

## Control Óptimo para Trayectorias Circulares en un Robot Móvil

J. E. Moisés Gutierrez Arias\*, Lucio Hernández Angulo, M. Monserrat Morín Castillo, J. Eladio Flores Mena

Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.  
Av. San Claudio y 18 Sur, Col. San Manuel, C.P. 72570, Puebla, Pue., México.

### Resumen

Se plantea el problema de encontrar un control óptimo lineal para la estabilización de trayectorias circulares en un robot móvil tipo (2,0), utilizando la solución estándar al problema de control óptimo para un sistema lineal, la cual puede demostrarse mediante la técnica de programación dinámica aplicada a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Se obtienen las ecuaciones dinámicas no lineales del robot móvil y posteriormente para una trayectoria deseada se obtiene las ecuaciones lineales. Se sintetiza el control óptimo a partir de éste sistema lineal, solucionando una ecuación diferencial matricial de Riccati para obtener la solución de estabilización; en la literatura se trata a ésta ecuación diferencial como una ecuación algebraica para un tiempo infinito y exclusivamente para sistemas lineales invariantes en el tiempo. El sistema lineal resultante para una trayectoria circular es un sistema lineal variante en el tiempo, esto ocasiona inconvenientes para obtener la solución de estabilización en términos constantes; la solución fue crear un sistema politópico convexo en base al sistema lineal variante en el tiempo y transformar la ecuación algebraica de Riccati en una LMI. Así se obtuvo una solución de estabilización que satisface a todos los sistemas lineales invariantes en el tiempo que conforman al sistema politópico. Además se presenta una modificación en la estructura del control óptimo que permite que la elección a prueba y error de las matrices de peso sea innecesaria y hace que los valores característicos del sistema sean colocados en una zona específica en el semiplano izquierdo del plano complejo. *Copyright © 2011 CEA.*

### Palabras Clave:

Robot móvil, linealización, métodos de estabilización, control óptimo lineal, ecuación matricial de Riccati, sistema variante en el tiempo.

### 1. Introducción

Un robot móvil es una máquina autónoma capaz de moverse en un ambiente dado, utilizando como herramienta alguna configuración mecánica combinada con algunos componentes eléctricos, electrónicos y sistemas computacionales que permitan algún tipo de desplazamiento. Actualmente este tipo de robots se usan para tener acceso a zonas inhóspitas, peligrosas o inaccesibles para los seres humanos.

Físicamente un robot móvil es un conjunto de varios cuerpos sólidos con diferente movilidad; los que son propulsados por ruedas se clasifican por sus grados de movilidad y de direccionalidad. El grado de movilidad está asociado al número de velocidades involucradas en el movimiento y el grado de direccionalidad está asociado al número de ruedas direccionables del

robot. La configuración del robot móvil más usado es el llamado de control diferencial o de tipo (2,0), el cual se estudiará en este trabajo.

El área de control en particular, como un subsistema que dirige la actividad de un robot móvil autónomo, ha incrementado su campo de estudio, generando algoritmos con capacidades cada vez más robustas. La autonomía de un robot móvil se basa en el sistema de navegación automática; en estos sistemas se incluyen tareas de planificación, percepción y control. El problema de la planificación global de trayectoria consiste en realizar un recorrido mínimo para alcanzar el objetivo; esto conduce a un problema de diseño de control que regule la misión del robot, el cual se considera en este trabajo. Para ello consideraremos la clase de robots móviles autónomos que consisten de tres ruedas, dos activas y una pasiva, con restricciones no holonómicas, que aparecen como consecuencia de la hipótesis de no deslizamiento.

El estudio y diseño de los sistemas de control para los robots móviles es muy amplio, así como también la cantidad de algoritmos de control con los que se puede encontrar una aplica-

\*Autor en correspondencia

Correos electrónicos: [jmgutierrez@ece.buap.mx](mailto:jmgutierrez@ece.buap.mx) (J. E. Moisés Gutierrez Arias), [lucio\\_y6@hotmail.com](mailto:lucio_y6@hotmail.com) (Lucio Hernández Angulo), [mmorin@ece.buap.mx](mailto:mmorin@ece.buap.mx) (M. Monserrat Morín Castillo), [eflores@ece.buap.mx](mailto:eflores@ece.buap.mx) (J. Eladio Flores Mena)

ción interesante. Aunque el robot móvil es un sistema con movimientos físicamente simples, matemáticamente no lo es, debido a que su modelo dinámico es no lineal. Considerando minimizar un índice de desempeño cuadrático para solucionar el problema, se aplica la solución estándar al problema de control óptimo para un sistema lineal, la cual puede demostrarse mediante la técnica de programación dinámica aplicada a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, para obtener la ley de control óptima para un sistema lineal en tiempo continuo; en la estructura del control óptimo resultante, está inmersa la solución de la ecuación diferencial matricial de Riccati la cual contiene la información del sistema lineal y del índice de desempeño cuadrático; esta matriz es la clave para la estabilización del sistema lineal (Kwakernaak and Sivan, 1972), (Cerdá, 2001), (Kirk, 1970). La elección de las matrices de peso del índice de desempeño, juega un papel muy importante en la calidad de estabilización del sistema lineal. El control óptimo diseñado para el sistema linealizado alrededor de alguna trayectoria deseada, es posteriormente aplicado al sistema de ecuaciones de movimiento no lineal del robot móvil para obtener la trayectoria deseada.

Aunque el sistema en lazo cerrado construido usando la teoría de control óptimo tiene algunas ventajas, hay todavía muchos problemas que resolver. Uno de los más serios es que es bastante difícil especificar el desempeño de control descrito en términos de un índice de desempeño cuadrático; las matrices de peso usualmente serán especificadas en base a prueba y error para obtener un desempeño satisfactorio. Para el caso de sistemas grandes y sobre todo cuando no se conocen suficientemente las reacciones del sistema, resulta muy complicado asignar valores a todos los elementos de las matrices de peso; por esta razón es una práctica común elegir estas matrices como matrices diagonales.

En la literatura de control óptimo para robots móviles, es posible mencionar a (Hemami et al., 1992), donde se plantea el problema de encontrar esta ley de control considerando el modelo matemático a partir del error de orientación y el error de posición para una trayectoria deseada, obteniendo una ecuación lineal de cuatro variables de estado, además haciendo una transformación sobre los valores característicos se obtiene un segundo sistema de dos variables de estado las cuales representan los modos rápidos y lentos del sistema; el control óptimo es calculado sólo para este segundo sistema sin hacer referencia a la elección de las matrices de peso.

Una aplicación de la técnica de control visual para un robot móvil, el cual debe ejecutar movimientos coordinados en un medio conocido y estructurado, se describe en (Swain et al., 1998). Aquí el robot móvil expresa y ejecuta una secuencia de movimientos básicos, tiene dos grados de libertad y tres parámetros de configuración ( $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ); una cámara es colocada en el robot por medio de una plataforma con lo cual agregan un nuevo grado de libertad. El controlar los movimientos de la cámara en lugar del movimiento del robot permite eliminar las restricciones no holonómicas del robot y poder utilizar sus ruedas motrices y la plataforma sin problema alguno. Por otra parte, en el trabajo (Lamiroux et al., 2004) se presenta un enfoque novedoso y general de optimización de la trayectoria de los sistemas no holonómicos. El enfoque se aplica al problema

de la trayectoria reactiva de robots móviles no holonómicos en ambientes altamente desordenados. Se trata de una ruta inicial dada, libre de colisiones y los obstáculos son detectados mientras se sigue dicho camino. La ruta de acceso actual es iterativa deforme con el fin de alejarse de los obstáculos y satisfacer las limitaciones no holonómicas. La idea central es perturbar las funciones de entrada del sistema a lo largo del camino actual con el fin de modificar esta ruta, tratando de disminuir un criterio de optimización.

La producción de propuestas de controles automáticos para robots móviles no holonómicos pronto reveló una tarea difícil. Por esta razón, el problema se ha descompuesto en dos pasos. El primer paso consiste en calcular un movimiento libre de colisiones utilizando un mapa del medio ambiente. El segundo paso consiste en ejecutar el movimiento. Como consecuencia la investigación sobre los sistemas no holonómicos se ha centrado principalmente en dos aspectos: la planificación de ruta (Bullo and Lynch, 2001), (Chitta and Ostrowski, 2002), (Laumond, 1993), (Laumond et al., 1998), (LaValle and Kuffner, 2001), (Svestka and Overmars, 1995), (Laumond, 1998) y de control de movimiento (Fliess and Lévine, 1995), (DeLuca and Oriolo, 1998), (Samson, 1995), (Sordalen and Egelan, 1995).

No muchos estudios se han ocupado de los dos aspectos en conjunto como en (Lamiroux et al., 1999), en donde se trata la planificación y control de movimiento para robots móviles. El planificador de ruta no holonómico se basa en un método original de contabilización para la controlabilidad del sistema en el tiempo más corto. Luego el camino se transforma en una trayectoria mediante la inclusión de las restricciones dinámicas del sistema (velocidad y aceleración limitada). El control de movimiento se aborda, gracias a una transformación geométrica, se muestra la manera de reducir el problema a un clásico enfoque de seguimiento de la trayectoria de un robot móvil en movimiento sólo hacia adelante.

Los sistemas lineales variantes en el tiempo resultantes de considerar trayectorias circulares, presentan una mayor complejidad ya que a diferencias de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, no presentan una teoría tan representativa como éstos, cuando se requiere conocer acerca de sus propiedades como controlabilidad, observabilidad y estabilización.

Para la solución del control óptimo del sistema lineal invariante en el tiempo, se puede mencionar el trabajo presentado en (Shieh and Dib, 1986), donde se plantea el problema de encontrar un controlador óptimo cuadrático tal que el sistema óptimo en lazo cerrado tiene valores característicos dentro de una región vertical en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ . Con el objetivo de mejorar la estabilidad del sistema el método de diseño no necesita la especificación de las matrices de peso. Este método también es utilizado en (Araya and Eddie, 1999) y (Hardiansyah et al., 1999) donde es aplicado para mejorar la estabilidad dinámica de sistemas de estabilización de potencia, obteniendo resultados muy satisfactorios.

Ahora bien, para determinar el control óptimo para el sistema lineal variante en el tiempo no es posible aplicar el método descrito anteriormente, ya que sólo es posible aplicarlo a sistemas lineales invariantes en el tiempo. Primeramente planteamos utilizar el trabajo desarrollado en (Niamsup and Phat, 2008),

donde se describe un método para encontrar un control óptimo para sistemas variantes en el tiempo desde el punto de vista de la controlabilidad global de estos sistemas, pero no se obtuvieron los resultados esperados. Posteriormente, tomamos la idea fundamental de la investigación presentada en (Garran and Antonio, 2008), en donde se presenta el estudio de las técnicas para el control robusto de sistemas lineales con parámetros variables desde la perspectiva de sistemas politópicos convexos y las desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en inglés).

En este trabajo diseñamos un control óptimo en tiempo continuo para la estabilización de trayectorias circulares en un robot móvil de conducción diferencial, tomando como fundamento la solución estándar al problema de control óptimo para un sistema lineal y los sistemas politópicos convexos, se implementa dicho control a un robot móvil y se muestran los resultados, además proponemos un modelo dinámico muy accesible, que captura las no linealidades más esenciales de este tipo de sistemas no holonómicos.

### 2. Planteamiento del Problema

Consideremos el siguiente proceso controlable que representa las ecuaciones dinámicas del robot móvil

$$\dot{y} = f(y, u), \tag{1}$$

$$u(\cdot) \in U = \{u : u(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r\}; \tag{2}$$

donde  $y \in \mathbb{R}^n$  que contiene los estados del sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  representa los controles de entrada. Las ecuaciones diferenciales lineales que gobiernan las desviaciones  $x(t) = y(t) - y^d(t)$  para algún movimiento deseado  $y(t) = y^d(t)$  y un control deseado  $u(t) = u^d(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  pueden escribirse como:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u; \tag{3}$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f[y^d(t), u^d(t)]}{\partial y}, \quad B(t) = \frac{\partial f[y^d(t), u^d(t)]}{\partial u};$$

y considerando también el criterio de desempeño

$$\int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)G(t)u(t)] dt + x^T(t_1)Sx(t_1), \tag{4}$$

donde  $S$  y  $Q(t)$  son matrices simétricas definidas no negativas ( $S = S^T \geq 0$ ;  $Q(t) = Q(t)^T \geq 0$ ); y  $G(t)$  es una matriz simétrica definida positiva ( $G(t) = G(t)^T > 0$ ) para  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Entonces el problema de determinar un vector de entrada admisible  $u^0(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , para el cual el criterio es mínimo es llamado *problema del control óptimo lineal* (Kwakernaak and Sivan, 1972).

### 3. Ecuaciones de movimiento del Robot Móvil

El modelo dinámico de un robot móvil juega un papel importante para la simulación del movimiento, análisis de la estructura mecánica del prototipo y diseño de algoritmos de control. El tipo de diseño del robot móvil que se desarrollará en este trabajo será el de *control diferencial*, el cuál como ya se mencionó, consta de dos ruedas activas para tracción y dirección, y una rueda pasiva. Como puede verse en la figura 1, el prototipo consiste de un cuerpo del robot en forma de un cilindro recto no homogéneo, dos ruedas laterales y una rueda pequeña que sirve de soporte. El movimiento de la rueda pequeña de apoyo no se considera, lo cual puede hacerse en base a que su masa y sus dimensiones son pequeñas en comparación con aquellas del cuerpo del robot.

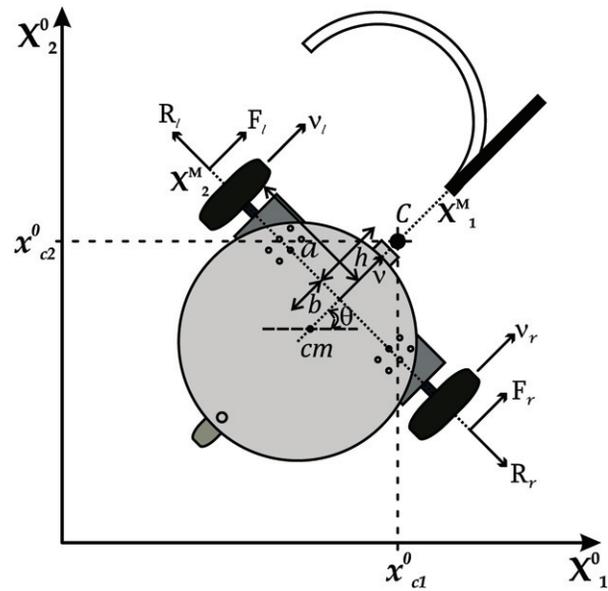


Figura 1: Diagrama físico del robot móvil.

Para la construcción del modelo dinámico del robot móvil hacemos las siguientes consideraciones: a) el robot móvil se mueve sobre un plano, b) suponemos que las partes del robot móvil son cuerpos rígidos, c) el movimiento de la pequeña rueda de apoyo no se considera, lo cual puede hacerse en base a que su masa y sus dimensiones son pequeñas en comparación con aquellas del cuerpo del robot, d) las velocidades del robot móvil son pequeñas de manera que la fuerza de fricción viscosa la podemos despreciar en el modelo, e) las llantas laterales cumplen la condición de rodamiento y f) la fricción entre las llantas y la superficie plana es de tal manera que se cumple la condición de no deslizamiento lateral de las llantas.

En base a las consideraciones del párrafo anterior el robot móvil construido lo modelamos por medio de un cuerpo del robot de forma de cilindro recto y dos llantas laterales en forma de cilindros rectos delgados. La formulación que empleamos para construir el modelo dinámico es la de Euler-Newton que

consiste en utilizar las siguientes ecuaciones (Symon, 1970):

$$\mathbf{F}_R = M\mathbf{a}_{cm} \quad (5)$$

y

$$\boldsymbol{\tau}_R = \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{F}_R$  es la fuerza resultante sobre la masa  $M$  del cuerpo y  $\mathbf{a}_{cm}$  es la aceleración del centro de masas. Mientras que, en la ecuación (6)  $\boldsymbol{\tau}_R$  es la suma de pares externos y  $\mathbf{L}_{cm}$  es el momento angular alrededor de un eje que pasa por el centro de masas. Ambas ecuaciones son válidas en un sistema inercial que suponemos está fijo a la superficie plana donde se mueve el robot móvil, el cual se indica por los ejes  $X_1^0, X_2^0$  y  $X_3^0$ . También, consideremos un sistema de referencia fijo al cuerpo del robot, cuyos ejes denotamos como  $X_1^M, X_2^M$  y  $X_3^M$ . Un punto  $C$  que está a lo largo del eje  $X_1^M$ , que se encuentra a una distancia  $h$ , cuyo vector posición  $\mathbf{r}_c$  lo representamos como  $\mathbf{r}_c = (x_{c1}^0, x_{c2}^0, x_{c3}^0)^T$ , el superíndice indica que el vector está en la representación del sistema de referencia inercial. La representación del vector  $\mathbf{r}_c$  en el sistema de referencia fijo al cuerpo tiene componentes  $(x_{1c}^M, x_{2c}^M, x_{3c}^M)^T$ . Esta conversión de índices la usamos para las cantidades vectoriales consideradas en el trabajo.

Una relación muy útil es aquella que relaciona las variaciones temporales medidas en dos sistemas de referencia uno inercial y otro fijo al cuerpo en movimiento (que denotamos con un asterisco), ésta se expresa como

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{B}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular del sistema fijo al cuerpo respecto al sistema inercial. Considerando el punto  $C$  con vector posición  $\mathbf{r}_c = \mathbf{R} + \mathbf{C}$ , siendo  $\mathbf{R} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T$  el vector que va del origen del sistema de referencia inercial al origen del sistema de referencia fijo al cuerpo y  $\mathbf{C} = (c_1^0, c_2^0, c_3^0)^T$  el vector que va del origen del sistema de referencia fijo al cuerpo al punto  $C$ , usando la expresión (7) obtenemos la velocidad de un punto  $C$  que esta dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{c1}^0 \\ \dot{x}_{c2}^0 \\ \dot{x}_{c3}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \theta - \omega h \sin \theta \\ -v \sin \theta + \omega h \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

siendo  $v = \sqrt{(\dot{x}_1^0)^2 + (\dot{x}_2^0)^2}$  y  $\dot{\theta} = \omega$  la velocidad de traslación del origen del sistema de referencia móvil y velocidad angular alrededor del eje  $X_3^0$  respecto al sistema inercial, respectivamente.

Las velocidades de los centros de las llantas se obtienen al utilizar la ecuación (7), para las llantas izquierda y derecha obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{l1}^M \\ \dot{x}_{l2}^M \\ \dot{x}_{l3}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1^M - a\omega \\ \dot{x}_2^M \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

y

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{r1}^M \\ \dot{x}_{r2}^M \\ \dot{x}_{r3}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1^M + a\omega \\ \dot{x}_2^M \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

respectivamente. En estas expresiones  $a$  es la distancia del origen del sistema fijo al cuerpo al centro de una llanta. Estas velocidades las hemos calculado en la representación del sistema de referencia fijo al cuerpo por simplicidad.

Para el cálculo de la aceleración, empleamos la expresión (7), aplicandola dos veces para obtener la expresión para la derivada segunda. La aceleración de un punto  $C$  sobre el eje  $X_1^M$  se encuentra que viene dada por la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{c1}^M \\ \ddot{x}_{c2}^M \\ \ddot{x}_{c3}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1^M - h\dot{\theta}^2 \\ \ddot{x}_2^M + h\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

esta aceleración del punto  $C$  está en la representación del sistema fijo al cuerpo. Siguiendo el mismo procedimiento la aceleración del centro de las llantas izquierda y derecha están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{l1}^M \\ \ddot{x}_{l2}^M \\ \ddot{x}_{l3}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1^M - a\ddot{\theta} \\ \ddot{x}_2^M - a\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

y

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{r1}^M \\ \ddot{x}_{r2}^M \\ \ddot{x}_{r3}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1^M + a\ddot{\theta} \\ \ddot{x}_2^M + a\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

respectivamente.

Consideremos ahora las relaciones de restricción o de ligadura, suponemos que las llantas cumplen las condiciones de rodamiento y de no-slip (no deslizamiento lateral de las llantas). La condición de rodamiento se establece por medio de las siguientes expresiones

$$V_l = r\dot{\phi}_l \quad (14)$$

$$V_r = r\dot{\phi}_r \quad (15)$$

donde  $V_l = \dot{x}_{l1}^M$  y  $V_r = \dot{x}_{r1}^M$ . Con ayuda de estas expresiones podemos escribir la primera coordenada de las ecuaciones vectoriales (9) y (10) como sigue

$$V_l = v - a\omega \quad (16)$$

$$V_r = v + a\omega \quad (17)$$

ya que,  $\dot{x}_1^M = v$ . Las aceleraciones angulares de las llantas del robot móvil se obtienen al derivar respecto al tiempo las expresiones (16) y (17), con lo cual se obtienen las siguientes expresiones

$$\alpha_l = \frac{1}{r}(\ddot{x}_1^M - a\ddot{\theta}) \quad (18)$$

$$\alpha_r = \frac{1}{r}(\ddot{x}_1^M + a\ddot{\theta}) \quad (19)$$

siendo  $\alpha_l = \ddot{\phi}_l$ ,  $\alpha_r = \ddot{\phi}_r$  y  $r$  es el radio de las llantas.

La condición de no deslizamiento lateral de las llantas (no-slip), se establece requiriendo que se cumplan las siguientes condiciones

$$\dot{x}_{l2}^M = \dot{x}_{r2}^M = \dot{x}_2^M = 0. \quad (20)$$

Además de las ecuaciones de transformación para las velocidades del origen del sistema de referencia fijo al cuerpo y el sistema inercial, se escriben como sigue

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^M \\ \dot{x}_2^M \\ \dot{x}_3^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1^0 \\ \dot{x}_2^0 \\ \dot{x}_3^0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

considerando la segunda componente de la expresión (21) y tomando en cuenta la ecuación (20), se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{x}_2^M = -\dot{x}_1^0 \sin \theta + \dot{x}_2^0 \cos \theta = 0 \quad (22)$$

y derivando ésta respecto al tiempo, se obtiene

$$\ddot{x}_2^M = 0. \quad (23)$$

En base al diagrama de la Figura 1 escribimos para cada parte móvil del robot la ecuación (5). Para el cuerpo del robot empleando la expresión (11) en la ecuación (5), con  $c = -b$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} F'_l + F'_r \\ R'_l + R'_r \end{pmatrix} = m_b \begin{pmatrix} \ddot{x}_1^M + b\dot{\theta}^2 \\ \ddot{x}_2^M - b\ddot{\theta} \end{pmatrix} \quad (24)$$

donde  $m_b$  es la masa del cuerpo del robot y  $b$  es la distancia del origen del sistema fijo al cuerpo al centro de masas del cuerpo del robot. Para la llanta izquierda escribimos la ecuación (5) como,

$$\begin{pmatrix} F_l - F'_l \\ R_l - R'_l \end{pmatrix} = m_{wl} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1^M - a\ddot{\theta} \\ \ddot{x}_2^M - a\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

aquí,  $m_{wl}$  es la masa de la llanta izquierda. Mientras que, para la llanta derecha la ecuación (5) se escribe como sigue,

$$\begin{pmatrix} F_r - F'_r \\ R_r - R'_r \end{pmatrix} = m_{wr} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1^M + a\ddot{\theta} \\ \ddot{x}_2^M + a\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

en ésta  $m_{wr}$  es la masa de la llanta derecha. Sumando miembro a miembro las ecuaciones (24), (25) y (26), se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} F_l + F_r \\ R_l + R_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_b \ddot{x}_1^M + m_b b \dot{\theta}^2 + 2m_w \ddot{x}_1^M \\ m_b \ddot{x}_2^M - m_b b \ddot{\theta} + 2m_w \ddot{x}_2^M \end{pmatrix} \quad (27)$$

donde hemos considerado que las masas de las llantas son iguales,  $m_{wl} = m_{wr} = m_w$ .

Para completar el modelo dinámico del robot móvil, aplicamos la segunda expresión de la formulación Euler-Newton al modelo del robot mostrado en la Figuras 1. La expresión (6), se puede escribir de la siguiente manera,

$$\tau_R = \hat{\mathbf{I}}_{CM} \cdot \frac{d\omega}{dt} + m \mathbf{r}_{CM} \times \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt}. \quad (28)$$

Para obtener la ecuación que completa el modelo dinámico del robot móvil, seguimos la misma estrategia que nos condujo a las ecuaciones dadas (27). Aplicando la expresión (28) para el cuerpo del robot y las dos llantas y sumando miembro a miembro las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$a(F_r - F_l) = (I_{3c} + 2I_{3w} + 2m_w a^2) \ddot{\theta} -$$

$$-m_b b (\ddot{x}_2^M - b\ddot{\theta}) \quad (29)$$

en esta expresión  $I_{3c}$  es el momento de inercia a lo largo del eje que pasa por el centro de masa, del cuerpo del robot, y que es paralelo al  $X_3^M$ , mientras que,  $I_{3w}$  es el momento de inercia a lo largo del eje que pasa por el centro de masa de una llanta y que es paralelo al eje  $X_3^M$ .

Para obtener la relación entre los pares aplicados por los motores sobre las llantas ( $\tau_l, \tau_r$ ) y las fuerza de avance que producen sobre las llantas ( $F_l, F_r$ ), aplicamos para cada llanta la expresión  $\sum_i \tau_i = I\alpha$ , donde la suma de pares aplicados son los que hacen que gire la llanta con aceleración angular  $\alpha$  alrededor del eje de rotación con momento de inercia  $I$ . Considerando las aceleraciones angulares de las llantas de las expresiones (18) y (19), se obtienen

$$F_l = \frac{1}{r} \left[ \tau_l - \frac{I_{2w}}{r} (\ddot{x}_1^M - a\ddot{\theta}) \right] \quad (30)$$

$$F_r = \frac{1}{r} \left[ \tau_r - \frac{I_{2w}}{r} (\ddot{x}_1^M + a\ddot{\theta}) \right] \quad (31)$$

donde  $I_{2w}$  es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el eje que une las llantas.

Sustituyendo las expresiones (30) y (31), en la primera componente de las expresiones (25) y (29), se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{(\tau_r + \tau_l)}{r} = \left( m_b + 2m_w + \frac{2I_{2w}}{r^2} \right) \ddot{x}_1^M + m_b b \dot{\theta}^2 \quad (32)$$

$$\frac{a(\tau_r - \tau_l)}{r} = \left( I_{3c} + 2I_{3w} + 2m_w a^2 + m_b b^2 + \frac{2a^2}{r^2} I_{2w} \right) \ddot{\theta} \quad (33)$$

respectivamente.

El modelo del motor que consideramos es el siguiente (Jones and Flynn, 2000):

$$\tau_i = \chi u_i - \sigma \dot{\phi}_i, \quad i = l, r \quad (34)$$

donde  $u_i$  es la diferencia de potencial aplicado al motor  $i$ ,  $\dot{\phi}_i$  es la velocidad angular con la que gira el eje del motor  $i$ ,  $\chi$  es la razón entre la constante de la fuerza contra-electromotriz al cuadrado y la resistencia eléctrica del motor y  $\sigma$  es la razón entre la constante de la fuerza contra-electromotriz y la resistencia eléctrica. Considerando la expresión anterior y usando las expresiones (14)- (17), obtenemos

$$(\tau_r + \tau_l) = \chi(u_r + u_l) - \sigma \frac{2v}{r} \quad (35)$$

$$(\tau_r - \tau_l) = \chi(u_r - u_l) - \sigma \frac{2a\omega}{r} \quad (36)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones (35) y (36) en las ecuaciones (32) y (33) y usando la ecuación (8), obtenemos el modelo dinámico

$$\begin{cases} \dot{x}_{c1}^0 = v \cos \theta - h \omega \sin \theta, \\ \dot{x}_{c2}^0 = v \sin \theta + h \omega \cos \theta, \\ \dot{\theta} = \omega, \\ J_1 \dot{v} = -m_b b \omega^2 - \frac{2\sigma}{r^2} v + \frac{\chi}{r} (u_r + u_l), \\ J_2 \dot{\omega} = -\frac{2a^2 \sigma}{r^2} \omega + \frac{a\chi}{r} (u_r - u_l). \end{cases} \quad (37)$$

donde  $J_1 = m_b + 2m_w + 2I_{2w}/r^2$  y  $J_2 = I_{3c} + 2I_{3w} + 2m_w a^2 + m_b b^2 + 2a^2 I_{2w}/r^2$ . El modelo dinámico de la expresión (37) es un sistema no lineal de cinco ecuaciones diferenciales que tienen dos variables de control  $u_r$  y  $u_l$ .

**4. Trayectorias Deseadas y Ecuaciones Lineales**

Como cualquier trayectoria irregular puede ser aproximada mediante pequeños segmentos rectos y circulares, se pueden obtener las trayectorias básicas que el robot móvil puede realizar para recrear alguna trayectoria deseada. Ya que trayectorias circulares son el objetivo de este trabajo, se puede observar la figura 2 que representa la configuración del movimiento del robot móvil. Para obtener los desplazamientos circulares se supondrá que el estado inicial o posición de casa del robot es paralelo al eje  $\xi$  y que el movimiento se describe sobre un círculo de radio  $R$ , el cual está seccionado en cuatro cuadrantes, además si es tomando en cuenta el sentido en que se recorre se pueden obtener diferentes tipos de trayectorias circulares.

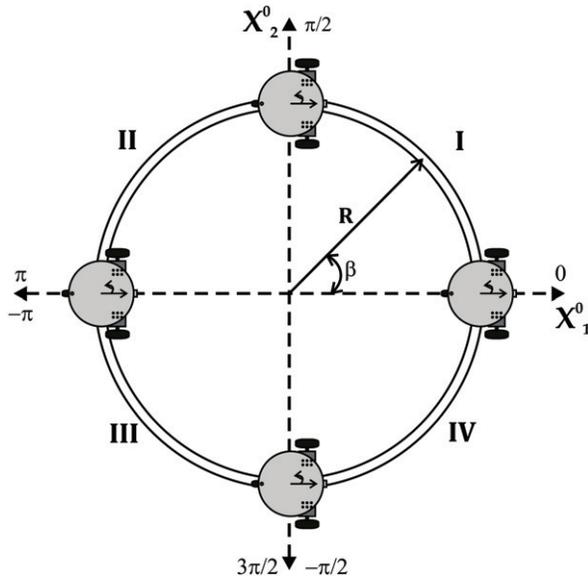


Figura 2: Trayectorias circulares deseadas del robot móvil.

Describiendo las trayectorias circulares en función de las variables de estado del robot móvil, puede obtenerse que una trayectoria circular en sentido contrario a las manecillas del reloj en el IV cuadrante está descrito por las coordenadas

$$y^d = \begin{pmatrix} (x_{c1}^0)^d \\ (x_{c2}^0)^d \\ \theta^d \\ v^d \\ \omega^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\omega_0 t) \\ R \sin(\omega_0 t) \\ \omega_0 t \\ R\omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix},$$

y empleando la expresión (3) puede obtenerse el siguiente sis-

tema lineal variante en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c1}^0 &= -(\omega_0 R \sin(\omega_0 t) + h\omega_0 \cos(\omega_0 t))\tilde{\theta} + \cos(\omega_0 t)\tilde{v} - h \sin(\omega_0 t)\tilde{\omega}, \\ \dot{x}_{c2}^0 &= (\omega_0 R \cos(\omega_0 t) - h\omega_0 \sin(\omega_0 t))\tilde{\theta} + \sin(\omega_0 t)\tilde{v} + h \cos(\omega_0 t)\tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{v}} &= -\frac{2\sigma}{J_1 r^2}\tilde{v} - \frac{2m_b b \omega_0}{J_1}\tilde{\omega} + \frac{\chi}{J_1 r}(u_r + u_l), \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -\frac{2a^2 \sigma}{J_2 r^2}\tilde{\omega} + \frac{a\chi}{J_2 r}(u_r - u_l). \end{aligned} \tag{38}$$

**5. Control Óptimo Continuo de Sistemas Lineales**

La ley de control óptima se calculará para el sistema lineal correspondiente a la trayectoria deseada, de acuerdo los resultados planteados en (Cerdá, 2001), (Kirk, 1970), donde se considera que el sistema lineal

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{39}$$

es completamente controlable; donde  $t \in [t_0, T]$  denota la variación del tiempo,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado donde  $x(t) = \tilde{y}(t) = y^d - y(t)$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de control (entrada), y  $A(t)$  y  $B(t)$  son matrices reales de dimensiones apropiadas; considerando además el siguiente índice de desempeño cuadrático

$$\int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)G(t)u(t)] dt + x^T(t_1)Sx(t_1), \tag{40}$$

y aplicando la programación dinámica mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (Cerdá, 2001), (Kirk, 1970) se obtiene la siguiente entrada de control llamado control óptimo, que minimiza el índice de desempeño (40) sujeto a la ecuación lineal (39)

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = R^{-1}B^T P(t); \tag{41}$$

donde esta ley de control resuelve el problema de estabilización; además  $P(t) \geq 0$  es la solución de la ecuación Diferencial Matricial de Riccati

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P(t)}{\partial t} &= Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + \\ &+ P(t)A + A^T P(t), \text{ con } P(t_1) = 0, \end{aligned} \tag{42}$$

que también es llamada solución de estabilización; y la matriz  $K$  definida en (41) es la matriz de ganancia del control óptimo o la matriz de estabilización óptima. Con una apropiada selección del peso de las matrices  $Q$  y  $R$  es posible tener un comportamiento apropiado del sistema en lazo cerrado, ya que las propiedades dinámicas y magnitudes del estado y las variables de control son de mucha influencia. Por último, considerando de nuevo el sistema lineal (39) y la entrada de control óptimo (41), se puede verificar el comportamiento de éste último analizando la ecuación en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)K]x(t). \tag{43}$$

## 6. Descripción del Método de Solución

### 6.1. Asignación de los Valores Característicos a una Región Específica

Considerando la solución  $P(t, t_1)$  de la ecuación diferencial matricial de Riccati (42) con condición final o de frontera  $P(t_1) = 0$ ; para todo  $t \geq t_0$ , existe el límite

$$\bar{P}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} P(t, t_1),$$

y  $\bar{P}(t)$  es una solución de (42). Además,  $x^T(t)\bar{P}(t)x(t)$  es el índice de comportamiento óptimo, cuando el tiempo inicial es  $t$  y el estado inicial es  $x(t)$ . El control óptimo en un tiempo  $t$  (para un tiempo inicial arbitrario) es definido únicamente por (41) con  $P(t)$  reemplazada por  $\bar{P}(t)$ ; la solución  $\bar{P}(t)$  es llamada una *solución estacionaria* de la ecuación de Riccati (42) con condición  $\bar{P}(\infty) = 0$ .

El resultado puede ser fácilmente aplicado al caso invariante en el tiempo (o constante), cuando  $A, B, Q$  y  $G$  son matrices constantes, además para un horizonte de tiempo infinito la matriz  $S$  del índice de desempeño (40) es usualmente cero. Por lo tanto, el límite  $\bar{P}$  es constante (y también igual al límite de  $P(t_0, t_1)$  cuando  $t$  tiende a  $-\infty$ ). Además, la ecuación diferencial matricial de Riccati se convierte en una ecuación algebraica matricial, ya que el lado izquierdo es idéntico a cero. Por lo que el control óptimo para un sistema lineal invariante en el tiempo es

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = G^{-1}B^T\bar{P}; \quad (44)$$

siendo  $\bar{P}$  la solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$0 = Q - \bar{P}BG^{-1}B^T\bar{P} + \bar{P}A + A^T\bar{P}, \quad (45)$$

sujeto al sistema lineal invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (46)$$

En el diseño de sistemas de control óptimo, la matriz  $K$  se calcula con una apropiada selección de las matrices de peso  $Q$  y  $G$ , y usualmente se determinan a prueba y error hasta lograr el comportamiento deseado.

Los valores característicos del sistema de control el lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad (47)$$

están denotados por

$$\det(I\lambda - (A - BK)) = 0, \quad (48)$$

ya que el objetivo de control es mejorar el comportamiento del sistema original, los valores característicos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  deben ser llevados a una región deseada del semiplano izquierdo del plano complejo (figura 3).

Siendo el par  $(A, B)$  las matrices del sistema en lazo abierto (3), y  $h \geq 0$  que representa el grado de estabilidad prescrito correspondiente a una región en el semiplano izquierdo del plano complejo. Entonces la matriz en lazo cerrado  $A_c = A - BG^{-1}B^T\bar{P}$  tiene todos sus valores característicos ubicadas

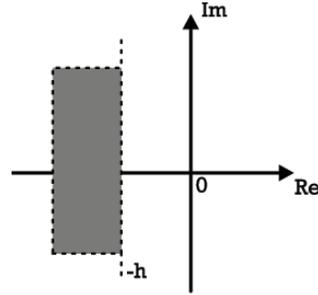


Figura 3: Plano complejo  $S$ .

al lado izquierdo de la línea vertical  $-h$ , donde la matriz  $\bar{P}$  es la solución de la ecuación de Riccati

$$0 = Q - \bar{P}BG^{-1}B^T\bar{P} + \bar{P}(A + hI_n) + (A + hI_n)^T\bar{P}. \quad (49)$$

Con  $Q = 0_n$  los valores característicos inestables de  $A + hI_n$  son colocados en la posición reflejada con respecto a la línea vertical  $h$ , los cuales son los valores característicos de  $A_c$ .

Assumiendo que  $h$  es un valor positivo que determinan la línea vertical  $[-h]$  sobre el eje real negativo, y que dada la matriz de  $n \times n$   $\tilde{A} = A + hI_n$ ; la ley de control cambia a

$$u(t) = \tilde{K}x(t), \quad (50)$$

$$\tilde{K} = G^{-1}B^T\bar{P}. \quad (51)$$

La matriz  $\bar{P}$  es la solución de la ecuación de Riccati modificada

$$0 = \bar{P}BG^{-1}B^T\bar{P} + \bar{P}\tilde{A} + \tilde{A}^T\bar{P}, \quad (52)$$

donde la matriz  $G$  es seleccionada como matriz diagonal unitaria. El sistema de control óptimo de lazo cerrado, es entonces

$$\dot{x}(t) = (A - B\tilde{K})x(t). \quad (53)$$

### 6.2. Sistema Lineal con Parámetros Variantes en el Tiempo

Un sistema lineal con parámetros variantes, depende explícitamente de un vector de parámetros variante en el tiempo  $\alpha(t)$  que puede medirse en tiempo real, este parámetro es descrito para todo  $t \geq 0$  por la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t), \\ \text{con: } \alpha &: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^r, A: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}, B: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times m}. \end{aligned} \quad (54)$$

Este modelo permite tomar en cuenta las variaciones paramétricas de un sistema dinámico (temperatura, masa, concentración, velocidad, presión dinámica, ángulo de ataque en un avión, etc.); el modelo evoluciona en función de una trayectoria paramétrica admisible, esta última es tal que cada uno de sus puntos pertenece en todo instante de tiempo al conjunto compacto  $\Omega \subset \mathfrak{R}^r$ ; es decir, el vector de parámetros satisface en todo momento la condición:

$$\alpha(t) \in \Omega = \left\{ \alpha(t) : \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i(t) \leq \bar{\alpha}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \right\} \subset \mathfrak{R}^r, \quad (55)$$

siendo  $\underline{\alpha}_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  las cotas inferior y superior respectivamente del parámetro  $\alpha_i(t)$ . Ahora bien, el sistema lineal con parámetros variables puede interpretarse como una generalización de un sistema lineal invariante en el tiempo cuando la trayectoria paramétrica admisible es constante  $\alpha(t) = \alpha_0$ .

Con lo anterior, se puede entonces mencionar que el objetivo del método desarrollado en este apartado, es encontrar una ley de control óptima para un sistema lineal incierto, descrito por la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(\cdot)x(t) + B(\cdot)u(t), \tag{56}$$

donde las matrices  $A(\cdot)$  y  $B(\cdot)$  son inciertas y pertenecen a los conjuntos  $D_A$  y  $D_B$  respectivamente; para esto, se considerará que un sistema de esta clase está descrito en la ecuación (54); es decir, las matrices  $A$  y  $B$  dependen de un vector de parámetros variante en el tiempo  $\alpha(t) = [\alpha_1(t) \ \dots \ \alpha_r(t)]^T \in \Omega \subset \mathfrak{R}^r$ , en cual representa un politopo con  $l_\alpha = 2^r$  vértices.

Adicionalmente se considera un conjunto de vectores, que representan las combinaciones extremas de los parámetros en el interior del conjunto compacto definido en la ecuación (55), dados por:

$$\alpha^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1^i(t) \\ \vdots \\ \alpha_r^i(t) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N; \tag{57}$$

a partir de los vectores  $\{\alpha^{(i)}\}_{i=1}^N$  se construyen modelos locales lineales invariantes en el tiempo para el sistema lineal con parámetros variantes haciendo

$$(A_i, B_i) = (A(\alpha^{(i)}), B(\alpha^{(i)})), \quad i = 1, \dots, N. \tag{58}$$

Por lo que ahora es posible describir el sistema lineal con parámetros variantes dentro del conjunto compacto  $\Omega$  a través del siguiente sistema politópico

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A \in D_A, \quad B \in D_B; \tag{59}$$

con  $D_A, D_B$  dominios de incertidumbre politópica definidos como

$$\begin{aligned} A \in D_A &\hat{=} \left\{ A \in \mathfrak{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}, \\ B \in D_B &\hat{=} \left\{ B \in \mathfrak{R}^{n \times m} : B = \sum_{i=1}^N \gamma_i B_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1 \right\}. \end{aligned} \tag{60}$$

Para los dominios de incertidumbre politópica expresados arriba, es equivalente la notación:

$$A \in C_0 \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$$

donde  $C_0$  denota el cascarón convexo.

Las matrices  $A_i$  de (60) son concebidas como vértices y los escalares  $\alpha_i$  son los elementos de combinación convexa. Por lo tanto, es posible asegurar que, si un determinado conjunto de condiciones se cumplen en los vértices del politopo, entonces, estas mismas condiciones se cumplen también en la región. Un inconveniente de este enfoque es el problema de la explosión exponencial, ya que el número de LMIs está dada por una función del tipo de  $2^r$ , donde  $r$  es el número de parámetros inciertos en el sistema.

### 6.3. Ecuación Algebraica de Riccati como LMI

Con lo planteado anteriormente, se puede entonces construir un sistema politópico convexo conformado por sistemas lineales invariantes en el tiempo a partir del sistema lineal de parámetros variantes (65); teniendo este conjunto de sistema lineales invariantes en el tiempo, podemos utilizar el método planteado anteriormente, es decir, el método de asignación de los valores característicos. Sin embargo, no podemos aplicar este método como tal, ya que si lo hacemos, tendríamos que resolver y encontrar una solución de estabilización  $\bar{P}$  para cada uno de los sistemas lineales invariantes en el tiempo; en lugar de eso, se tiene que buscar una solución  $\bar{P}$  que satisfaga a todos estos sistemas de manera simultánea, es decir, una sólo solución óptima para todos los sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Esto se realizará, haciendo la transformación de la ecuación algebraica de Riccati modificada (49) a una LMI que a la vez representará el conjunto politópico convexo del sistema lineal incierto. La transformación se realiza aplicando el siguiente teorema

**Teorema 1.** (Complemento de Schur) Sea  $g \in \mathfrak{R}^m$  un vector de variables de decisión y  $M_1(g), M_2(g), M_3(g)$  funciones afines en  $g$  con  $M_1(g)$  y  $M_2(g)$  simétricas. Entonces la siguientes afirmaciones son equivalentes

$$a) \quad M_1(g) - M_3(g)M_2^{-1}(g)M_3^T(g) > 0, \quad \text{con } M_2(g) > 0;$$

$$b) \quad \begin{bmatrix} M_1(g) & M_3(g) \\ M_3^T(g) & M_2(g) \end{bmatrix} > 0.$$

Por lo que teniendo la ecuación algebraica modificada de Riccati

$$0 = \bar{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\bar{P} - \bar{P}B_iR^{-1}B_i^T\bar{P}, \tag{61}$$

la LMI asociada a ésta es

$$\begin{pmatrix} \bar{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\bar{P} & \bar{P}B_i \\ B_i^T\bar{P} & -R \end{pmatrix} < 0, \tag{62}$$

considerando que

$$\bar{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\bar{P} + \bar{P}B_iR^{-1}B_i^T\bar{P} < 0. \tag{63}$$

Como puede observarse, las ecuaciones (61) y (63) son diferentes, la solución de la ecuación algebraica modificada de Riccati (61) da un resultado de estabilización  $\bar{P} > 0$ , mientras que la solución de la LMI asociada esta ecuación dará como resultado una solución de estabilización  $\bar{P} < 0$ ; como el algoritmo de control óptimo requiere que la solución de estabilización sea definida positiva, la solución obtenida por LMIs, se multiplicará por  $-1$  para obtener el resultado buscado. Considerar de manera diferente la ecuación de Riccati se hace con el fin de no perder la generalidad de la solución de una LMI.

La solución de la ecuación algebraica de Riccati (61), es semejante a la solución de la LMI asociada a ésta la cual se obtiene haciendo

$$\text{mín } \text{tr}(\bar{P}) \text{ sujeto a } \begin{pmatrix} \bar{P}\bar{A}_i + \bar{A}_i^T\bar{P} & \bar{P}B_i \\ B_i^T\bar{P} & -R \end{pmatrix} < 0; \tag{64}$$

la cual se calculará mediante la ayuda de LMIlab del software MATLAB.

### 7. Aplicación del Metodo y Resultados

El valor de cada uno de los parámetros físicos del robot móvil, necesarios para obtener los resultados se presenta en la tabla 1.

Con estos valores se tiene que el sistema lineal a una trayectoria circular de radio  $R = 1m$  en el IV cuadrante en sentido contrario de las manecillas del reloj a una velocidad angular deseada de  $\omega_0 = 0,5rad/s$  se tiene el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{x}_{c2} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5 \sin(0,5t) - 0,025 \cos(0,5t) \\ 0 & 0 & 0,5 \cos(0,5t) - 0,025 \sin(0,5t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1}^0 \\ x_{c2}^0 \\ \theta \\ \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0595 & 0,0595 \\ 0,0840 & -0,0840 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_l \end{pmatrix} \tag{65}$$

Además es necesario verificar la controlabilidad completa de los sistemas lineales, para esto se utilizará el siguiente teorema de controlabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo

**Teorema 2.** *Asumiendo que las funciones matriciales  $A(t)$ ,  $B(t)$  son analíticas en  $\mathbb{R}^+$ , el sistema*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

*es completamente controlable en algún tiempo finito si*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} M_1(t_0) & M_2(t_0) & \dots & M_k(t_0) \end{pmatrix} = n, \tag{66}$$

para todo  $t_0 > 0$ ,

donde

$$\begin{aligned} M_1(t) &= B(t), \\ M_k(t) &= -A(t) + \frac{d}{dt}M_{k-1}(t), \quad k = 2, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Teniendo así que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} M_1(t_0) & M_2(t_0) & \dots & M_k(t_0) \end{pmatrix} = 5,$$

por lo tanto (65) es *completamente controlable*.

Considerando el sistema lineal variante en el tiempo (65),

como un sistema lineal con parámetros variantes, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{x}_{c2} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1(t) & \alpha_3(t) & \alpha_5(t) \\ 0 & 0 & \alpha_2(t) & \alpha_4(t) & \alpha_6(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1,5055 & -0,0409 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2977 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1}^0 \\ x_{c2}^0 \\ \theta \\ \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0595 & 0,0595 \\ 0,0840 & -0,0840 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_l \end{pmatrix}, \tag{67}$$

donde los parámetros están dados por

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \\ \alpha_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \sin(0,5t) - 0,025 \cos(0,5t) \\ 0,5 \cos(0,5t) - 0,025 \sin(0,5t) \\ \cos(0,5t) \\ \sin(0,5t) \\ -0,05 \sin(0,5t) \\ 0,05 \cos(0,5t) \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Ahora bien, teniendo identificados cada uno de los parámetros del sistema lineal variante en el tiempo (65) y tomando en cuenta la teoría descrita, primero es necesario identificar cada una de las cotas superior e inferior de cada uno de los parámetros; estos son

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \\ \alpha_5(t) \\ \alpha_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0,5006, 0,5006] \\ [-0,5006, 0,5006] \\ [-1,0, 1,0] \\ [-1,0, 1,0] \\ [-0,05, 0,05] \\ [-0,05, 0,05] \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Con éste conjunto, se construye entonces un sistema politópico con  $2^6 = 64$  vértices, en otras palabras, se crea un conjunto de 64 sistemas lineales invariantes a partir de todas las combinaciones posibles de las cotas inferiores y superiores de los seis parámetros existentes en el sistema incierto; algunos de los cuales son

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5006 & -1 & -0,05 \\ 0 & 0 & -0,5006 & -1 & -0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1,5055 & -0,0409 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2977 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5006 & -1 & -0,05 \\ 0 & 0 & -0,5006 & -1 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1,5055 & -0,0409 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2977 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5006 & -1 & -0,05 \\ 0 & 0 & -0,5006 & 1 & -0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1,5055 & -0,0409 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2977 \end{pmatrix}$$

Tabla 1: Parámetros físicos del robot móvil.

Variable	Valor	Descripción
$v_0$	0,5	Velocidad deseada, [m/s]
$\omega_0$	0,5	Velocidad angular deseada, [rad/s]
$R$	0,35	Radio de la trayectoria circular, [m]
$a$	0,14	Distancia entre las ruedas activas, [m]
$b$	0,47	Distancia del centro de masa al eje de las ruedas, [m]
$h$	0,05	Distancia del eje de las ruedas al arreglo de sensores, [m]
$m_b$	2,0	Masa del robot, [kg]
$m_w$	0,095	Masa de cada una de las ruedas, [kg]
$r$	0,038	Radio de las ruedas, [m]
$\chi$	0,0052	Fricción viscosa del motor
$\sigma$	0,0025	Fuerza contra-electromotriz del motor

$$A_{64} = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0,5006 & 1 & 0,05 & \\ 0 & 0 & 0,5006 & 1 & 0,05 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1,5055 & -0,0409 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2977 & \end{pmatrix};$$

donde se tiene que los valores característicos en lazo abierto de cada uno de estos sistemas lineales invariantes en el tiempo son

$$\det(I\lambda - A_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,5055 \\ -0,2977 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, los sistemas lineales invariantes en el tiempo son estables; sin embargo, es necesario diseñar una ley de control que mejore la estabilidad de éstos sistemas para así asegurar la estabilidad del sistema lineal con parámetros variantes. Escogiendo la línea vertical  $h = -25$  a lado izquierdo del plano complejo, y haciendo

$$\tilde{A}_i = A_i + hI,$$

se puede entonces obtener la solución de la LMI que representa la solución de estabilización de la ecuación de Riccati

$$\text{mín } tr(\tilde{P}) \text{ sujeto a } \begin{pmatrix} \tilde{P}\tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T\tilde{P} & \tilde{P}B_i \\ B_i^T\tilde{P} & -R \end{pmatrix} < 0;$$

dicha solución  $\tilde{P}$  de estabilización es la siguiente

$$\tilde{P} = 10^6 \begin{pmatrix} 1,7645 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,7649 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8,4176 & 0,0006 & 0,1725 \\ 0 & 0 & 0,0006 & 0,0033 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1725 & 0 & 0,0070 \end{pmatrix}.$$

Con la cuál se puede obtener el control óptimo buscado para

realizar la trayectoria circular que es

$$u(t) = \tilde{K}x(t),$$

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 14\,526 & 198 & 586 \\ 0 & 0 & -14\,460 & 197 & -586 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1}^0 \\ x_{c2}^0 \\ \theta \\ \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}; \quad (70)$$

donde el vector de desviaciones esta dado por  $x(t) = y^d(t) - y(y)$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{c1}^0 \\ x_{c2}^0 \\ \theta \\ \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0,5t) - x_{c1}^0 \\ \sin(0,5t) - x_{c2}^0 \\ 0,5t - \theta \\ 0,5 - \bar{v} \\ 0,5 - \bar{\omega} \end{pmatrix};$$

por lo que la ecuación lineal de control en lazo cerrado es

$$\dot{x}(t) = (A - B\tilde{K})x(t),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{c1}^0 \\ \dot{x}_{c2}^0 \\ \dot{x}_{c1} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,5 \sin(0,5t) - 0,025 \cos(0,5t) \\ 0 & 0 & 0,5 \cos(0,5t) - 0,025 \sin(0,5t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,9580 \\ 0 & 0 & -2\,435,6 \\ \cos(0,5t) & -0,05 \sin(0,5t) \\ \sin(0,5t) & 0,05 \cos(0,5t) \\ 0 & 1 \\ -25,0128 & -0,0814 \\ 0,0809 & -98,8015 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1}^0 \\ x_{c2}^0 \\ \theta \\ \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}.$$

En la figura 4 se muestra el comportamiento de las variables de estado del sistema lineal en lazo cerrado, simulado computacionalmente o resuelto por integración numérica desde un tiempo inicial  $t_0$  hasta un tiempo final  $t_1 = 5\text{seg.}$ ; se consideran diferentes condiciones iniciales para verificar la robustez del control óptimo diseñado. Ya que el sistema lineal representa la desviación de la trayectoria actual a la trayectoria deseada, la figura representa la evolución del error o dicho de otra forma, la convergencia a la trayectoria deseada. Además, en ésta figura se puede observar que el comportamiento para ambas condiciones iniciales es muy bueno, por lo tanto, tenemos un control muy

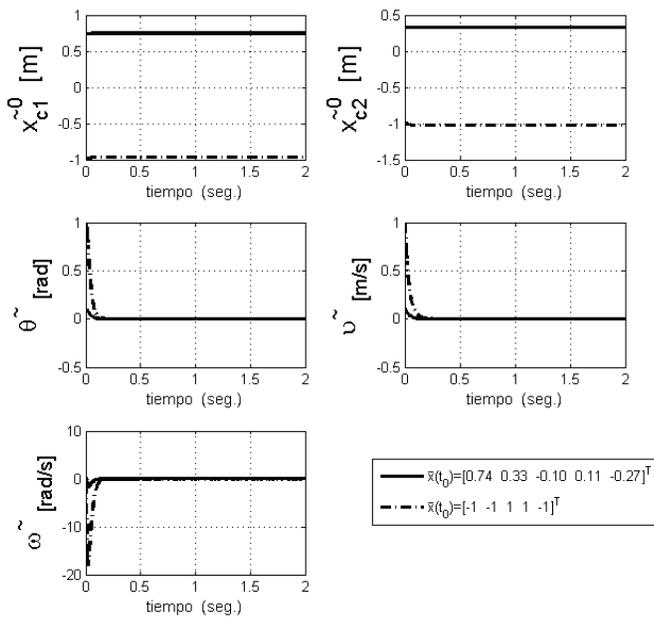


Figura 4: Comportamiento del sistema lineal de control en lazo cerrado mostrando la convergencia a la trayectoria deseada (Trayectoria circular en el IV cuadrante en sentido contrario del reloj).

aceptable que cumple con la condición de robustez necesaria. También se puede observar, que las variables de estado del sistema linealizado  $\tilde{x}_{c1}^0$  y  $\tilde{x}_{c2}^0$  no llegan a cero, sin embargo son estables en una región cercana a la condición inicial de estas variables, lo que pone en manifiesto que la trayectoria circular puede ser alcanzada desde cualquier condición inicial, lo que a su vez es esperado, ya que se requiere que el robot realice la trayectoria circular en cualquier punto del plano.

### 8. Simulación del Robot Móvil con el Control Óptimo Lineal

Considerando el sistema de ecuaciones de movimiento no lineales del robot móvil

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{c1}^0 &= v \cos(\theta) - 0,05\omega \sin(\theta) , \\
 \dot{x}_{c2}^0 &= v \sin(\theta) + 0,05\omega \cos(\theta) , \\
 \dot{\theta} &= \omega , \\
 \dot{v} &= -0,0511\omega^2 - 1,5055v + 0,0595(u_r + u_l) , \\
 \dot{\omega} &= -0,2977\omega + 0,0840(u_r - u_l) ;
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

se simulará computacionalmente el comportamiento de éste, bajo la ley de control óptimo lineal sintetizadas para que el robot describa una trayectoria circular en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para esto, se solucionará el sistema diferencial 71 mediante el software MATLAB empleando la instrucción *ode45*, la cual aplica una integración numérica mediante un algoritmo Runge-Kutta de 5° orden; como resultado se obtendrán gráficas de comportamiento de cada una de las variables de estado del robot móvil, así como una gráfica  $(x_{c1}^0, x_{c2}^0)$  que representa el movimiento en el plano de trabajo.

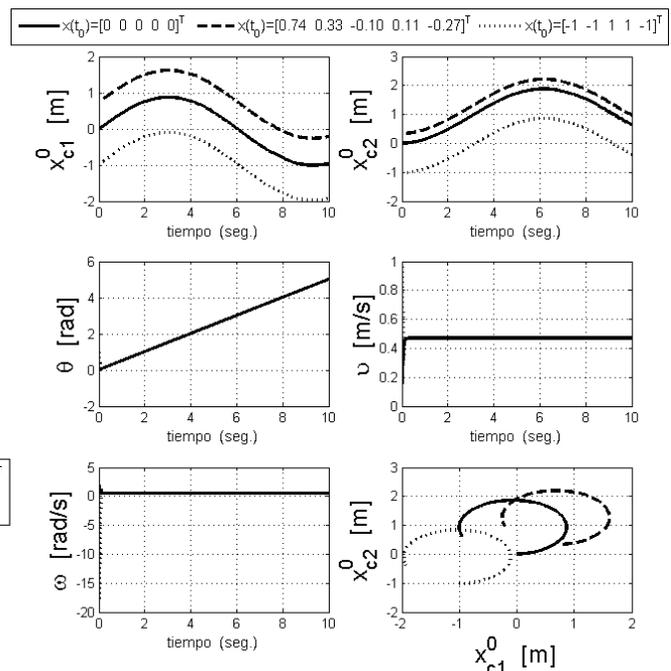


Figura 5: Simulación del Robot Móvil realizando una trayectoria circular en el IV cuadrante en sentido contrario del reloj.

Considerando el sistema de ecuaciones no lineales de movimiento del robot móvil (71) y la ley de control óptimo lineal (70) diseñada para que éste describa una trayectoria circular de radio  $R = 1m$ , en el IV cuadrante en sentido contrario de la manecilla del reloj a una velocidad angular de  $\omega_0 = 0,5rad/s$ ; el comportamiento que el robot móvil tiene con ésta señal de control se muestra en el figura 5, en donde puede observarse que el robot móvil describe la trayectoria deseada desde cualquier condición inicial y sin problemas en el tiempo de estabilización. La ley de control óptimo lineal no depende de las variables de estado correspondientes a la posición en la que se encuentre el robot móvil.

### 9. Conclusión

Al utilizar el método de la asignación de los valores característicos para el diseño de un control óptimo para un sistema lineal invariante en el tiempo, se evitó la sintonización de las matriz de peso  $Q$ , al no utilizarla en la búsqueda de la solución de estabilización de la ecuación algebraica de Riccati. Ésta última resulta de considerar el problema original a resolver hasta un horizonte de tiempo infinito, lo que evita utilizar los polinomios de grado  $n$  para la aproximación de la solución, ya que ahora ésta es una matriz de elementos constantes. Realmente, la asignación de los valores característicos en cualquier región vertical del semiplano izquierdo del plano complejo, asegura la estabilidad asintótica del sistema lineal invariante en el tiempo. Además al utilizar este método el control óptimo diseñado puede ser utilizado para cualquier lapso de tiempo.

Con la utilización de las desigualdades matriciales lineales (LMIs), como solución del control óptimo para un sistema politópico convexo formado por sistemas locales lineales invariantes en el tiempo, construido a partir de un sistema lineal con parámetros variantes, se eliminó el problema que hacía imposible aplicar el método de asignación de valores característicos en una región específica estudiado con anterioridad, ya que éste sólo es aplicable a sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Aún cuando la síntesis del control fue un tanto laboriosa, su aplicación resultó más sencilla, por lo que el costo computacional es económico. También es importante hacer notar que no se trata de una aproximación y que aunque la propuesta es válida para arcos de circunferencia menores a  $\pi/4$ , es posible la reasignación en línea de los parámetros del problema para seguir arcos de mayor amplitud.

## English Summary

### Optimal Control for Circular Paths in a Mobile Robot

#### Abstract

This raises the problem of finding a linear optimal control to stabilize circular paths in a mobile robot type (2,0), using the standard solution to the problem of optimal control for a linear system, which can be demonstrated by the programming dynamics technique applied to the equation of Hamilton-Jacobi-Bellman. We obtain the nonlinear dynamic equations of the mobile robot and then for a desired trajectory we obtained the linear equations. Optimal control is synthesized from this linear system by solving a matrix Riccati differential equation for finding the solution of stabilization; in the literature, this differential equation is treated as an algebraic equation for an infinite time and exclusively for invariant time linear systems. The resulting linear system for a circular path is a time varying linear system, which causes problems for the solution of stabilization in constant terms; the solution was to create a convex polytopic system based on the time varying linear system and transform the algebraic Riccati equation in a LMI. Thus we obtained a stabilization solution, which satisfies all the time invariant linear systems that make up the polytopic system. Also, a change in the optimal control structure allows that the trial and error choice of weight matrices is unnecessary and makes the system eigenvalues are placed in a specific area in the left half plane of the complex plane.

#### Keywords:

Mobile Robot, linearization, stabilization methods, linear optimal control, matrix Riccati equation, time varying systems.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), y gracias al Proyecto *Control Óptimo en Teoría de Control*, sustentado

por la Vicerrectoría de Estudios de Posgrado (VIEP) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

## Referencias

- Araya P., Eddie A., 1999. Coordinación de PSS y SVC para mejorar la estabilidad dinámica. Ingeniería.
- Bullo F., Lynch K., 2001. Kinematic controllability for decoupled trajectory planning in underactuated mechanical systems. IEEE Trans. Robot. Automat. Vol. 17, 402-412.
- Cerdá E., 2001. Optimización Dinámica. Prentice Hall, España.
- Chitta S., Ostrowski J., 2002. Motion planning for heterogeneous modular mobile systems. Proc. Int. Conf. Robotics and Automation Vol. 1, 4077-4082.
- DeLuca A., Oriolo G., Samson C., 1998. Feedback control of a nonholonomic car-like robot. Robot motion planning and control. Lectures notes in control and information sciences, 171-253.
- Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P., 1995. Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems. Proc. Eur. Contr. Conf.
- Lamiroux F., Bonnafous D., Lefebyvre O., 2004. Reactive path deformation for nonholonomic mobile robots. IEEE Transactions on robotics and automation Vol. 20 No. 6.
- Lamiroux F., Sekhavat S., Laumond J.P., 1999. Motion planning and control for Hilare pulling a trailer. IEEE Transactions on robotics and automation Vol. 15 No. 4, 640-652.
- Garran T., Antonio P., 2008. Control robusto de un sistema lineal de parámetros variantes (LPV): Un enfoque de las desigualdades matriciales lineales (LMI). Rev. Fac. Ing. UCV Vol. 23 No. 1, 5-17.
- Hardiansyah, Furuya S., Irisawa J., 1999. Optimal Power System Stabilization via Output Feedback Excitation Control. Journal of Nagaoka University of Technology, Japan, 21-28.
- Hemami A., Mehrabi M. G., Cheng R.M.H., 1992. Synthesis of an Optimal Control Law for Path Tracking in Mobile Robots. Automatica Vol. 28 No. 2, 383-387.
- Jones J., Flynn A.M., 2000. Mobile Robots, Inspiration Implementation. 2da Ed., Addison-Wesley, United States of America.
- Symon. K.R., 1970. Mecánica. 2da Ed., Addison-Wesley, México.
- Kirk D.E., 1970. Optimal Control Theory: an introduction. Prentice Hall, United States of America.
- Kwakernaak H., Sivan R., 1972. Linear Optimal Control Systems. Wiley-Interscience, New York.
- Laumond J.P., 1993. Controllability of a multibody mobile robot. IEEE Trans. Robot. Automat. Vol. 9, 755-763.
- Laumond J.P., 1998. Probabilistic path planning. Robot motion planning and control. Lectures notes in control and information sciences, pp. 255-304.
- Laumond J.P., Sekhavat S., Lamiroux F., 1998. Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots. Robot motion planning and control. Lectures notes in control and information science, pp. 2-53.
- LaValle S.M., Kuffner J.J., 2001. Randomized kinodynamic planning. Int. Robot. Res., Vol. 20, 378-400.
- Niamsup P., Phat V.N., 2008.  $H_\infty$  Control Problem of Linear Time-Varying Systems via Controllability approach. Applied Mathematics and Computation.
- Pedrycz W., 1993. Fuzzy states and fuzzy systems. Research Setudies Press, England.
- Swain R., Devy M., Jonquières S., 1998. Navegación de un robot móvil por medio de control visual en ambiente estructurado. Computación y sistemas Vol. 1 No. 3, 161-169.
- Samson C., 1995. Control of chained systems. Application to path following and time-varying point stabilization. IEEE Trans. Robot. Automat. Vol. 40, 64-77.
- Shieh L.S., Dib H.M., 1986. Linear Quadratic Regulators with Eigenvalue Placement in a Vertical Strip. IEEE Trans. on Automatic Control Vol. AC-31 No. 3, 241-243.
- Sordalen O., Egeland O., 1995. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 40, 35-49.
- Svestka P., Overmars M., 1995. Coordinated motion planning for multiple car-like robots using probabilistic roadmaps. Proc. Int. Conf. Robotics and Automation, pp. 1631-1636.