésimo eslabón, respectivamente, y los parámetros  $b_i$  son los coeficientes de fricción viscosa. Además,  $u$  denota la fuerza de control y  $f(x_1, x_2)$  la fuerza de contacto entre las masas ocasionada por la holgura

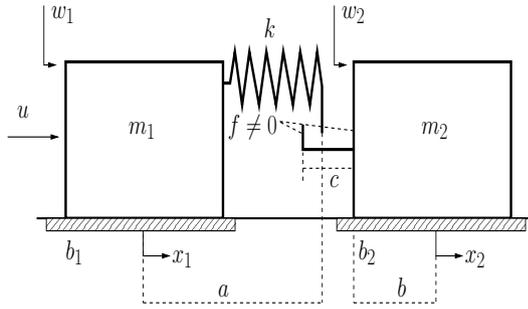


Figura 1: Sistema mecánico restringido.

elástica. Además se introduce la perturbación externa acotada  $w_1(t) \in \mathbb{R}$  y, para tomar en cuenta las discrepancias en el modelo, se considera  $w_2(t, x) \in \mathbb{R}$  con  $x = [x_1, x_2]$ .

La fuerza de contacto  $f(x_1, x_2)$  transmitida entre las masas está dada por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} k(\delta x + a + b), & \text{si } \delta x \leq a + b; \\ 0, & \text{si } a + b < \delta x < a + b + c; \\ k(\delta x + a + b + c), & \text{si } \delta x \geq a + b + c; \end{cases} \quad (2)$$

donde  $\delta x = x_1 - x_2$ ,  $k$  es la rigidez del resorte,  $a$  es la distancia entre el centro de masa de la primera masa y el efector final,  $b$  es la distancia del centro de masa de la segunda masa al borde de la misma y  $c$  es el tamaño de la holgura. Se considera que la densidad de las masas es homogénea.

La expresión (2) se puede reescribir como

$$f(x_1, x_2) = \frac{k}{2} [2(\delta x + a + b) + c + |\delta x + a + b| - |\delta x + a + b + c|], \quad (3)$$

donde las posiciones  $x_1(t) \in \mathbb{R}$  y  $x_2(t) \in \mathbb{R}$  de las masas son las únicas variables disponibles para ser medidas en el sistema. El modelo en lazo abierto (1), (3) tiene un conjunto de múltiples valores de equilibrios  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , con  $\bar{x}_1 = \zeta$ , donde  $\zeta$  es una constante cualquiera y  $\bar{x}_2 \in [\zeta + a + b, \zeta + a + b + c]$ . El comportamiento de la holgura elástica puede observarse en la Figura 2a.

Para satisfacer los requerimientos de una solución local al problema de regulación de posición  $H_\infty$ , se propone una aproximación monótona del modelo de fuerza para la holgura elástica (3), descrito por (ver Figura 2b)

$$\tilde{f}(\Delta x) = k\Delta x + k\eta(\Delta x), \quad (4)$$

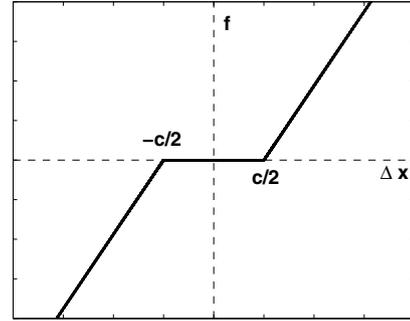
donde

$$\Delta x = \delta x + a + b + c/2 \quad (5)$$

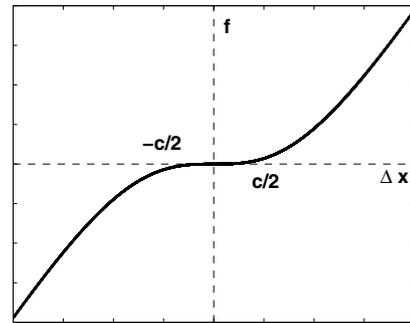
y

$$\eta = -c \frac{1 - e^{-(\Delta x/0.5c)}}{1 + e^{-(\Delta x/0.5c)}}. \quad (6)$$

Esta aproximación, inspirada en (Merzouki and M'Sirdi, 2004), asegura que el modelo es al menos una vez diferenciable, acorde con lo propuesto en (Aguilar et al., 2003; Isidori and



(a)



(b)

Figura 2: (a) Modelo de fuerza generado por la holgura elástica (b) Aproximación estrictamente monótona de la fuerza generada por la holgura elástica.

Astolfi, 1992). Las ecuaciones (4)–(6) serán consideradas en el diseño de un control  $H_\infty$  para el sistema (1), del cual se supone que la salida medible  $y(t) \in \mathbb{R}^2$  son las posiciones de las masas, es decir

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

donde las perturbaciones en la salida  $w_3(t), w_4(t) \in \mathbb{R}$  se suponen desconocidas, pero acotadas. La perturbación  $w_1(t) \in \mathbb{R}$  constituye una perturbación acoplada al sistema (véase la ecuación (1)); esto es, una perturbación que entra en las ecuaciones de estado al igual que la entrada de control (por ejemplo, una articulación completamente actuada). En contraste,  $w_2(t, x) \in \mathbb{R}$  es una perturbación no acoplada, la cual afecta la articulación no actuada. Se considera que  $w_2(t, x)$  involucra discrepancias entre el modelo de fuerza de contacto que representa a la holgura elástica (3) y su aproximación (4)–(6).

El objetivo del controlador por modos deslizantes +  $H_\infty$  es el de regular la posición de la masa  $x_2$  hacia una referencia deseada constante  $x_{2,d} \in \mathbb{R}$ , a pesar de la presencia de perturbaciones acotadas acopladas, no acopladas y discrepancias en el modelo dinámico  $w \in \mathbb{R}^4$ ; esto es,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t) - x_{2,d}\| < \epsilon$ , siendo  $\epsilon > 0$ .

El papel de la etapa de control por modos deslizantes es eliminar el efecto de  $w_1$  y el propósito de la etapa de control  $H_\infty$  es la de atenuar las perturbaciones no acopladas  $w_2, w_3$  y  $w_4$ . De hecho, es importante mencionar que un diseño inadecuado de un controlador que elimine las perturbaciones acopladas

puede amplificar las perturbaciones no acopladas, véase (Castaños and Fridman, 2006). Dado el sistema actuado de control no lineal (1), con la fuerza de contacto (4)–(6), se diseñará un control por modos deslizantes de tal forma que las coordenadas del sistema en lazo cerrado sean acotadas y la salida  $x_2$  converja asintóticamente hacia una vecindad alrededor de la posición deseada  $x_{2d}$  a través de  $x_{1d}$ , ante la presencia de perturbaciones acotadas que satisfagan

$$\sup_t |w_1(t)| \leq M, \quad M > 0. \quad (8)$$

Por otra parte, el propósito del controlador  $H_\infty$  es el de atenuar la influencia de perturbaciones externas y discrepancias en el modelo  $w_2$ , además de los errores de medición de posiciones  $w_3$  y  $w_4$ .

Consideremos el cambio de variables siguiente

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 - x_{1d}, & q_2 &= \dot{x}_1, \\ q_3 &= x_2 - x_{2d}, & q_4 &= \dot{x}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $x_{1d} = x_{2d} - (a + b + c/2)$ . Entonces la representación en variables de estado del sistema (1) queda como sigue,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{m_1} [-b_1 q_2 - f(q_1, q_3) + u + w_1] \\ \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{m_2} [-b_2 q_4 + f(q_1, q_3) + w_2], \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $f(q_1, q_3)$  está dada por (4) y  $\Delta q = q_1 + x_{1d} + a - q_3 - x_{2d} + b + c/2$ . Reemplazando  $x_{1d}$  en  $\Delta q$  se tiene que

$$\Delta q = q_1 - q_3. \quad (11)$$

### 3. Diseño del control por modos deslizantes

El objetivo de control consiste en hacer que la posición de la segunda masa,  $x_2$ , converja lo más cercano posible a la posición  $x_{2d}$ , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_3(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t) - x_{2d}\| < \epsilon. \quad (12)$$

Esto se logra por medio del diseño de un controlador por modos deslizantes con un atenuador  $H_\infty$ . Este último se incorpora dentro del diseño de la superficie deslizante. El control por modos deslizantes tiene la propiedad de eliminar las perturbaciones que afectan a la parte actuada del sistema.

#### 3.1. Control por modos deslizantes

Consideremos la siguiente superficie deslizante,

$$s = q_1 + q_2 + \int_0^t q_1(t) dt - \int_0^t u_\infty(t) dt, \quad (13)$$

donde  $u_\infty(t) \in \mathbb{R}$  es el controlador  $H_\infty$ , el cual será diseñado en la Sección 4, siguiendo el procedimiento propuesto en (Aguilar et al., 2003; Isidori and Astolfi, 1992). El significado de esta expresión para la superficie deslizante será más evidente en el desarrollo de la prueba de estabilidad. La ley de control que

asegura que las coordenadas alcancen la superficie deslizante está dada por

$$u = b_1 q_2 + f(q_1, q_3) + m_1 [-q_1 - q_2 + u_\infty - \lambda s - \beta \text{sign}(s)] \quad (14)$$

donde  $\lambda$  y  $\beta$  son ganancias constantes positivas, las cuales se sintonizarán para asegurar que el movimiento de las coordenadas se dirija hacia la superficie deslizante. La función  $\text{sign}(s)$  en la ley de control (14) denota la función signo que se define como

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ [-1, 1] & s = 0 \\ -1 & s < 0, \end{cases} \quad (15)$$

la cual estará activa en todo momento, es decir, cuando el sistema esté tanto en movimiento libre como en movimiento restringido (en contacto con la segunda masa).

Combinando la entrada de control (13)–(14) con el sistema dinámico (10) tenemos que la dinámica del sistema en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{m_1} [-b_1 q_2 - f(q_1, q_3) + u + w_1] \\ \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{m_2} [-b_2 q_4 + f(q_1, q_3) + w_2] \\ \dot{s} &= \left(1 - \frac{b_1}{m_1}\right) q_2 - \frac{f}{m_1} + \frac{u}{m_1} + \frac{w_1}{m_1} + q_1 - u_\infty, \end{aligned} \quad (16)$$

cuya representación en diagrama de bloques se puede observar en la Figura 3. Dado que se tienen disponibles únicamente las mediciones de los estados  $q_1$  y  $q_3$ , se diseñó un observador discontinuo como el propuesto en (Rosas et al., 2007) para estimar las velocidades  $q_2$  y  $q_4$ .

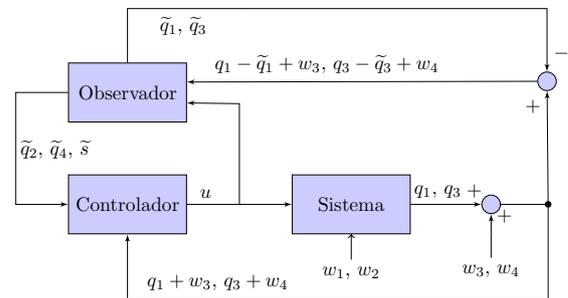


Figura 3: Diagrama a bloques del sistema en lazo cerrado.

#### 3.2. Análisis de existencia de modos deslizantes

Se analizarán primero las propiedades de estabilidad del sistema (16), retroalimentado con el controlador por modos deslizantes (14). La convergencia de las variables de salida (coordenadas  $q_1$  y  $q_3$ ) se analizará de la siguiente manera. Primeramente se demostrará que las coordenadas del sistema (10) convergen a la superficie deslizante (13) en tiempo finito. Posteriormente, una vez que las coordenadas se encuentren sobre la superficie deslizante, se probará que las coordenadas  $(q_1, q_2)$  convergen exponencialmente a  $(0, 0)$ . Finalmente, se demostrará que

las coordenadas  $(q_3, q_4)$  convergen en forma asintótica a un valor constante  $(d, 0)$ .

Consideremos el sistema (16), con el controlador (13), (14) y una perturbación acotada (8). Al sustituir (14) en (16), el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= -q_1 - q_2 - \lambda s - \beta \operatorname{sign}(s) + u_\infty + \frac{w_1}{m_1} \\ \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{m_2}(-b_2 q_4 + f(q_1, q_3) + w_2) \\ \dot{s} &= -\lambda s - \beta \operatorname{sign}(s) + \frac{w_1}{m_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

De acuerdo a (Utkin, 1978), se puede asegurar la existencia de modos deslizantes si se satisface  $s\dot{s} < 0$ . El cálculo de  $s\dot{s}$  resulta en

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s \left( -\lambda s - \beta \operatorname{sign}(s) + \frac{w_1}{m_1} \right) \\ &\leq -\lambda s^2 - \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) |s|, \end{aligned} \quad (18)$$

de donde se concluye la existencia de modos deslizantes en la superficie  $s = 0$  si  $\beta - M/m_1 > 0$ . Nótese además que, si se utiliza la función cuadrática

$$V(s) = s^2, \quad (19)$$

cuya derivada con respecto al tiempo, a lo largo de las soluciones de (17), satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\lambda s^2 - 2 \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) |s| \\ &\leq -2 \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) |s| = -2 \left( \beta - \frac{M}{m_1} \right) \sqrt{V}, \end{aligned} \quad (20)$$

se tiene que, para una condición inicial  $V(t_0) = V_0$  y, dado que  $\beta > M/m_1$ , se garantiza que existirá un tiempo  $t_f$  tal que, para todo  $t > t_f$ , la función  $V$  es cero. Este tiempo puede calcularse directamente de (20), de donde

$$V(t) = 0 \quad \text{para} \quad t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V_0}}{\beta - M/m_1} \triangleq t_f. \quad (21)$$

Así,  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito y, en consecuencia, ocurre un movimiento a lo largo del conjunto  $s = 0$  en el sistema discontinuo (17) a partir de a lo más  $t_f$  segundos.

En lo que sigue se supondrá que el sistema (17) está en modo deslizante, tal que  $s = \dot{s} = 0$  para  $t \geq t_f$ . Bajo estas condiciones, la dinámica del sistema (17) se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= -q_1 - q_2 + u_\infty \\ \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{m_2}(-b_2 q_4 + f(q_1, q_3) + w_2) \end{aligned} \quad (22)$$

Nótese aún la presencia de la perturbación  $w_2$  en el sistema.

### 3.3. Análisis de estabilidad

En esta subsección se considera que  $u_\infty = 0$  y  $w_2(t, q_1, q_3) = 0$ . Es posible mostrar que, cuando  $u_\infty = 0$ ,  $q \in \mathbb{R}^4$  converge a un punto de equilibrio  $\bar{q} = (0, 0, d, 0)$ , con  $|d| \leq c/2$ . Para ello, nótese de (22) que las variables  $q_1$  y  $q_2$  están desacopladas de  $q_3$  y  $q_4$ . Si consideramos entonces al subsistema

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= -q_1 - q_2, \end{aligned}$$

se concluye directamente que  $q_1$  y  $q_2$  convergen exponencialmente a cero.

La dinámica remanente queda entonces

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{m_2}[-b_2 q_4 + f(q_1, q_3)], \end{aligned} \quad (23)$$

donde

$$f(q_1, q_3) = \frac{k}{2} (2\Delta q + |\Delta q - c/2| - |\Delta q + c/2|), \quad (24)$$

y  $\Delta q = q_1 - q_3$ , acorde con lo mostrado en (3) y la Figura 2a. Puesto que  $q_1$  converge exponencialmente a cero, la dinámica del sistema (23) puede analizarse a partir del sistema

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= -\frac{k}{m_2} q_3 - \frac{b_2}{m_2} q_4 + \frac{k}{2m_2} (|q_3 + \frac{c}{2}| - |q_3 - \frac{c}{2}|). \end{aligned} \quad (25)$$

Considérese la función  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , no negativa y diferenciable,

$$V(q_3, q_4) = \frac{1}{2} q_4^2 + \frac{k}{2m_2} \begin{cases} q_3^2 + c q_3 + \frac{c^2}{4} & \text{si } q_3 < -\frac{c}{2} \\ 0 & \text{si } |q_3| \leq \frac{c}{2} \\ q_3^2 - c q_3 + \frac{c^2}{4} & \text{si } q_3 > \frac{c}{2} \end{cases}. \quad (26)$$

Utilizando esta función y aplicando el teorema de Lasalle (Khalil, 2002) es posible mostrar que las coordenadas  $(q_3, q_4)$  convergen a  $(\bar{q}_3, 0)$ , donde  $\bar{q}_3 \in [-c/2, c/2]$ , lo que significa que casi siempre se tendrá un error en la posición de la segunda masa.

En lo que sigue se propone disminuir este error de posición mediante la aplicación de un control  $H_\infty$  al sistema anterior. Nótese que la función no lineal  $f(q_1, q_3)$ , ecuación (24), puede expresarse de la manera siguiente,

$$f(q_1, q_3) = \tilde{f}(q_1, q_3) + \Delta f(q_1, q_3), \quad (27)$$

donde  $\tilde{f}(q_1, q_3)$  se define en la ecuación (4) y  $\Delta f$  representa el error entre  $f$  y  $\tilde{f}$ . Este último error puede incluirse en la perturbación  $w_2$ , cuyo efecto se propone sea reducido mediante un control  $H_\infty$ . Así, el problema de regulación para  $q_3$  en el sistema (22) puede expresarse formalmente como un problema de control  $H_\infty$ .

### 4. Diseño del controlador $H_\infty$

En esta sección se resolverá el problema de regulación de posición  $H_\infty$  para el sistema (22), donde

1. La salida a ser controlada está dada por

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_\infty, \quad (28)$$

donde  $\rho$  es una constante real que pondera las variables a minimizar.

2. Se tienen las mediciones de los errores de posición  $q_1$  y  $q_3$ , corrompidas por  $w_3(t), w_4(t) \in \mathbb{R}$ ,

$$y = \begin{bmatrix} q_1 + x_{d1} + w_3 \\ q_3 + x_{d2} + w_4 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

El problema de control  $H_\infty$  es expresado entonces de la siguiente manera. Dada la representación del sistema (22), (28), (29) y una constante  $\gamma > 0$ , se requiere encontrar, si existe, un controlador

$$u_\infty = K(q), \quad (30)$$

con estados  $q \in \mathbb{R}^4$ , tal que el estado  $q_3$  del sistema en lazo cerrado, sin perturbaciones, sea asintóticamente estable en forma local y su ganancia  $L_2$  sea localmente menor que  $\gamma$ .

En esta sección se presenta el diseño del controlador  $H_\infty$  para el sistema (22), modelado por las ecuaciones de la misma forma presentada en (Aguilar et al., 2003; Isidori and Astolfi, 1992),

$$\dot{q} = \Gamma(q) + g_1(q)w + g_2(q)u_\infty, \quad (31)$$

$$z = h_1(q) + k_{12}(q)u_\infty, \quad (32)$$

$$y = h_2(q) + k_{21}(q)w, \quad (33)$$

donde

$$\Gamma(q) = \begin{bmatrix} q_2 \\ -q_1 - q_2 \\ q_4 \\ \frac{1}{m_2}(-b_2q_4 + \tilde{f}(q_1, q_2)) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$h_1(q) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad h_2(q) = \begin{bmatrix} q_1 + x_{1d} \\ q_3 + x_{2d} \end{bmatrix},$$

$$k_{12}(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_{21}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Las siguientes suposiciones se deben mantener.

**(A1)**  $\Gamma(0) = 0$ ,  $h_1(0) = 0$  y  $h_2(0) = 0$ .

**(A2)** Las funciones  $\Gamma(q)$ ,  $g_1(q)$ ,  $g_2(q)$ ,  $h_1(q)$ ,  $h_2(q)$ ,  $k_{12}(q)$  y  $k_{21}(q)$  son dos veces continuamente diferenciables en  $q$  alrededor del origen  $q = 0$ .

**(A3)**

$$\begin{aligned} h_1^T(q)k_{12}(q) &= 0, & k_{12}^T(q)k_{12}(q) &= I \\ k_{21}(q)g_1^T(q) &= 0, & k_{21}(q)k_{21}^T(q) &= I. \end{aligned}$$

Estas suposiciones son hechas por razones técnicas. La suposición (A1) asegura que el origen es un punto de equilibrio del sistema dinámico (31)-(33) sin entrada de control ( $u_\infty = 0$ ) y sin perturbaciones ( $w = 0$ ). La suposición (A2) garantiza el buen planteamiento del sistema dinámico mientras se le apliquen entradas exógenas. La suposición (A3) es una simplificación heredada del problema de control estándar  $H_\infty$ .

**Definición 1.** Dado un número real  $\gamma > 0$ , se dice que el sistema (31) tiene una ganancia  $L_2$  menor que  $\gamma$  con respecto a la salida virtual (32) si la respuesta  $z$  del sistema satisface, para todo estado inicial  $x(t_0) = 0$ ,

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (36)$$

para todo  $T > 0$  y todas las funciones continuas  $w(t) \in \mathbb{R}^4$ .

Obsérvese que el término no lineal  $f$  se aproxima por la función diferenciable  $\tilde{f}$  (ecuación (4)). Se propone diseñar el controlador  $H_\infty$  para la aproximación lineal del sistema (34)-(35). El motivo de utilizar la aproximación lineal es debido a que se requiere que el sistema sea por lo menos dos veces continuamente diferenciable para poder obtener una solución local del problema de control  $H_\infty$ :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= Aq + B_1w + B_2u_\infty \\ z &= C_1q + D_{12}u_\infty \\ y &= C_2q + D_{21}w \end{aligned} \quad (37)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial \Gamma}{\partial q}(0), & B_1 &= g_1(0), & B_2 &= g_2(0), \\ C_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial q}(0), & D_{12} &= k_{12}(0), & C_2 &= \frac{\partial h_2}{\partial q}(0), \\ D_{21} &= k_{21}(0). \end{aligned} \quad (38)$$

De manera explícita

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b_2/m_2 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= g_1, & B_2 &= g_2, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_{12} &= k_{12} & D_{21} &= k_{21}. \end{aligned} \quad (40)$$

La siguiente condición, es suficiente y necesaria para que exista solución del problema de control lineal  $H_\infty$  (Doyle et al., 1989):

**H)** La ecuación algebraica de Riccati

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + P \left( \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P = 0 \quad (41)$$

posee una solución simétrica positiva semidefinida  $P$  tal que los valores propios de la matriz  $A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P$  tengan parte real negativa.

De acuerdo al lema real acotado (Anderson and Vreugdenhil, 1973), se puede establecer que la ecuación (41) permite asegurar que existe una constante positiva  $\varepsilon_0$  tal que la ecuación algebraica perturbada de Riccati

$$P_\varepsilon A + A^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon \left( \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P_\varepsilon + \varepsilon I = 0 \quad (42)$$

tiene una solución simétrica definida positiva  $P_\varepsilon$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .

El siguiente resultado es una consecuencia directa de (Acho et al., 2001).

**Teorema 1.** *Supóngase que la condición  $H$  se satisface para el sistema (37)–(40) y sea  $P_\varepsilon$  una solución simétrica definida positiva de (42) para alguna  $\varepsilon > 0$ . Entonces la entrada de control*

$$u_\infty = -g_2^T P_\varepsilon q, \quad (43)$$

donde  $g_2$  está definido en (31), (34),  $P_\varepsilon = P_\varepsilon^T > 0$  es la solución de la ecuación algebraica perturbada de Riccati (42) y  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ , es una solución local al problema de control  $H_\infty$  del sistema (37)–(40).

Así, el control retroalimentado de salida (18), especificado acorde con (34)–(35), resuelve de manera local el problema de regulación de posición  $H_\infty$  para el sistema (22) y (28)–(36). Vale la pena mencionar que los estados que no están disponibles para utilizarse en (13) y (14) como retroalimentación son tomados del observador por modos deslizantes basado en (Rosas et al., 2007).

## 5. Resultados Experimentales

El desempeño y propiedades de robustez del controlador propuesto (14), utilizando el atenuador de perturbaciones  $u_\infty$  definido por (43), fue aplicado a la plataforma ECP-210, de la compañía Educational Control Products. Dicha plataforma fue modificada para tener una holgura elástica, tal como se puede ver en la Figura 4.

Se utilizó un ordenador AMD® Dual-Core 4800 y como interfaz el software Simulink®, la tasa de muestreo para la adquisición de datos se ajustó en 0.001 s. La plataforma está configurada para tener el comportamiento dinámico del sistema mecánico mostrado en la Figura 1. En particular, la característica no lineal de la holgura elástica (Figura 2), es tomada en cuenta y reproducida al añadir una modificación mecánica al sistema; ver Figura 4. La modificación del sistema consiste en un tornillo espárrago con doble rosca, el cual une un resorte con la primera masa, dejando una holgura entre el resorte y la segunda masa. De esta manera pueden ocurrir rebotes elásticos entre la primera y la segunda masa.

El controlador y el observador fueron sintonizados con los siguientes parámetros: posición deseada de la segunda masa,  $x_{2d} = 0.221\text{m}$ ; coeficientes de fricción viscosa,  $b_1 = 7.695\text{kg/s}$ ,  $b_2 = 2.1141\text{kg/s}$ ; valores de las masas,  $m_1 = 1.1\text{kg}$ ,  $m_2 = 0.5\text{kg}$ ; valores de las distancias  $a = 0.15\text{m}$ ,  $b = 0.051\text{m}$ ,  $c = 0.01\text{m}$ ; rigidez del resorte,  $k = 375.42\text{N/m}$ . Las ganancias de retroalimentación del control fueron  $\lambda = 0.5\text{N/m}$  y  $\beta = 0.5\text{N}$ . Los



Figura 4: Plataforma experimental ECP-210 modificada para tener una holgura elástica

parámetros del controlador  $H_\infty$  fueron  $\gamma = 1$ ,  $\rho = 1$  y  $\varepsilon = 500$ . La correspondiente solución definida positiva de la ecuación de Riccati (42) está dada por

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} 520.9452 & 21.3830 & 0.0000 & 0.0000 \\ 21.3830 & 22.3188 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 575.4845 & 44.7661 \\ 0.0000 & 0.0000 & 44.7661 & 34.5087 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que los parámetros de ganancia del controlador (14) fueron sintonizados en función de características tales como velocidad de respuesta, robustez y amplitud de la señal de control observados primeramente a través de simulaciones numéricas y ajustados finalmente en los experimentos a prueba y error; por lo tanto, es posible que otros valores en los parámetros del controlador nos arrojen mejores resultados. Las perturbaciones  $w_2$ ,  $w_3$  y  $w_4$  se consideran inherentes a la planta. La perturbación  $w_2 = \Delta f(q_1, q_2)$ , (ver ecuación (27)) se considera intrínseca a la planta debido a la implementación de la aproximación monótona que representa a la holgura elástica, las perturbaciones  $w_3$  y  $w_4$  se consideran como discrepancias en la medición de salida de los codificadores rotatorios de  $q_1$  y  $q_3$ .

En el caso perturbado, se aplicó adicionalmente un par acotado de perturbación dado por

$$w_1 = 0.2 \sin(t). \quad (44)$$

Los valores para las condiciones iniciales fueron establecidos en  $q_1(0) = -0.02\text{ m}$ ,  $q_2(0) = 0\text{ m/s}$ ,  $q_3(0) = -0.01\text{ m}$ ,  $q_4(0) = 0\text{ m/s}$  y  $s(0) = 0$ . Las condiciones iniciales para el observador se

fijaron en  $[0, -0.02, 0, -0.01, 0]$ . Se verifica experimentalmente un buen desempeño y robustez del sistema de la Figura 4, utilizando el control por modos deslizantes con un atenuador  $H_\infty$  (14), (43) y el observador basado en (Rosas et al., 2007).

Las Figuras 5 y 8 muestran los errores de las posiciones de ambas masas, para el caso sin perturbación externa y con perturbación externa, respectivamente. En el primer caso (Figura 5) puede observarse un error de posición prácticamente nulo. La perturbación aplicada para el segundo caso fue una señal periódica, de amplitud 0.2 y frecuencia de 1 rad/seg, de la forma  $w_1 = 0.2 \sin(t)$ . Esta perturbación se agregó al sistema mecánico montándose a través de la acción de control, que actúa sobre la primera masa. En la Figura 8 puede observarse un error en estado estacionario, de forma periódica, de la misma frecuencia que la de la perturbación aplicada y una amplitud de aproximadamente  $5 \times 10^{-4}$ . Esto corresponde a una atenuación de la amplitud de la perturbación de aproximadamente 1/400.

En las Figuras 6 y 9 se puede observar el comportamiento de las señales de control  $H_\infty$  y la señal de control por modos deslizantes +  $H_\infty$ , donde se puede observar el fenómeno de oscilaciones de alta frecuencia también llamado *chattering*, cuya amplitud se puede disminuir al modificar la ganancia de control  $\beta$ . En las Figuras 7 y 10 podemos observar la fuerza de contacto entre las dos masas, observándose rebotes en los primeros 2.5 segundos. Por otro lado en las mismas Figuras 7, 10 se muestra la variable deslizante  $s$ , la cual converge hacia la superficie deslizante en tiempo finito.

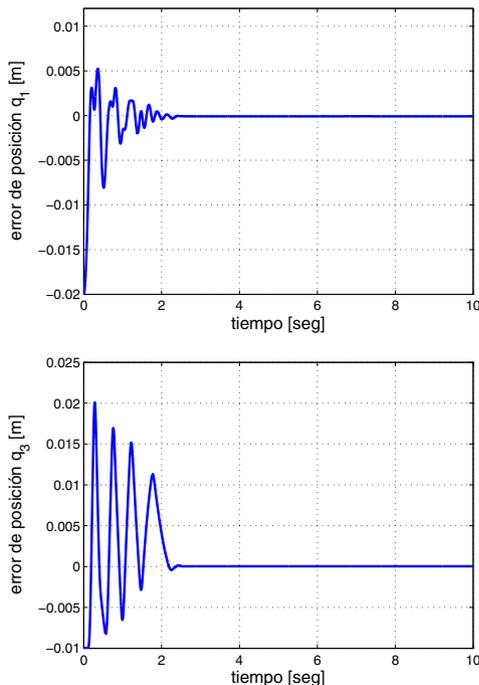


Figura 5: Errores de posición de la primera masa  $q_1$  y de la segunda masa  $q_3$  (caso sin perturbación externa).

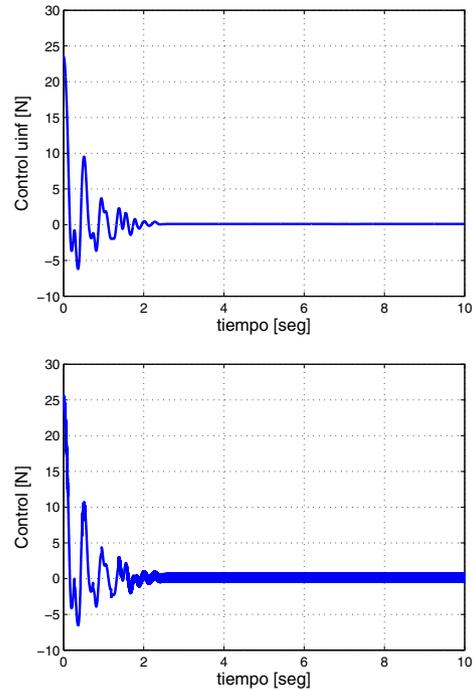


Figura 6: Señal de control  $H_\infty$  y señal de control por modos deslizantes +  $H_\infty$  (caso sin perturbación externa).

## 6. Conclusiones

Se presenta un marco práctico para el desarrollo e implementación de un controlador por modos deslizantes, el cual involucra la metodología de control  $H_\infty$  en su diseño. Se muestra que el procedimiento de diseño del controlador pudiese resultar adecuado para resolver el problema de regulación de posición para un sistema mecánico con fricción y una holgura elástica. El error se ve disminuido debido al efecto del control  $H_\infty$ . En el sistema mecánico se utiliza una aproximación estrictamente monótona de una zona muerta para adecuar el sistema a los requerimientos de la metodología de diseño de control  $H_\infty$ . La síntesis de salida propuesta para el controlador por modos deslizantes- $H_\infty$  es adecuada para resolver el problema de regulación de la masa  $m_1$ , cuando se cumple la desigualdad  $\beta - M/m_1 > 0$ , incluso ante la presencia de perturbaciones  $\sup_t |w_1(t)| \leq M$ . Si la desigualdad no se satisface entonces el controlador atenuará las perturbaciones y las discrepancias de la zona muerta, siendo suficiente con incrementar la ganancia del parámetro  $\beta$  con el fin de satisfacer  $\beta - M/m_1 > 0$ . El error  $q_1$  correspondiente a la masa  $m_1$  en estado estacionario es cero, sin embargo el error  $q_3$  para la masa  $m_2$  está dentro del conjunto  $[-c/2, c/2]$ , donde este error se ve corregido mediante el control  $H_\infty$ . La aportación de este trabajo es el diseño de control para regulación de posición utilizando modos deslizantes- $H_\infty$  en un sistema subactuado con una no linealidad tipo zona muerta afectado por perturbaciones acopladas y desacopladas. La efectividad del procedimiento ha sido apoyada por exper-

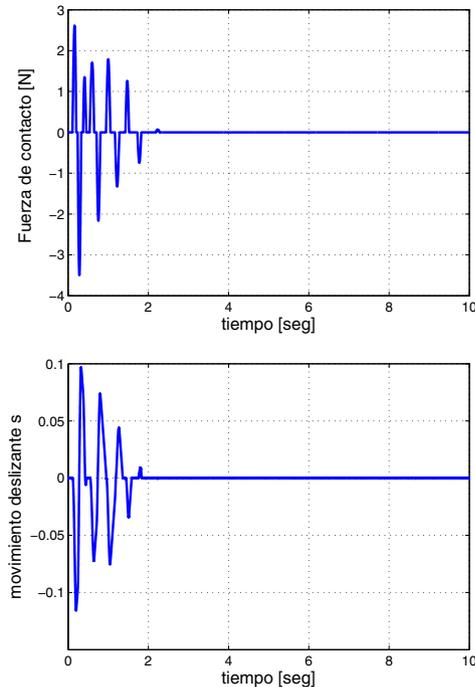


Figura 7: Fuerza de contacto entre las masas, ocasionada por la holgura elástica y movimiento deslizando  $s$ , donde se aprecia que la variable  $s$  converge a cero en tiempo finito (caso sin perturbación externa).

imentos en la plataforma ECP-210 modificada para tener una holgura elástica.

### English Summary

### Robust Position Control for a Mechanical System with Friction and an Elastic Backlash

### Abstract

It is presented a control strategy that combines the techniques of sliding mode control and nonlinear  $H_\infty$  control to solve the position control problem of an underactuated mechanical system with friction and an elastic backlash. It is shown that the controlled system has a set of equilibrium points, and all the closed-loop trajectories converge asymptotically to that set, achieving a minimally bounded steady state position error, in spite of the presence of certain types of disturbances. Moreover, the controller attenuates the effect of external disturbances and uncertainties in the modeling of the plant. The controller has been implemented in an experimental platform that verifies the theoretical results.

### Keywords:

Underactuated mechanical systems, robust control, sliding mode control,  $H_\infty$  control.

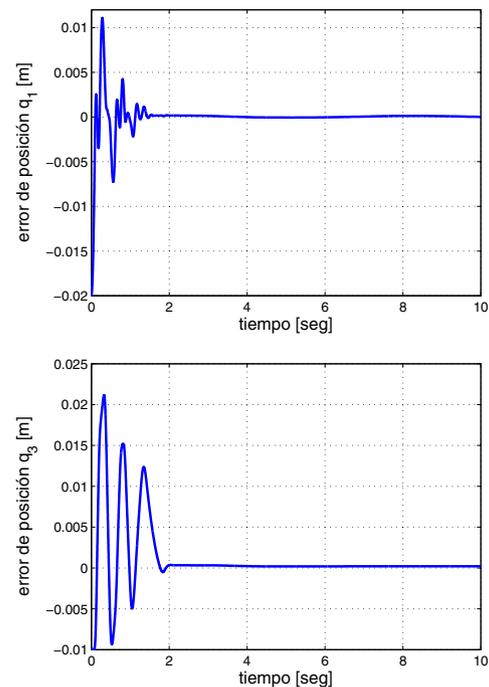


Figura 8: Errores de posición de la primera masa  $q_1$  y de la segunda masa  $q_2$  (caso con perturbación externa).

### Referencias

- Acho, L., Orlov, Y., Solis, V., 2001. Nonlinear measurement feedback  $H_\infty$  control of time-periodic systems with application to tracking control of robot manipulators. *International Journal of Control* 74, 190–198.
- Adetola, V., DeHaan, D., Guay, M., 2009. Adaptive model predictive control for constrained nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 58 (5), 320–326.
- Aguilar, L., Orlov, Y., Acho, L., 2003. Nonlinear  $H_\infty$  control of nonsmooth time varying systems with application to friction mechanical manipulators. *Automatica* 39, 1531–1542.
- Anderson, B., Vreugdenhil, R., 1973. *Network analysis and synthesis*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ.
- Branicky, M., 1998. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43, 475–482.
- Brogliato, B., 1999. *Nonsmooth Mechanics*. Springer, London.
- Brogliato, B., Niculescu, S.-I., Orhant, P., 1997. On the control of finite-dimensional mechanical systems with unilateral constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (2), 200–215.
- Castaños, F., Fridman, L., 2006. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51 (5), 853–858.
- Castaños, F., Fridman, L., 2011. Dynamic switching surfaces for output sliding mode control: An approach. *Automatica* 47 (9), 1957–1961.
- Chang, Y.-C., Lee, C.-H., 1999. Robust tracking control for constrained robots actuated by dc motors without velocity measurements. *IEE Proc. Control Theory and Applications* 146 (2), 147–156.
- Chiu, C.-S., Lian, K.-Y., Wu, T.-C., 2004. Robust adaptive motion/force tracking control design for uncertain constrained robot manipulators. *Automatica* 40 (12), 2111–2119.
- Christophersen, F. J., 2007. *Optimal control of constrained piecewise affine systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., Francis, B., 1989. *State space solutions*

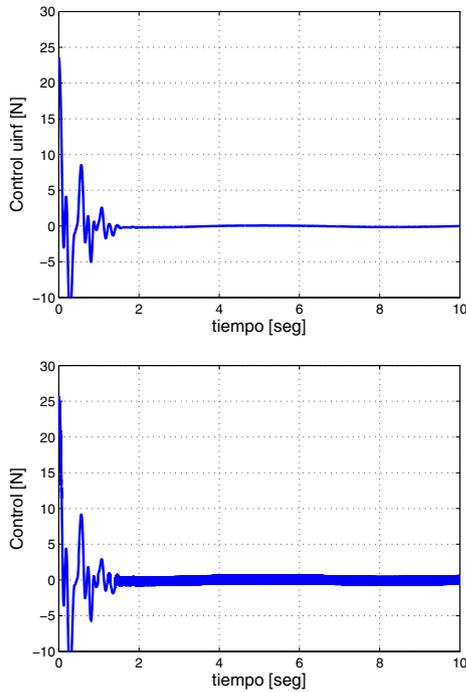


Figura 9: Señal de control  $H_\infty$  y señal de control por modos deslizantes +  $H_\infty$ , puede verse el efecto del *chattering* ocasionado por la parte discontinua del controlador (caso con perturbación externa).

inclusion with application to the variable structure control of robot manipu-

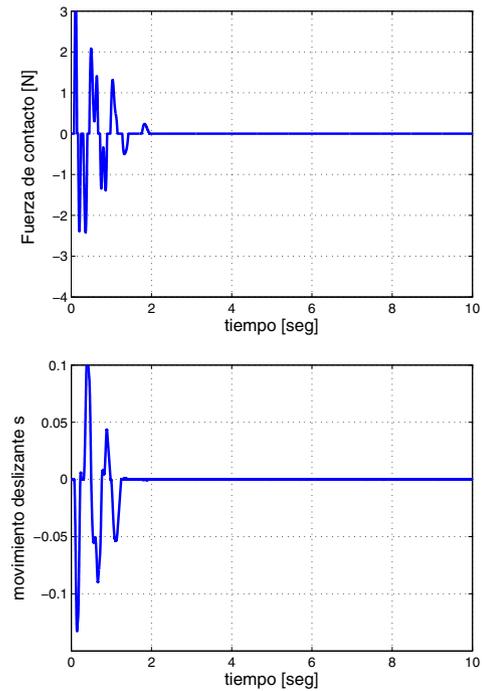


Figura 10: Fuerza de contacto entre las masas, ocasionada por la holgura elástica y movimiento deslizante  $s$ , donde se aprecia que la variable  $s$  converge a cero en tiempo finito (caso con perturbación externa).

to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. IEEE Transactions on Automatic Control 34, 831–846.

- Ghafari-Kashani, A., Faiz, J., Yazdanpanah, M., 2010. Integration of non-linear  $\mathcal{H}_\infty$  and sliding mode control techniques for motion control of a permanent magnet synchronous motor. IET Electric Power Applications 4 (4), 267–280.
- Isidori, A., 2000. A tool for semiglobal stabilization of uncertain non minimum-phase nonlinear systems via output feedback. IEEE Transactions on Automatic Control 48 (10), 1817–1827.
- Isidori, A., Astolfi, A., 1992. Disturbance attenuation and  $\mathcal{H}_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control 37 (9), 1283–1293.
- Kazerooni, H., 1990. Contact instability of the direct drive robot when constrained by a rigid environment. IEEE Transactions on Automatic Control 35, 710–714.
- Khalil, H., 2002. Nonlinear Systems. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Leine, R. I., Van de Wouw, N., 2010. Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints. Springer, Berlin.
- Lian, J., Zhao, J., 2010. Robust H-infinity integral sliding mode control for a class of uncertain switched nonlinear systems. Journal of Control Theory and Applications 8 (4), 521–526.
- Lian, K.-Y., Lin, C.-R., 1998. Sliding-mode motion/force control of constrained robots. IEEE Transactions on Automatic Control 43 (8), 1101–1103.
- Mansard, N., Khatib, O., 2008. Continuous control law from unilateral constraint. IEEE International Conference on Robotics and Automation. ICRA 2008, 3359–3364.
- Menini, L., Tornambe, A., 2001. Dynamic position feedback stabilisation of multidegrees-of-freedom linear mechanical systems subject to nonsmooth impacts. IEE Proceedings - Control Theory and Applications 148 (6), 488–496.
- Merzouki, R., M'Sirdi, N., 2004. Compensation of friction and backlash effects in an electrical actuator. J. Systems and Control Engineering 218, 75–84.
- Paden, B., Sastry, S., 1987. A calculus for computing Filippov's differential

lators. IEEE Transactions on Circuits and Systems 34, 73–81.

- Perez, M., Jimenez, E., Camacho, E., april 2010. Design of an explicit constrained predictive sliding mode controller. Control Theory & Applications, IET 4 (4), 552–562.
- Potini, A., Tornambe, A., Menini, L., Abdallah, C., Dorato, P., 2006. Finite-time control of linear mechanical systems subject to non-smooth impacts. In: 14th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2006.MED'06. pp. 1–5.
- Rascón, R., Alvarez, J., Aguilar, L., 2010. Feedback stabilization and force control using sliding modes in a mechanical system subject to unilateral constraints. In: 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). pp. 341–345.
- Rascón, R., Alvarez, J., Aguilar, L., 2012a. Regulation and force control using sliding modes to reduce rebounds in a mechanical system subject to a unilateral constraint. Control Theory & Applications, IET 6 (18), 2785–2792.
- Rascón, R., Alvarez, J., Aguilar, L., 2012b. Sliding mode control with  $\mathcal{H}_\infty$ ; attenuator for unmatched disturbances in a mechanical system with friction and a force constraint. In: 12th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). pp. 434–439.
- Rosas, D., Alvarez, J., Fridman, L., 2007. Robust observation and identification of ndof lagrangian systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control 17, 842–861.
- Sabanovic, A., Elitas, M., Ohnishi, K., 2008. Sliding modes in constrained systems control. IEEE Transactions on Industrial Electronics 55, 3332–3339.
- Shevitz, D., Paden, B., 1994. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. IEEE Transactions on Automatic Control 39 (9), 1910–1914.
- Tseng, C.-S., 2005. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  adaptive tracking control design for uncertain constrained robots. Asian Journal of Control 7 (3), 296–309.
- Utkin, V., 1978. Sliding Modes and Their Applications. Mir, Moscow.
- Utkin, V., 1992. Sliding modes in control optimization. Springer, Berlin.