



## Estimación simultánea de estado y parámetros para un sistema no lineal variante en el tiempo

Rodrigo A. Viveros\*, Juan I. Yuz, Ricardo R. Perez-Ibacache

*Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile.*

### Resumen

En el presente artículo se considera el problema de estimación de estado y parámetros variantes en el tiempo de un sistema no-lineal. Nuestro objetivo es comparar métodos usuales de estimación no lineal como el Filtro de Kalman Extendido y Filtro de Kalman Unscented con métodos desarrollados recientemente como el Filtro de Partículas. En particular, se muestra el uso de estas técnicas de estimación para un sistema no-lineal de cuatro depósitos acoplados, el cual posee bombas que presentan variabilidad debido a la temperatura y válvulas que pueden ser modificadas manualmente. Esta característica adicional dificulta la estimación de un modelo lineal invariante en el tiempo a partir de datos fuera de línea. Por ende, se considera el sistema como variante en el tiempo y se estima en línea simultáneamente el estado y algunos parámetros del modelo a partir de datos experimentales. Adicionalmente se muestra la aplicación del algoritmo Esperanza-Maximización Extendido para estimar las matrices de covarianza de los modelos de ruido necesarios para el filtraje no lineal. Los resultados obtenidos ilustran la aplicación de técnicas avanzadas de estimación de estado y parámetros a una planta de laboratorio. *Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.*

### Palabras Clave:

Estimación de Parámetros, Estimación de Estado, Filtro de Kalman Extendido, Filtro de Partículas, Filtro de Kalman Unscented

### 1. Introducción

Diversas aplicaciones industriales requieren estimaciones de variables no medidas del sistema a partir de las señales medidas y conocimiento *a priori* del fenómeno modelado. Una estrategia usual es el uso de modelos Bayesianos (Simon, 2006). Si el modelo es lineal y Gaussiano, es posible encontrar analíticamente, y de manera óptima, las ecuaciones que calculan la función de densidad de probabilidad (PDF) del estado dadas las mediciones disponibles, a través del Filtro de Kalman (KF). Sin embargo, cuando el modelo es no-lineal o el ruido no es Gaussiano, no es posible, en general, obtener el estimador óptimo explícitamente. En este caso para estimar estas PDFs, pueden usarse métodos tales como el Filtro de Kalman Extendido (EKF) y Filtro de Kalman Unscented (UKF), que en la literatura han demostrado tener un buen rendimiento ante sistemas con bajo grado de no-linealidad y procesos estocásticos no-Gaussianos. En las últimas décadas, el gran aumento de la capacidad computacional ha permitido el desarrollo práctico de

métodos basados en simulación numérica de los procesos aleatorios, tales como el Filtro de Partículas (PF). Éste busca aproximar la PDF del estado de un sistema no lineal a partir de las mediciones disponibles. Los estimadores no lineales usuales en cambio buscan propagar solo la media y la covarianza, en el caso del EKF, o incluso alguno de los primeros momentos de orden superior, como el UKF.

En el presente artículo nos interesa estudiar la factibilidad de aplicar este Filtro de Partículas a un proceso real de laboratorio y comparar su desempeño con los filtros EKF y UKF. Se considera un sistema no-lineal de cuatro depósitos acoplados, el cual posee bombas que presentan variabilidad debido a la temperatura. Esta planta ha sido de interés en la literatura (Johansson, 2000; Guzman et al., 2010) ya que, por ejemplo, el modelo linealizado en torno a un punto de operación puede ser configurado de manera tal que posea un cero distribuido de fase no mínima. El punto de operación depende de parámetros del sistema que, en este artículo, se han agregado al vector de estados, con el objetivo de poder estimarlos a través de métodos de estimación Bayesiana. Cabe mencionar que estos parámetros varían en el tiempo y corresponden a las constantes de proporcionalidad de las bombas que relacionan el voltaje de entrada con el flujo de agua.

\*Autor en correspondencia.

*Correos electrónicos:* [rodrigo.viverosa@alumnos.usm.cl](mailto:rodrigo.viverosa@alumnos.usm.cl) (Rodrigo A. Viveros), [juan.yuz@usm.cl](mailto:juan.yuz@usm.cl) (Juan I. Yuz), [ricardo.perez@alumnos.usm.cl](mailto:ricardo.perez@alumnos.usm.cl) (Ricardo R. Perez-Ibacache)

Al incluir parámetros como estados adicionales, el modelo ampliado será, en general, no lineal, y puede tener problemas de observabilidad. Por esta razón, para el sistema de cuatro depósitos acoplados se analiza la observabilidad del modelo de estado ampliado. Este análisis, pone en evidencia la necesidad de incluir sensores adicionales en los depósitos superiores que, generalmente, no se consideran en la literatura para esta planta (Johansson, 2000).

El principal interés en este trabajo es usar esta planta para ilustrar cómo los parámetros y estados de un sistema pueden ser estimados haciendo uso de métodos de estimación Bayesiana tales como el Filtro de Partículas y compararlo con técnicas tradicionales tales como el EKF y el UKF (Ristic et al., 2004; Simon, 2006; Doucet et al., 2001; Anderson y Moore, 1979).

Un aspecto de particular interés que se considera en este artículo es la estimación de las matrices de covarianza de ruido de proceso y de medición en el modelo del sistema no lineal. Estas matrices deben ser proporcionadas a los algoritmos de filtraje, tanto para el caso lineal (como el filtro de Kalman usual) como para el caso no lineal (como el EKF, UKF, y PF, aquí considerados). Para la estimación de estas matrices se aplica el algoritmo *Esperanza-Maximización Extendido* (EEM) (Bavdekar et al., 2011). Este es un algoritmo iterativo que permite obtener el estimador de máxima verosimilitud de las matrices de ruido, a partir de datos fuera de línea.

Adicionalmente, interesa comparar los filtros considerados para diferentes supuestos sobre el modelo del sistema. En particular, se considera medición en 2 o en los 4 depósitos y se consideran diferentes matrices de covarianza de ruido. Adicionalmente se estudia el impacto de modificar la etapa de remuestreo del PF.

La estructura del presente artículo es la siguiente: en la Sección 2 se muestra la estructura de modelo no lineal a considerar, para luego formular el problema de estimación Bayesiana. Aquí se dan a conocer explícitamente las ecuaciones para implementar el EKF, UKF y PF. Luego, en la Sección 3 se presenta el problema de identificación para las matrices de covarianza y su respectiva solución usando el algoritmo EEM. En la Sección 4 se presenta el modelado físico del sistema de cuatro depósitos acoplados, y su modelo ampliado que incorpora los parámetros como estados a estimar. Posteriormente, se analiza la observabilidad local del sistema ampliado, donde se justifica la necesidad de incluir sensores adicionales a la planta. En la Sección 5 son presentadas las matrices de covarianza estimadas y la comparación entre los resultados experimentales obtenidos al aplicar el EKF, UKF y PF. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones que han resultado de este trabajo.

## 2. Estimación Bayesiana

Se considera el siguiente modelo no lineal:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k) \quad (1a)$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (1b)$$

donde  $f_k$  es la función de transición, y  $h_k$  es la función de observabilidad del modelo, ambas no lineales. Las secuencias  $w_k$  y

$v_k$  son ruido blanco independientes con PDFs conocidas. El estado del sistema es  $x_k$ . Las mediciones del sistema se obtienen mediante  $y_k$ , mientras que  $u_k$  representa la entrada del sistema. Además, se supone conocida la PDF inicial del vector de estado, denotada por  $p(x_0)$ .

El estimador Bayesiano busca obtener la PDF de  $x_k$  condicionada a las mediciones  $Y_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ , denotada por  $p(x_k|Y_k)$ . Esta se obtiene de forma recursiva a partir de  $p(x_k|Y_{k-1})$  que es la PDF *a priori* de  $x_k$  dada todas las mediciones hasta el instante  $k-1$  (Simon, 2006; Doucet et al., 2001). De esta forma se obtiene:

$$p(x_k|Y_{k-1}) = \int p(\{x_k, x_{k-1}\}|Y_{k-1})dx_{k-1} \quad (2a)$$

$$= \int p(x_k|\{x_{k-1}, Y_{k-1}\})p(x_{k-1}|Y_{k-1})dx_{k-1} \quad (2b)$$

$$= \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|Y_{k-1})dx_{k-1} \quad (2c)$$

Se puede notar que  $p(x_k|x_{k-1}, Y_{k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$  describe un proceso de Markov de primer orden (Arulampalam et al., 2002; Jazwinski, 1970), debido a que el estado  $x_k$  está totalmente determinado por  $x_{k-1}$  y  $w_{k-1}$ , el cual es independiente de  $x_{k-2}, \dots, x_0$ . Es posible notar además que, la PDF  $p(x_k|x_{k-1})$  es conocida, ya que en (1a) se conoce  $f_k$  y la PDF de  $w_k$ .

Además,  $p(x_k|Y_k)$  se puede calcular como:

$$p(x_k|Y_k) = \frac{p(x_k, Y_k)}{p(Y_k)} \quad (3a)$$

$$= \frac{p(Y_{k-1}|\{x_k, y_k\})p(y_k|x_k)p(x_k|Y_{k-1})}{p(y_k|Y_{k-1})p(Y_{k-1}|x_k)} \quad (3b)$$

$$= \frac{p(x_k|Y_{k-1})p(y_k|x_k)}{p(y_k|Y_{k-1})} \quad (3c)$$

ya que  $p(Y_{k-1}|\{x_k, y_k\}) = p(Y_{k-1}|x_k)$ . Por otra parte, la PDF  $p(y_k|x_k)$  es conocida del modelo, y la PDF  $p(y_k|Y_{k-1})$  se puede obtener de manera similar a (2), es decir:

$$p(y_k|Y_{k-1}) = \int p(\{y_k, x_k\}|Y_{k-1})dx_k \quad (4a)$$

$$= \int p(y_k|\{x_k, Y_{k-1}\})p(x_k|Y_{k-1})dx_k \quad (4b)$$

$$= \int p(y_k|x_k)p(x_k|Y_{k-1})dx_k \quad (4c)$$

ya que  $p(y_k|\{x_k, Y_{k-1}\}) = p(y_k|x_{k-1})$  debido a que la medición  $y_k$  no depende de  $y_{k-1}$ .

Finalmente, el estimador Bayesiano es el siguiente:

$$p(x_k|Y_k) = \frac{p(x_k|Y_{k-1})p(y_k|x_k)}{\int p(y_k|x_k)p(x_k|Y_{k-1})dx_k} \quad (5)$$

El estimador definido por las ecuaciones (2) y (5) se puede obtener explícitamente solo en casos específicos. Por ejemplo, cuando el sistema (1a) es lineal y los ruidos son Gaussianos, obteniendo el filtro de Kalman. En el caso general, las integrales involucradas deben ser aproximadas, por ejemplo, mediante simulación numérica tal como lo hace el filtro de Partículas que se presenta en la Sección 2.3.

### 2.1. Filtro de Kalman Extendido

Si  $f_k(\cdot)$  y  $h_k(\cdot)$  en (1) son lineales, tenemos la siguiente estructura para el modelo de estado:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \quad (6a)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (6b)$$

Adicionalmente, si los ruidos  $w_k, v_k$  son secuencias de distribución Gaussianas, el estimador Bayesiano (5) óptimo está dado por el Filtro de Kalman (Kalman, 1960; Anderson y Moore, 1979) que permite calcular iterativamente la media y covarianza de la estimación del estado *a priori*  $\hat{x}_{k|k-1}$  (antes de disponer de la medición  $y_k$ ) y *a posteriori*  $\hat{x}_{k|k}$  (cuando se dispone de la medición  $y_k$ )

$$K_k = \hat{P}_{k|k-1} C_k^T \Omega_k^{-1} \quad (7a)$$

$$\Omega_k = C_k \hat{P}_{k|k-1} C_k^T + R_k \quad (7b)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k [y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}] \quad (7c)$$

$$\hat{P}_{k|k} = \hat{P}_{k|k-1} - K_k C_k \hat{P}_{k|k-1} \quad (7d)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k \quad (7e)$$

$$\hat{P}_{k+1|k} = A_k \hat{P}_{k|k} A_k^T + Q_k \quad (7f)$$

donde las matrices de estado del sistema corresponden a  $A_k, B_k, C_k, w_k$  y  $v_k$  son secuencias de ruido blanco mutuamente independientes de tipo Gaussiano, de media cero y covarianzas  $Q_k$  y  $R_k$  respectivamente, es decir  $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ ,  $v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ ;  $\hat{P}_{k|k}$  y  $\hat{P}_{k|k-1}$  son las matrices de covarianza asociadas a  $\hat{x}_{k|k}$  y  $\hat{x}_{k|k-1}$ ,  $K_k$  se denomina la ganancia de Kalman. Las condiciones iniciales están dadas por  $\hat{x}_{0|-1} = x_0$ ,  $\hat{P}_{0|-1} = P_0$ .

El Filtro de Kalman se puede extender para el caso no lineal, dando lugar al Filtro de Kalman Extendido (Anderson y Moore, 1979; Ristic et al., 2004). Este filtro es una aproximación del estimador Bayesiano y se basa en linealizar las funciones del modelo (1) a través de una expansión en series de Taylor de primer orden en torno al estado estimado en cada paso. Las ecuaciones recursivas del Filtro de Kalman Extendido son:

$$L_k = \hat{P}_{k|k-1} H_k^T \Omega_k^{-1} \quad (8a)$$

$$\Omega_k = H_k \hat{P}_{k|k-1} H_k^T + N_k R_k N_k^T \quad (8b)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L_k [y_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1}, 0)] \quad (8c)$$

$$\hat{P}_{k|k} = \hat{P}_{k|k-1} - L_k H_k \hat{P}_{k|k-1} \quad (8d)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = f_k(\hat{x}_{k|k}, u_k, 0) \quad (8e)$$

$$\hat{P}_{k+1|k} = F_k \hat{P}_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (8f)$$

donde

$$F_k = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right|_{(x_k, u_k) = (\hat{x}_{k|k}, u_k)} \quad G_k = \left. \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \right|_{(x_k, u_k) = (\hat{x}_{k|k}, u_k)} \quad (8g)$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \right|_{x = \hat{x}_{k|k-1}} \quad N_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial v_k} \right|_{x = \hat{x}_{k|k-1}} \quad (8h)$$

son las linealizaciones locales de las funciones no lineales  $f_k$  y  $h_k$ . Estos jacobianos requieren ser calculados analíticamente. Si las funciones  $f_k$  y  $h_k$  son discontinuas, este filtro no puede ser aplicado (Ristic et al., 2004; Anderson y Moore, 1979). Es

importante notar que dado que el EKF se basa en una aproximación del problema de estimación no lineal y no Gaussiano. Con el EKF definido en (8) es posible propagar la media y covarianza del estado estimado. Sin embargo, no puede garantizarse optimalidad y convergencia como en el caso del Filtro de Kalman para el caso lineal.

### 2.2. Filtro de Kalman Unscented

El Filtro de Kalman Unscented (UKF) ha sido propuesto en la literatura como una forma de reducir los errores introducidos por la linealización que realiza el EKF (Simon, 2006). A diferencia del EKF, el UKF no aproxima las funciones no lineales  $f_k$  y  $h_k$ , sino que aproxima la densidad de probabilidad  $p(x_k|Y_k)$  por una PDF Gaussiana. Esta PDF se representa determinísticamente por muestras (conocidos en la literatura como ' $\sigma$ -points') elegidas apropiadamente (Julier y Uhlmann, 1997; Julier et al., 2000), que capturan la media y covarianza de la PDF Gaussiana (o incluso momentos de orden superior). Luego, los  $\sigma$ -points son propagados a través de las funciones no lineales  $f_k$  y  $h_k$ . Si en el modelo (1a) el ruido es aditivo, entonces el UKF que estima el estado  $x_k$  se puede implementar inicializando el UKF con  $\hat{x}_{0|-1} = x_0$  y  $\hat{P}_{0|-1} = P_0$ . Luego, en cada instante  $k$  se eligen  $2n$  muestras ( $\sigma$ -points)  $\hat{x}_{k-1|k-1}^{(i)}$  que son usadas para propagar el estado estimado a través de la función no lineal  $f_k$ , donde  $n$  es la dimensión del estado del sistema. Es decir:

$$\hat{x}_{k-1|k-1}^{(i)} = \hat{x}_{k-1|k-1} + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, \dots, 2n \quad (9)$$

$$\tilde{x}^{(i)} = \left( \sqrt{n \hat{P}_{k-1|k-1}} \right)_i^T \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = - \left( \sqrt{n \hat{P}_{k-1|k-1}} \right)_i^T \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

$$\hat{x}_{k|k-1}^{(i)} = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1|k-1}^{(i)}, u_{k-1}) \quad (12)$$

De esta forma, se obtiene una estimación *a priori* del estado estimado en cada instante  $k$  mediante:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{x}_{k|k-1}^{(i)} \quad (13)$$

$$\hat{P}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{x}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1})(\hat{x}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1})^T + Q_{k-1} \quad (14)$$

y, similarmente, se implementan las ecuaciones de medición como sigue:

$$\hat{x}_{k|k-1}^{(i)} = \hat{x}_{k|k-1} + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, \dots, 2n \quad (15)$$

$$\tilde{x}^{(i)} = \left( \sqrt{n \hat{P}_{k|k-1}} \right)_i^T \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = - \left( \sqrt{n \hat{P}_{k|k-1}} \right)_i^T \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$\hat{y}_k^{(i)} = h_k(\hat{x}_{k|k-1}^{(i)}) \quad (18)$$

Luego, una estimación *a posteriori* del estado en el instante  $k$  se obtiene de la siguiente manera:

$$\hat{y}_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{y}_k^{(i)} \quad (19)$$

$$\hat{P}_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)^T + R_k \quad (20)$$

$$\hat{P}_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{x}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1})(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)^T \quad (21)$$

Finalmente, las estimaciones del UKF son obtenidas usando las ecuaciones del Filtro de Kalman como sigue:

$$K_k = \hat{P}_{xy} \hat{P}_y^{-1} \quad (22)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_k) \quad (23)$$

$$\hat{P}_{k|k} = \hat{P}_{k|k-1} - K_k \hat{P}_y K_k^T \quad (24)$$

### 2.3. Filtro de Partículas

Una forma de implementar numéricamente el estimador Bayesiano (5) es a través del Filtro de Partículas. Al comienzo de la estimación se genera aleatoriamente un número dado de  $N$  vectores de estado basados en la PDF inicial  $p(x_0)$ . Estos vectores reciben el nombre de partículas y se denotan como  $x_0^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Entonces, mediante una etapa de predicción se puede obtener la PDF de  $p(x_k|Y_{k-1})$  luego de propagar  $p(x_{k-1}|Y_{k-1})$  un paso hacia adelante. Luego, a través de una etapa de actualización y cuando se tiene la nueva medición  $y_k$  es posible obtener la PDF  $p(x_k|Y_k)$ . La aproximación converge a la PDF verdadera del estado  $x_k$  a medida que  $N$  tiende al infinito (para más detalle ver (Smith y Gelfand, 1992; Hu et al., 2011)). En la práctica, la cantidad de partículas  $N$  se elige considerando la dimensión de  $x_k$ , el esfuerzo computacional y la precisión requerida.

En la práctica es imposible muestrear directamente desde la PDF  $p(x_k|Y_k)$ . Para esto, el método de muestreo de importancia secuencial ofrece una solución aproximada para estimar la PDF  $p(x_k|Y_{k-1})$  (Gordon et al. (1993); Arulampalam et al. (2002); Doucet et al. (2000); Doucet y Johansen (2011)). Con este enfoque es posible encontrar de manera aproximada la PDF  $p(x_k|Y_k)$  a través de:

$$p(X_k|Y_k) \approx \sum_{i=1}^N q_k^i \delta(X_k - X_k^i) \quad (25)$$

en que  $\delta(\cdot)$  denota el delta de Dirac de masa de la PDF del estado  $x_k$  en  $x_k^i$  y  $X_k = \{x_0, \dots, x_k\}$ . Los pesos de importancia  $q_k^i$  se obtienen mediante:

$$q_k^i \propto \frac{p(X_k^i|Y_k)}{Q(X_k^i|Y_k)} \quad (26)$$

Cada peso de importancia  $q_k^i$  representa la discrepancia entre las muestras generadas desde la función de densidad de importancia (IDF)  $Q(\cdot)$  y la PDF  $p(X_k^i|Y_k)$ . Por otro lado, se puede demostrar que factorizando  $Q(X_k^i|Y_k)$  de la siguiente forma (Arulampalam et al. (2002)):

$$Q(X_k^i|Y_k) = Q(x_k|X_{k-1}, Y_k) Q(X_{k-1}|Y_{k-1}) \quad (27)$$

y factorizando  $p(X_k|Y_k)$  como:

$$p(X_k|Y_k) \propto p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1})p(X_{k-1}|Y_{k-1}) \quad (28)$$

se obtiene los pesos:

$$q_k^i = q_{k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{Q(x_k^i|X_{k-1}^i, Y_k)} \quad (29)$$

Dado que el estado  $x_k$  en (1a) depende solo del instante anterior, la función de importancia se reduce a

$$Q(x_k|X_{k-1}, Y_k) = Q(x_k|x_{k-1}, Y_k) \quad (30)$$

Por lo tanto, para cada instante de tiempo  $k$ , los pesos de importancia y la PDF de interés se actualizan mediante:

$$p(x_k|Y_k) \approx \sum_{i=1}^N q_k^i \delta(x_k - x_k^i) \quad (31)$$

$$\tilde{q}_k^i = \tilde{q}_{k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{Q(x_k^i|x_{k-1}^i, y_k)} \quad (32)$$

en que:

$$q_k^i = \frac{\tilde{q}_k^i}{\sum_{j=1}^N \tilde{q}_k^j} \quad (33)$$

donde  $\sum_{j=1}^N q_k^j = 1$ , lo cual define la distribución discreta sobre  $\{x_k^i : i = 1, \dots, N\}$  con probabilidad  $q_k^i$  asociada a cada  $x_k^i$  de (25).

Para obtener los pesos de importancia  $\tilde{q}_k^i$  de la  $i$ -ésima partícula en (32), es necesario propagar para cada tiempo  $k = 1, 2, \dots$ , las  $N$  partículas  $x_k^i$  según:

$$x_k^i = f_{k-1}(x_{k-1}^i, u_{k-1}, w_{k-1}^i) \quad , (i = 1, \dots, N) \quad (34)$$

donde  $w_{k-1}^i$  es una realización del ruido de proceso  $w_{k-1}$ . Estas partículas permiten obtener la PDF de la estimación *a priori* del estado verdadero  $x_k$ , es decir,  $p(x_k|x_{k-1})$ . Además, para obtener los pesos  $\tilde{q}_k^i$  se evalúa la PDF de  $p(y_k|x_k^i)$  que depende de la PDF del ruido de medición  $v_k$ .

En general, la elección de la función de densidad de importancia (IDF) (29) no es trivial. En Doucet et al. (2000) y Ristic et al. (2004) se demuestra que la IDF óptima que minimiza la varianza de los pesos de importancia está dada por:

$$Q(x_k^i|x_{k-1}^i, y_k)_{opt} = p(x_k^i|x_{k-1}^i, y_k) \quad (35)$$

$$= \frac{p(y_k|x_k, x_{k-1}^i)p(x_k|x_{k-1}^i)}{p(y_k|x_{k-1}^i)} \quad (36)$$

Reemplazando en (32), los pesos de importancia son:

$$\tilde{q}_k^i = \tilde{q}_{k-1}^i p(y_k|x_{k-1}^i) \quad (37)$$

Las PDFs  $p(y_k|x_{k-1})$  y  $p(y_k|x_k, x_{k-1})$  en (36) son difíciles de obtener analíticamente en la mayoría de los casos. Éstas se

pueden obtener, por ejemplo, cuando el sistema no-lineal posee ruido aditivo Gaussiano y la salida  $y_k$  es una función lineal del estado  $x_k$ . Por lo tanto, por simplicidad, la IDF más común usada en la literatura (Ristic et al., 2004; Simon, 2006) está dada por:

$$Q(x_k^i | x_{k-1}^i, y_k) = p(x_k^i | x_{k-1}^i) \quad (38)$$

Por lo tanto, reemplazando en (32) se obtiene:

$$\tilde{q}_k^i = \tilde{q}_{k-1}^i p(y_k | x_k^i) \quad (39)$$

los pesos en (39) se pueden obtener analíticamente a partir del modelo del sistema (1b).

Un problema común con el Filtro de Partículas es la *degeneración de las partículas*. Después de varias iteraciones la masa de la PDF puede concentrarse solo en unas pocas partículas, pues el peso (verosimilitud) asociado a las restantes partículas se hace muy pequeño y, por tanto, no contribuyen en la aproximación de la PDF del estado. Es decir, computacionalmente se hace un esfuerzo innecesario y la precisión del algoritmo decae. Una medida de la degeneración de las partículas es el “tamaño de muestra efectiva”  $N_{eff}$  (Doucet et al., 2000) que puede ser estimado como:

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (q_k^i)^2} \quad (40)$$

El tamaño de muestra efectiva  $N_{eff}$  puede usarse para indicar que hay degeneración cuando es menor que un umbral dado  $N_T \in [1, N]$ . Si este es el caso, es conveniente *re-muestrear* las partículas usando las verosimilitudes calculadas, es decir, se calcula un nuevo conjunto de partículas  $x_k^i$  sobre la base de las verosimilitudes  $q_k^i$ . Este paso se conoce como *re-muestreo* y da origen a diversas variaciones en la implementación de filtro de partículas (Doucet et al., 2001; Kitagawa, 1996; Simon, 2006). Entre las variaciones propuestas en la literatura, un método de re-muestreo que resulta sencillo, y de bajo costo computacional es el conocido como *re-muestreo sistemático* (Hol et al., 2006; Ristic et al., 2004). En este método, en cada tiempo  $k = 0, 1, \dots$  y para  $i = 1, \dots, N$ ,

1. Se generan  $N$  números ordenados

$$m_r = \frac{(r-1) + \tilde{m}}{N}, \quad \text{con } \tilde{m} \sim U[0, 1), \quad r = 1, \dots, N$$

donde  $U[a, b]$  representa una variable aleatoria de distribución uniforme entre  $a$  y  $b$ .

2. Se calcula la suma acumulada de las verosimilitudes  $q_k^i$  en una suma hasta que  $\sum_{l=1}^{j-1} q_k^l < m_r$  pero,  $\sum_{l=1}^j q_k^l \geq m_r$ . Luego, la nueva partícula es igual a la partícula elegida según la sumatoria anterior (ver Figura 1), es decir:

$$x_k^{i*} = x_k^j \quad \text{con probabilidad } q_j \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

3. Se asigna el peso a cada partícula:  $q_k^i = 1/N$

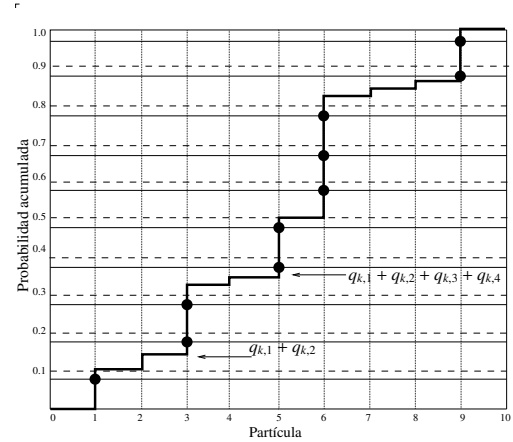


Figura 1: Ilustración de la elección de la partícula para algún instante  $k$  en el *re-muestreo sistemático*. En este caso, la tercera partícula se re-muestra 2 veces, mientras que la sexta partícula se re-muestra 3 veces.

Una vez que se calcula el conjunto de partículas  $x_k^i$  que son distribuidas aproximadamente como la PDF  $p(x_k | y_k)$ , es posible calcular sus estadísticas empíricas. Por ejemplo, la estimación del estado se puede obtener como el promedio ponderado por cada  $q_k^i$ , es decir,

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N q_k^i x_k^i \quad (41)$$

Se puede observar que la estimación *a posteriori*  $\hat{x}_k$  del Filtro de Partículas en (41) juega el mismo rol que la estimación *a posteriori*  $\hat{x}_{k|k}$  del Filtro de Kalman en (7c).

Es importante observar que, si bien el uso de muestras en el PF y UKF es similar, hay una diferencia clave debido a que las *partículas* en el PF son *generadas* aleatoriamente, mientras que en el UKF los  $\sigma$ -points son generados y propagados determinísticamente.

#### 2.4. Discusión

Ciertas ventajas y desventajas pueden observarse al comparar los filtros hasta aquí presentados. El Filtro de Kalman Extendido es un caso subóptimo del Filtro de Kalman (caso lineal), sin embargo, en la práctica no se puede garantizar convergencia ni optimalidad. Por otro lado el Filtro de Kalman *Unscented* intenta propagar los  $\sigma$ -points a través de la transformada *unscented*, y sobre éstos se aproxima una PDF Gaussiana. A diferencia del EKF, el UKF no requiere calcular el Jacobiano del sistema en cada instante de tiempo. Finalmente, el Filtro de Partículas ha sido propuesto como solución al problema de estimación no-lineal y en que el ruido no necesariamente es Gaussiano. Sin embargo, el PF posee más parámetros de diseño que el EKF y UKF: el número de partículas a usar, el umbral  $N_T$  en la etapa de *re-muestreo* y la PDF del estado inicial. La ventaja más importante del PF es que permite obtener en línea la PDF de la estimación de estado del sistema. A partir de esta PDF es posible obtener estimadores particulares como la media empírica en

(41). Sin embargo, estimadores particulares como éste pueden resultar poco representativos del estado verdadero, si por ejemplo, la PDF es multimodal (ver sección 15.1 de Simon (2006)).

Las matrices de covarianza  $Q$  y  $R$  de los ruidos de proceso y de medición, respectivamente, son datos para los tres filtros (EKF, UKF, PF). En la sección siguiente se presenta un método de identificación que permite estimar (fuera de línea) estas matrices a partir de datos del proceso.

### 3. Identificación de las matrices de covarianza de los ruidos

En esta sección se presenta la estimación *fuera de línea* de las matrices de covarianza para los ruidos de proceso y medición en el modelo (1). Estas matrices se obtienen mediante el estimador de máxima verosimilitud. La estimación mediante máxima verosimilitud tiene una larga historia en estadística (Kendall, 1998) y en identificación de sistemas (Åström y Bohlin, 1965; Goodwin y Payne, 1977; Åström, 1980). En general, la función de verosimilitud es difícil de maximizar y se utilizan algoritmos iterativos tales como el de Esperanza y Maximización (EM) (Dempster et al., 1977; McLachlan y Krishnan, 1997). Para sistemas no lineales, el algoritmo de *Esperanza-Maximización* Extendido (EEM) ha sido recientemente propuesto en (Bavdekar et al., 2011) específicamente para la estimación de las matrices de ruido  $Q$  y  $R$  en modelos no lineales con ruido aditivo.

#### 3.1. Función de verosimilitud

Suponga un sistema del cual se disponen datos de entrada  $U_N = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ , y de salida  $Y_N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ . Sea  $Z_N = \{Y_N, U_N\}$  los datos totales adquiridos durante un experimento. El método de máxima verosimilitud puede ser resumido como: sea  $Z_N$  una variable aleatoria, cuya PDF  $p(Z_N|\Theta)$  es una función de un parámetro desconocido  $\Theta$ . El estimador de máxima verosimilitud del parámetro  $\Theta$  a partir de un conjunto de datos  $Z_N$ , es el que maximiza la probabilidad condicional de los datos, dado el parámetro  $\Theta$  (Kendall, 1998), es decir:

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg \max_{\Theta} p(Z_N|\Theta) \quad (42)$$

donde  $p(Z_N|\Theta)$  es la función de verosimilitud. La regla de Bayes puede ser usada para descomponer esta expresión.

$$p(Z_N|\Theta) = p(z_1) \prod_{i=2}^N p(z_i|Z_{i-1}, \Theta) \quad (43)$$

en que  $z_i = \{y_i, u_i\}$ .

Debido a que el logaritmo es una función monótonica, el estimador de máxima verosimilitud en (42) puede ser expresado como:

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg \min_{\Theta} -L(Z_N|\Theta), \quad (44)$$

donde

$$L(Z_N|\Theta) \triangleq \log p(Z_N|\Theta) \quad (45)$$

$$= \log p(z_1|\Theta) + \sum_{i=2}^N \log p(z_i|Z_{i-1}, \Theta) \quad (46)$$

Maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud (46) es difícil para sistemas no lineales, pues el problema de optimización es, en general, no convexo (Shumway y Stoffer, 2000).

#### 3.2. Algoritmo EM y EEM.

El problema de optimización de la verosimilitud puede ser abordado introduciendo el concepto de datos completos  $\{Z_N, X_N\}$ . Estos datos completos incluyen la secuencia de estado del sistema  $\{X_N\} = \{x_1, \dots, x_N\}$  (Shumway y Stoffer, 2000).

Dada una estimación del parámetro  $\Theta$ , específicamente  $\hat{\Theta}^{(j)}$ , la función de verosimilitud logarítmica (46) puede ser descompuesta como (Dempster et al., 1977):

$$L(\Theta) = \mathbb{Q}(\Theta, \hat{\Theta}^{(j)}) - \mathbb{H}(\Theta, \hat{\Theta}^{(j)}) \quad (47)$$

donde

$$\mathbb{Q}(\Theta, \hat{\Theta}^{(j)}) = E\{\log p(Z_N, X_N|\Theta)|Z_N, \hat{\Theta}^{(j)}\} \quad (48)$$

$$\mathbb{H}(\Theta, \hat{\Theta}^{(j)}) = E\{\log p(X_N|Z_N, \Theta)|Z_N, \hat{\Theta}^{(j)}\}. \quad (49)$$

Usando la desigualdad de Jensen (Rao, 1965), se puede mostrar que  $\mathbb{H}(\hat{\Theta}, \hat{\Theta}^{(j)}) - \mathbb{H}(\hat{\Theta}^{(j)}, \hat{\Theta}^{(j)}) \leq 0$ . Entonces, para maximizar la función de verosimilitud (47) es suficiente con maximizar (o incrementar) el valor de  $\mathbb{Q}$  en cada iteración, es decir,

$$\mathbb{Q}(\hat{\Theta}^{(j+1)}, \hat{\Theta}^{(j)}) > \mathbb{Q}(\hat{\Theta}^{(j)}, \hat{\Theta}^{(j)}) \Rightarrow L(\hat{\Theta}^{(j+1)}) > L(\hat{\Theta}^{(j)}). \quad (50)$$

Por lo tanto, el algoritmo EM puede ser resumido en dos pasos:

- *Esperanza* (paso-E): El objetivo es calcular  $\mathbb{Q}$  en (48). Note la necesidad de obtener la estimación de  $X_N$  dados los datos disponibles  $Z_N$ . Las estimaciones de  $X_N$  involucran el uso de un suavizador (o *smoother*) para estimar la secuencia de estados  $X_N$  dados los datos completos  $Z_N$ . En el caso lineal se puede aplicar el suavizador de Kalman usual (Anderson y Moore, 1979). Para el caso general se debe buscar una aproximación, por ejemplo, en Bavdekar et al. (2011) se utiliza el suavizador de Kalman Extendido (EKS).
- Maximización (paso-M): Este paso involucra maximizar  $\mathbb{Q}$  con respecto a  $\Theta = \{Q, R\}$ . Solo en algunos casos se puede aproximar analíticamente para obtener  $\hat{\Theta}^{(j+1)}$ . En general, se utilizan técnicas de optimización numérica para obtener una nueva estimación  $\hat{\Theta}^{(j+1)}$ .
- Se procede iterativamente volviendo al paso-E. La decisión para detener el algoritmo no es trivial, existiendo para ello, distintos criterios (McLachlan y Krishnan, 2008; Jeff Wu, 1983). Así mismo la convergencia del algoritmo es discutida en McLachlan y Krishnan (2008); Jeff Wu (1983).

En el presente artículo se aplica una variante del algoritmo EM, propuesto por Bavdekar et al. (2011). El algoritmo propuesto se denomina *Esperanza-Maximización Extendido* (EEM).

En particular, se propone el uso de la versión extendida del suavizador de Kalman y una aproximación en series de Taylor del modelo no lineal

$$x_i - F(x_{i-1}, u_{i-1}) \approx x_i - \left[ F(\hat{x}_{i-1|N}, u_{i-1}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i-1|N}} (x_{i-1} - \hat{x}_{i-1|N}) \right] \quad (51)$$

$$y_i - h(x_i) \approx y_i - \left[ h(\hat{x}_{i|N}) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|N}} (x_i - \hat{x}_{i|N}) \right]. \quad (52)$$

Para el paso-E, en el caso específico de la estimación de las matrices de covarianza  $\Theta = \{Q, R\}$ , la expresión para  $Q$  es:

$$\begin{aligned} -\mathbb{Q}(\Theta, \hat{\Theta}^{(j)}) &= \log(|P_0|) + N \log(|Q|) + N \log(|R|) \\ &+ E\{tr\{P_0^{-1}(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T\} | Z_N\} \\ &+ E\left\{ \sum_{i=1}^N \{tr\{Q^{-1}(w_i w_i^T)\} | Z_N\} \right\} \\ &+ E\left\{ \sum_{i=0}^N \{tr\{R^{-1}(v_i v_i^T)\} | Z_N\} \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

La función auxiliar  $Q$  requiere la estimación de las esperanzas condicionales de  $\{w w^T, v v^T\}$  usando las estimaciones suavizadas  $\hat{x}_{k|N}$ , obtenidas mediante el EKS, siendo

$$w = x_i - F(x_{i-1}, u_{i-1}) \quad (54)$$

$$v = y_i - h(x_i) \quad (55)$$

Para el paso-M, Bavdekar et al. (2011) obtienen una solución explícita al problema de optimización, es decir, resuelven  $\nabla Q = 0$ .

Finalmente, en este trabajo, se utiliza un número fijo de iteraciones tal que se considera que el óptimo de la función auxiliar  $Q$  ha sido alcanzado. Este número fijo de iteraciones ha sido determinado usando las estimaciones suavizadas obtenidas en el paso-E para evaluar la función de verosimilitud:

$$\psi^{(j)} = - \left[ \sum_{i=1}^N \log[\det \Sigma_i^{(j)}] + e_i^T \Sigma_i^{-1(j)} e_i \right] \quad (56)$$

donde,

$$\Sigma_k = C_k P_{k|k-1} C_k^T + R \quad (57)$$

$$e_k = y_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1}) \quad (58)$$

#### 4. Sistema de Cuatro Depósitos Acoplados

El objetivo de este trabajo es comparar el desempeño de los estimadores no lineales mencionados en la sección anterior (EKF, UKF, PF) cuando se aplican a una planta de cuatro depósitos acoplados. Para este sistema interesa hacer estimación de estado y de parámetros variantes en el tiempo. El vector de estado está formado por los niveles de agua de cada depósito. Si

bien estas variables se miden, la presencia de ruido no es despreciable. Por otra parte, los parámetros que interesa estimar representan la proporción del flujo de agua que va desde cada bomba a los depósitos respectivos. Estos parámetros no pueden ser medidos (las válvulas no están graduadas), y su variación con la temperatura no es despreciable, por tanto, no es práctico estimarlos como parámetros constantes a partir de datos fuera de línea.

##### 4.1. Modelo Matemático

Para esta planta se considera el modelo:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{A} \left( -k_1 h_1^{\alpha_1}(t) + k_3 h_3^{\alpha_3}(t) + \beta_1(t) V_1(t) \right) \quad (59a)$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{A} \left( -k_2 h_2^{\alpha_2}(t) + k_4 h_4^{\alpha_4}(t) + \beta_2(t) V_2(t) \right) \quad (59b)$$

$$\frac{dh_3(t)}{dt} = \frac{1}{A} \left( -k_3 h_3^{\alpha_3}(t) + \beta_3(t) V_2(t) \right) \quad (59c)$$

$$\frac{dh_4(t)}{dt} = \frac{1}{A} \left( -k_4 h_4^{\alpha_4}(t) + \beta_4(t) V_1(t) \right) \quad (59d)$$

$$y_i(t) = \gamma_i h_i(t) \quad i = \{1, 2, 3, 4\} \quad (59e)$$

donde  $h_i(t)$  representa la altura medida en (cm) del depósito  $i$ , las variables  $\beta_i(t)$  representan el flujo de agua por cada Volt que se aplica a cada bomba, medida en ( $cm^3/V \cdot s$ ). Estas variables  $\beta_i$  varían en el tiempo a medida que aumenta la temperatura en las bombas (en la práctica esta variación resulta no despreciable en experimentos de más de 15(min)). Finalmente, las constantes  $k_i$  y  $\alpha_i$  dependen de la geometría de cada depósitos  $i$ , mientras que  $A$  es el área de su sección transversal.

Las salidas de la planta, medidas a través de sensores de presión, se denotan como  $y_i(t)$  y son medidas en (V), las constantes  $\gamma_i$  permiten obtener el nivel de agua de cada depósito desde los sensores de presión. El área transversal  $A$  es igual para los cuatro depósitos. Los parámetros del sistema  $\alpha_i, k_i$  y  $\gamma_i$  fueron estimados usando mínimos cuadrados a través de experimentos de llenado y vaciado individual para cada uno de los depósitos (analizando el transiente de cada depósito, con entrada  $u(t) = 0$ ). Estos parámetros fueron obtenidos a partir de datos obtenidos fuera de línea y se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros del sistema de cuatro depósitos acoplados

$A = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$	$\Delta t = 0.1 \text{ (s)}$	
$\alpha_1 = 0.42$	$k_1 = 9.46$	$\gamma_1 = 0.49 \text{ (V/cm)}$
$\alpha_2 = 0.39$	$k_2 = 9.69$	$\gamma_2 = 0.50 \text{ (V/cm)}$
$\alpha_3 = 0.28$	$k_3 = 10.68$	$\gamma_3 = 0.177 \text{ (V/cm)}$
$\alpha_4 = 0.31$	$k_4 = 10.56$	$\gamma_4 = 0.178 \text{ (V/cm)}$

En la Tabla 1 se puede observar, en particular, que el valor obtenido para las constantes  $\alpha_i$  es diferente al propuesto en la literatura o a partir del principio de Bernoulli ( $\alpha = 0,5$ ). Esto se debe a las características físicas de un depósito real que desagua por un tubo y no por un agujero, como se supone en el modelado físico idealizado.

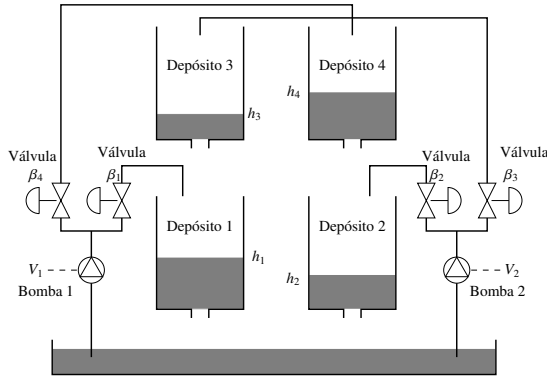


Figura 2: Sistema de Cuatro Depósitos Acoplados

#### 4.2. Discretización y modelo ampliado del sistema

Para la implementación del EKF, UKF y PF, es necesario disponer de ecuaciones recursivas que describan la planta. Para ello, se aproxima la derivada usando el método de Euler, con período de muestreo  $\Delta t$ , es decir,

$$h_{1_{k+1}} = h_{1_k} + \frac{\Delta t}{A} \left\{ -k_1 h_{1_k}^{\alpha_1} + k_3 h_{3_k}^{\alpha_3} + \beta_{1_k} V_{1_k} \right\} + w_{1_k} \quad (60a)$$

$$h_{2_{k+1}} = h_{2_k} + \frac{\Delta t}{A} \left\{ -k_2 h_{2_k}^{\alpha_2} + k_4 h_{4_k}^{\alpha_4} + \beta_{2_k} V_{2_k} \right\} + w_{2_k} \quad (60b)$$

$$h_{3_{k+1}} = h_{3_k} + \frac{\Delta t}{A} \left\{ -k_3 h_{3_k}^{\alpha_3} + \beta_{3_k} V_{2_k} \right\} + w_{3_k} \quad (60c)$$

$$h_{4_{k+1}} = h_{4_k} + \frac{\Delta t}{A} \left\{ -k_4 h_{4_k}^{\alpha_4} + \beta_{4_k} V_{1_k} \right\} + w_{4_k} \quad (60d)$$

Es de especial interés, poder estimar en línea los parámetros  $\beta_i$ , ya que, además de sufrir cambios debido a la temperatura, éstos dependen de cuatro válvulas manuales que permiten modificar el flujo de agua hacia cada depósito (ver Figura 2). Por lo anterior, en este artículo, los parámetros  $\beta_i$  se han incluido como estados adicionales en el modelo discreto:

$$\beta_{1_{k+1}} = \beta_{1_k} + w_{5_k} \quad (61a)$$

$$\beta_{2_{k+1}} = \beta_{2_k} + w_{6_k} \quad (61b)$$

$$\beta_{3_{k+1}} = \beta_{3_k} + w_{7_k} \quad (61c)$$

$$\beta_{4_{k+1}} = \beta_{4_k} + w_{8_k} \quad (61d)$$

Las salidas del sistema son:

$$y_{j_k} = \gamma_j h_{j_k} + v_{j_k} \quad j \in \{1, \dots, 4\} \quad (62)$$

donde  $w_k$  y  $v_k$  son secuencias de ruido blanco Gaussiano, no correlacionados entre ellos, de media cero y matrices de covarianza  $Q$  y  $R$  respectivamente.

#### 4.3. Análisis de Observabilidad local

El sistema de cuatro depósitos acoplados es usualmente considerado en la literatura con solo mediciones de altura en los dos depósitos inferiores (Johansson, 2000). Sin embargo, al incluir los parámetros  $\beta_{i_k}$  como estados adicionales del sistema aparece un problema de observabilidad.

En esta sección, se realiza un análisis de observabilidad local sobre el sistema no lineal, para verificar que es posible reconstruir el estado a partir de la secuencia de mediciones de la salida  $y_k$  (es decir, alturas  $h_{i_k}$  y parámetros  $\beta_{i_k}$ ) (Kwakernaak y Sivan, 1972). Para esto se construye la matriz de observabilidad  $M_k$  usando las ecuaciones (76)-(77). Aquí el punto de operación del sistema linealizado varía en cada instante de tiempo, y depende de la estimación  $\hat{x}_{k|k-1}$ . En este caso, la matriz de observabilidad está dada por:

$$M_k = [H_k \quad H_k F_k \cdots H_k F_k^{n-1}]^T \quad (63)$$

donde  $F_k$  está descrita en (76) y  $H_k$  en (77). Al obtener  $M_k$  en (63) se verifica que resulta ser una matriz singular si se consideran sólo las dos mediciones de los depósitos inferiores. En dicho caso, la siguiente combinación lineal describe el espacio nulo de la matriz de observabilidad:

$$\Delta x_k = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{h_{4_k}^{1-\alpha_4} V_{1_k}}{k_4 \alpha_4} & 0 & -\frac{V_{1_k}}{V_{2_k}} & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{h_{3_k}^{1-\alpha_3} V_{2_k}}{k_3 \alpha_3} & 0 & -\frac{V_{2_k}}{V_{1_k}} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

donde  $\Delta x_k = x_k - \hat{x}_{k|k-1} = (\Delta h_1, \dots, \Delta h_4, \Delta \beta_1, \dots, \Delta \beta_4)$ .

En consecuencia, este análisis muestra que, sin importar el punto de operación escogido, la matriz de observabilidad del sistema linealizado pierde rango. Esto quiere decir que, localmente, y para cualquier instante de tiempo, el modelo es *no-observable*. Esta es la razón por la cual se han agregado dos sensores adicionales para medir los niveles de altura de los depósitos 3 y 4 (en la Figura 2). Al considerar mediciones de los niveles de los cuatro depósitos, la matriz de observabilidad asociada es de rango completo.

En resumen, al incluir los parámetros  $\beta_i$  como estados adicionales, es necesario medir las alturas de los cuatro depósitos para poder estimar todos los estados del modelo ampliado (60)-(62).

### 5. Estimación de parámetro y estado

El Filtro de Partículas descrito en la sección anterior se implementó para el sistema de cuatro depósitos acoplados, usando el modelo descrito por (60)-(62). En este caso, el vector de estado es  $x_k = (h_{1_k}, h_{2_k}, h_{3_k}, h_{4_k}, \beta_{1_k}, \beta_{2_k}, \beta_{3_k}, \beta_{4_k})$ . Se han considerado dos casos, eligiendo distintas funciones de densidad de importancia (IDFs):

#### ■ Caso 1: IDF óptima (PF<sub>opt</sub>)

Para el sistema de cuatro depósitos acoplados, se supone que el ruido de proceso y de medición se han supuesto aditivos y Gaussianos. Además las mediciones son lineales respecto a los estados, es decir:

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}, \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, Q) \quad (64)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R) \quad (65)$$

En este caso, es posible calcular explícitamente la IDF óptima en (36) (ver Arulampalam et al. (2002)). Pues se



dispone de las siguientes PDFs:

$$p(x_k|x_{k-1}, y_k) \sim \mathcal{N}(x_k; a_k, \Sigma_k) \quad (66)$$

$$p(y_k|x_{k-1}) \sim \mathcal{N}(y_k; H_k f_{k-1}(x_{k-1}^i), H_k Q_{k-1} H_k^T + R) \quad (67)$$

donde:

$$a_k^i = f_{k-1}(x_{k-1}^i) + \Sigma_k^i H_k^T R^{-1} (y_k - H_k f_{k-1}(x_{k-1}^i)) \quad (68)$$

$$(\Sigma_k^i)^{-1} = Q_{k-1}^{-1} + H_k^T R^{-1} H_k \quad (69)$$

Note que la estructura en (68)-(69) es similar al Filtro de Kalman usual (ver Sección 2).

#### ■ Caso 2: IDF subóptima (PF<sub>SIR</sub>)

La IDF más usada en la literatura es la descrita en la ecuación (38), debido a que las PDFs  $p(x_k|x_{k-1})$  y  $p(y_k|x_k)$  se pueden obtener explícitamente en la mayoría de los casos. En este caso, el cálculo de las verosimilitudes (ver (32)) es:

$$p(y_k|x_k^i) = P(v_k = y_k - h(x_k^i)) \quad (70)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(R)}} e^{-\frac{1}{2}(y_k - h_k(x_k^i))^T R^{-1} (y_k - h_k(x_k^i))} \quad (71)$$

donde  $n$  es la dimensión del sistema (en este caso  $n = 8$ ). Esta versión del PF se denomina “*Bootstrap*” o “*Sampling Importance Resampling Filter*” (SIR).

Para ambos casos (PF<sub>opt</sub> y PF<sub>SIR</sub>), las condiciones iniciales se han supuesto con distribución Gaussiana, es decir, las  $N$  partículas iniciales se generaron con  $x_0^i \sim \mathcal{N}(x_0, Q)$ .

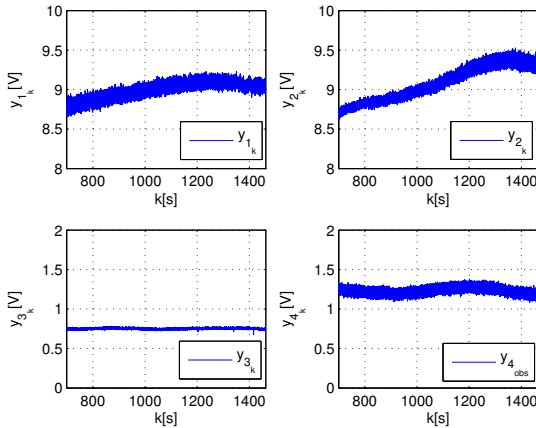


Figura 3: Datos Experimentales sobre los que se aplicó el Algoritmo EEM, y que muestran nivel de ruido no despreciable y variación en el tiempo debido a la temperatura de las bombas

Para la estimación se consideraron las matrices de covarianza (74) y (75) estimadas con el algoritmo EEM de la Sección 3.2 usando los datos mostrados en la Figura 3. Estos datos corresponden a un experimento en que se ha dejado las válvulas

fijas y donde además, se puede apreciar el efecto de la temperatura y el nivel de ruido que no es despreciable.

Las matrices de covarianza estimadas mediante EEM han sido utilizadas en un segundo experimento al que se le ha aplicado el PF, EKF y UKF. En el experimento realizado para el sistema, las válvulas son modificadas manualmente a los 380(seg) y 950(seg). Los voltajes de entrada aplicados al sistema se muestran en la Figura 4. Para el filtro de partículas, el resultado ha sido logrado con  $N = 8000$  partículas, y  $N_T = N$ . Esto debido a que con  $N_T$  más bajo, el PF aplicado disminuye su precisión. Las condiciones iniciales consideradas son:

$$x_0 = (h_{10}, \dots, h_{40}, \beta_{10}, \dots, \beta_{40}) \quad (72)$$

$$= (y_{10}/\gamma_1, \dots, y_{40}/\gamma_4, 3, 3, 3, 3) \quad (73)$$

El EKF y UKF han sido aplicados también a estos datos experimentales, suponiendo el mismo nivel de ruido y condiciones iniciales que para el PF. Para el filtro de Kalman Extendido, las matrices linealizadas ( $F_k, H_k, G_k, N_k$ ) son calculadas analíticamente en (76)-(77).

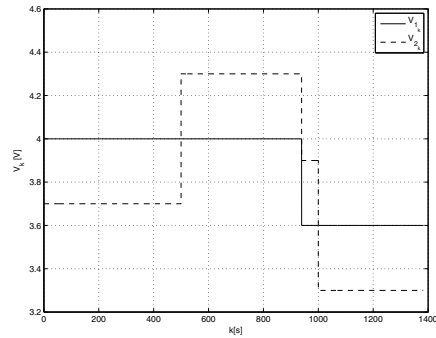


Figura 4: Voltaje de entrada  $V_k = (V_{1k} \ V_{2k})^T$  en el experimento.

Los resultados obtenidos usando EKF, UKF, y las dos implementaciones del filtro de partículas (PF<sub>opt</sub> y PF<sub>SIR</sub>) se muestran en la Figura (5). El uso de las matrices estimadas usando el algoritmo EEM permiten que los resultados obtenidos con el EKF y UKF, sean muy similares y acordes con la variación de las válvulas. Sin embargo, debido a que la matriz para el ruido de medición  $\hat{R}$  estimada posee bajo orden de magnitud comparado con las mediciones, el PF entrega resultados no satisfactorios en ambos casos. Sin embargo, el PF<sub>opt</sub> muestra una mejor estimación que el PF<sub>SIR</sub>. Esto se debe a que un alto porcentaje de las verosimilitudes en la etapa de actualización del PF son despreciables (ver (71)) ya que las partículas de mayor peso  $q_k^i$  son elegidas una mayor cantidad de veces que el resto. Este fenómeno es conocido en la literatura como “empobrecimiento de muestras”, y se acentúa cuando el ruido de proceso es pequeño (Ristic et al., 2004; Doucet et al., 2001).

Dado que los resultados obtenidos en la Figura 5 con el PF no son completamente satisfactorios, se ha optado por mantener el orden de magnitud de la matriz  $\hat{Q}$  obtenida con EEM y aumentar el orden de magnitud de la matriz de covarianza del

$$\hat{Q}^j = \begin{pmatrix} 0,2668 & 0,0292 & -0,0060 & 0,2021 & -0,0053 & 0,2126 & -0,0381 & -0,1207 \\ 0,0292 & 0,0321 & 0,0167 & 0,0156 & -0,0119 & 0,0258 & -0,0179 & -0,0371 \\ -0,0060 & 0,0167 & 0,0858 & -0,0043 & 0,0052 & 0,0607 & -0,0292 & -0,0242 \\ 0,2021 & 0,0156 & -0,0043 & 0,2078 & 0,0012 & 0,1599 & -0,0222 & -0,0927 \\ -0,0053 & -0,0119 & 0,0052 & 0,0012 & 0,0932 & 0,0427 & -0,0193 & 0,1379 \\ 0,2126 & 0,0258 & 0,0607 & 0,1599 & 0,0427 & 0,3486 & -0,0654 & -0,0583 \\ -0,0381 & -0,0179 & -0,0292 & -0,0222 & -0,0193 & -0,0654 & 0,0939 & 0,0239 \\ -0,1207 & -0,0371 & -0,0242 & -0,0927 & 0,1379 & -0,0583 & 0,0239 & 0,4541 \end{pmatrix} \times 10^{-5} \quad (74)$$

$$\hat{R}^j = \begin{pmatrix} 0,0031 & 0,0009 & 0,0000 & -0,0015 \\ 0,0009 & 0,0025 & 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 \\ -0,0015 & 0,0000 & 0,0001 & 0,0020 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$F_k = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 - \frac{\Delta t}{A} \alpha_1 k_1 h_{1k}^{\alpha_1-1} & 0 & \frac{\Delta t}{A} \alpha_3 k_3 h_{3k}^{\alpha_3-1} & 0 & \frac{\Delta t}{A} V_{1k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\Delta t}{A} \alpha_2 k_2 h_{2k}^{\alpha_2-1} & 0 & \frac{\Delta t}{A} \alpha_4 k_4 h_{4k}^{\alpha_4-1} & 0 & \frac{\Delta t}{A} V_{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\Delta t}{A} \alpha_3 k_3 h_{3k}^{\alpha_3-1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t}{A} V_{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{\Delta t}{A} \alpha_4 k_4 h_{4k}^{\alpha_4-1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t}{A} V_{1k} \\ \hline & 0_{4 \times 4} & & & & & & I_{4 \times 4} \end{array} \right) \quad (76)$$

$$H_k = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_k = I_{4 \times 4}, \quad N_k = I_{4 \times 4} \quad (77)$$

ruido de medición del modelo a  $R = I_{4 \times 4}$ . Los resultados obtenidos al aplicar EKF, UKF y ambas versiones del PF para estimar los parámetros  $\beta_k$  son presentados en la Figura 6, mientras que en la Figura 7 son presentados los resultados obtenidos al estimar las alturas  $h_i$ . Se puede notar que el PF, EKF y UKF puede detectar los cambios en las válvulas y estimar adecuadamente los parámetros  $\hat{\beta}_k$ , incluso cuando al mismo tiempo se cambian las posiciones de las válvulas y los voltajes de entrada.

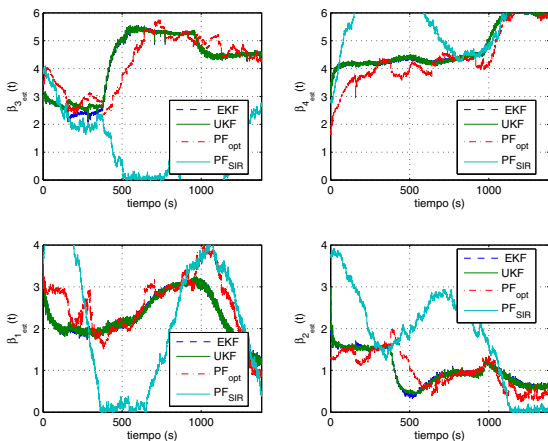


Figura 5: Estimación de los parámetros  $\hat{\beta}_k$  usando EKF, UKF y PF, y las matrices de covarianzas usando EEM  $\hat{Q}$ ,  $\hat{R}$

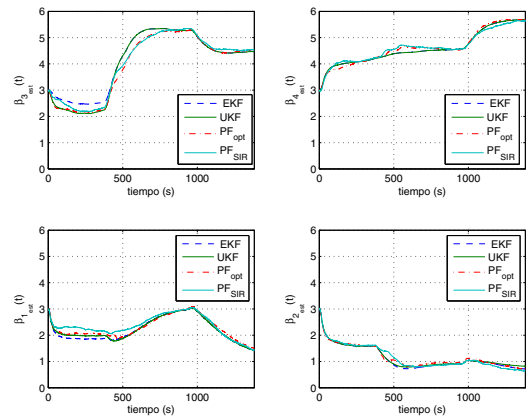


Figura 6: Estimación de los parámetros  $\hat{\beta}_k$  usando EKF, UKF, PF y las matrices  $Q$  y  $R$  modificadas a partir del algoritmo EEM

En base a pruebas realizadas, el PF entrega una estimación más suave cuando se incrementa el número de partículas, sin embargo, esto requiere un mayor número de cálculos.

Adicionalmente, para ilustrar en la práctica las consecuencias del análisis de observabilidad en la Sección 4.3, el EKF, UKF y PF han sido aplicados al sistema usando solo las mediciones  $h_{1k}$  y  $h_{2k}$  correspondientes a los depósitos inferiores. Los resultados se muestran en la Figura 8, donde podemos notar que los niveles de agua de los depósitos superiores no pueden

ser estimados satisfactoriamente. Este resultado es consistente con el análisis de observabilidad presentado.

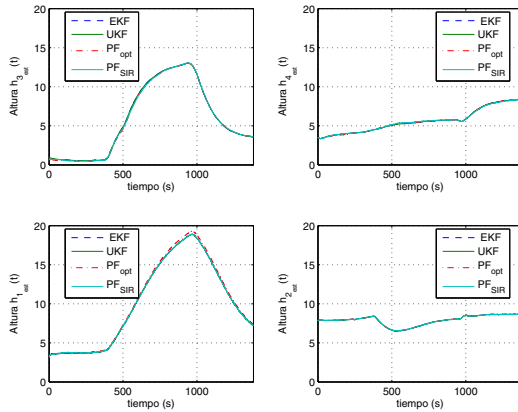


Figura 7: Estimación de los niveles de altura  $\hat{h}_k$  usando EKF, UKF, PF y las matrices  $Q$  y  $R$  modificadas a partir del algoritmo EEM

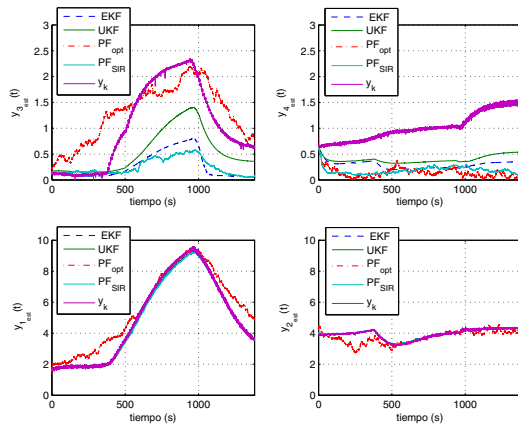


Figura 8: Comparación entre las mediciones  $y_k$  y las salidas  $\hat{y}_k$  usando la estimación de los niveles de agua en los depósitos, a través del  $PF_{SIR}$ ,  $PF_{opt}$ , EKF y UKF con solo las dos mediciones de los depósitos inferiores.

Finalmente, interesa cuantificar la calidad de cada uno de los estimadores utilizados. En este artículo se han aplicado los estimadores sobre datos experimentales a un sistema en que no es posible medir todo el vector de estado. En particular, es imposible medir el valor “verdadero” de los parámetros  $\beta_i$ . Por tanto, no es factible calcular la RMSE (raíz del error cuadrático medio) ni la cota de Cramér-Rao (ver Ristic et al. (2004)). Sin embargo, se pueden analizar los residuos  $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$  correspondientes a cada estimador. En la Tabla 2 se resume el análisis de los estimadores utilizados para el sistema de cuatro depósitos acoplados en que se cuantifica la *blancura* de los residuos mediante un test de autocorrelación (Söderström y Stoica (1989)):

$$F_{wn} = \frac{N}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(0)} \sum_{i=1}^{2N-1} \hat{r}_\varepsilon^2(i) \quad (78)$$

donde  $\hat{r}$  es una estimación de la autocovarianza de los residuos, es decir,  $\hat{r}_\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-\tau} \varepsilon_{k+\tau} \varepsilon_k$ . Note que mientras menor es  $F_{wn}$ , los residuos son más blancos y por tanto se ha extraído mayor información desde las mediciones disponibles.

En la Tabla 2 puede notarse que usando (78), el Filtro de Partículas que utiliza la IDF óptima entrega los mejores resultados. Es decir, los residuos en el tiempo son más blancos que para los demás estimadores (EKF, UKF y  $PF_{SIR}$ ). Esto quiere decir, que el PF óptimo es el que más información extrae desde las mediciones. En la última fila de la Tabla 2 se verifica que, como es de esperar, los resultados menos satisfactorios ocurren en el caso en que el sistema es no-observable. Además, se puede observar en la Tabla 2 que al disminuir la cantidad de partículas, manteniendo los parámetros de diseño iguales, el  $PF_{SIR}$  entrega una estimación de menor calidad que el  $PF_{opt}$ . También se puede notar el efecto de cambiar el umbral  $N_T$  en la etapa de *re-muestreo*: al aumentar dicho umbral, la estimación es mejor.

Tabla 2: Medida de la calidad de los estimadores para diferentes experimentos, para el Sistema de 4 Depósitos Acoplados. La primera columna indica las matrices  $Q$  y  $R$  usadas, el umbral  $N_T$ , y la cantidad de partículas  $N$  usadas. La última fila muestra los resultados cuando solo se usan dos mediciones.

Experimento/Estimador	$PF_{SIR}$	$PF_{opt}$	UKF	EKF
$Q = Q_{EEM}, R = R_{EEM}$ $N_T = 1; N = 8000$	$F_{wn} = 2.7518 \times 10^7$	$3.1155 \times 10^5$	$6.5411 \times 10^7$	$6.7667 \times 10^7$
$Q = Q_{EEM}, R = I$ $N_T = 1; N = 8000$	$F_{wn} = 1.5260 \times 10^8$	$2.4244 \times 10^7$	$2.9970 \times 10^7$	$2.9425 \times 10^7$
$Q = Q_{EEM}, R = I$ $N_T = 1; N = 8000$	$F_{wn} = 5.7001 \times 10^7$	$3.9227 \times 10^7$	$4.0431 \times 10^7$	$4.0252 \times 10^7$
$Q = Q_{EEM}, R = I$ $N_T = 1; N = 6000$	$F_{wn} = 1.5260 \times 10^8$	$4.0632 \times 10^7$	$4.0431 \times 10^7$	$4.0252 \times 10^7$
$Q = Q_{EEM}, R = I$ $N_T = 0.8; N = 8000$	$F_{wn} = 5.2091 \times 10^7$	$1.5865 \times 10^8$	$4.0431 \times 10^7$	$4.0252 \times 10^7$
$Q = Q_{EEM}, R = I$ $N_T = 1; N = 8000$ $y_k = (y_{1k}, y_{2k})^T$	$F_{wn} = 1.3806 \times 10^8$	$1.5477 \times 10^8$	$1.3531 \times 10^8$	$1.3666 \times 10^8$

## 6. Conclusiones

En este artículo se ha mostrado la factibilidad de aplicar el Filtro de Partículas a un proceso de laboratorio usando datos reales. Dos versiones del Filtro de Partículas han sido usadas para implementar numéricamente el estimador Bayesiano en un problema de estimación en línea de parámetros y estado sobre un sistema no lineal variante en el tiempo. Adicionalmente, el Filtro de Partículas ha sido comparado con otros métodos aproximados tales como el Filtro de Kalman Extendido y Filtro de Kalman Unscented.

Para dicha planta, se ha llevado a cabo un análisis de observabilidad local para mostrar que sensores adicionales tienen que ser incluidos en este sistema para poder estimar los parámetros de interés como estados adicionales.

Los resultados obtenidos muestran que los parámetros y estados del sistema pueden ser estimados exitosamente usando el Filtro de Partículas, EKF y UKF, incluso cuando las posiciones de las válvulas y los voltajes de entrada se modifican simultáneamente. Sin embargo, el mejor estimador es el Filtro de Partículas que utiliza la IDF óptima. Esto se debe a que al momento de propagar las partículas un paso hacia adelante, esta implementación del filtro considera las nuevas mediciones (ver diferencias entre (37) y (39)).

Finalmente, cabe destacar la importancia de las matrices de covarianza asociadas a los ruidos de proceso y de medición en el modelo del sistema. En este artículo se ha usado el algoritmo EEM para estimar dichas matrices, y han sido usadas en los estimadores considerados. La estimación de estas matrices a partir de datos puede ser utilizada como una primera aproximación pues, de hecho, para el sistema considerado, la matriz de covarianza obtenida con el algoritmo EEM es de bajo orden de magnitud, por lo cual, al modificar las matrices de covarianza inicialmente con el algoritmo EEM el PF ha mejorado su desempeño.

## English Summary

### Simultaneous State and Parameter Estimation for a Non-linear Time-Varying System.

#### Abstract

In this article a state and parameter estimation problem of a nonlinear and time-varying system is considered. The aim is to compare usual methods of nonlinear estimation such as the Extended Kalman Filter and Unscented Kalman Filter with recent method such as the Particle Filter. In particular, these techniques are applied to a nonlinear four coupled tanks system, which has pumps that exhibit high variability due to temperature changes and valves that can be manually changed. This additional feature makes difficult the estimation of a linear time-invariant model from off-line data. Hence, we consider the system as time-varying and we estimate the state and certain parameters recursively from experimental data. Additionally, we show the application of the Extended Expectation-Maximization algorithm in order to estimate the noise covariance matrices of the models required in the nonlinear filters. The results illustrate the application of advanced nonlinear filtering techniques for state and parameter estimation to a laboratory plant.

#### Keywords:

Parameter Estimation, State Estimation, Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, Particle Filter

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICYT-Chile recibido a través del Proyecto Basal FB0821 (CCTVal), el Proyecto Fondecyt 1130861 y del Programa de Formación de Capital Humano Avanzado PCHA/Magíster Nacional/2013-22131464.

## Referencias

Anderson, B. D. O., Moore, J., 1979. Optimal filtering. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

- Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N., 2002. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing* 50, 174–188.
- Åström, K., 1980. Maximum likelihood and prediction error methods. *Automatica* 16 (5), 551 – 574.
- Åström, K., Bohlin, T., 1965. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. *Theory of Self-adaptive Control Systems; proceedings of the Second IFAC Symposium on the Theory of Self-adaptive Control Systems*.
- Bavdekar, V. A., Deshpande, A. P., Patwardhan, S. C., 2011. Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended Kalman filter. *Journal of Process Control* 21 (4), 585 – 601.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B., 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 39 (1), 1–38.
- Doucet, A., de Freitas, N., Gordon, N., 2001. *Sequential Monte Carlo methods in Practice*. Springer.
- Doucet, A., Godsill, S., Andrieu, C., 2000. On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statistics and Computing* 10 (3), 197–208.
- Doucet, A., Johansen, A. M., 2011. A tutorial on particle filtering and smoothing: fifteen years later.
- Goodwin, G. C., Payne, R., 1977. *Dynamic system identification: Experiment design and data analysis*. Academic Press.
- Gordon, N., Salmond, D., Smith, A., Apr. 1993. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings* 140.
- Guzman, J., Domínguez, M., Berenguel, M., Fuentes, J., Rodríguez, F., Reguera, P., 2010. Entornos de experimentación para la enseñanza de conceptos básicos de modelado y control. *RIAI* 7 (1).
- Hol, J. D., Schon, T. B., Gustafsson, F., sept. 2006. On resampling algorithms for particle filters. En: *Nonlinear Statistical Signal Processing Workshop, 2006 IEEE*. pp. 79–82.
- Hu, X.-L., Schön, T. B., Ljung, L., 2011. A general convergence result for particle filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing* 59 (7), 3424–3429.
- Jazwinski, A. H., 1970. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, San Diego, California.
- Jeff Wu, C. F., 1983. On the Convergence Properties of the EM Algorithm. *The Annals of Statistics* 11 (1), 95–103.
- Johansson, K. H., May 2000. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Automatic Control* 8 (3), 456–465.
- Julier, S., Uhlmann, J., Durrant-Whyte, H. F., 2000. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45 (3), 477–482.
- Julier, S. J., Uhlmann, J. K., 1997. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. En: *SPIE AeroSense Symposium*. Orlando, FL, pp. 182–193.
- Kalman, R. E., 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME J. Basic Eng.* 82, 34–45.
- Kendall, M. G., 1998. *Advanced Theory of Statistics: Classical Inference and the Linear Model*. Vol. 2A. Arnold Publishers.
- Kitagawa, G., 1996. Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. *Journal of computational and graphical statistics* 5 (1), 1–25.
- Kwakernaak, H., Sivan, R., 1972. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York.
- McLachlan, G. J., Krishnan, T., 1997. *The EM Algorithm and Extensions*. Wiley.
- McLachlan, G. J., Krishnan, T., 2008. *The EM Algorithm and Extensions (Wiley Series in Probability and Statistics)*. Wiley-Interscience.
- Rao, C. R., 1965. *Linear Statistical Inference and its Applications*. Wiley, New York.
- Ristic, B., Arulampalam, S., Gordon, N., 2004. *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House.
- Shumway, R. H., Stoffer, D. S., 2000. *Time Series Analysis and its applications*. Springer Verlag New York Inc.
- Simon, D., 2006. *Optimal state Estimation. Kalman,  $H_\infty$  and Nonlinear Approaches*. A John Wiley sons, inc., Publication.
- Smith, A., Gelfand, A., 1992. *Bayesian statistics without tears: A sampling-resampling perspective*. The American Statistical Association.
- Söderström, T., Stoica, P., 1989. *System Identification*. Prentice Hall.