

## Un algoritmo de replanificación en tiempo real basado en un índice de estabilidad de Lyapunov para líneas de metro

A. Berbey<sup>a,\*</sup>, R. Galan<sup>b</sup>, P. San Segundo<sup>b</sup>, J.D. Sanz Bobi<sup>c</sup> y R. Caballero<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidad Tecnológica de Panamá, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Ave. Universidad Tecnológica de Panamá, Campus Dr. Victor Levi Sasso, apdo. 0819-07289, Panamá, República de Panamá.

<sup>b</sup> Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática, Universidad Politécnica de Madrid, C/ José Gutiérrez Abascal, n°2, 28006, Madrid, España.

<sup>c</sup> Centro de Investigación en Tecnologías Ferroviarias (CITEF) Universidad Politécnica de Madrid, C/ José Gutiérrez Abascal, n°2, 28006, Madrid, España.

### Resumen

En este trabajo, se propone un nuevo índice basado en el método directo de Lyapunov para el diseño de un algoritmo de reprogramación en tiempo real para líneas de metro. En este estudio se utiliza una versión modificada de un modelo de espacio de estados en tiempo real discreto, que considera los efectos de saturación en la línea de metro. Una vez que el modelo de espacio de estados se ha obtenido, el método directo de Lyapunov se aplica con el fin de analizar la estabilidad del sistema de la línea de metro. Como resultado de este análisis no sólo se propone un nuevo índice de estabilidad, sino también la creación de tres zonas de estabilidad para indicar el estado actual del sistema. Finalmente, se presenta un nuevo algoritmo que permite la reprogramación del calendario de los trenes en tiempo real en presencia de perturbaciones medianas. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Sistema de metro, estabilidad de Lyapunov, planificación en tiempo real.

### 1. Introducción

La dinámica de los sistemas de las líneas de metro ha sido estudiada profundamente por muchos investigadores (Araya y Sone, 1984)(Assis y Milani, 2004)(Campion *et al.*, 1985)(Cury *et al.*, 1980)(De cuadra *et al.*, 1994)(Fernández *et al.*, 1994)(Rice 1974)(Sasama y Ohkawa, 1983)(Van Breusegem *et al.*, 1991). La mayor parte de estos trabajos se basan en modelos de espacio de estados lineales, cuya validez ha quedado demostrada para ciertas condiciones de operación comunes en la práctica. La utilización de estos modelos ha permitido el diseño de controladores lineales del tráfico dinámico (Campion *et al.*, 1985)(De cuadra *et al.*, 1994) (Rice 1974)(Sasama y Ohkawa, 1983)(Van Breusegem *et al.*, 1991) y simuladores en tiempo real (De cuadra *et al.*, 1994)(Fernández *et al.*, 1994). Sin embargo, algunos investigadores (Araya y Sone, 1984)(Fernández *et al.*, 1994) han destacado la importancia del comportamiento no lineal de las líneas del metro. Por lo tanto, resulta de utilidad revisar tanto la estabilidad, como el desempeño de los controladores lineales propuestos frente a los efectos no lineales de las líneas ferroviarias.

El Grupo de Investigación de Control Inteligente (ICG) en colaboración con el Centro de Investigación en Tecnologías Ferroviarias (CITEF) de la Universidad Politécnica de Madrid, han desarrollado un sistema de planificación de tráfico ferroviario para líneas de Metro. El sistema desarrollado cuenta con una interfase de usuario necesaria para la generación del plan ferroviario. Además, tiene la capacidad de reajustar el número de trenes en el plan ferroviario, previa comparaciones de frecuencias de paso de trenes. Otro módulo diseñado permite el rediseño del plan para solventar anomalías más graves como averías de un tren, bloqueo de un trayecto, etc. (FFII, 2006). Igualmente, permite validar el plan con un simulador de la red de metro y un analizador diseñado que permite estudiar tanto la estabilidad como el número de trenes afectados y el tiempo hasta que se alcanza la frecuencia de paso de trenes establecida. La estabilidad de la línea se analiza mediante un índice que permite ver el margen que ofrece un plan para absorber estas anomalías, que en el funcionamiento normal son frecuentes. En este artículo se detalla el módulo que realiza el análisis de estabilidad y se propone la utilización de este índice de estabilidad para el diseño

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [aranzazu.berbey@utp.ac.pa](mailto:aranzazu.berbey@utp.ac.pa) (A. Berbey),  
[Ramon.galan@upm.es](mailto:Ramon.galan@upm.es) (R. Galan), [pablo.sansegundo@upm.es](mailto:pablo.sansegundo@upm.es)  
(P. San Segundo), [juandedios.sanz@upm.es](mailto:juandedios.sanz@upm.es) (J.D. Sanz),  
[rony.caballero@utp.ac.pa](mailto:rony.caballero@utp.ac.pa) (R. Caballero)  
URL: [www.utp.ac.pa/inicio](http://www.utp.ac.pa/inicio) (A. Berbey)

de un algoritmo de replanificación en tiempo real (Berbey 08)(Berbey et al.,2008a)(Berbey et al.,2008b).

**2. Modelado de la línea de metro**

*2.1. Modelo de la dinámica de tráfico*

El sistema del metro se puede modelar por un sistema de ecuaciones en tiempo discreto (Sasama y Ohkawa, 1983).

$$t_{k+1}^i = t_k^i + r_k^i + s_{k+1}^i \tag{1}$$

Donde  $t_k^i$  es el tiempo de salida o partida del tren  $i$  en la estación  $k$ ,  $r_k^i$  es el tiempo de viaje del tren  $i$  de la estación  $k$  a la estación  $k+1$ ,  $s_{k+1}^i$  es el tiempo de parada del tren  $i$  en la estación  $k+1$  y  $t_{k+1}^i$  es el tiempo de salida o partida del tren  $i$  en la estación  $k+1$ .

Se ha demostrado que las líneas del metro son inestables en presencia de perturbaciones si no hay ninguna acción de control aplicada para corregir el itinerario de los trenes (Campion et al., 1985)(Van Breusegem et al., 1991). Esta acción de control se puede realizar mediante la manipulación de los tiempos de parada (Araya y Sone, 1984) o los tiempos de viaje entre estaciones (Campion et al., 1985), ya que ambas acciones son funcionalmente iguales (Araya y Sone, 1984). Si se manipula el tiempo en marcha de tren, este se define como,

$$r_k^i = R_k + u_{Rk}^i \tag{2}$$

Donde,  $R_k$  es el tiempo nominal de viaje de un tren  $i$  de la estación  $k$  hasta la estación de llegada  $k+1$  y  $u_{Rk}^i$  es la acción de control del tren  $i$  entre el trayecto de las estaciones  $k$  y  $k+1$ .

Por otro lado, la acción de control para el tiempo de parada queda definida por,

$$s_k^i = S_k^i + u_{Sk}^i \tag{3}$$

Donde,  $S_k^i$  corresponde al tiempo nominal de parada del tren  $i$  de la estación  $k$  y  $u_{Sk}^i$  es la acción de control del tren  $i$  en la estación  $k$  (Ver figura 1).

*2.2. Modelado en el espacio de estados*

La planificación en condiciones ideales (sin perturbaciones) (Campion et al., 1985)(Van Breusegem et al., 1991) es definida por  $u_{Rk}^i = 0$  y  $t_{k+1}^i = T_{k+1}^i$ , donde  $T_{k+1}^i$  es establecido como el horario adecuado previamente. Las desviaciones de los horarios son modeladas por  $x_k^i = T_{k+1}^i - t_{k+1}^i$ , que no es más que la diferencia entre el horario planificado de tiempo por estación y el tiempo real. Ahora es posible, reformular el problema como la representación discreta del espacio de estados de la siguiente manera:

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j \tag{4}$$

$$U_j = \phi_j X_j \tag{5}$$

donde,

$$X_j = [x_1^{j-1} \dots x_k^{j-k}]^T \tag{6}$$

Los parámetros de  $f$  y de  $g$  que permiten una regulación subóptima se pueden estimar empleando la formulación siguiente (Campion et al., 1985)(Van Breusegem et al., 1991).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-c_1}{1-c_1} & & & & & 0 \\ 1 & & \frac{-c_2}{1-c_2} & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & & \frac{-c_k}{1-c_k} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & & 1 & & \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\phi_j = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & f & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & f \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$f = \frac{q + pC_c}{(1-C_c)^2 + p + q} \tag{10}$$

$$g = -\frac{p + q}{(1-C_c)^2 + p_c + q_c} \tag{11}$$

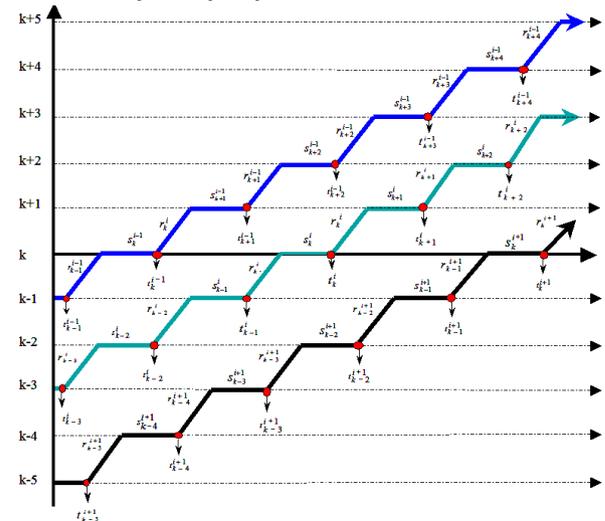


Figura 1: Esquema general del modelo de variables de estado. [Berbey 08]

Donde,  $0 \leq p < \infty$ ;  $0 \leq q < \infty$  y  $c_c$  es el máximo valor de  $c_k$ . Siendo el parámetro  $c_k^i$  la tasa de retraso que representa el efecto del tiempo de parada del tren  $i$  en la estación  $k$  de acuerdo al intervalo de trenes.

La formulación de la acción de control originalmente en Campion et al. (Campion et al., 1985) se define por:

$$u_k^i = g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1} \tag{12}$$

Donde,

$x_k^i$ = vector de las desviaciones del tren  $i$  en la estación  $k$ .

$f_{k+1}$ ;  $g_{k+1}$ = valores adimensionales definidos por (10) y (11) sin el efecto de saturación.

$x_{k+1}^{i-1}$ = Vector de las desviaciones del próximo tren ( $i-1$ ) en la estación precedente ( $k+1$ ).

Sin embargo, es importante hacer hincapié en el hecho de que las acciones de control  $U_j$  se traducen en correcciones automáticas en los tiempos de parada y/o las velocidades de los trenes. Estas acciones son limitadas generalmente por restricciones inherentes de los tiempos de la parada en las estaciones y de las velocidades de los trenes en la vía. Por tal motivo ahora se propone modelar estas acciones de control saturadas como sigue:

$$U_j = \phi_j' X_j \quad (13)$$

donde,

$$\phi_j = \begin{bmatrix} f_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_2' & f_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_3' & f_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_4' & f_4' & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_k' & f_k' \end{bmatrix} \quad (14)$$

Lo que significa que no es posible tener tiempos de espera menores al tiempo de espera mínimo en la estación y menos aún tiempos de espera negativos. Este efecto de saturación es claramente asimétrico.  $K_{k+1}$  es el margen de tiempo ya sea de viaje o tiempo de parada transformado de porcentaje a segundos). De esta manera se puede considerar que,

$$-k_{k+1} \leq u_k^i \leq \infty \quad (15)$$

O

$$u_k^i = g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1} \geq -K_{k+1} \quad (16)$$

Este efecto de saturación puede modelarse dividiendo la acción  $u_k^i$  (16) en dos, en modo lineal y en el modo de saturación evaluando  $|g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1}|$ .

De esta manera, se propone en este trabajo de investigación reescribir la acción de control por,

$$f_{k+1}' = \begin{cases} f \text{ para } -K_{k+1} \leq g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1} \\ \frac{K_{k+1} f}{|g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1}|} \text{ para } g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1} < -K_{k+1} \end{cases} \quad (17)$$

$$g_{k+1}' = \begin{cases} f \text{ para } -K_{k+1} \leq g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1} \\ \frac{K_{k+1} g}{|g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1}|} \text{ para } g_{k+1} x_k^i + f_{k+1} x_{k+1}^{i-1} < -K_{k+1} \end{cases} \quad (18)$$

y sujeto a la restricción de intervalo entre trenes propuesta por Rice y Bergman (Rice, 1974)(Bergman, 1972).

$$t_k^i - t_{k+1}^{i-1} = h_{\min}(t_1, v, L, a_1, f_1, f_2, s_{k+1}^{i-1}) = t_1 + 0.5v \left[ \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{a_1} \right] + \frac{L}{v} \quad (19)$$

Donde,

$t_j$ : tiempo de reacción. Típicamente con valor de 10 segundos (Nie y Hansen, 2005).

$v$ : velocidad del tren.

$L$ : longitud del tren.

$f_j$ : desaceleración de frenado.

$f_2$ : desaceleración de frenado de emergencia. Cabe señalar, que  $f_2 > f_1$  porque aunque ambas son desaceleraciones de frenado, la segunda tiene carácter de emergencia por lo tanto su magnitud es mayor.

$a_j$ : aceleración del tren.

$S_{k+1}^{i-1}$ : Tiempo de parada del tren  $i-1$  en la estación  $k+1$ .

Es importante destacar que este modelo NLRPM (*Non linear real time probabilistic model*) propuesto aquí, así como los modelos anteriores propuestos en (Sasama y Okawa, 1983)(Araya y Sone, 1984)(Campion et al., 1985) son válidos tanto para líneas abiertas como para líneas cerradas. Esto se debe a que en la mayoría de las abiertas comerciales las desviaciones en los horarios son puestas a cero en andenes seleccionados (usualmente en las estaciones terminales o donde residen las cocheras) gracias a la utilización de márgenes de tiempo y algunos trenes de reserva (Van Breusegem et al., 1991).

Este modelo propuesto NLRTPM no solamente tiene la ventaja de integrar el modelo RTM (*Real time model*) original con los efectos no lineales de saturación propios de las líneas ferroviarias urbanas, sino que también, considera las restricciones concernientes al intervalo temporal mínimo entre trenes consecutivos. La utilización de (19) evita el disparo de alarmas de los dispositivos concernientes a los sistemas de protección ferroviaria producto de una inadecuada planificación de horarios.

El principal problema con el modelo lineal RTM propuesto en (Campion et al., 1985)(Van Breusegem et al., 1991) es que puede generar resultados que no son causales desde el punto de vista físico. Esto se debe principalmente a que el margen de tiempo de viaje es usualmente corto, ya que la velocidad de trayecto programada usualmente se elige a 85% de la velocidad promedio máxima y usualmente no puede descontarse más de un 15% ó 20% del tiempo viaje programado. Por ejemplo si se elige  $p=1.0$ ,  $q=0.2$ , y  $c=0.026$  con una perturbación de 172 segundos en la estación 6 y un tiempo de viaje 74 segundos, en la acción de control sólo se pueden descontar unos 12 segundos del tiempo de viaje como máximo. No obstante, el modelo lineal propone que la acción de control pueda descontar casi 90 segundos (rompiendo las leyes de la física, debido a que no se puede llegar a la estación 7 antes de salir de la estación 6). Cabe señalar que estos valores de  $p=1.0$  y  $q=0.2$  corresponden a valores subóptimos de acuerdo a Campion et al. y Van Breusegem et al. (Campion et al., 1985)(Van Breusegem et al., 1991).

### 3. Modelado para la estimación del número de pasajeros en el tren

La importancia de la estimación del número de pasajeros a bordo del tren ha sido destacada en algunas investigaciones (Araya y Sone, 1984) (Assis y Milani, 2004). Sin embargo, el principal problema con los modelos propuestos, es que resulta muy difícil acceder a información detallada que describa el comportamiento de los viajeros.

Una forma alternativa de abordar este problema es realizando una estimación probabilística. En otras palabras, se propone clasificar las estaciones de la línea por orden de importancia, tomando en cuenta, si es una estación que permita correspondencias con otra línea o si es un intercambiador importante o incluso una estación que forma parte de una línea de distribución central. Esta estimación podría hacerse mediante una

escala numérica, asignando un número más alto a aquellas estaciones de mayor relevancia.

Luego, en base a esta clasificación se estima la probabilidad de que un viajero que se encontraba en el tren en el andén de la estación  $k-1$ , baje del tren en la estación  $k$ , tomando en cuenta el número de estaciones que quedan antes de llegar a la estación terminal y su nivel de importancia. Esta probabilidad es,

$$P_{bk} = \frac{C_k}{\sum_{j=k}^n C_j} \quad (20)$$

mientras, la probabilidad de que se mantenga en el tren es,

$$P_{pk} = 1 - \frac{C_k}{\sum_{j=k}^n C_j} \quad (21)$$

donde,  $C_j$  es el nivel de la clasificación de la estación  $j$ . Es evidente, que ambas probabilidades dependen del orden de la estación (figuras 2 y 3). Así, es evidente, que la probabilidad de descender del tren en la primera estación es cero y la de descender en la estación terminal es uno. Por lo tanto, la estimación del número de pasajeros que descienden en la estación  $k$  es:

$$P_{bajan\_tren\_k}^i = P_{tren\_k-1}^i \frac{C_k}{\sum_k C_j} \quad (22)$$

donde,  $P_{tren\_k-1}^i$  es la ocupación del tren  $i$  al momento de salir el mismo de la estación  $k-1$ . La congestión en el tren  $i$  en la estación  $k$ , antes de que aborden nuevos pasajeros es:

$$C_{g\_aa\_k}^i = \frac{P_{tren\_k-1}^i}{P_{capacidad\_tren}} \left( 1 - \frac{C_k}{\sum_k C_j} \right) \quad (23)$$

siendo  $P_{capacidad\_tren}$  la capacidad de viajeros del tren  $i$ . Finalmente, el nuevo número de viajeros en el tren al momento de abordar los nuevos viajeros es:

$$P_{tren\_k}^i = P_{tren\_k-1}^i \left( 1 - \frac{C_k}{\sum_k C_j} \right) + P_{anden\_k}^i - P_{anden\_k0}^i \quad (24)$$

y el nivel de congestión de abordar el tren queda definido por:

$$C_{g\_da\_k} = \frac{P_{tren\_k-1}^i}{P_{capacidad\_tren}} \left( 1 - \frac{C_k}{\sum_k C_j} \right) + \frac{P_{anden\_k}^i}{P_{capacidad\_tren}} - \frac{P_{anden\_k0}^i}{P_{capacidad\_tren}} \quad (25)$$

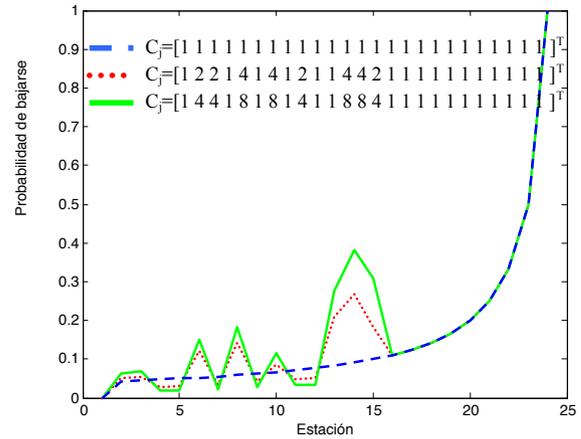


Figura 2: Probabilidad de que un pasajero que se encuentra en el tren descienda del mismo al llegar a una estación.

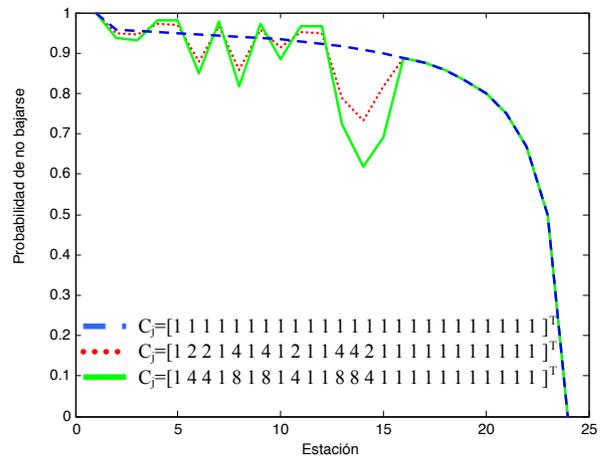


Figura 3: Probabilidad de que un pasajero que se encuentra en el tren se mantenga en el mismo al llegar a una estación.

#### 4. Análisis de estabilidad no lineal

Ahora es posible establecer una función definida positiva de esta manera:

$$V(X_j) = X_j^T X_j \quad (26)$$

$$V(X_{j+1}) = X_{j+1}^T X_{j+1} = X_j^T (A + B\phi')^T (A + B\phi') X_j \quad (27)$$

El sistema en cuestión será asintóticamente estable si,

$$\Delta V = V(X_{j+1}) - V(X_j) < 0 \quad (28)$$

Por lo tanto, (18) se define por:

$$\Delta V = X_j^T (A + B\phi')^T (A + B\phi') X_j - X_j^T X_j \quad (29)$$

$$\Delta V = X_j^T [(A + B\phi')^T (A + B\phi') - I] X_j \quad (30)$$

$$\Delta V = X_j^T [(BE + B\phi')^T (BE + B\phi') - I] X_j \quad (31)$$

$$\Delta V = X_j^T [(E + \phi')^T B^T B (E + \phi') - I] X_j \quad (32)$$

Si se define,  $r = \frac{1}{1 - C_c}$  (33)

Donde  $c_c$  corresponde al máximo valor que admite  $c_k$ , que se denominara como el valor crítico, entonces la siguiente desigualdad se cumple,

$$\frac{1}{(1-C_c)^2} I \geq \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-C_1)^2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{(1-C_k)^2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(1-C_N)^2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde,  $I$  es la matriz identidad. En otras palabras,

$$r^2 I \geq B^T B \quad (35)$$

Por lo tanto

$$X_j^T [(E + \phi')^T r^2 I (E + \phi')] X_j \geq X_j^T [(E + \phi')^T B^T B (E + \phi')] X_j \quad (36)$$

La condición (18) se cumple si la matriz tridiagonal,

$$\Omega = I - (E + \phi')^T r^2 I (E + \phi') \quad (37)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & 0 & \dots \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \dots \\ 0 & \Omega_{32} & \Omega_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \quad (38)$$

Donde,

$$\Omega_{11} = 1 - r^2 (-c_1 + f'_1)^2 - r^2 (1 + g'_2)^2$$

$$\Omega_{12} = \Omega_{21} = -r^2 (-c_2 + f'_2)^2 (1 + g'_2)^2$$

$$\Omega_{22} = 1 - r^2 (-c_2 + f'_2)^2 - r^2 (1 + g'_3)^2$$

$$\Omega_{23} = \Omega_{32} = -r^2 (-c_3 + f'_3)^2 (1 + g'_3)^2$$

$$\Omega_{33} = 1 - r^2 (-c_3 + f'_3)^2 - r^2 (1 + g'_4)^2$$

es positiva definida, es decir, si

$$\beta_1 = 1 - r^2 (-c_1 + f'_1)^2 - r^2 (1 + g'_2)^2 > 0 \quad (39)$$

$$\beta_2 = \frac{r^4 (-c_2 + f'_2)^2 (1 + g'_2)^2}{\beta_1} > 0 \quad (40)$$

$$\beta_3 = \frac{r^4 (-c_3 + f'_3)^2 (1 + g'_3)^2}{\beta_2} > 0 \quad (41)$$

$$\beta_{k+1} = \frac{r^2 (-c_k + f'_k)^2 (1 + g'_k)^2}{\beta_k} > 0 \quad (42)$$

Sin embargo, la aplicación de este criterio podría demandar una importante carga computacional al realizarse en tiempo real. Una alternativa más sencilla para determinar si matriz  $\Omega$  es positiva definida es aplicando el teorema de Gershgorin (Burden y Faires,

2002), ya que si se demuestra que todos sus autovalores son positivos la matriz será positiva definida.

El teorema de Gershgorin establece: Sea  $\Omega$  una matriz  $n \times n$  y denotando  $R_i$  el círculo en el plano complejo con centro  $O = \Omega_{ii}$  y radio  $R = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\Omega_{ij}|$  es decir,

$$C_i = \left\{ z \in C \mid |z - \Omega_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\Omega_{ij}| \right\} \quad (43)$$

Donde  $C$  denota el plano complejo. Los autovalores  $\lambda$  de  $\Omega$  están contenidos dentro de  $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ . Más aún, la unión de cualquier  $k$  de estos círculos que no tenga una intersección con los valores  $(n-k)$  restantes contendrá exactamente  $k$  (contando multiplicidades de los valores característicos). (Ver figura 4)

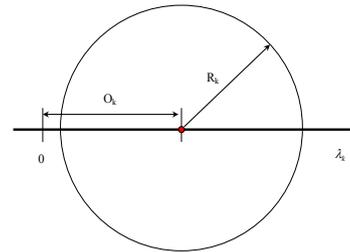


Figura 4: Teorema de Gershgorin.

$$O_k = 1 - r^2 (-c_k + f'_k)^2 - r^2 (1 + g'_{k+1})^2 \quad (44)$$

$$R_k = r^2 \left| (-c_k + f'_k)(1 + g'_k) \right| + r^2 \left| (-c_{k+1} + f'_{k+1})(1 + g'_{k+1}) \right| \quad (45)$$

Por lo tanto,  $\Omega$  será positiva definida si se cumplen las siguientes condiciones:

a) La diagonal principal de la matriz es *estrictamente dominante*. En esta matriz  $\Omega$ , cada término perteneciente a la diagonal principal debe ser siempre mayor a la suma de los valores absolutos de todos los demás términos pertenecientes a la fila correspondiente. Es decir que debe satisfacer las siguientes restricciones,

$$\left| 1 - r^2 (-c_1 + f'_1)^2 - r^2 (1 + g'_2)^2 \right| > \left| -r^2 (-c_2 + f'_2)(1 + g'_2) \right| \quad (46)$$

$$\left| 1 - r^2 (-c_2 + f'_2)^2 - r^2 (1 + g'_3)^2 \right| > \left| -r^2 (-c_2 + f'_2)(1 + g'_2) \right| + \left| -r^2 (-c_3 + f'_3)(1 + g'_3) \right| \quad (47)$$

$$\left| 1 - r^2 (-c_3 + f'_3)^2 - r^2 (1 + g'_4)^2 \right| > \left| -r^2 (-c_3 + f'_3)(1 + g'_3) \right| + \left| -r^2 (-c_4 + f'_4)(1 + g'_4) \right| \quad (48)$$

$$\left| 1 - r^2 (-c_k + f'_k)^2 - r^2 (1 + g'_{k+1})^2 \right| > \left| -r^2 (-c_k + f'_k)(1 + g'_k) \right| + \left| r^2 (-c_{k+1} + f'_{k+1})(1 + g'_{k+1}) \right| \quad (49)$$

b) Los términos de la diagonal principal deben ser siempre positivos, es decir:

$$|1 - r^2(-c_1 + f_1')^2 - r^2(1 + g_2')| > 0 \tag{50}$$

$$|1 - r^2(-c_2 + f_2')^2 - r^2(1 + g_3')| > 0 \tag{51}$$

$$|1 - r^2(-c_3 + f_3')^2 - r^2(1 + g_4')| > 0 \tag{52}$$

$$|1 - r^2(-c_k + f_k')^2 - r^2(1 + g_{k+1}')| > 0 \tag{53}$$

Estas condiciones anteriores (46-53) se cumplen si,

$$|1 - r^2(-c_k + f_k')^2 - r^2(1 + g_{k+1}')^2| > |r^2(-c_k + f_k')(1 + g_k')| + |r^2(-c_{k+1} + f_{k+1}')(1 + g_{k+1}')| \tag{54}$$

donde,  $r^2 = \max(1 - C_{k+1})^2, (1 - C_k)^2$  (55)

Como resultado, aparecen tres importantes zonas dentro del sistema:

a) **Primera zona:** esta es una zona lineal con estabilidad asintótica garantizada y esta es definida por;

$$g_{k+1}x_k^i + f_{k+1}x_{k+1}^{i-1} \geq -K_k \tag{56}$$

b) **Segunda zona:** esta es una zona no lineal con estabilidad asintótica garantizada y está definida por,

$$|1 - r^2(-c_k + f_k')^2 - r^2(1 + g_{k+1}')^2| \geq |r^2(-c_k + f_k')(1 + g_k')| + |r^2(-c_{k+1} + f_{k+1}')(1 + g_{k+1}')|$$

para  $g_kx_k^i + f_kx_{k+1}^{i-1} < -K_k$  (57)

c) **Tercera zona:** esta es una zona no lineal donde la estabilidad no es garantizada y está formalmente definida por,

$$|1 - r^2(-c_k + f_k')^2 - r^2(1 + g_{k+1}')^2| \leq |r^2(-c_k + f_k')(1 + g_k')| + |r^2(-c_{k+1} + f_{k+1}')(1 + g_{k+1}')|$$

para  $g_kx_k^i + f_kx_{k+1}^{i-1} < -K_k$  (58)

La premisa que hay detrás de este análisis previo es que los controladores saturados son capaces de proveer estabilidad asintótica en líneas de metro dentro de la primera y segunda zona. Sin embargo, la estabilidad presenta un enorme nivel de incertidumbre en la tercera zona. Estos resultados están en concordancia con los datos experimentales obtenidos de sistemas en tiempo real (Fernández *et al.*, 1994).

**5. Un nuevo índice de estabilidad**

En opinión de los autores, sería muy útil saber por adelantado la “fragilidad” de un controlador lineal usado para la regulación de tráfico. Para este fin se define un nuevo sistema de índices de la estabilidad basados en el método de estabilidad de Lyapunov. Estos índices miden el nivel de estabilidad asintótica y se obtienen a partir de la ecuación (54),

$$v_k^i = \frac{|r^2(-c_k + f_k')(1 + g_k')| + |r^2(-c_{k+1} + f_{k+1}')(1 + g_{k+1}')|}{1 - |r^2(-c_k + f_k')^2 - r^2(1 + g_{k+1}')^2|} \tag{59}$$

El sistema dinámico tendrá estabilidad asintótica garantizada si cada uno de los índices se encuentra en el intervalo,

$$0 \leq v_k^i < 1 \tag{60}$$

En caso de que cualquier  $v_k^i$  sea negativo o mayor que uno, la estabilidad del sistema podría no estar garantizada y la línea del metro podría ser inestable y necesitar de la replanificación del horario. Para el caso particular de que  $v_k^i$  sea igual a uno, se dice que el sistema es estable pero no asintóticamente, lo que reduce su robustez frente algunas perturbaciones. La gráfica de la figura 6 es una propuesta del índice de estabilidad.

Para este caso en particular la zona de estabilidad no garantizada tiene como frontera:

$$gX_{j+1} + fX_{j+2} = -125 \tag{61}$$

Y aproximadamente se incrementa de forma exponencial para este caso particular superando el punto crítico  $V_k^i = 1$  de estabilidad mientras que para valores de,

$$gX_{j+1} + fX_{j+2} > -125 \tag{62}$$

Donde se encuentran ambas, tanto la zona no lineal como la zona lineal con estabilidad garantizada (Ver figura 6).

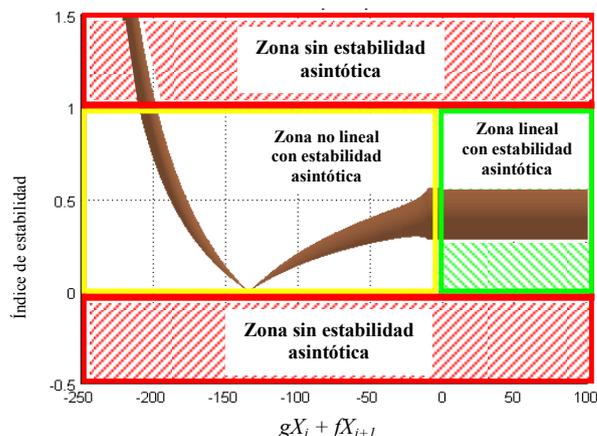


Figura 5: Índice de estabilidad.

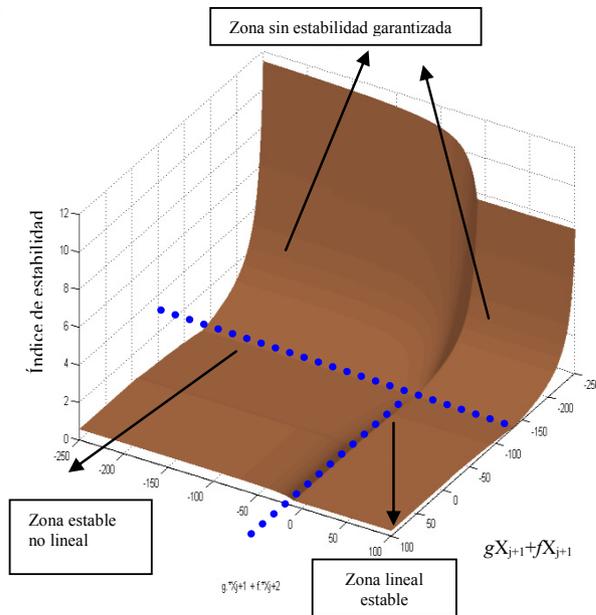


Figura 6: Índice de estabilidad.

## 6. Algoritmo de replanificación en tiempo real

Las limitaciones del algoritmo propuesto por (Campion *et al.*, 1985) y (Van Breusegem *et al.*, 1991), que utilizaban la realimentación de estados para perturbaciones superiores a los 200 ó 300 segundos, han quedado demostradas. Por lo tanto resulta de interés diseñar un algoritmo que pueda replanificar en tiempo real el horario de los trenes (garantizando la estabilidad asintótica) para perturbaciones mayores.

Los índices de estabilidad propuestos en (59) y (60) resultan muy útiles para la planificación en tiempo real. Esto se debe a que permiten estimar en tiempo real las capacidades del controlador (12) para soportar perturbaciones y errores de modelado.

Una forma de utilizar los índices propuestos es definir una variable binaria de fallo de la siguiente manera:

$$v_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si todos los índices en el instante} \\ & t \text{ cumplen con } 0 \leq v_{k+1}^i < 1 \\ 1 & \text{para cualquier otro caso} \end{cases} \quad (63)$$

de modo que el sistema opera normalmente con el controlador (9) mientras  $v_f(t)$  sea cero y si  $v_f(t)$  es uno, debe aplicarse un algoritmo de replanificación. La ventaja de este enfoque es que no es necesario replanificar para cada perturbación, solo debe hacerse si esta lo requiere.

En presencia de perturbaciones lo suficientemente grandes el horario de ciertos trenes puede llegar a ocupar la zona de horario planificado de los trenes subsiguientes. Como se aprecia en la figura 7, las líneas rojas representan los trenes perturbados que se desplazan a la derecha en la malla horaria, ocupando el horario original de los trenes subsiguientes representado por las líneas negras.

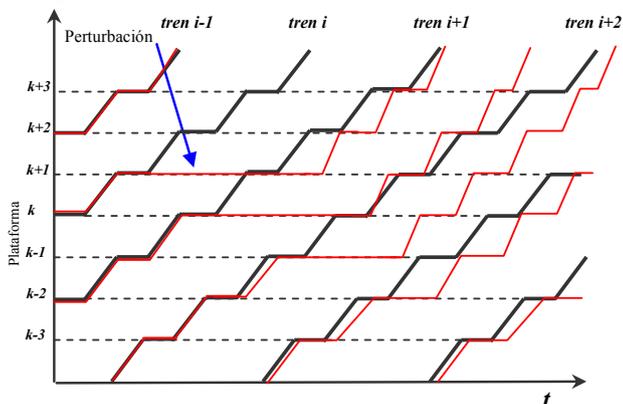


Figura 7: Diagrama de horarios planificados originales y perturbados.

Este efecto es bastante común en las líneas de metro y resulta más razonable cambiar el horario planificado del tren perturbado por el horario planificado de un tren posterior. Esto es equivalente a desplazar temporalmente los horarios de los trenes hacia adelante (véase figura 8).

En otras palabras se puede eliminar uno o más trenes de los horarios planificados hasta que el sistema se recupere de la perturbación. Es decir, el tramo del horario del tren  $i$  (en líneas discontinuas) desaparece para tomar el tramo del horario del tren subsiguiente  $i+1$  (en línea continuas) como se muestran en la figura 8.

## 7. Experimentos

Para validar el índice de estabilidad asintótica propuesto se propone la utilización de una línea ferroviaria genérica de 24 estaciones con una flota de 100 trenes. La capacidad máxima de pasajeros de cada tren se considera igual a 826 pasajeros y la capacidad máxima de los andenes es de unos 1000 pasajeros. El tiempo de reacción de cada tren es de unos 10 segundos (Nie Hansen, 2005), mientras que su capacidad de aceleración es de  $1 \text{ m/s}^2$ , la de frenado nominal de  $1.2 \text{ m/s}^2$  y la de frenado de emergencia de  $1.3 \text{ m/s}^2$ .

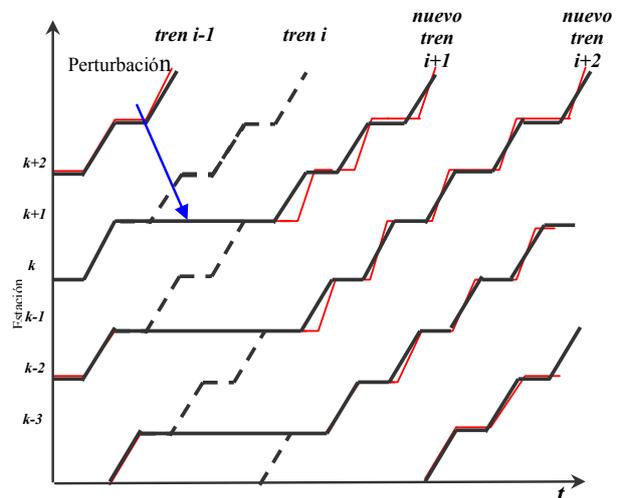


Figura 8: Diagrama de horarios planificados y perturbados después del desplazamiento temporal.

La validación del índice de estabilidad asintótica propuesto se realizó a través de una herramienta de simulación desarrollada en MATLAB®. Dichas simulaciones se ejecutaron en un ordenador Pentium IV con las siguientes especificaciones: disco duro 80 GB, memoria Ram 246MB.

A continuación se procede a perturbar el tren 50 a su paso por la estación 6 introduciendo un grupo de cuatro perturbaciones o desviaciones temporales de 50, 100, 172 y 1000 segundos respectivamente usando valores subóptimos  $p=1$ ,  $q=0.20$ ,  $c_e=0.026$ , y  $K_k \approx 8.4$  (con un margen de tiempo de viaje de un 17.6%) para computar los parámetros del modelo discreto de espacio de estados. La flota de trenes utilizada para esta simulación es de 100 trenes.

En el primer caso, la línea de metro es perturbada con una perturbación de 50 segundos (figura 9(a-b)). El sistema muestra desviaciones muy ligeras en apenas 1 tren y el índice de estabilidad  $v_{k+1}^i$  alcanza valores entre 0.0650 y 0.1290 (figura 9 b). Esto significa que el sistema de la línea de metro está dentro de la zona de estabilidad con un posible incremento de hasta 0.8710 a partir del umbral superior de la zona de estabilidad no garantizada (zona 3) y 0.0650 desde el umbral inferior de la zona de estabilidad no garantizada.

Un retraso de 100 segundos (figura 10(a-b)) produce valores correspondientes a índices de estabilidad entre 0.0470 y 0.2750 (figura 10b). El punto crítico de estabilidad corresponde a una perturbación de 172 segundos (figura 11a), cuando el sistema alcanza el borde o frontera entre la segunda y tercera zona (figura 11b). Finalmente, una perturbación de 1000 segundos en una

línea de metro hace el efecto de saturación tan importante que este es capaz de desestabilizar el sistema (figura 12b). Es importante señalar que el índice propuesto es capaz de predecir con ventaja (alrededor de 172 segundos antes de que la perturbación haya iniciado) la posibilidad de que el sistema llegue a ser inestable y necesite de replanificación.

El resumen de estos resultados se presenta en la tabla 1. En el caso del retraso de los 1000 segundos, el tiempo de recuperación es aproximadamente 3410 segundos debido a que allí existe una gran perturbación que afecta a un promedio de 13 trenes aproximadamente. Esta es la razón por la que el índice  $v_k^i$  cae fuera de la segunda zona, la cual garantiza la estabilidad.

Tabla 1. Resultados experimentales.

Perturbación (s)	Trenes afectados	$V_k^i$		Zona	Tiempo de recuperación del sistema (s)
		min	max		
25	1	0.0935	0.0935	(1)	133
30	1	0.0931	0.0936	(2)	200
40	1	0.0770	0.1130	(2)	380
50	1	0.0650	0.1290	(2)	390
75	2	0.0470	0.1640	(2)	660
100	2	0.0470	0.2750	(2)	800
125	2	0.0480	0.4640	(2)	1060
150	2	0.0500	0.7000	(2)	1210
172	2	0.0500	1.0000	(3)	1460
200	3	0.0480	1.3000	(4)	1760
225	3	0.0480	1.0000	(3)	1760
250	3	0.0500	1.2000	(4)	1760
300	3	0.0600	1.4190	(4)	1860
1000	13	-75	186.5	(4)	3410
2000	22	-55	53	(4)	5060

(1) lineal asintóticamente estable.  
 (2) no lineal asintóticamente estable.  
 (3) punto crítico.  
 (4) estabilidad no garantizada.

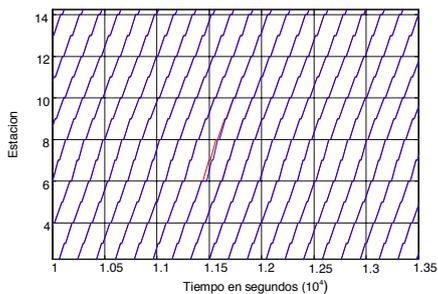


Figura 9(a): Malla horaria con perturbación de 50 segundos.

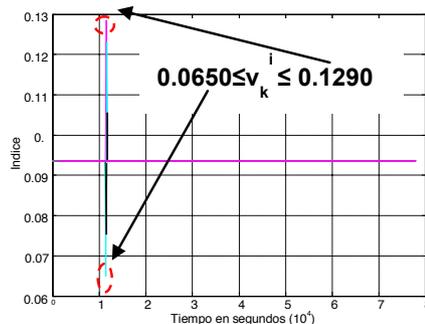
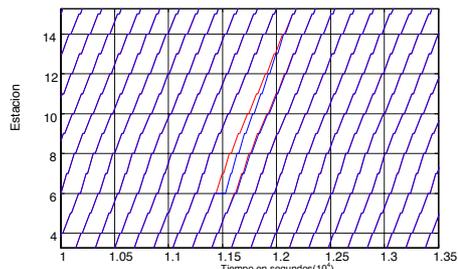


Figura 9(b): Índice de estabilidad con perturbación de 50 segundos.



Figuras 10(a): Malla horaria con perturbación de 100 segundos.

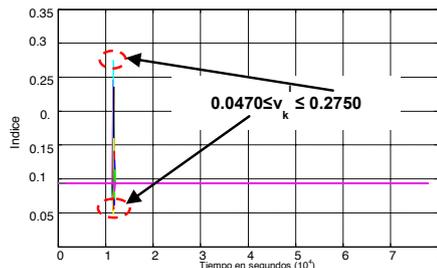


Figura 10(b): Índice de estabilidad con perturbación de 100 segundos.

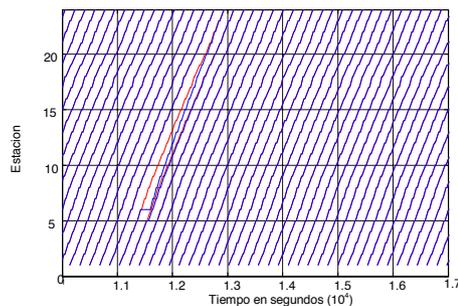


Figura 11(a): Malla horaria con perturbación de 172 segundos (punto crítico).

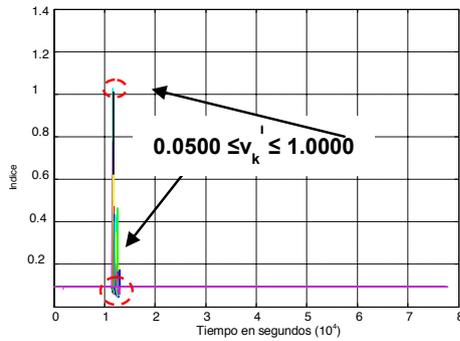


Figura 11(b): Índice de estabilidad con perturbación de 172 segundos

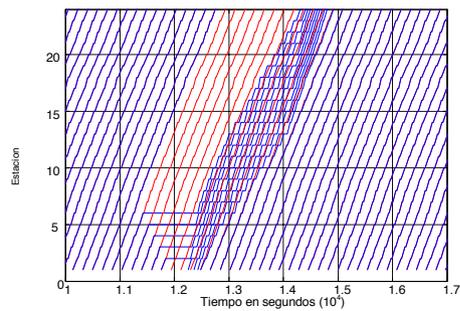


Figura 12(a): Malla horaria con perturbación de 1000 segundos (sistema inestable).

Resulta de interés analizar la influencia de los valores adimensionales de  $p$  y de  $q$  sobre el punto crítico (véase figura 13), es decir, aquel que ocurre cuando los valores de  $v_k^i$  son iguales a uno ( $v_k^i=1$ ). Como puede apreciarse para rangos de valores de  $0 < q < 0.30$  y el intervalo de valores de  $p$  entre 0 y 1, los valores críticos de las perturbaciones son muy sensibles a los valores de  $p$  y  $q$  seleccionados, encontrándonos en una zonas de valles o mínimos locales relativos e igualmente máximos locales relativos. A partir de  $q > 0.30$ , se aprecia una suave disminución en los valores de las perturbaciones críticas, es decir, similar a una meseta en comparación con la región anterior en esta curva de superficie.

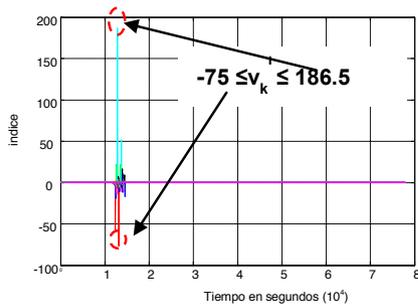


Figura 12(b): Índice de estabilidad con perturbación de 1000 segundos (sistema inestable).

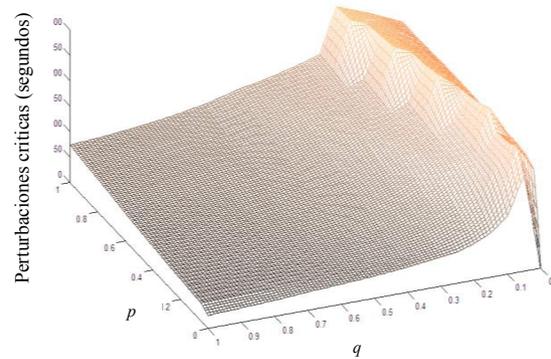


Figura 13: Curva de superficie de perturbaciones vs p y q.

### 7.1 Comparación entre el método RTM y el método NLRTPM.

A continuación se presenta los resultados experimentales que permiten la evaluación del método NLRTPM (*Non linear real time probabilistic model*) propuesto en comparación con el método RTM anterior (*Real time model*) (Campion et al. 1985). Dicho método propuesto NLRTPM se aprecia en la figura 14 que contiene el modelado de espacio de estados que contempla los efectos de la saturación, el índice de estabilidad asintótica, y el algoritmo de replanificación de horarios.

En esta sección se realizaron dos experimentos con perturbaciones de 500 y 1000 segundos respectivamente. En el andén 6 y el tren 50, se introduce un retraso o desviación de 500 segundos respectivamente usando valores subóptimos como  $p=1$ ,  $q=0.20$ ,  $c_c=0.026$ , y  $K_k = 8.4$  para comparar los parámetros del modelo discreto de espacio de estados.

En la figura 15(a) se aprecia el efecto de retraso de los trenes en la malla horaria con el desplazamiento de estos a la derecha. Este es el resultado de la aplicación de una perturbación de 500 segundos sin que se realice la aplicación del algoritmo de replanificación a diferencia de la malla horaria presentada en la figura 15(b), donde se produce una corrección gracias a las acciones de control. En la figura 15(b) se aprecia cómo la propagación exponencial del error como consecuencia de la aplicación del retraso es corregida y la malla horaria presenta un mejor desempeño en comparación la malla horaria de la figura 15(a).

Como se puede apreciar, la figura 16(b) nos muestra una mejora en los valores máximos y mínimos de índice de estabilidad  $v_{k+1}^i$ , siendo estos originalmente -20 a 45 (figura 16a) y luego de la aplicación del algoritmo de replanificación se encuentran dentro del rango -3.4 a 0.75 aproximadamente, (figura 16(b)), lo que indica una mejora con respecto a la situación original presentada en la figura 16(a).

Continuando con el mismo andén 6 y el tren 50, se introduce otra vez un retraso o desviación de 1000 segundos respectivamente usando valores subóptimos como  $p=1$ ,  $q=0.20$ ,  $c_c=0.026$ , y  $K_k = 8.4$  para comparar los parámetros del modelo discreto de espacio de estados.

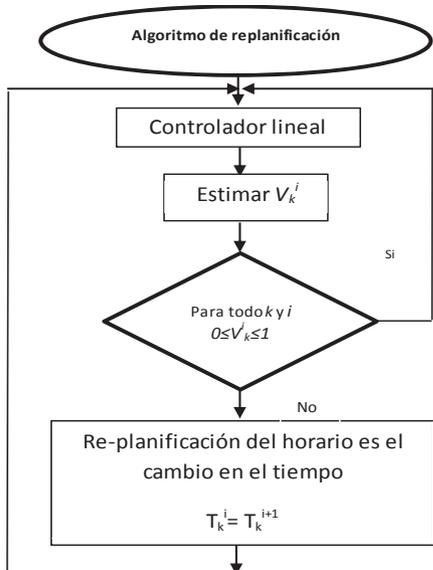


Figura 14: Algoritmo de replanificación de horarios [Berbey 08].

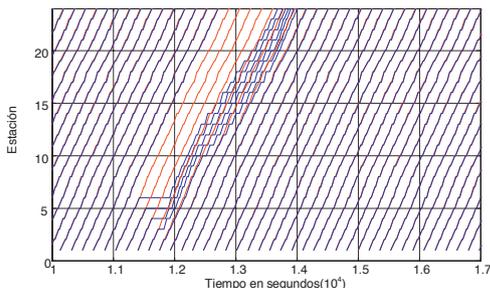


Figura 15(a): Malla horaria con perturbación de 500 segundos sin la aplicación del algoritmo de replanificación.

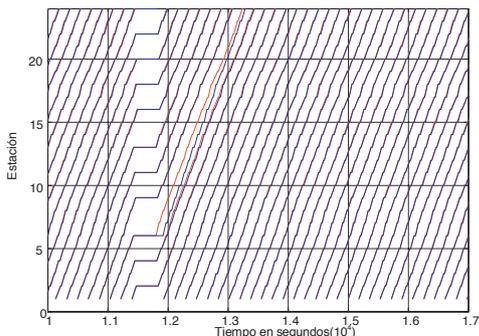


Figura 15(b): Malla horaria con perturbación de 500 segundos con la aplicación del algoritmo de replanificación.

El grupo de figuras 17(a) 17(b) y 20(a) 20(b) nos indican las mejoras en la congestión de pasajeros para perturbaciones de 500 y 1000 segundos respectivamente luego de la aplicación del algoritmo de replanificación con el índice de estabilidad propuesto.

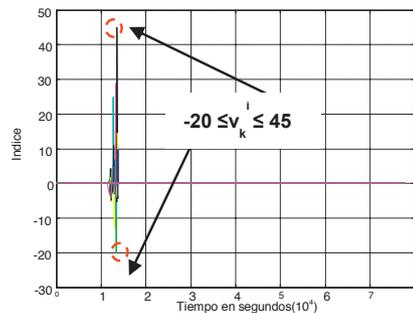


Figura 16(a): Índice de estabilidad con una perturbación de 500 segundos sin la aplicación del algoritmo de replanificación.

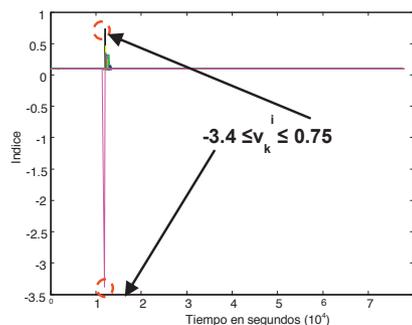


Figura 16(b): Índice de estabilidad con una perturbación de 500 segundos sin la aplicación del algoritmo de replanificación.

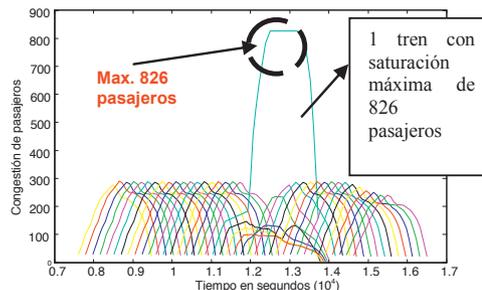


Figura 17(a): Congestión de pasajeros con una perturbación de 500 segundos sin la aplicación del algoritmo de replanificación.

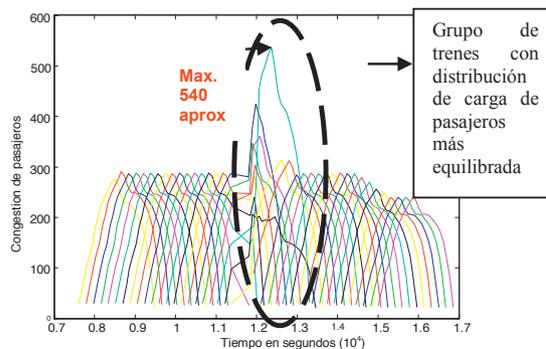


Figura 17(b): Congestión de pasajeros con una perturbación de 500 segundos con la aplicación del algoritmo de replanificación.

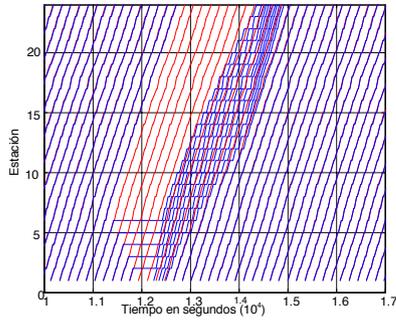


Figura 18(a): Malla horaria con perturbaciones de 1000 segundos sin la aplicación del algoritmo de replanificación.

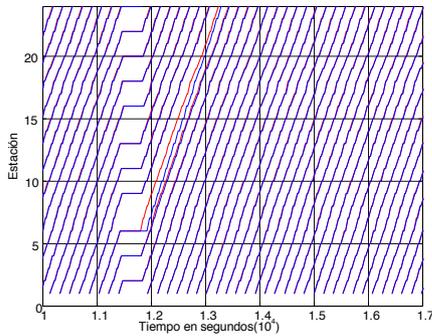


Figura 18(b): Malla horaria con perturbaciones de 1000 segundos con la aplicación del algoritmo de replanificación.

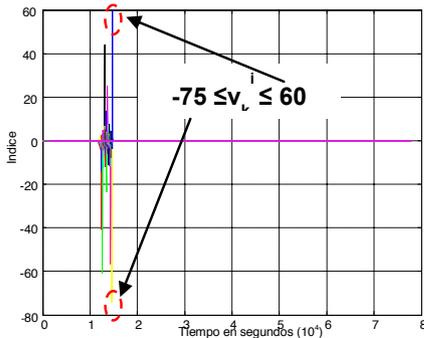


Figura 19(a): Índice de estabilidad con perturbaciones con 1000 segundos sin la aplicación del algoritmo de replanificación.

Como se puede apreciar la figura 19(b) muestra una mejora en los valores máximos y mínimos de índice de estabilidad  $v_{k+1}$ , siendo estos originalmente -75 a 60 (figura 19a) y luego de la aplicación del algoritmo de replanificación se encuentran dentro del rango -1.48 a 0.50 (figura 19b) aproximadamente, lo que indica una mejora con respecto a la situación original. La figura 17(b) muestra cómo la carga de pasajeros es distribuida con la aplicación del algoritmo de replanificación en comparación con el escenario anterior representado en la figura 17(a).

Allí se evidencia un tren saturado con un factor máximo de carga de 826 pasajeros, y después de la aplicación del algoritmo de replanificación con el índice de estabilidad propuesto la carga de los pasajeros se distribuye en un grupo de 5 trenes donde la carga máxima del nuevo tren más cargado es de 540 pasajeros (ver figura 17b).

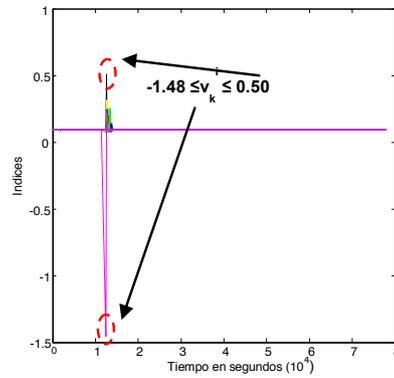


Figura 19(b): Índice de estabilidad con perturbaciones de 1000 segundos con la aplicación del algoritmo de replanificación.

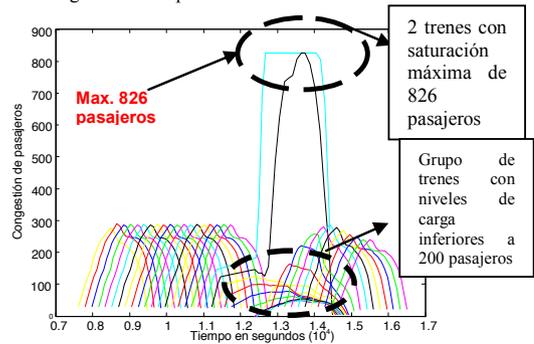


Figura 20(a): Congestión de pasajeros para una perturbación de 1000 segundos sin la aplicación del algoritmo de replanificación.

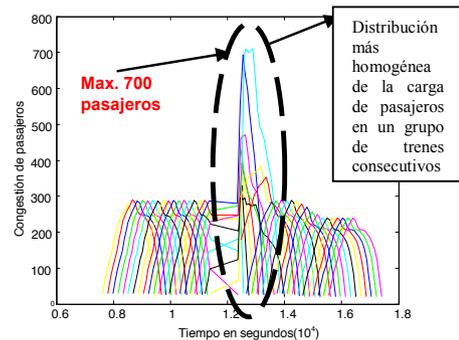


Figura 20(b): Congestión de pasajeros para una perturbación de 1000 segundos con la aplicación del algoritmo de replanificación.

Al igual que en el caso anterior de 500 segundos, ahora se aprecia en las figuras 20 (a) y 20(b) para el caso de una perturbación de 1000 segundos cómo el pico de congestión de 826 pasajeros que afecta a 2 trenes saturados se reparte o distribuye en un conjunto de varios trenes, luego de la aplicación del algoritmo de replanificación, provocando que el tráfico de pasajeros se distribuya de una forma más equilibrada, ya que la máxima carga es de 700 pasajeros (Figura 20b).

Además resulta ahora claro que al incrementar el parámetro  $K_{k+1}$  (15)(16) los efectos de saturación disminuyen. Aunque, esta acción refuerza la dinámica del sistema, allí existe una relación de compromiso entre los márgenes de  $K_{k+1}$  y el tiempo de viaje en metro, es decir, márgenes demasiados altos de  $K_{k+1}$  pueden

producir inconformidad en los usuarios de los metros de pasajeros. En conclusión podemos decir que el índice  $v_k^j$ , permite marcar o indicar tendencias futuras para entonces poder “saber cuándo tomar acciones”.

## 8. Conclusión

Es un hecho general que el tráfico ferroviario y particularmente las líneas del metro demuestran que las perturbaciones provocan retrasos inherentes en un horario planificado previamente. Aquí se ha presentado un nuevo análisis de estabilidad basado en el método directo de Lyapunov en una representación del espacio de estados discreta del tráfico en líneas del metro. Este nuevo enfoque ha permitido que definamos un nuevo índice de estabilidad y tres zonas de estabilidad: una primera zona lineal con estabilidad asintótica, una segunda zona no lineal con estabilidad asintótica garantizada y una tercera zona no lineal en donde la estabilidad no se garantiza. Además, el cálculo del índice de la estabilidad en tiempo real hace posible teóricamente predecir la necesidad de cambios en el horario. Para validar nuestro enfoque hemos realizado un número de pruebas con valores distintos de retrasos en un ambiente simulado. Las pruebas futuras en datos verdaderos son necesarias para un dictamen final, pero los resultados obtenidos son muy prometedores.

## English Summary

**A real time rescheduling algorithm based in Lyapunov stability's index for metro lines.**

## Abstract

A new Lyapunov-based index for designing a rescheduling algorithm in real time for metro lines has been proposed in this paper. A modified real time discrete space state model which considers saturation effects in the metro line has been utilized in this study. Once the space state model has been obtained, the direct method of Lyapunov is applied in order to analyze the stability of the metro line system. As a result of this analysis not only a new stability index is proposed, but also the establishment of three stability zones to indicate the current state of the system. Finally, a new algorithm which allows the rescheduling of the timetable in the real time of the trains under presence of medium disturbances has been presented.

## Keywords:

Metro system, Lyapunov stability, real time planning, traffic regulation.

## Agradecimientos

Los autores de este trabajo quieren expresar su gratitud a la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) del Gobierno de la República de Panamá por apoyar este proyecto de I+D a través de los fondos del Proyecto I+D “Metodologías e índices de desempeño para sistemas de transporte ferroviario” adjudicado a través de la convocatoria

para actividades de I+D (MDEPR09-001) 2009-2011. Adicionalmente, los autores quieren agradecer el apoyo de la Universidad Tecnológica de Panamá, del grupo de Control Inteligente del DISAM y del Centro de Investigación en Tecnologías ferroviarias, ambos de la Universidad Politécnica de Madrid.

## Referencias

- Araya, S. and Sone, S. “Traffic Dynamics of Automated Transit Systems with Pre-established Schedules”. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-14, No. 4, July/August 1984.
- Assis, W.O.; Milani, B.E.A. “Generation of optimal schedules for metro lines using model predictive control” *Automatica* 40(2004) 1397-1404.2004.
- Berbey, A., Galán, R., San Segundo, R. y Sanz-Bobi, J.D. “Análisis de estabilidad de Lyapunov aplicado a líneas de metro”. *XXIX Jornadas de Automática*, Tarragona. España. 3-5 September 2008a.
- Berbey, A., Galán, R., San Segundo, P. and Sanz-Bobi, J.D. “Lyapunov based stability analysis for metro lines” *URBAN TRANSPORT 2008. Urban Transport 2008 XIV. Urban Transport and the environment in the 21st Century*. Malta, 1-2 September 2008b. ISBN:978-1-84564-123-8
- Berbey, A. Planificación en tiempo real de tráfico ferroviario. Tesis doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid. 2008.
- Bergmann, D.R. Generalized expression for the minimum time interval between consecutive arrivals at an idealized railway station. *Transpn Res*. Vol 6, pp.327-341.Pergamon Press 1972.
- Burden, R. L. y Douglas Faires, J. “Análisis numérico” Séptima Edición. 2002.
- Campion, G., Van Breusegem, V., Pinson, P. and Bastin, G. “Traffic Regulation of an underground railway transportation system by state feedback.” *Optimal control Applications & Methods*, Vol. 6, 385-402. 1985.
- Cury, J.E. Gomide, F.A.C and Mendes, M.J. “A methodology for Generation of Optimal Schedules for an Underground Railway Systems” *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. Ac-25, No.2, April 1980.
- F. de Cuadra, Fernández, A. and Granados, J.C. “Train simulation and headway calculations an approach based on parameterized continuous curves.” Instituto de Investigación Tecnológica (IIT-UPCO) 1994. DIMETRONICS S.A. Madrid, España. *Computers in Railways IV-Volume 1: Railway Design and Management. Computational Mechanics Publications*.
- Fernández, A., de Cuadra, F. y Montes, F. “Traffic regulation and simulation- a predictive adaptive control system.” Instituto de Investigación Tecnológica (IIT-UPCO) 1994. DIMETRONICS S.A. Madrid, España. *Computers in Railways IV-Volume 1: Railway Design and Management. Computational Mechanics Publications*.
- FFIL. Fundación para el fomento de la innovación industrial F<sup>2</sup>I<sup>2</sup>. “Herramienta de planificación off-line (HEPO)”. Proyecto I+D Sistema Automático de regulación y explotación ferroviaria. SAREF. Fundación para el Fomento de la Innovación Industrial. Madrid. Noviembre, 2006.
- Goodwin, Graham C., Sin, Kwai Sang (1984): “Adaptive filtering prediction and control.” *Prentice-Hall information and system sciences series*. Thomas Kailath, Series Editor. 1984.
- Nie, L.Hansen 05. Nie, Lei and Hansen, Ingo. System analysis of train operations and track occupancy at railway stations. *EJTIR*, 5, N°1(2005), pp.31-54.2005.
- Rice, P. “Urban transport systems capacity with special references to London Transport underground railways” *Conf. on Control Aspects of New Forms of Guided Land Transport*, London, August 1974.
- Sasama, H. and Ohkawa, Y. “Floating traffic control for public transportation systems” *Proc. 4th IFAC Conf. on Contr. and Transport Syst.*, Baden-Baden, April 1983.
- Van Breusegem, V., Campion, G. and Bastin, G. “Traffic Modeling and State Feedback Control for Metro Lines.” *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 36, No.7, July, 1991.