UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Cálculo de solicitaciones de una viga simple con un voladizo a partir de las ecuaciones de equilibrio

Apellidos, nombre	Guardiola Víllora, Arianna (aguardio@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica del Medio continuo y Teoría de Estructuras
Centro	Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

1 Resumen

En este documento se explica cómo obtener las leyes y diagramas de esfuerzos[1] en una viga sencilla a partir de las ecuaciones de equilibrio.

El procedimiento se muestra paso a paso con objeto de facilitar su comprensión. Una vez el estudiante ha obtenido la pericia que da la práctica, puede omitir algunos pasos, invirtiendo menos tiempo en la resolución de este tipo de ejercicios.

2 Introducción

Dada la viga de la Figura 1, con la geometría y cargas indicadas, se pide calcular las reacciones, leyes de esfuerzos y diagramas de solicitaciones.

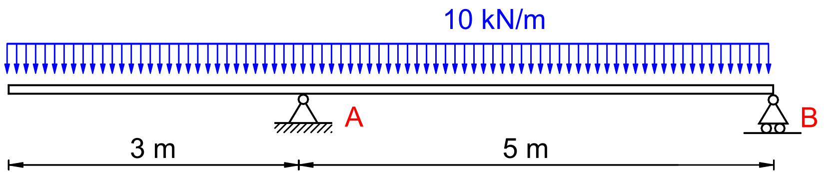


Figura 1. Geometría y esquema de carga de la viga

3 Objetivos

Al final de este documento, el estudiante será capaz de calcular las reacciones y solicitaciones de cualquier viga isostática, así como dibujar los diagramas correspondientes.

Con ese objetivo, los pasos a seguir son:

- Cálculo de las reacciones en los apoyos A y B de la viga
- Cálculo de los cortantes y momentos flectores en el tramo del vuelo
- Dibujo de los diagramas de cortantes y momentos flectores en el tramo del vuelo
- Cálculo de los cortantes y momentos en el tramo AB
- Dibujo de los diagramas de cortantes y momentos flectores en el tramo AB

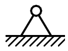
[1] Leyes y diagramas de esfuerzos es sinónimo de leyes y diagramas de solicitaciones

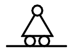
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

4 Desarrollo del ejemplo de aplicación

4.1 Cálculo de reacciones en los apoyos

Las reacciones son las fuerzas (o momentos) que hay que ejercer en cada uno de los apoyos, o enlaces con el exterior, para impedir los movimientos que coartan.

En el caso del apoyo en A, la articulación  impide el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal.

Por otro lado, el carrito o apoyo deslizante en B  solo impide el desplazamiento vertical.

Por tanto, las reacciones en dichos puntos serán las de la Figura 2:

Reacciones en A: reacción vertical A_y y reacción horizontal A_x

Reacciones en B: reacción vertical B_y

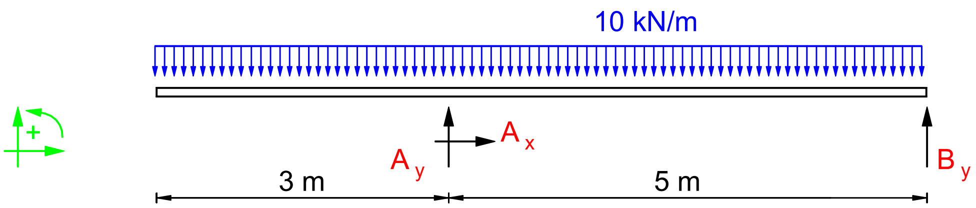


Figura 2. Posibles reacciones en los apoyos

Para obtener el valor de las reacciones se utilizan las ecuaciones de equilibrio:

Si la barra está en equilibrio[2], el sumatorio de fuerzas verticales, el sumatorio de fuerzas horizontales y el sumatorio de momentos flectores debe ser nulo.

Estas ecuaciones de equilibrio se van a calcular considerando el criterio de signos de la Figura 2 (a la derecha, en color verde). Este criterio de signos es arbitrario. Puede tomarse cualquier otro criterio, siempre que se tenga en cuenta que los resultados obtenidos irán referidos a dicho sistema.

Con este criterio de signos las ecuaciones de equilibrio quedan de la siguiente manera:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow A_x = 0$$ Ecuación 1. Equilibrio de fuerzas horizontales

$$\sum F_v = 0 \rightarrow 10 \times (3+5) - A_y - B_y = 0$$ Ecuación 2. Equilibrio de fuerzas verticales

[2] Si el sumatorio de fuerzas no es nulo, entonces la barra debería estar en movimiento, y si el sumatorio de momentos no es igual a cero, estaría girando infinitamente.

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 10 \times 8 \times \frac{8}{2} - A_y \times 5 = 0$$ Ecuación 3. Equilibrio de momentos

$$\rightarrow A_y = 64\ kN$$

Sustituyendo y operando en la ecuación 2:

$$\sum F_v = 0 \rightarrow B_y = 80 - 64 = 16\ kN$$

Una vez obtenido el resultado, se puede observar que los signos de A_y y B_y son positivos, es decir, el sentido que he supuesto (hacia arriba) es correcto.

El esquema de fuerzas de la Figura 3, donde se han sustituido los apoyos por las reacciones correspondientes, está en equilibrio. Es decir, hace falta una fuerza de 64 kN hacia arriba en A y una fuerza de 16 kN en B para que los puntos A y B no bajen.

Una fuerza menor haría que sufrieran un descenso, y una fuerza mayor que ascendieran.

Es imprescindible calcular correctamente las reacciones para poder obtener las solicitaciones.

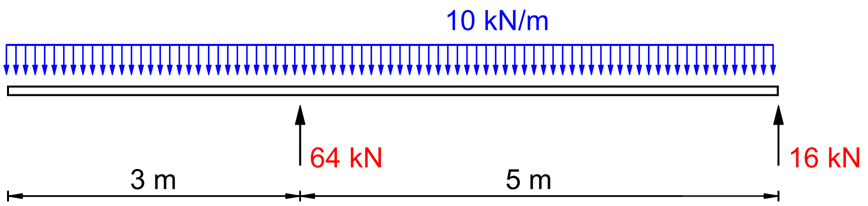


Figura 3. Esquema de cargas: Acciones y reacciones

4.2 Cálculo de solicitaciones

De igual modo que las reacciones son las fuerzas que hay que hacer en los apoyos para que la barra esté en equilibrio, las solicitaciones son las fuerzas internas que equilibran las acciones exteriores.

Las solicitaciones pueden ser:

Esfuerzos axiles: N(x), cuando las fuerzas actúan en el eje de la barra

Esfuerzos cortantes: V(x), cuando las fuerzas son perpendiculares al eje de la barra

Momentos flectores: M(x), cuando las fuerzas intentan flectar la barra.

El criterio de signos para las solicitaciones es bastante estándar[3]. En la Figura 4 se representa una rebanada de la barra con los signos positivos de las solicitaciones anteriores

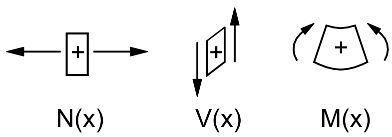


Figura 4. Criterio de signos. Axil, cortante y momento flector positivos

4.2.1 Ley de momentos en el tramo x ϵ [0,3]

Si corto la barra anterior en el punto P, a una distancia x del extremo izquierdo (ver Figura 5) para que ésta siga estando en equilibrio es necesario que en la sección de corte (punto P) aparezcan unos esfuerzos interiores (fuerzas y momentos).

En el caso que nos ocupa, dado que no hay fuerzas en el eje de la barra, no tendremos esfuerzos axiles. Por tanto, sólo tendremos que calcular los esfuerzos cortantes, V(x) y los momentos flectores M(x).

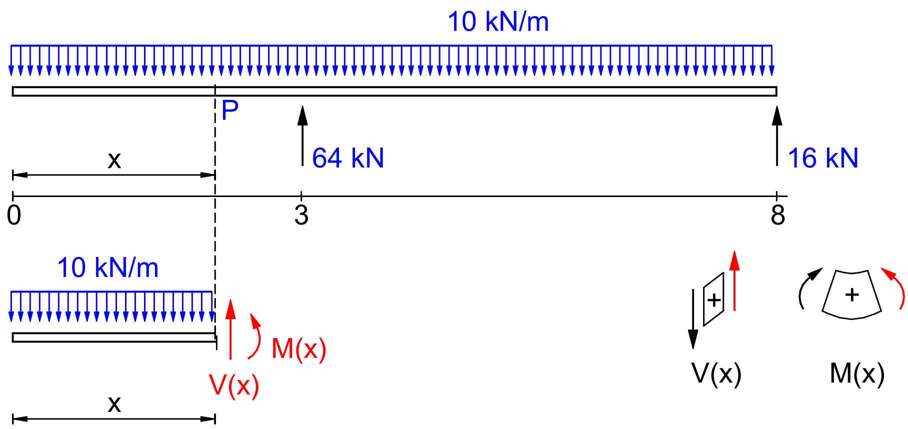


Figura 5. Equilibrio en la sección

El esfuerzo cortante se calcula a partir de la ecuación de equilibrio de sumatorio de fuerzas igual a cero, siendo el valor del cortante en la sección x, V(x), la incógnita.

Teniendo en cuenta que nos encontramos a la derecha de la sección, si considero que el cortante va hacia arriba, estoy suponiendo que este va a ser positivo (véase el criterio de signos de la Figura 4, donde para el cortante positivo, la flecha a la derecha de la sección va hacia arriba)

La ley de cortantes, para cualquier punto P del intervalo [1,3] (antes del apoyo A) es:

$$V_{(x)_{x\in(0,3)}} : -10x + V_{(x)} = 0; \quad \rightarrow \quad V_{(x)} = 10x$$

---

[3] En el caso de los cortantes hay autores que consideran el esquema de la Figura 4 como cortante negativo. En el caso de momentos y axiles hay acuerdo.

Siendo los valores en los extremos del intervalo igual a:

$$V_{(x=0)} = 0; \qquad V_{(x=3)} = 10 \times 3 = 30\ kN$$

Como el resultado es positivo, quiere decir que la fuerza a la derecha de la sección va hacia arriba, sentido que se corresponde con el del cortante positivo.

Por otro lado, la ley de momentos, para cualquier punto P del intervalo [1,3] (antes del apoyo A) es:

$$M_{(x)_{x\in(0,3)}} : 10x \times \frac{x}{2} + M_{(x)} = 0; \quad \rightarrow \quad M_{(x)} = -\frac{10x^2}{2}$$

El signo menos en M(x) indica que el momento va al revés de la suposición inicial, es decir, a la derecha de la sección tiene sentido horario, lo que se corresponde con un momento negativo:

$$M_{(x)} = -\frac{10x^2}{2}$$

Los valores en los extremos del intervalo son:

$$M_{(x=0)} = 0; \qquad M_{(x=3)} = -10 \times \frac{3^2}{2} = -45\ kNm$$

Si representamos las funciones de cortantes y momentos entre el extremo de la izquierda y el apoyo A, obtenemos los diagramas de la Figura 6.

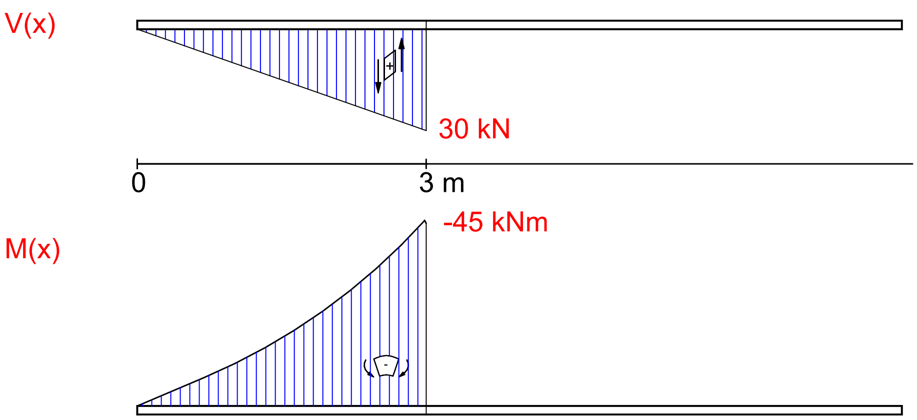


Figura 6. Diagramas de cortantes y momentos flectores en el tramo del vuelo

Una vez obtenido el cortante a la izquierda del punto A, volvemos a plantear las ecuaciones de equilibrio teniendo en cuenta la presencia de la reacción vertical en A, de modo que el cortante a la derecha de A es (véase Figura 7)

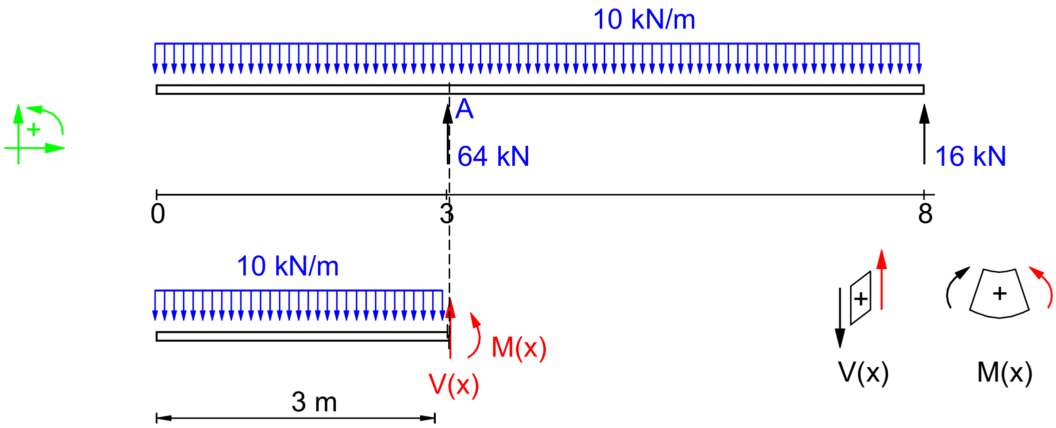


Figura 7. Esquema de carga: acciones y reacciones

Sumatorio de fuerzas verticales igual a cero:

$$\sum F_v = 0 \quad : -10 \times 3 + 64 + V_{(x=3,der)} = 0; \quad \rightarrow \quad V_{(x=3,der)} = 30 - 64 = -34 \ kN$$

El signo negativo quiere decir que la fuerza V(x) va hacia abajo, es decir, es un cortante negativo, ya que el cortante negativo lo hemos definido como aquel en el que la fuerza a la derecha de la sección va hacia abajo.

Con el último valor obtenido el diagrama de cortantes sería el de la Figura 8

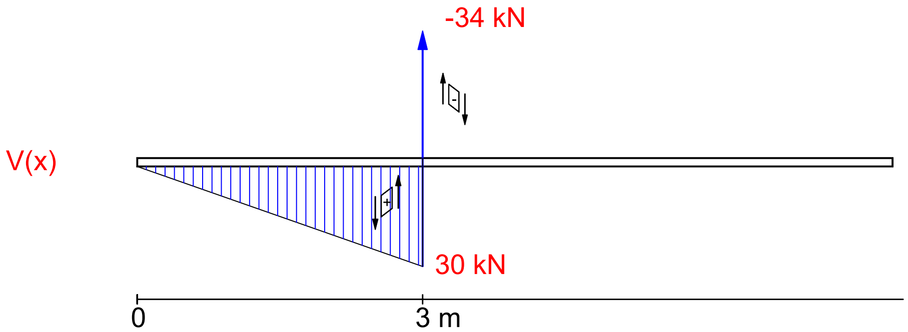


Figura 8. Diagrama de cortantes del tramo 0 a 3

4.2.2 Ley de cortantes y momentos en el tramo x ϵ [3,8]

Para obtener la ley de momentos del siguiente tramo se repite la misma operación: se corta la barra en el punto Q (ver Figura 9) y se equilibran las fuerzas verticales y los momentos flectores.

Equilibrio de fuerzas verticales en el punto Q:

$$V_{(x)_{x\in(3,8)}} \quad : -10x + 64 + V_{(x)} = 0; \quad \rightarrow \quad V_{(x)} = 10x - 64$$

Valores para x = 3 y para x = 8

$V_{(x=3)} = 10 \times 3 - 64 = -34 \ kN$ este valor ya lo habíamos obtenido en la ecuación anterior

$V_{(x=8)} = 10 \times 8 - 64 = 16 \ kN$ (positivo quiere decir que la fuerza a la derecha de la sección va hacia arriba, por tanto, el cortante es positivo.

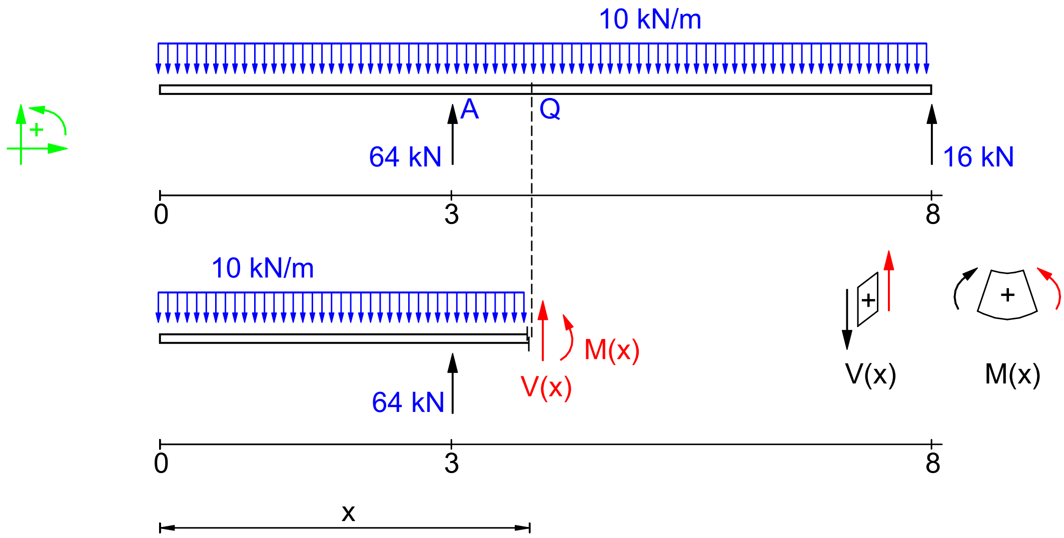


Figura 9. Esquema de cargas: Acciones y reacciones

Si hay un cambio de signo quiere decir que la ley de cortantes ha cortado el eje horizontal. El punto de corte corresponde con la sección de cortante nulo.

Su posición se calcula igualando la ley de cortantes a cero:

$$V_{(x)} = 0 \quad \rightarrow \quad 10x - 64 = 0 \rightarrow x = 6.4\ m$$

Este punto es importante, pues corresponde con el punto de momento máximo (en este caso, de máximo momento positivo)

El equilibrio de momentos en el punto Q:

$$M_{(x)_{x\in(3,8)}} : 10x \times \frac{x}{2} + M_{(x)} - 64 \times (x-3) = 0;$$

$$M_{(x)} = -\frac{10x^2}{2} + 64 \times (x-3)$$

Siendo los valores para x = 3; x = 6.4 (el máximo positivo) y x = 8 los siguientes:

$$M_{(x=3)} = -\frac{10 \times 3^2}{2} = -45\ kNm$$

el signo menos indica que tiene sentido horario, al estar a la derecha de la sección, es un momento negativo.

$$M_{(x=6.4)} = -\frac{10 \times 6.4^2}{2} + 64 \times (6.4-3) = 12.8\ kNm$$

el signo positivo indica que es antihorario. Al estar a la derecha de la sección, se corresponde con un momento positivo.´

$$M_{(x=8)} = -\frac{10 \times 8^2}{2} + 64 \times (8-3) = 0\ kNm$$

como era de esperar.

Los diagramas de cortantes y flectores de este tramo son los de la Figura 10.

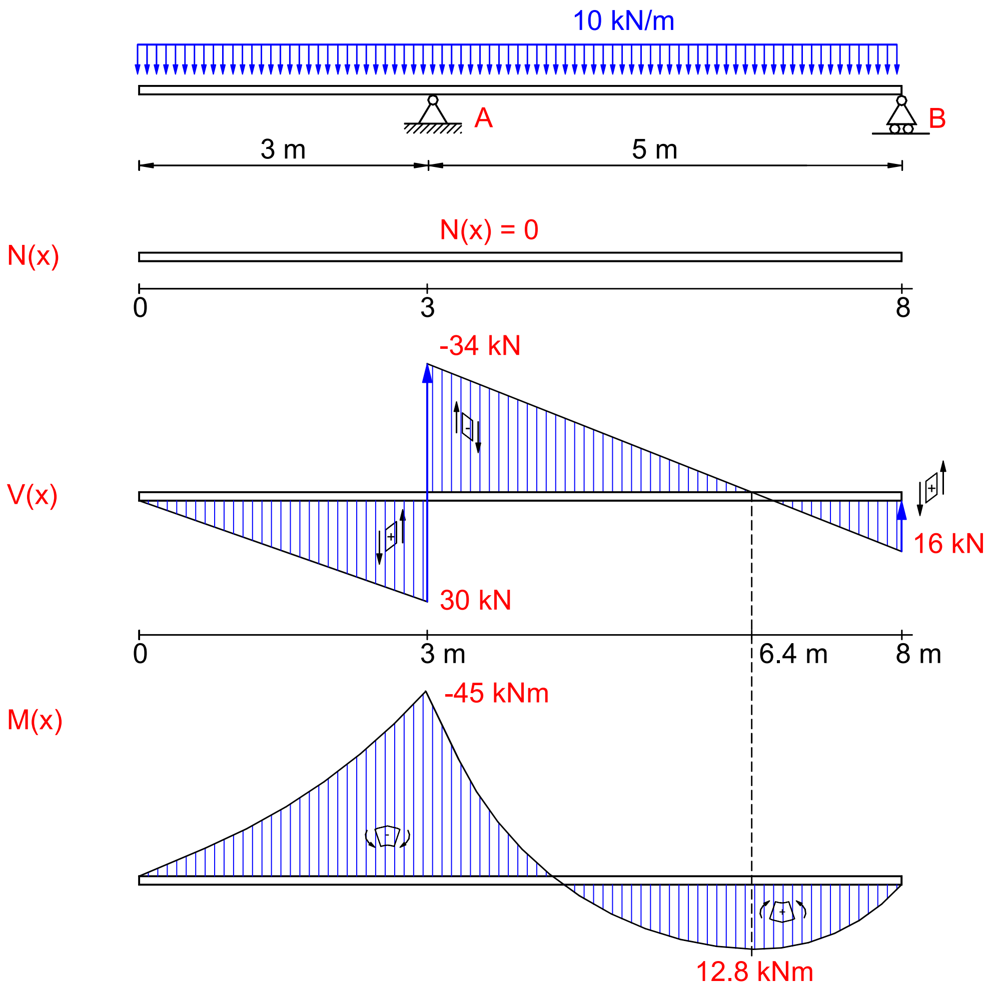


Figura 10. Diagramas de cortantes y momentos flectores del tramo 0-8

5 Conclusiones

Con las leyes de equilibrio y conociendo el criterio de signos para las solicitaciones (Figura 4) es posible obtener las leyes de las solicitaciones despejando N(x), V(x) y M(x).

La representación de dichas leyes (diagramas de solicitaciones) se lleva a cabo sustituyendo los distintos valores de x en las funciones obtenidas.

En principio, es suficiente calcular los valores de las solicitaciones para los puntos significativos, pero si hay dudas acerca de cómo hay que dibujar la función se pueden obtener las solicitaciones en puntos intermedios.

Este procedimiento de equilibrar la barra es bastante laborioso, pero es recomendable seguir este método hasta que se adquiera la pericia suficiente que permita omitir alguno de los pasos, y obtener directamente (cálculo mental) el valor de las solicitaciones.

Este procedimiento se puede aplicar también en barras de pórticos siempre que se corte una única barra (tres incógnitas igual a las tres solicitaciones)

6 Ejercicios propuestos

Con objeto de consolidar los conocimientos adquiridos y la pericia del estudiante se proponen los siguientes ejercicios:

Cálculo de las solicitaciones y dibujo de los diagramas de solicitaciones de las vigas de la Figura 11.

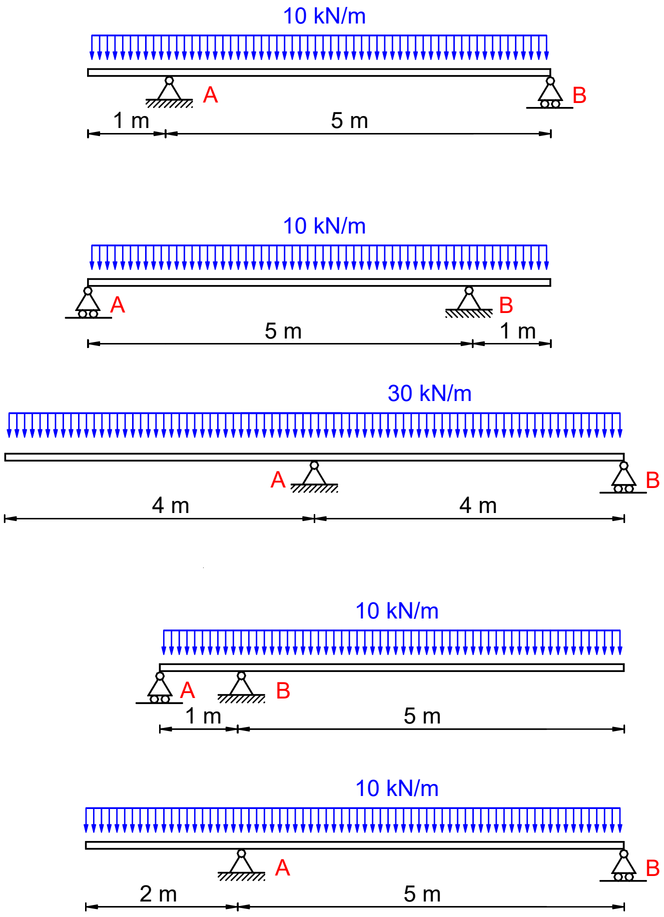


Figura 11. Ejercicios propuestos

7 Bibliografía

Pérez García, Agustín; Guardiola Víllora, Arianna. "Prontuario Y Herramientas Informáticas Para Cálculo De Estructuras" Editorial Intertécnica, 2004

Acceso al capítulo de solicitaciones desde: https://www.researchgate.net/publication/308119545_FORMULARIO_PARA_VIGAS_Y_PORTICOS

8 Solución a los ejercicios propuestos

Los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores de los ejercicios propuestos se encuentran en la Figura 12.

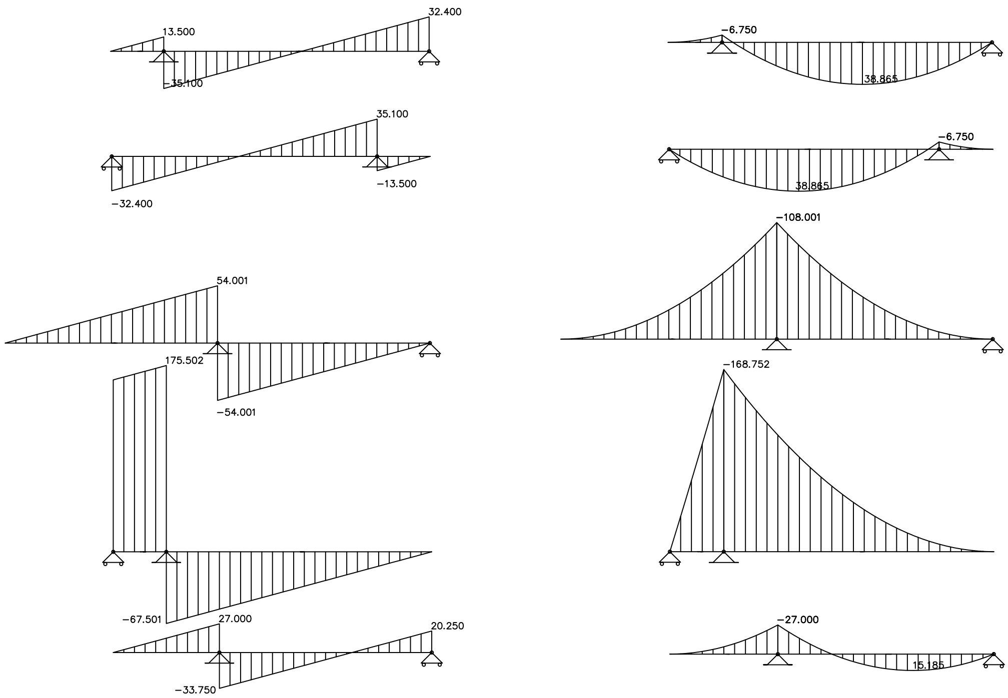


Figura 12. Diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores