

## Control conmutado para un sistema de levitación magnética con atascamiento-deslizamiento

Diana Hernández-Alcántara <sup>a\*</sup>, Luis Amézquita-Brooks <sup>b</sup>, Jesús Liceaga-Castro <sup>c</sup>, Eduardo Liceaga-Castro <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Tecnológico de Monterrey, Av. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, Monterrey, N.L., México.*

<sup>b</sup> *Universidad Autónoma de Nuevo León, Av. Universidad s/n. San Nicolás de los Garza, N.L., México.*

<sup>c</sup> *Universidad Autónoma Metropolitana, Av. San Pablo No. 180, Azcapotzalco, D.F., México.*

### Resumen

Los sistemas de levitación magnética pueden ser utilizados como dispositivos de posicionamiento de precisión. Además de ser estables en lazo abierto, las configuraciones de levitación repulsiva presentan características interesantes para este tipo de aplicaciones. No obstante, estas aplicaciones pueden presentar el fenómeno de atascamiento-deslizamiento debido a las características no lineales de la fricción del objeto manipulado. La combinación de los altos niveles de no-linealidad en las fuerzas magnéticas y del atascamiento-deslizamiento resulta en un problema de control complejo. En este artículo se presenta la identificación y el análisis dinámico de un sistema de levitación magnética experimental. Los resultados de este estudio son utilizados para el diseño de un sistema de control no lineal basado en los principios de linealización por realimentación de estado. Otros investigadores han mostrado que este método de diseño es limitado debido a la incertidumbre introducida por la fricción. En el presente trabajo se propone mejorar el desempeño de un controlador de linealización por realimentación de estado incorporando un lazo de control externo con acción integral. Este lazo externo se diseña aplicando técnicas de control lineal en el dominio de la frecuencia. Los resultados experimentales muestran que al incluir el segundo lazo se obtienen mejores respuestas transitorias y menores errores en estado estacionario. Sin embargo, la interacción del efecto integral y la fuerza de fricción provocan un movimiento de atascamiento-deslizamiento, dando lugar a oscilaciones del tipo ciclo-límite sobre una superficie de deslizamiento. Estas oscilaciones son eliminadas a través de una estrategia de control conmutado basada en la caracterización experimental de la superficie de deslizamiento. El esquema de control resultante permite preservar un bajo error en estado estacionario y al mismo tiempo elimina las oscilaciones debidas al atascamiento-deslizamiento. Esto se logra a través de un controlador muy simple, en comparación con los propuestos en reportes previos. Los resultados experimentales muestran la efectividad del esquema propuesto. *Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.*

### Palabras Clave:

Levitación magnética, control de posición, atascamiento-deslizamiento.

### 1. Introducción

Los sistemas de levitación magnética (SLM) tienen diversas aplicaciones prácticas: trenes de levitación magnética (Motoharu, Koga & Hisao, 2002), rodamientos magnéticos (Hung, Albritton & Xia, 2003), sistemas de posicionamiento (Kim, Verma & Shakir, 2007), plataformas para aislar vibraciones (Kee-Bong *et al.*, 2003) y sistemas magnéticos para lanzamientos espaciales (Powell *et al.*, 2008). En este contexto, el desarrollo de controladores de alto desempeño para SLM es necesario. Por otro lado, los SLM son inherentemente no lineales debido a las interacciones de los campos magnéticos, y pueden ser estables o inestables, dependiendo si la configuración del sistema es repulsiva o atractiva (Lee, Kim & Lee, 2006).

\* Autor en correspondencia.

Correo electrónico: A00469139@itesm.mx (Diana Hernández-Alcántara)

La configuración repulsiva en los SLM es benigna ya que resulta en un sistema estable, sin cambios de signo y monótona. Sin embargo, su carácter no lineal hace que su rango de operación se vea limitado. Adicionalmente, en sistemas de posicionamiento también se pueden presentar elementos de fricción no lineales que no se presentan en las configuraciones atractivas (Bachle, Hentzelt & Graichen, 2013). La combinación de estos fenómenos resulta en un problema complicado y que históricamente ha requerido de esquemas de control complejos (Faa-Jeng, Syuan-Yi & Kuo-Kai, 2009, Faa-Jeng, Li-Tao & Po-Huang, 2007, Faa-Jeng, Li-Tao & Po-Huang, 2007a, Wei, Guo, Huang & Wu, 2012).

Diversas técnicas de control lineal y no lineal se han propuesto para controlar SLM (Lee, Su & Yu, 2007, Trumper, Olson & Subrahmanyam, 1997, Joo & Seo, 1997, Hajjaji & Ouladsine, 2001, Ollervides *et al.*, 2010). Por otro lado, el desempeño de un sistema de control lineal rápidamente se deteriora cuando el sistema se desvía del punto de equilibrio (Ollervides *et al.*, 2010). Entonces, si se desea diseñar un sistema de control capaz de

operar con un desempeño uniforme en un amplio rango de operación, es necesario considerar una técnica de control no lineal.

En (Trumper, Olson & Subrahmanyam, 1997) y en (Joo & Seo, 1997) se propone el enfoque de linealización por retroalimentación de estados (LRE), con resultados aceptables, pero con altos niveles de error en estado estacionario. En este artículo se constata lo indicado por estos autores y también se propone un sistema de control de tipo LRE, pero como una primera etapa.

Para mejorar la respuesta transitoria se realiza un análisis estructural del modelo. Este análisis resulta en observaciones novedosas referentes a la estructura dinámica de un SLM de tipo repulsivo. Estas observaciones pueden ser utilizadas para ajustar el lazo de control de LRE.

A pesar de que el control de LRE logra respuestas transitorias en lazo cerrado aceptables, el desempeño de esta técnica es altamente dependiente de la cancelación exacta de los términos no lineales (Isidori, 1995) y estas cancelaciones están sujetas a una serie de perturbaciones difíciles de modelar, especialmente aquellas introducidas por la fricción. Adicionalmente, con la técnica de LRE sólo es posible lograr bajos niveles de error en estado estacionario, a través de altas ganancias, ya que este esquema no contiene inherentemente un factor integral. No obstante, esto no siempre es aplicable ya que se ha observado que las altas ganancias, en los esquemas LRE, tienden a inducir oscilaciones transitorias en los SLM debido a las dinámicas no modeladas (Mizutani, Katayama & Ichikawa, 2004).

En este artículo se presentan los resultados en extenso de una investigación cuyos resultados preliminares se expusieron en (Liceaga-Castro, et al.2009). En primer lugar se propone una solución novedosa para reducir el error en estado estacionario. Esta estrategia está basada en un lazo de control lineal externo al sistema de LRE. El controlador lineal se diseña utilizando técnicas de control clásico. De esta forma es posible incluir acción integral, además de considerar márgenes de estabilidad clásicos con especificaciones de desempeño en el dominio de la frecuencia, los cuales han resultado ser válidos cuando existen perturbaciones genéricas no modeladas en diversas aplicaciones de ingeniería (Nguyen, 2008, Lurie & Enright, 2011).

La interacción del objeto levitado con el medio físico introduce dinámicas de fricción altamente no lineales. En particular, la interacción de la fricción estática con el efecto integral del controlador induce el fenómeno conocido como atascamiento-deslizamiento (Marin, Alhama & Moreno, 2012). Este fenómeno representa una considerable dificultad para los sistemas de control tradicionales, y ha sido objeto de diversos estudios (Canudas-de-Wit et al, 2014, Capozza et al, 2012, Liceaga-Castro et al, 2012, Kenfack-Jiotsa et al, 2012).

El fenómeno de atascamiento-deslizamiento también ha sido reportado en SLM (Wei, Guo, Huang & Wu, 2012, Faa-Jeng, Syuan-Yi & Kuo-Kai, 2009, Faa-Jeng, Li-Tao & Po-Huang, 2007, Faa-Jeng, Li-Tao & Po-Huang, 2007a, Trisanto et al, 2006). En estos reportes se concluye que se requieren acciones correctivas adicionales para tener un sistema de control funcional. Por ejemplo, en (Faa-Jeng, Li-Tao & Po-Huang, 2007a) se desarrolla un controlador por modos deslizantes con una red neuronal de base radial. Una versión con una red neuronal recurrente se encuentra reportada en (Faa-Jeng, Syuan-Yi & Kuo-Kai, 2009). En (Faa-Jeng, Li-Tao & Po-Huang, 2007) se reporta otra estrategia en la cual se aplica un control de tipo “paso-atrás” (“backstepping”). La estrategia utilizada en (Trisanto et al, 2006)

está basada en un controlador proporcional-integral-derivativo difuso en conjunto con un lazo de corrección que incluye una red neuronal. En este caso, el desempeño y la robustez se mejoran al introducir una red neuronal recurrente, la cual actualiza la ley de control. Estos reportes muestran respuestas aceptables; sin embargo, el costo computacional de las leyes de control es considerable.

Es bien sabido que para reducir el efecto de atascamiento-deslizamiento deben utilizarse controladores sin efecto integral (Dupont, 1994). No obstante, tal controlador interferiría con el objetivo de bajo error en estado estacionario sin utilizar altos niveles de ganancia en el lazo de LRE. Por lo tanto, en este artículo se propone un controlador conmutado. Este controlador conmuta entre dos controladores con y sin efecto integral. Esta novedosa estrategia para el problema de atascamiento-deslizamiento en el SLM permite lograr, al mismo tiempo, bajo error en estado estacionario y eliminar el atascamiento-deslizamiento; un conjunto de objetivos que históricamente han sido difíciles de lograr sin incurrir en una alta complejidad en el controlador.

Finalmente, el esquema de control propuesto es implementado experimentalmente, mostrando la efectividad y robustez del diseño. Las características del sistema de control presentado, que son: amplio rango de operación, respuesta libre de atascamiento-deslizamiento, bajo error en estado estacionario y simplicidad del controlador; hacen que la estrategia presentada sea atractiva, especialmente cuando se compara con los reportes existentes.

El artículo tiene la siguiente estructura: En la Sección 2 se presenta y se analiza el modelo del sistema de levitación magnética. Este análisis resulta en observaciones importantes que son útiles en las secciones posteriores. En la Sección 3 el sistema de levitación experimental es identificado. El diseño de un controlador no lineal basado en la linealización por realimentación de estado se reporta en la Sección 4. En la Sección 5 se propone un estimador de estado no lineal y se prueba experimentalmente. Con el objetivo de mejorar el error en estado estacionario, se diseña un lazo de control externo con efecto integral en la Sección 6. El efecto integral de este controlador induce el movimiento de atascamiento-deslizamiento. En la Sección 7 se diseña y se prueba una ley de control que elimina el atascamiento-deslizamiento. Las conclusiones finalizan el artículo.

## 2. Modelo dinámico del sistema de levitación magnética

El sistema de levitación magnética, *Magnetic Levitation System* de ECP730 Systems, utilizado en los experimentos se muestra en la Figura 1.



Figura 1: Sistema de levitación magnética experimental.

Este sistema consiste de una bobina que produce un campo magnético en respuesta a una corriente eléctrica, un imán de neodimio de alta densidad de campo, una barra de vidrio y un sensor laser para medir la posición del imán. La resolución especificada del sensor es de 10µm; sin embargo, una caracterización experimental del sensor reveló una resolución práctica de 80µm. Al energizar la bobina, el imán levita a lo largo de la barra de vidrio debido a la fuerza magnética repulsiva.

Las fuerzas que actúan en el imán son: la fuerza magnética de la bobina, la gravedad y la fricción. De acuerdo con el análisis de balance de fuerzas, la ecuación dinámica del movimiento es:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} = F_u - mg_r \tag{1}$$

Donde  $m$  es la masa del imán,  $y$  es la distancia entre la bobina y el imán en centímetros,  $c$  es el coeficiente de fricción,  $g_r$  es la aceleración debido a la fuerza de gravedad y  $F_u$  es la fuerza magnética. El movimiento del disco está mecánicamente restringido a  $y \in [0, 10]$  cm.

La fuerza magnética puede ser modelada como (Moon, 1994):

$$F_u = \frac{u}{b(y+a)^4} \tag{2}$$

Donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $u \in [-3.5, 3.5]V$  es el esfuerzo de control en Volts.

De (1) y (2), la ecuación no lineal de movimiento resulta ser:

$$\ddot{y} = -c_1\dot{y} - g_r + \frac{1}{mb(y+a)^4}u \tag{3}$$

con  $c_1 = c/m$ .

Una realización en espacio de estado de (3) está dada por:

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 \\ -g_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mb(x_1+a)^4} \end{bmatrix}u \tag{4}$$

$$y = x_1; \quad \dot{y} = x_2; \quad x = [x_1 \quad x_2]^T; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_1 \end{bmatrix}$$

### 2.1. Análisis estructural del modelo dinámico.

En esta sección se presenta brevemente el análisis de la estructura del modelo (3). Que está formado por un sistema de lazo cerrado no lineal compuesto por una función sin memoria no lineal y un sistema de segundo orden lineal invariante en el tiempo.

Para generalizar el análisis se desprecia la fuerza de gravedad y se considera que la matriz  $A$  tiene valores propios arbitrarios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , tal como se muestra en la Figura 2. El sistema de la Figura 2 tiene una estructura similar a la de (4), en donde la función (2) es el elemento de retroalimentación no lineal asociado con la dinámica lineal definida por (3), la cual se puede expresar en el dominio de la frecuencia. Es importante notar que el sistema de la Figura 2 no es completamente equivalente a (4) ya que se ha

despreciado la gravedad y los valores propios de  $A$  son en realidad 0 y  $-c_1$ . No obstante, el presente análisis tiene como objetivo estudiar de manera aislada el efecto que tienen los valores propios de  $A$  en un sistema con la estructura de (3).

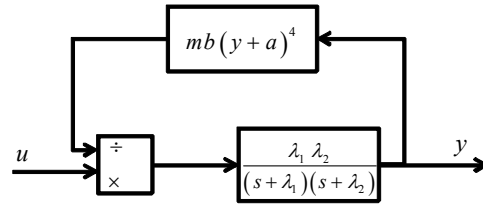


Figura 2: Representación de la estructura del modelo (4).

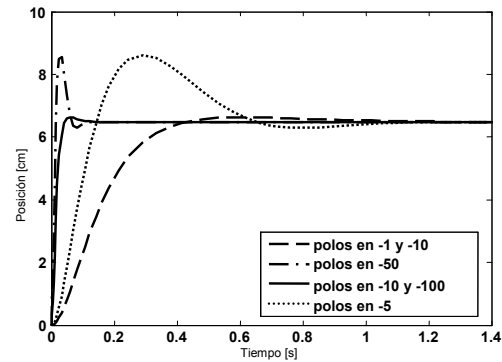


Figura 3: Respuesta al escalón simulada para diferentes ubicaciones de polos.

Se observó una importante relación entre la ubicación *relativa* de los valores propios de  $A$  y la respuesta transitoria del sistema de la Figura 2, dicha respuesta se ilustra en la Figura 3. En esta figura se presentan las respuestas al escalón unitario cuando los valores propios de  $A$  son:  $\{-1, -10\}$ ,  $\{-5, -5\}$ ,  $\{-10, -100\}$  y  $\{-50, -50\}$  considerando  $mb = 1 \times 10^{-6}$  y  $a = 7$ . En los casos segundo y cuarto se observa una respuesta con un alto nivel de sobretiro. Es claro que la parte lineal del sistema es sobreamortiguada y la linealización del sistema (4) no tiene ceros finitos. Casos adicionales se resumen en la Tabla 1. Es importante notar que sólo las características de sobretiro y tiempo de establecimiento son relevantes en este estudio, la amplitud de las respuestas no es significativa ya que el sistema de la Figura 2 no contempla la gravedad, lo cual tiene el efecto de cambiar la ganancia en estado estacionario.

Tabla 1: Resumen de características transitorias del sistema de la Figura 2

| Valores propios de $A$ | Tiempo de establecimiento (al 98%) | Sobretiro |
|------------------------|------------------------------------|-----------|
| $\{-1, -1\}$           | 4.47s                              | 33.5%     |
| $\{-1, -10\}$          | 0.76s                              | 2.5%      |
| $\{-5, -5\}$           | 0.89s                              | 33.5%     |
| $\{-5, -50\}$          | 0.15s                              | 2.5%      |
| $\{-10, -10\}$         | 0.44s                              | 33.5%     |
| $\{-10, -100\}$        | 0.07s                              | 2.5%      |
| $\{-50, -50\}$         | 0.08s                              | 33.5%     |

De estas respuestas se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Las no linealidades del sistema (4) pueden producir respuestas con altos niveles de sobretiro aún y cuando los valores propios de  $A$  son reales y el sistema no tiene dinámica interna.
- Los sobretiros de las respuestas se atenúan cuando los valores propios de  $A$  tienen separación de ancho de banda. Es decir, hay un polo dominante. Este fenómeno se presentó también para diversas combinaciones de valores propios. Los resultados de las simulaciones sugieren que entre mayor sea la separación de los valores propios de la matriz  $A$  de (4), mayor será la reducción del sobretiro. Esto indica que los sobretiros observados en la Figura 3 pueden ser reducidos si el subsistema lineal de la Figura 2 tiende a ser pasivo.
- Este fenómeno es peculiar de la estructura del modelo del sistema en lazo abierto. No obstante, en el proceso de ajuste del lazo de control no lineal se observó que esta característica también se presenta en las pruebas experimentales de lazo cerrado, aunque en menor magnitud que en las simulaciones de la Figura 3.

Las observaciones anteriores *sugieren* que el sobretiro de la respuesta transitoria del sistema se reducirá si la dinámica lineal impuesta a través del esquema de LRE es tal que los polos se ubiquen tan separados como sea posible. No obstante, en la práctica dicha separación está limitada por la máxima ganancia de retroalimentación que permiten las restricciones físicas del proceso, tales como la saturación del actuador.

### 3. Identificación del sistema de levitación magnética

Considerando que el sistema (3) ha alcanzado el estado estacionario, es decir  $\dot{y} = \ddot{y} = 0$  se tiene que:

$$u = mg_r b(y+a)^4 \quad (5)$$

El valor de  $u$  para una posición  $y$  en estado estacionario puede obtenerse experimentalmente aplicando a la entrada  $u$  un voltaje constante y midiendo la distancia  $y$  resultante. Por ejemplo, la relación entre el estado estacionario de  $u$  y  $y$  para una serie de experimentos se muestra en la Figura 4. Si se considera que el peso del imán puede ser medido (en este caso  $w_{gr}=138.31 \text{ Kg.cm/s}^2$ ), entonces los coeficientes  $a$  y  $b$  pueden estimarse utilizando el método de mínimos cuadrados, como se muestra en la Figura 4. De este proceso resultó que  $a = 7.17184 \text{ [cm]}$  y  $b = 1.6163 \times 10^{-6} \text{ [V/N.cm}^4\text{]}$ . El rango de esta caracterización está dado por  $y \in [0.33, 3.82] \text{ cm}$ .

El coeficiente  $c_1$  puede ser estimado utilizando una ley de control que cancele la no linealidad de la función de entrada, por ejemplo:

$$u = mb(x_1 + a)^4 (k_p(r - x_1) + g_r) \quad (6)$$

Al utilizar la ley de control (6) con el sistema (3) se obtiene un sistema lineal, que puede ser representado por medio de la siguiente función de transferencia:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p}{s^2 + c_1 s + k_p} \quad (7)$$

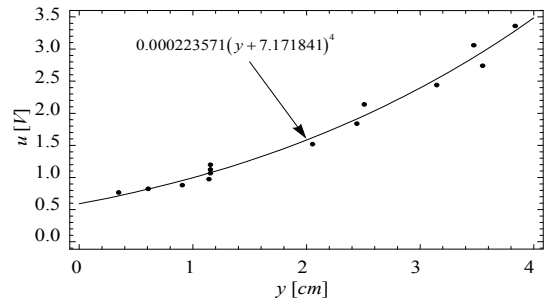


Figura 4: Gráfica de la posición del imán vs esfuerzo de control para una serie de experimentos.

A partir de la respuesta experimental al escalón de este sistema es posible estimar  $c_1$ . Por ejemplo, para un sistema de segundo orden (7)  $c_1$  equivale a  $2\xi\omega_n$  donde  $\xi$  es el coeficiente de fricción y  $\omega_n = \sqrt{k_p}$  es la frecuencia de oscilación natural no amortiguada. En la Figura 5 se presenta una serie de respuestas experimentales al escalón con amplitud normalizada utilizando la ley de control (6) con  $k_p = 1124$ . El propósito de estos experimentos consiste en aislar el efecto del parámetro  $c_1$ . Los resultados muestran que los periodos de oscilación de las respuestas son casi iguales en todos los experimentos; sin embargo, el sobretiro parece ser diferente. Esto concuerda con lo dicho anteriormente si se considera que existe incertidumbre en el parámetro  $c_1$ . Los valores de  $c_1$  fueron calculados de acuerdo al nivel de sobretiro de los experimentos de la Figura 5 y resultaron estar en el rango de [5.032, 15.29]. Por conveniencia, se considera que el valor nominal de  $c_1$  es el promedio de este rango: 8.563. No obstante, es claro que hay un alto grado de incertidumbre en este parámetro, el cual está directamente relacionado con el coeficiente de fricción.

Finalmente, en la Figura 6 se muestra una comparación entre la simulación digital del modelo resultante y la respuesta experimental en lazo abierto del sistema. La figura muestra que el modelo contiene las principales características del sistema. La principal diferencia entre el modelo y el sistema real es el efecto no lineal de la fricción.

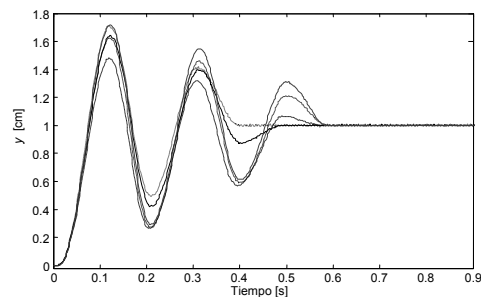


Figura 5: Respuesta experimental de normalizada usando el controlador (6).

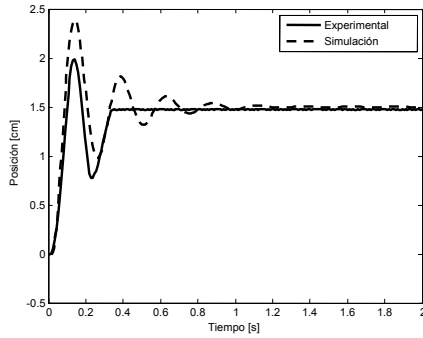


Figura 6: Comparación de la respuesta en lazo abierto experimental y la respuesta simulada.

No se recomienda la caracterización completa de la fricción no lineal debido a que el modelo resultaría muy complejo y aun así la incertidumbre permanecería. Aunque existen modelos capaces de representar la fricción con precisión, los parámetros de dichos modelos tienen un alto nivel de incertidumbre (Marin, Alhama & Moreno, 2012). Por lo tanto, el uso de modelos no lineales de fricción tiene pocas ventajas prácticas e introduce un alto nivel de complejidad en el análisis. Adicionalmente, en estudios teóricos sobre el atascamiento-deslizamiento se ha observado que este fenómeno puede ser caracterizado de forma más conveniente a través del estudio de la trayectoria del sistema en el plano de fase en lugar de resolver las ecuaciones del modelo (Kenfack-Jiotsa *et al.*, 2012).

En las siguientes secciones de este artículo se presentan los efectos no lineales de la fricción a través de las trayectorias experimentales de los estados en el plano de fase.

#### 4. Control No Lineal: Linealización por realimentación de estado.

La representación en espacio de estado de (3) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (8)$$

con:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -c_1 x_2 - g_r \end{bmatrix}^T, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{mb(x_1+a)^4} \end{bmatrix}^T, \quad h(x) = x_1$$

Dado que  $L_g h(x) = 0$  y  $L_g L_f h(x) = \frac{1}{mb(x_1+a)^4} \neq 0$ , donde  $L$  es el operador de la derivada de Lie, el grado relativo de (3) es dos. Esto es, igual que el grado del sistema. Esto implica que la linealización entrada-salida del sistema no tiene dinámicas internas o dinámica cero (Isidori, 1995). El controlador por realimentación de estado que linealiza la relación entrada-salida es:

$$u(t) = (L_g L_f h(x))^{-1} (-L_f^2 h(x) + g_r + v(x)) \quad (9)$$

Donde  $v(x)$  se define para ubicar los polos del sistema lineal equivalente:

$$v(x) = -k_2 x_2 - k_1 x_1 + k_1 r_u \quad (10)$$

$k_1$  y  $k_2$  son las ganancias de realimentación de los estados y  $r_u$  es la referencia del sistema linealizado. Como se estableció en la Sección 2, es conveniente ubicar los polos del sistema tan separados como sea posible. La separación de los polos en lazo cerrado está limitada por el máximo tiempo de establecimiento deseado y por la máxima ganancia en lazo cerrado permitida por los anchos de banda de los elementos del sistema de control. En la plataforma experimental se estableció un tiempo de establecimiento de  $\frac{1}{4}$  segundo como especificación de diseño del sistema de LRE, por lo que se ubica al polo lento en  $s = -16$ . El otro polo se ubicó, acorde al análisis previo en lazo abierto de la Sección 2, en  $s = -160$ . Posteriormente se ajustaron las ganancias con base a las respuestas experimentales hasta obtener una respuesta aceptable. El proceso de ajuste consistió en reducir progresivamente el ancho de banda del polo rápido, ya que se encontró que el sistema no puede operar a la velocidad necesaria para ubicar el polo en  $-160$ . El control resultante ubica los polos en  $s = -16$  y  $s = -84$  con ganancias  $k_1 = 1344$  y  $k_2 = 100$ .

#### 5. Diseño del observador de estado

Para implementar la ley de control (9), se requiere de un observador de estado ya que sólo el primer estado es medido. Se encontró que un observador Luenberger clásico no generaba estimaciones de estado aceptables, por lo que fue necesario utilizar un observador de estado no lineal.

El sistema (3) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \bar{g}(y, u) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (11)$$

Un observador apropiado para esta clase de sistemas está dado por (Khalil, 2002):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \bar{g}_0(y, u) + H(y - C\hat{x}) \quad (12)$$

Donde  $\bar{g}_0$  es el modelo nominal de  $\bar{g}$ ,  $\hat{x}$  es la estimación de  $x$  y  $H = [h_1 \ h_2]^T$ . El sistema (3) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi(x, \gamma(x)) \end{aligned} \quad (13)$$

Donde  $\phi(x, u) = -c_1 x_2 - g_r + \frac{1}{mb(x_1+a)^4} u$  y  $u = \gamma(x)$  es una ley de control estabilizante. Entonces el observador está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + h_1 (y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \phi_0(\hat{x}, u) + h_2 (y - \hat{x}_1) \end{aligned} \quad (14)$$

Donde  $\phi_0$  es el modelo nominal de  $\phi$ .

El error de estimación resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -h_1 e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -h_2 e_1 + \delta(x, \hat{x}) \end{aligned} \quad (15)$$



Con  $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ ,  $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$  y  $\delta(x, \hat{x}) = \phi(x, \gamma(\hat{x})) - \phi_0(\hat{x}, \gamma(\hat{x}))$ . Si  $\delta(x, \hat{x}) \approx 0$ , la dinámica del error de estimación es lineal y está definida por los valores propios de:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -h_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Esto permite diseñar la ganancia del observador  $H$  considerando las condiciones nominales.

Cuando el valor de  $\delta$  no es despreciable, en (Khalil, 2002) se muestra que la dinámica del error de estimación puede estabilizarse con ganancias  $H$  suficientemente grandes. A través de experimentación se encontró que las ganancias del observador  $h_1=190$  y  $h_2=8360$  proporcionan resultados aceptables. Finalmente, es interesante destacar que el observador (14) resulta ser un observador típico de Luenberger más un elemento de entrada no lineal que compensa el efecto de la fuerza electromagnética.

Utilizando el controlador (9) y el observador (14) se obtuvo la respuesta experimental al escalón del sistema mostrada en la Figura 7. El desplazamiento de 1.2cm es considerando como un movimiento de muy alto rango para esta plataforma (Mizutanil, Katayama & Ichikawa, 2004).

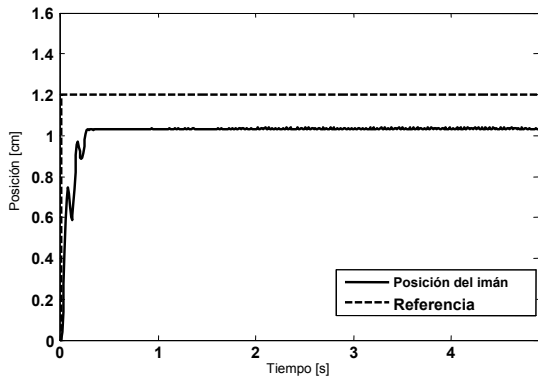


Figura 7: Respuesta experimental al escalón del sistema utilizando el controlador (9) y el observador (14).

La respuesta es aceptable y comparable con las respuestas reportadas para este sistema utilizando LRE, aunque el rango de movimiento obtenido es mayor que en (Mizutanil, Katayama & Ichikawa, 2004, Joo & Seo, 1997, Trumper, Olson & Subrahmanyam, 1997). El efecto de la cancelación no perfecta debido a incertidumbre paramétrica y a perturbaciones causadas principalmente por la fuerza de fricción, da lugar a errores en estado estacionario y oscilaciones durante el transitorio. Este es un problema bien conocido de los esquemas de control basados en la cancelación, como lo es LRE. Por otro lado, debido a que el método de LRE no contiene un factor integral, sólo es posible lograr bajo error en estado estacionario a través de altas ganancias de realimentación. Sin embargo, al aumentar dicha ganancia aumentan las oscilaciones transitorias introducidas por las dinámicas no modeladas. Las oscilaciones mostradas en la Figura 7 se encuentran cercanas al límite práctico. Por lo tanto, una mayor reducción del error en estado estacionario por medio del incremento de las ganancias de realimentación no es recomendada.

### 6. Controlador con efecto integral

Con el objetivo de mejorar la respuesta transitoria y eliminar el error en estado estacionario, se diseñó un lazo de control externo proporcional-integral (PI). El diseño de este controlador se llevó a cabo considerando el modelo nominal del sistema de lazo cerrado obtenido al incorporar el controlador LRE. Esta configuración se muestra en la Figura 8.

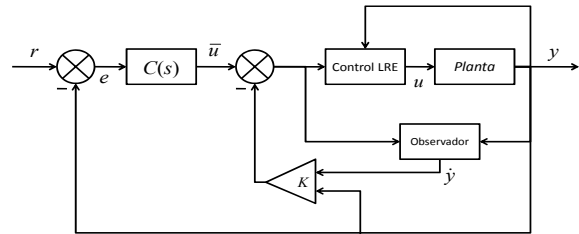


Figura 8: Diagrama de bloques del sistema de control con efecto integral.

A partir del modelo nominal, se diseñó el controlador de acuerdo con las técnicas clásicas de análisis en el dominio de la frecuencia también llamadas “Bode shaping”. El controlador se diseñó buscando cumplir con especificaciones de  $50^\circ$  de margen de fase y un margen de ganancia mayor a 10dB, que son especificaciones de robustez típicas (Lurie & Enright, 2011). Así mismo se especifica un ancho de banda de 40rad/s con el objetivo de fijar una dinámica con transitorio de 0.1s (Lurie & Enright, 2011). Posteriormente se implementó dicho controlador y se ajustó con base a las respuestas experimentales. El controlador ajustado (17) resulta tener un menor ancho de banda (32.2rad/s) y un margen de fase ( $52.5^\circ$ ) ligeramente mayor que el especificado, Figura 9.

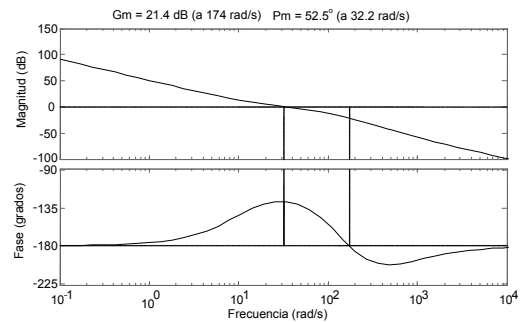


Figura 9: Diagrama de Bode del sistema de control de la Figura 8 utilizando el controlador (17).

$$C(s) = \frac{\bar{u}(s)}{e(s)} = \frac{9.751s + 59.96}{s} \quad (17)$$

La Figura 10 muestra la respuesta experimental del sistema de control de la Figura 8 utilizando el controlador (17). Comparando esta figura con la Figura 7 es posible observar que el controlador del lazo externo ayuda a reducir el nivel de oscilaciones, reduce significativamente el error en estado estacionario y aumenta aún más el rango de operación del dispositivo. No obstante, la interacción entre el controlador de efecto integral y la fricción induce una dinámica de atascamiento-deslizamiento. El primer ciclo de esta dinámica se puede apreciar mejor si se toma en

cuenta el esfuerzo de control vinculado al mismo experimento, mostrado en la Figura 11.

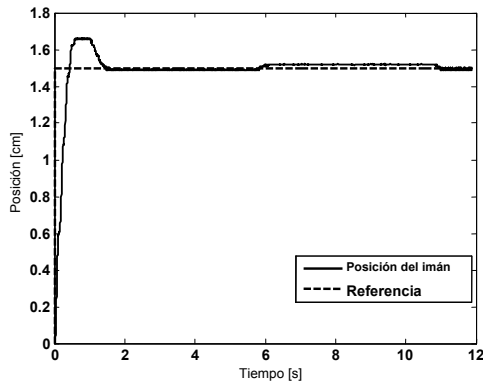


Figura 10: Respuesta experimental al escalón del esquema de control de la Figura 8 y el controlador (17).

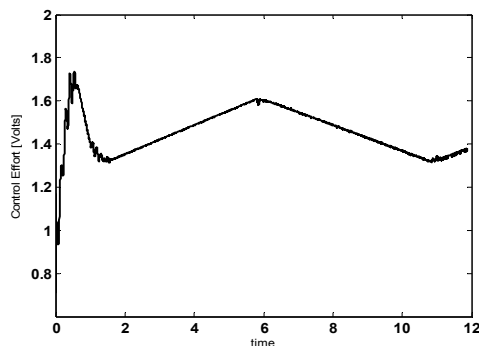


Figura 11: Esfuerzo de control para el experimento de la Figura 10.

El fenómeno de atascamiento-deslizamiento se puede representar como una superficie de deslizamiento definida por las trayectorias de los estados en el plano de fase (Liceaga-Castro *et al.*, 2012, Kenfack-Jiotsa *et al.*, 2012, Navarro-Lopez & Suarez, 2005). La Figura 12 muestra el plano de fase del experimento de la Figura 10 considerando el error del sistema de control  $e(t)$ , la derivada de dicho error  $\dot{e}(t)$  y el esfuerzo de control (Figura 11).

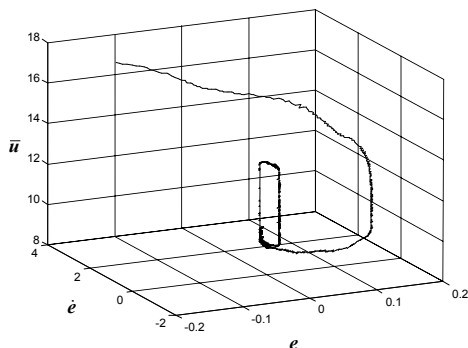


Figura 12: Caracterización de la superficie de deslizamiento.

Es bien sabido que la utilización de controladores con efecto integral puede incitar la aparición del fenómeno de atascamiento-deslizamiento. Si bien con el controlador no lineal no se observa el fenómeno de atascamiento-deslizamiento (Figura 7), con dicho controlador se tienen altos niveles de error en estado estacionario. En la siguiente sección se propone una estrategia de control para solucionar el problema de atascamiento-deslizamiento.

### 7. Control conmutado

Como se ha visto, tanto el sistema de control con efecto integral como el de LRE tienen ventajas y desventajas. En particular, se proponen las siguientes especificaciones de diseño: bajo nivel de error en estado estacionario y que al mismo tiempo no se presente atascamiento-deslizamiento. Para lograr esto se propone la siguiente estrategia general:

1. Utilizar un controlador de efecto integral para llevar al sistema a una región cercana a la superficie de atascamiento-deslizamiento.
2. Una vez que el sistema se encuentre en dicha región:
  - a. Eliminar el efecto integral del sistema de control preservando el último valor del esfuerzo de control. Se requiere preservar este valor para mantener al sistema con un bajo nivel de error.
  - b. Cerrar un lazo de control sin efecto integral de alta ganancia. Este lazo ayuda a reducir aún más el error en estado estacionario sin incurrir en oscilaciones ya que el sistema se encuentra ahora operando en una región con alto nivel de fricción.

El primer paso para poder implementar esta estrategia consiste en caracterizar en forma precisa la superficie de deslizamiento asociada al fenómeno de atascamiento-deslizamiento. Esta caracterización se llevó a cabo realizando una serie de experimentos similares a los de la Figura 12. De esta forma se concluyó que la superficie de deslizamiento está contenida en la región del espacio de estado definida por  $|e| < 0.04$  y  $|\dot{e}(t)| < 0.1$ .

Considerando la estrategia de control descrita anteriormente, es posible proponer la siguiente ley de control conmutada (mostrada en diagrama de bloques en la Figura 13).

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_a(t) & \text{si } |e(t)| > 0.04 \text{ y } |\dot{e}(t)| > 0.1 \\ u_b(t) + u_a(t) & \text{si } |e(t)| \leq 0.04 \text{ y } |\dot{e}(t)| \leq 0.1 \end{cases} \quad (18)$$

Donde:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= 59.96x_a(t) + 9.71e_a(t); & \dot{x}_a(t) &= e_a(t) \\ u_b(t) &= -931.2x_b(t) + 18.83e(t); & \dot{x}_b(t) &= -100x_b(t) + e(t) \\ e_a(t) &= \begin{cases} e(t) & \text{si } |e(t)| > 0.04 \text{ y } |\dot{e}(t)| > 0.1 \\ 0 & \text{si } |e(t)| \leq 0.04 \text{ y } |\dot{e}(t)| \leq 0.1 \end{cases} \end{aligned}$$

Las ecuaciones  $u_a(t) = 59.96x_a(t) + 9.71e_a(t)$  y  $\dot{x}_a(t) = e_a(t)$  representan al controlador (17) con una señal de error  $e_a(t)$  que se desactiva cuando se detecta que el sistema se aproxima a la superficie de atascamiento-deslizamiento. Por otro lado, las ecuaciones  $u_b(t) = -931.2x_b(t) + 18.83e(t)$  y  $\dot{x}_b(t) = -100x_b(t) + e(t)$  modelan al controlador de alta ganancia

sin efecto integral. Dicho controlador también puede ser expresado en función de transferencia como:

$$C(s) = \frac{18.8286(s + 50.55)}{(s + 100)} \quad (19)$$

Por otro lado, si se denota como  $u_{aS}$  al valor de  $u_a(t)$  al momento de entrar a la superficie de deslizamiento, entonces la señal de control en estas condiciones puede escribirse como  $\bar{u}(t) = u_b(t) + u_{aS}$ .

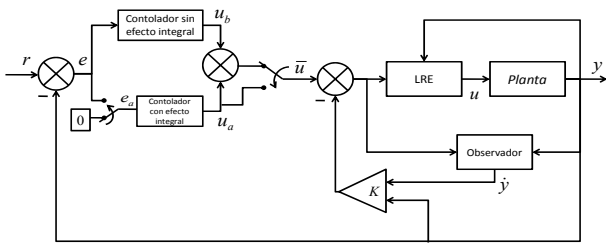


Figura 13: Diagrama de bloques del sistema de control conmutado.

El controlador (19) se diseñó considerando al sistema lineal resultante obtenido por medio de la LRE (Figura 8) y utilizando el valor máximo estimado para el parámetro  $c_1$  (Sección 3). El objetivo de este controlador es introducir una reducción adicional del error en estado estacionario de al menos 20dB y un alto grado de amortiguamiento. En la Figura 14 se muestra el diagrama de Bode de lazo abierto utilizando el controlador (19) con el esquema de la Figura 8.

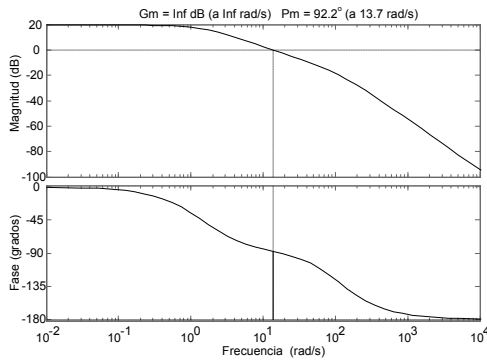


Figura 14: Diagrama de Bode de lazo abierto utilizando el controlador (19) y el esquema de linealización de la Figura 8.

La respuesta experimental del sistema de control completo se muestra en la Figura 15. En dicha figura se puede observar que el controlador conmutado es capaz de eliminar el efecto de atascamiento-deslizamiento en estado estacionario manteniendo un bajo nivel de error en estado estacionario. El nivel de error resultante fue menor a 120µm, menos del doble de la resolución práctica del sensor. Esto permite afirmar que el error en estado estacionario fue prácticamente eliminado dentro de los límites del sistema físico.

Finalmente, la Figura 16 muestra el esfuerzo de control vinculado al experimento de la Figura 15. En esta figura se observa claramente la conmutación de las leyes de control. Se puede notar que dicha conmutación no provoca un cambio

abrupto de alta magnitud en la ley de control. Esto se debe a la estructura de la ecuación (18), especialmente a que en el segundo caso se considera a  $u_{aS}$ . Por otro lado, la conmutación en la ley de control ocurre cuando el sistema empieza a actuar sobre la superficie de atascamiento-deslizamiento.

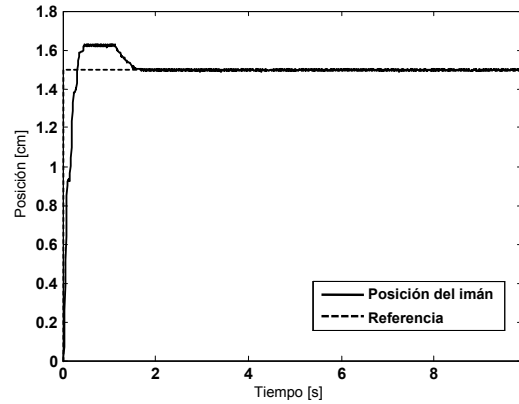


Figura 15: Respuesta experimental utilizando el esquema de la Figura 13.

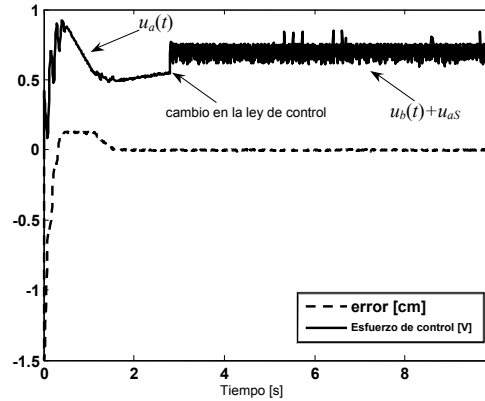


Figura 16: Esfuerzo de control y señal de error para el experimento de la Figura 15.

A continuación se muestra la respuesta del sistema de control propuesto en condiciones de operación de seguimiento. Esto implica, a diferencia de la condición de regulación, que el sistema estará entrando y saliendo de la condición de conmutación.

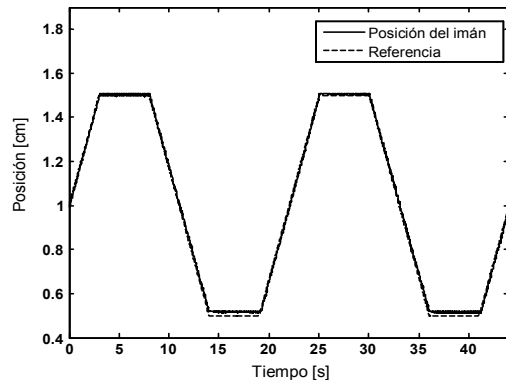


Figura 17: Respuesta experimental a una referencia tipo trapezoidal.



En la Figura 17 se incluye la respuesta del SLM a una referencia tipo trapezoidal. De esta respuesta es posible observar que la propuesta de control conmutada permite operar al SLM en amplios rangos de operación con un excelente desempeño.

Por otro lado, la Figura 18 incluye la señal de control correspondiente al experimento de la Figura 17. A partir de estas figuras es posible notar que el sistema de seguimiento tiene un nivel de error mayor cuando el imán se encuentra en posiciones inferiores y el sistema opera con el controlador sin efecto integral. Esto indica que a menores alturas se requiere un mayor nivel de ganancia para eliminar el error en estado estacionario. Sin embargo el nivel de error está dentro del rango  $|e| < 0.04$ , definido en la ley de control (18).

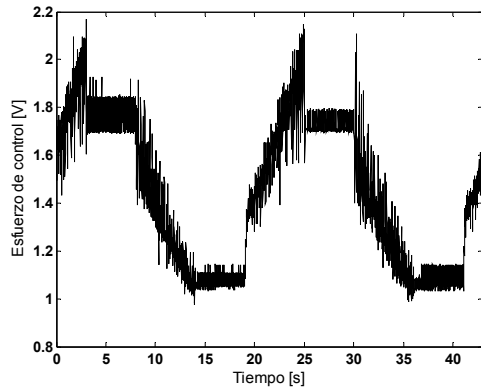


Figura 18: Esfuerzo de control para el experimento de la Figura 17.

Finalmente, se presenta una serie de experimentos con los cuales se prueba el desempeño del sistema cuando este opera en regiones cercanas a la zona de conmutación. La Figura 19 resume la respuesta del sistema utilizando referencias de tipo senoidal a diferentes frecuencias, mientras que la Figura 20 presenta los esfuerzos de control correspondientes.

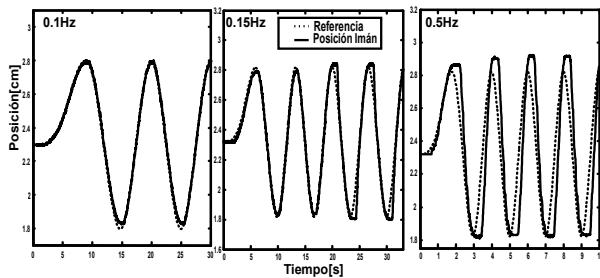


Figura 19: Respuestas de seguimiento a referencias de tipo senoidal.

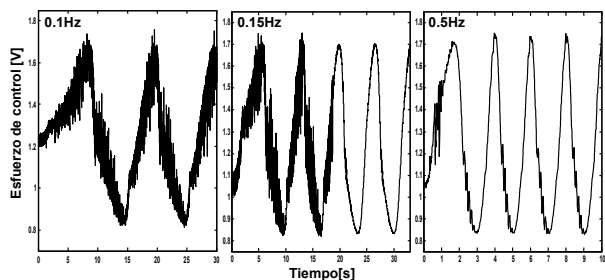


Figura 20: Esfuerzos de control para los experimentos de la Figura 19.

En estas figuras se observa que a bajas frecuencias (0.1Hz) el sistema opera con el controlador de alta ganancia sin efecto integral. En este modo de operación el sistema es capaz de alcanzar un buen nivel de desempeño en el seguimiento, aprovechando el amortiguamiento adicional que introduce la fricción estática en condiciones de baja velocidad. Con referencias de mayor frecuencia (0.5Hz), el sistema opera con el controlador de efecto integral. Con este controlador se puede operar a mayores velocidades (condición en la que se reduce el efecto de la fricción estática), no obstante el desempeño del seguimiento es menor. Finalmente, se buscó experimentalmente una frecuencia media tal que se pudiera apreciar la conmutación de la ley de control. En particular, con una referencia de 0.15Hz se pudo observar que el sistema opera inicialmente con el controlador sin efecto integral y este conmuta al controlador con efecto integral durante el experimento. Esto muestra que el sistema de conmutación es efectivo para detectar el modo de operación del sistema (lento o rápido) y aprovecha las características de la fricción estática en cada una de estas condiciones.

## 8. Conclusión

En este artículo se describe el diseño de un controlador de lazo cerrado para un sistema de levitación magnética que presenta el fenómeno de atascamiento-deslizamiento. Para poder obtener un modelo de diseño adecuado fue necesario aplicar un procedimiento de identificación apropiado. Un análisis de la estructura de dicho modelo reveló interesantes características que ayudaron a establecer las especificaciones de los lazos de control.

En una primera etapa se diseñó e implementó una ley de control basada en linealización por retroalimentación de estados. No obstante, debido al alto nivel de error en estado estacionario y a la poca robustez de este esquema de control, se diseñó un lazo de control externo con efecto integral basado en especificaciones de control clásico en el dominio de la frecuencia. Aunque este controlador redujo significativamente el nivel de error y de oscilaciones en el transitorio, también introdujo el fenómeno de atascamiento-deslizamiento debido al efecto integral.

Para eliminar el atascamiento-deslizamiento y aprovechar, al mismo tiempo, las ventajas del controlador con efecto integral, se diseñó un esquema de control conmutado. Este esquema de control se basa en la caracterización experimental de la superficie de atascamiento-deslizamiento.

Finalmente, las pruebas experimentales muestran que el esquema conmutado fue capaz de eliminar el atascamiento-deslizamiento, manteniendo un bajo nivel de error en estado estacionario. Una característica relevante es que el nivel de complejidad del controlador conmutado es mucho menor al de otras soluciones reportadas en bibliografía.

## English Summary

### Switched Control of a Magnetic Levitation System with Stick-Slip

#### Abstract

Magnetic levitation systems can be used in many applications such as precise positioning. Repulsive configurations are open-

loop stable and offer other interesting characteristics. However, these applications may present stick-slip effects due to the friction forces. The combination of the highly non-linear magnetic forces and the stick-slip effects result in a complex control problem. This article presents the identification, model analysis and control system design for an experimental repulsive magnetic levitation system. The design is based on the principles of state feedback linearization. In previous reports it was shown that the performance of feedback linearization control of similar devices is degraded by the parameter uncertainty introduced by the friction. In this work, the performance of the feedback linearization control is improved by adding an outer-loop linear controller with integral action. This controller was designed according to classical frequency analysis. Experimental results show better transient responses and low steady state errors. Nevertheless, the integral action and the friction force increase the stick-slip oscillations. Stick-slip motion is eliminated through a switching control strategy based on the experimental characterization of the stick-slip sliding surface. The resulting control scheme allows preserving the low steady state error of the integral control law and eliminates the stick-slip motion. This is accomplished through a relatively simple controller when compared with previous reports. Experimental results show the effectiveness of the proposed scheme.

#### Keywords:

Magnetic levitation, position control, stick-slip

#### Referencias

- Bachle, T., Hentzelt, S. & Graichen, K. 2013, Control Engineering Practice, 21, No. 9, 1250-1258. doi: 10.1016/j.conengprac.2013.04.009
- Canudas-de-Wit, C., Aracil, J., Gordillo, F. & Salas, F. 2014, The oscillations killer: a mechanism to eliminate undesired limit cycles in a class of nonlinear systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 24, No. 1, 39-53. doi: 10.1002/rnc.2873
- Capozza, R., Vanossi, A., Vezzani, A. & Zapperi, S. 2012. Triggering Frictional Slip by Mechanical Vibrations. Tribology Letters, 95-102. doi:10.1007/s11249-012-0002-0
- Dupont, P. E. 1994. "Avoiding stick-slip through PD control". IEEE Transactions on Automatic Control, 39, No.5, 1094-1097. doi:10.1109/9.284901
- Navarro-Lopez, E.M. & Suarez, R. 2005. Vibraciones mecanicas en una sarta de perforacion: problemas de control. Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial. 2 No. 1, 43-54.
- Faa-Jeng, F., Syuan-Yi, C. & Kuo-Kai, S. 2009. Robust Dynamic Sliding-Mode Control Using Adaptive RENN for Magnetic Levitation System. IEEE Transactions on Neural Networks, 938-951. doi:10.1109/TNN.2009.2014228
- Faa-Jeng, L., Li-Tao, T. & Po-Huang, S. 2007. Intelligent Adaptive Backstepping Control System for Magnetic Levitation Apparatus. IEEE Transactions on Magnetics, 2009-2018. doi:10.1109/TMAG.2006.890325
- Faa-Jeng, L., Li-Tao, T. & Po-Huang, S. 2007. Intelligent Sliding- Mode Control Using RBFN for Magnetic Levitation System. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1752-1762. doi:10.1109/TIE.2007.894710
- Hajjaji, A. E. & Ouladsine, M. 2001. Modeling and Nonlinear Control of Magnetic Levitation System. IEEE Transactions on industrial electronics, 831-838. doi:10.1109/41.937416
- Hung, J. Y., Albritton, N. G. & Xia, F. 2003. Nonlinear control of a magnetic bearing system. Mechatronics, 621-637. doi:10.1016/S0957-41580200034-X
- Isidori, A. 1995. Nonlinear control systems 3rd ed. Springer, London UK.
- Ollervides, J., Santivañez, V., Llama, M. & Dzul, A. 2010. Aplicación de Control Borroso a un Sistema de Suspensión Magnética: Comparación Experimental, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 7, No. 3, 63-71. doi: 10.4995/RIAI.2010.03.06
- Joo, S. & Seo, J. H. 1997. Design and Analysis of the Nonlinear Feedback Linearizing Control for an Electromagnetic Suspension System. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 51, 135-144. doi:10.1109/87.553672
- Kee-Bong, C., Geun, C. Y., Tadahiko, S. & Akira, S. 2003. Stabilization of one degree-of-freedom control type levitation table with permanent magnet repulsive forces. Mechatronics, 587-603. doi:10.1016/S0957-41580200032-6
- Kenfack-Jiotsa, A., Motchongom-Tingue, M., Tsoigni-Fozap, D. & T.C., K. 2012. Dry friction: motions - map, characterization and control. European Physical Journal. doi:10.1140/epjb/e2012-20616-3
- Khalil, H. 2002. Nonlinear Systems. Upper Saddle River N.J.: Prentice Hall.
- Kim, W.-j., Verma, S. & Shakir, H. 2007. Design and precision construction of novel magnetic-levitation-based multi-axis nanoscale positioning systems. Precision Engineering, 337-350. doi:10.1016/j.precisioneng.2007.02.001
- Lee, H., Kim, K. & Lee, J. 2006. Review of Maglev Train Technologies. IEEE Transactions on magnetics, 42, 1917-1925. doi:10.1109/TMAG.2006.875842
- Lee, T., Su, J.-P. & Yu, K. 2007. Implementation of the State Feedback Control Scheme for a Magnetic Levitation System. 2007 Second IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, 548-553. doi:10.1109/ICIEA.2007.4318468
- Liceaga-Castro, E., Navarro-Lopez, E., García-Aguilar, R. & Andujar-Morgado, J. 2012. Low-motion control of an unloaded hydraulic robot arm. Resicion Engineering-Journal of The International Societies for Precision Engineering and Nanotechnology, 388-398. doi:10.1016/j.precisioneng.2012.01.001
- Licéaga-Castro, J., Hernandez-Alcantara, D. & Amezcua-Brooks, L. 2009. Nonlinear Control of a Magnetic Levitation System. CERMA '09 Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, 391-396. doi:10.1109/CERMA.2009.10
- Lurie, B. & Enright P. 2011. Classical Feedback Control 2<sup>nd</sup> ed. CRC Press, USA
- Marin, F., Alhama, F. & Moreno, J. 2012. Modelling of stick-slip behaviour with different hypotheses on friction forces. International Journal of Engineering Science, 13-24. doi:10.1016/j.ijengsci.2012.06.002
- Mizutani, T., Katayama, H. & Ichikawa, A. 2004. Tracking Control of a Magnetic Levitation System by Feedback Linearization. SICE Annual Conference in Sapporo, 121-126.
- Moon, F. C. 1994. Superconducting Levitation: Applications to bearings and magnetic transportation. New York: Wiley & Sons.
- Motoharu, O., Koga, S. & Hisao, O. 2002. Japan Superconductive Maglev Train. IEEE Instrumentation & Measurement Magazine, 9-15. doi:10.1109/5289.988732
- Nagaya, K. & Ishikawa, M. 1995. A noncontact permanent magnet levitation table with electromagnetic control and its vibration isolation method using direct disturbance cancellation combining optimal regulators. IEEE Transactions on Magnetics, 31, No. 1, Jan. 1995, 885- 896. doi:10.1109/20.364582
- Nguyen N. T., Ishihara A. K., Krishnakumar K. S. & Bakhtiari-Nejad M. 2009. Bounded Linear Stability Analysis - A Time Delay Margin Estimation Approach for Adaptive Control, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 10 - 13 August 2009, Chicago, Illinois
- Powell, J., Maise, G., Paniagua, J. & Rather, J. 2008. Maglev Launch and the Next Race to Space. 2008 IEEE Aerospace Conference, 1-20. doi:10.1109/AERO.2008.4526501
- Trisanto, A., Yasser, M., Lu, J. & Yahagi, T. 2006. Implementation of a Fuzzy PID Controller Using Neural Network on the Magnetic Levitation System. 2006 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems, 669-672. doi:10.1109/ISPACS.2006.364744
- Trumper, D., Olson, S. & Subrahmanyam, P. 1997. Linearizing Control of Magnetic Suspension Systems. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 5, 427-438. doi:10.1109/87.595924
- Wei, G., Guo, Y., Huang, F. & Wu, Y. 2012. Experimental studies on H $\infty$  control for magnetic levitation system with friction compensation. 2012 Proceedings of International Conference on Modelling, Identification & Control, 596-601.