

## Control de Vibraciones en Maquinaria Rotatoria

A. Blanco-Ortega\* F. Beltrán-Carbajal\*\* G. Silva-Navarro\*\*\* H. Méndez-Azúa\*\*\*\*

\* CENIDET, Ingeniería Mecatrónica C.P. 62490

Cuernavaca, Morelos, México (e-mail: andres.blanco@cenidet.edu.mx)

\*\*Universidad Politécnica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

C.P. 45640 Tlajomulco de Zúñiga, Jalisco, México

(e-mail: fran\_belt29@hotmail.com)

\*\*\* CINVESTAV-IPN. Departamento de Ingeniería Eléctrica - Sección de Mecatrónica A.P. 14-740 C.P. 07300 México, D.F., (e-mail: gsilva@cinvestav.mx)

\*\*\*\* ITESM, Campus Guadalajara. Escuela de Ingeniería y Arquitectura

C.P. 45201 Zapopan, Jalisco, México (e-mail: hmendez@itesm.mx)

Resumen: La vibración causada por el desequilibrio es un problema común que se presenta en la maquinaria rotatoria. En este artículo se presenta una revisión de los trabajos de investigación que se han realizado en el área de equilibrado y control activo de vibraciones en maquinaria rotatoria. Además, se presentan dos propuestas de solución a este problema de atenuación de vibraciones para tareas de seguimiento de trayectorias de realimentación de la salida deseada. La primera propuesta consiste en el uso de un cojinete móvil para modificar la longitud del rotor, y como consecuencia, la frecuencia natural, y así evitar las grandes amplitudes que ocurren en la resonancia. La segunda propuesta consiste en montar un disco equilibrador activo sobre el rotor, el cual contiene una masa de equilibrado que puede ubicarse en cualquier posición radial y angular dentro del disco para atenuar las vibraciones causadas por el desequilibrio residual. Puesto que ambas estrategias de control activo requieren información de la excentricidad del rotor, el método de identificación algebraica es utilizado para la estimación en línea de los valores de sus parámetros. Copyright © 2010 CEA.

Palabras Clave: Control Activo de Vibraciones, Equilibrado Activo de Rotores, Identificación de Excentricidad.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las fuentes comunes que generan vibraciones en la maquinaria rotatoria son principalmente el desequilibrio, resonancias y el desalineamiento. El desequilibrio ocurre cuando el eje principal de inercia no coincide con el eje geométrico del sistema, provocando vibraciones que generan fuerzas indeseables que son transmitidas principalmente a los soportes o cojinetes. La resonancia ocurre cuando una frecuencia natural del sistema se iguala con otra frecuencia de excitación y en esta condición ocurren las máximas amplitudes de vibración. Las máquinas rotatorias, generalmente, operan por encima de la primera frecuencia natural, es decir, pasan por al menos una resonancia. En la actualidad, se quiere operar la maquinaria rotatoria a velocidades cada vez más altas, por arriba de la primera velocidad crítica, por lo que, surge la necesidad de equilibrar estas máquinas para evitar catástrofes o que se dañen los componentes debido a las fuerzas que se generan por las vibraciones excesivas al pasar por la resonancia.

Para equilibrar la maquinaria rotatoria se han propuestos diversos métodos o dispositivos pasivos y activos con el objetivo de atenuar las vibraciones causadas por el desequilibrio o las resonancias (Green *et al.*, 2008; Hredzak *et al.*, 2006; Chong-Won, 2006; Ward, 2004, Zhou y Shi, 2001).

En el control pasivo el sistema rotatorio se modifica estando el rotor fuera de línea, es decir, el rotor es parado para realizar el ajuste de alguno o todos sus parámetros tales como, su masa, rigidez y amortiguamiento. Existen diversos métodos para el equilibrado pasivo de maquinaria rotatoria, algunos de estos son el equilibrado en un plano, dos o múltiples planos y el

equilibrado modal. Mediante estos métodos se puede estimar cual es la dirección del punto pesado (punto de aparente concentración de todas las fuerzas de desequilibrio distribuidas alrededor de un disco o eje) y, posteriormente, una masa de equilibrado es agregada opuestamente al punto pesado para contrarrestar la fuerza centrífuga debido a la masa de desequilibrio. En la Figura 1 se muestra un disco inercial el cual contiene varias perforaciones para agregar masas de equilibrado. El punto pesado se puede determinar mediante el uso de una marca de referencia en el disco y con el uso de sensores de desplazamiento de no-contacto.

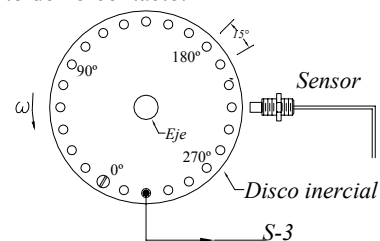


Figura 1. Disco inercial y sensor de desplazamiento de no contacto.

Thearle (1932), propuso el primer dispositivo equilibrador automático y diseñó máquinas para equilibrar maquinaria rotatoria. El equilibrador automático consistía en un disco con dos masas del mismo peso y tamaño, montadas en dos eslabones que pueden girar libremente (Figura 2). Para determinar la posición del desequilibrio, el rotor era operado por encima de la velocidad crítica y posteriormente se dejaba rotar libremente, y así, las masas de manera automática buscan posicionarse en una condición de equilibrio (equilibrado automático). Mediante el radio y el ángulo entre los dos eslabones se determinaba la

posición del desequilibrio y posteriormente con el uso de un embrague se fijaban las masas en la posición de equilibrio. También, se han propuesto variaciones de este tipo de equilibradores automáticos probando que en velocidades de operación constante atenúan la amplitud de vibración pero en el transitorio no atenúan las amplitudes, por el contrario, en la resonancia estos discos pueden incrementar la amplitud de vibración (Chong-Won, 2006; Zhou y Shi, 2001).

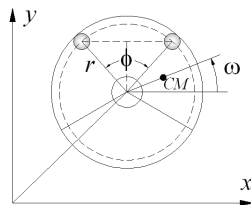


Figura 2. Equilibrador automático de dos masas.

En el control activo se utilizan dispositivos para aplicar fuerzas de control, los cuales son realimentados y/o prealimentados de la información de los estados del sistema obtenida mediante sensores. La implementación de control activo en maquinaria rotatoria proporciona ventajas para atenuar las amplitudes de vibración, durante el paro y arranque a través de velocidades críticas, y atenuar la vibración transitoria, tal como el desequilibrio repentino (pérdida de paletas, alabes, etc.).

Palazzolo *et al.* (1993), proponen el uso de actuadores piezoeléctricos (Figura 3.a) para el control activo de vibraciones. El uso de estos actuadores permite atenuar las amplitudes de vibración tanto en el transitorio como en velocidades constantes de operación, donde, los actuadores son modelados mediante resortes y amortiguadores; con la fuerza que se aplica se modifican las propiedades de rigidez y amortiguamiento del sistema. Recientemente, Carmignani *et al.* (2001), proponen el uso de actuadores piezoeléctricos combinados con un cojinete presurizado y muestran experimentalmente, que se puede atenuar las amplitudes de vibración a velocidad de operación constante por abajo de la primera velocidad crítica.

También, se ha propuesto el uso de cojinetes de levitación magnética (Figura 3.b), para el control activo de vibraciones (Lee, 2001; Sheu-Yang, 1997), ya que presentan poca fricción, entre el cojinete y el rotor, y se pueden generar fuerzas electromagnéticas para el control de las vibraciones. Sin embargo, presentan ciertas desventajas tales como: requieren el uso de cojinetes auxiliares (convencionales: bolas, rodillos, etc.), los cuales, son sacrificados en casos donde el cojinete magnético falla; pueden requerir una realimentación de corriente adicional para proporcionar las fuerzas para controlar el rotor, por lo que el flujo de corriente adicional en la bobina crea más calor ocasionando que se implementen sistemas de enfriamiento, además, requieren de una cantidad considerable de corriente eléctrica y un área grande para generar grandes fuerzas.

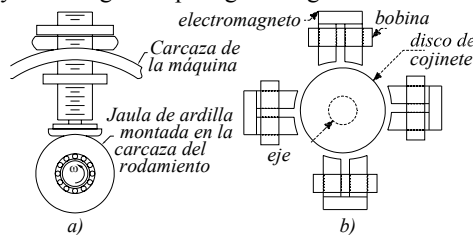


Figura 3. a) Actuador piezoeléctrico y b) Cojinete de levitación magnética.

Otro dispositivo de gran interés para el control activo es el uso de cojinetes presurizados, como se muestra en la Figura 4; mediante el control de la presión del fluido se puede modificar las propiedades de rigidez y amortiguamiento del sistema. Guozhi *et al.* (2000), proponen el uso de un cojinete presurizado con fluidos reológicos (Figura 4.a) para atenuar las vibraciones alrededor de la primera velocidad crítica. Un fluido reológico cambia su propiedad de amortiguamiento cuando se le aplica un voltaje eléctrico o campo magnético. Para atenuar la amplitud en la resonancia el rotor se empieza a girar, posteriormente, cuando el rotor alcanza una velocidad cercana a la primera velocidad crítica se aplica un voltaje eléctrico al fluido reológico en el cojinete hasta pasar la velocidad crítica, después, el voltaje es eliminado y se sigue acelerando el rotor hasta llegar a la velocidad de operación. De manera paralela, Hathout y El-Shafei (1997) proponen el uso de cojinetes presurizados para el control activo de vibraciones, mediante el control de la presión de una cámara (Figura 4.b). Posteriormente, El Shafei (2000), realiza un estudio de la comparación de varios controladores, tales como, P, PI, LQR, On-Off y no lineales implementados en el cojinete presurizado para mostrar el desempeño de atenuar la vibración durante el transitorio y a velocidad constante.

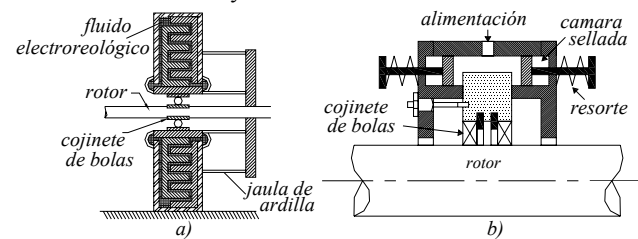


Figura 4. Cojinetes presurizados: a) con fluidos reológicos y b) con una cámara con fluido.

Sun y Kroedkiewski (1997 y 1998) proponen el uso de un tipo de cojinete presurizado. El objetivo es modificar el espesor de la película de aceite en el cojinete mediante una camisa flexible (Figura 5.a) que controla la presión de la cámara por medio de una válvula y un sistema hidráulico. La deformación de la camisa se realiza mediante la presión de la cámara afectando la geometría y espesor de la capa de fluido, lo que modifica las propiedades dinámicas del sistema rotatorio para atenuar las amplitudes de vibración.

Recientemente, Dyer *et al.*, (2002) proponen un equilibrador activo el cual consiste de un generador de campo magnético que mantiene interacción con un disco equilibrador fijo a la máquina rotatoria. El equilibrador está separado por una distancia muy pequeña del generador electromagnético como se muestra en la Figura 5.b. La idea del equilibrador es posicionar de manera correcta dos masas, por medio de los imanes permanentes y del generador electromagnético, de manera que contrarresten la fuerza centrífuga generada por la masa de desequilibrio.

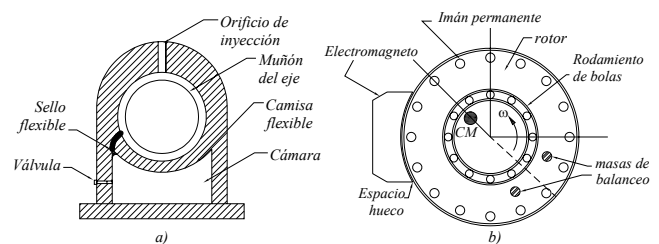


Figura 5. a) Cojinete presurizado con camisa flexible y b) equilibrador activo actuado electromagnéticamente.

A continuación, se mostrará el desarrollo de las dos propuestas: la primera de un rotor con un cojinete móvil y la segunda de un rotor con un disco equilibrador activo.

## 2. SISTEMA ROTATORIO CON COJINETE MÓVIL

### 2.1 Descripción del sistema

Considere un rotor Jeffcott como se muestra en la Figura 6, en donde,  $m$  representa la masa del rotor concentrada en el disco y  $k$  denota la rigidez del eje de masa despreciable. Debido a la presencia del desequilibrio, el centro de masa  $G$  se encuentra a una distancia  $u$  del centro geométrico  $S$ , a esta distancia se le conoce como excentricidad del disco. Mediante el uso de un servomecanismo para controlar el movimiento de uno de los soportes (cojinete derecho), se puede modificar la longitud del eje y la rigidez del rotor, por lo tanto, se puede controlar la frecuencia natural del sistema, mientras el rotor es acelerado o desacelerado, para evadir la resonancia y así evitar el crecimiento de amplitudes grandes de vibración (Blanco *et al.*, 2003).

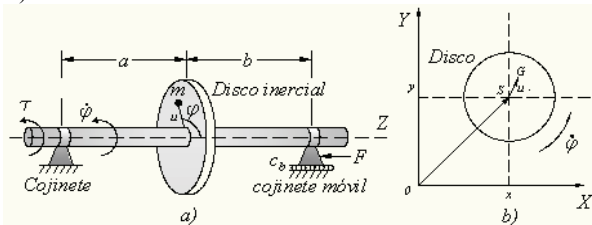


Figura 6. a) Rotor Jeffcott-cojinete móvil y b) vista lateral del disco inercial.

Para el análisis, se consideran las siguientes suposiciones:  $m_b$  es la masa equivalente del cojinete móvil,  $c_b$  es el amortiguamiento viscoso entre el cojinete móvil y la guía lineal,  $F$  es la fuerza del actuador para controlar la rigidez del eje,  $\omega = \dot{\varphi}$  es la velocidad angular del rotor, la cual es actuada por medio de un motor eléctrico con su controlador. El modelo matemático del rotor Jeffcott-cojinete móvil de cuatro grados de libertad, puede ser obtenido aplicando la segunda ley de Newton y está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$m\ddot{x} + kx = m(u\ddot{\varphi} \sin \varphi + u\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + ky = m(u\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - u\ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (2)$$

$$(J + mu^2)\ddot{\varphi} = \tau - c_\varphi \dot{\varphi} + p \quad (3)$$

$$m_b \ddot{b} + c_b \dot{b} = F \quad (4)$$

donde  $J$  denota el momento polar de inercia del rotor,  $\tau$  es el torque aplicado para regular la velocidad del rotor,  $c_\varphi$  denota el coeficiente de amortiguamiento viscoso y  $p = m(\dot{x}u \sin \varphi - \dot{y}u \cos \varphi)$ . Además,  $x$  y  $y$  denotan las coordenadas ortogonales que describen la posición del disco y  $b$  es la posición del cojinete móvil la cual es controlada por medio de la fuerza de control  $F$ .

El coeficiente de rigidez del eje puede aproximarse como:

$$k = \frac{3EI(l^2 - ab + b^2)}{a^3b^3} \quad (5)$$

donde  $l=a+b$  es la longitud total del rotor,  $I$  es el momento de inercia del eje de diámetro  $D$  y  $E$  es el modulo de elasticidad de Young ( $E=2.11 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>). La frecuencia natural no amortiguada del sistema está dada por:

$$\omega_n = \sqrt{k/m}. \quad (6)$$

De manera que, controlando  $b$  por medio de la fuerza de control se puede manipular  $\omega_n$  para evadir apropiadamente las velocidades críticas durante el arranque o paro del rotor.

Definiendo las variables de estado como  $z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = y, z_4 = \dot{y}, z_5 = \varphi, z_6 = \dot{\varphi}, z_7 = b, z_8 = \dot{b}$  y las fuerzas generalizadas como  $u_1 = \tau$  y  $u_2 = F$ , las ecuaciones (1-4) pueden ser representadas en el espacio de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + g_1(z)u_1 + g_2(z)u_2 \\ y_u &= h(z) = z_1^2 + z_3^2 \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $z \in \mathbb{R}^8$ ,  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ , y  $y_u \in \mathbb{R}$  es la magnitud del desequilibrio,  $f$ ,  $g_1$  y  $g_2$  son funciones diferenciables.

El objetivo de control consiste en reducir tanto como sea posible la amplitud de vibración denotada en forma adimensional como:

$$R = \sqrt{\frac{z_1^2 + z_3^2}{u}} \quad (8)$$

mientras el rotor es acelerado o parado aún en presencia de pequeñas perturbaciones endógenas o exógenas.

En la Tabla 1 se muestran los parámetros del sistema rotor-cojinete móvil empleados en las simulaciones.

Tabla 1. Parámetros de Simulación del rotor

$m_r=0.9\text{kg}$	$D=0.01\text{m}$	$z_7=0.3 \pm 0.05\text{m}$	$c_b=10\text{Ns/m}$
$m_b=0.4\text{kg}$	$r_{\text{disk}}=0.04\text{m}$	$a=0.3\text{m}$	$c_\varphi=1.5 \times 10^{-3}\text{Nms/rad}$
$u=100\mu\text{m}$			

### 2.2 Control activo de vibraciones

Con la finalidad de controlar la velocidad del rotor se considera solo su dinámica asociada (3), bajo la suposición de que la excentricidad  $u$  es perfectamente conocida.

$$\dot{z}_6 = \frac{1}{J}(u_1 - c_\varphi z_6 - kuz_1 \sin z_5 + kuz_3 \cos z_5)$$

Se propone el siguiente controlador PI para obtener la velocidad deseada  $z_6^*$ , mediante esquemas de aceleración, del sistema rotatorio.

$$\begin{aligned} u_1 &= Jv + c_\varphi z_6 + kuz_1 \sin z_5 - kuz_3 \cos z_5 \\ v &= \dot{z}_6^* - \alpha_1(z_6 - z_6^*) - \alpha_0 \int_0^t (z_6 - z_6^*) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

La dinámica en lazo cerrado con el controlador propuesto para el seguimiento de trayectorias, en donde el error está dado por  $e = z_6 - z_6^*$ , es:

$$\ddot{e} + \beta_1 \dot{e} + \beta_0 e = 0 \quad (10)$$

Los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son seleccionados de manera que el polinomio característico de (10) sea Hurwitz, para garantizar que la dinámica del error sea globalmente asintóticamente estable.

La trayectoria de velocidad deseada está dada por el siguiente

polinomio de Bézier:

$$\begin{aligned} z_{6i}^*(t) &= z_{6i} + (z_{6f} - z_{6i})\sigma(t, t_i, t_f)\mu_p^5 \\ \sigma(t, t_i, t_f) &= \gamma_1 - \gamma_2\mu_p + \gamma_3\mu_p^2 - \dots + \gamma_6\mu_p^5 \\ \mu_p &= \frac{t-t_i}{t_f-t_i} \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $z_{6i} = z_6^*(t_i)$  y  $z_{6f} = z_6^*(t_f)$  son las velocidades inicial y final deseadas, de manera que el rotor pase por la primera velocidad crítica (6), tal que

$$z_6^*(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_i \\ \sigma(t, t_i, t_f)z_{6f} & t_i \leq t < t_f \\ z_{6f} & t > t_f \end{cases} \quad (12)$$

Los parámetros de la función polinomial  $z_6^*(t)$  son  $\gamma_1=252$ ,  $\gamma_2=1050$ ,  $\gamma_3=1800$ ,  $\gamma_4=1575$ ,  $\gamma_5=700$ ,  $\gamma_6=126$ .

El problema fundamental con el controlador propuesto (9), es que la excentricidad  $u$  no es conocida, excepto el hecho de que es constante. A continuación se aplicará el método de identificación algebraica, reportado por Fliess y Sira-Ramírez (2003), para estimar la excentricidad  $u$ .

### 2.3 Identificación algebraica de la excentricidad

Considere la sexta ecuación de (7), en donde, el momento de inercia  $J$  y la rigidez del eje  $k$  son conocidas; las coordenadas de posición del disco ( $z_1$ ,  $z_3$ ) y la entrada de control  $u_1$  están disponibles para el proceso de identificación de la excentricidad  $u$ .

$$\dot{z}_6 = \frac{1}{J}(u_1 - c_\phi z_6 - kuz_1 \sin z_5 + kuz_3 \cos z_5). \quad (13)$$

Multiplicando (13) por  $t$  e integrando el resultado una vez con respecto al tiempo  $t$ , posteriormente, usando integración por partes, resulta

$$\begin{aligned} \left( tz_6 - \int_0^t z_6 dt \right) &= \int_0^t t(u_1 - c_\phi z_6) \\ &+ ku \int_0^t t(z_3 \cos z_5 - z_1 \sin z_5) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente, resolviendo para  $u$  en (14) se obtiene el siguiente identificador algebraico:

$$\hat{u} = \frac{Jtz_6 - \int_0^t (Jz_6 + tu_1 - tc_\phi z_6) dt}{k \int_0^t t(z_3 \cos z_5 - z_1 \sin z_5) dt}, \forall T \in (0, \delta] \quad (15)$$

donde  $\delta$  es un valor suficientemente pequeño y positivo. Por lo tanto, cuando el denominador del identificador (15) es diferente a cero, en al menos para un intervalo de tiempo pequeño  $(0, \delta]$  con  $\delta > 0$ , uno puede encontrar de (15) una forma de expresión cerrada para la excentricidad estimada.

El controlador PI (9) puede ser combinado con la identificación en línea de la excentricidad (15), resultando la siguiente ley de control PI equivalente:

$$u_1 = Jv + c_\phi z_6 + k\hat{u}z_1 \sin z_5 - k\hat{u}z_3 \cos z_5 \quad (16)$$

$$v = \dot{z}_6^* - \alpha_1(z_6 - z_6^*) - \alpha_0 \int_0^t (z_6 - z_6^*) dt$$

con

$$\hat{u} = \frac{Jtz_6 - \int_0^t (Jz_6 + tu_1 - tc_\phi z_6) dt}{k \int_0^t t(z_3 \cos z_5 - z_1 \sin z_5) dt}, \forall T \in (0, \delta].$$

Note que, de acuerdo con la aproximación algebraica, la cual proporciona una rápida identificación de la excentricidad, el controlador propuesto (16) resulta en un esquema de control adaptivo.

### 2.4 Respuesta en lazo abierto

La Figura 7 muestra la identificación de la excentricidad y el comportamiento dinámico del controlador PI tipo adaptivo (16), el cual inicia usando el valor nominal de  $u=0\mu\text{m}$ . En esta figura se puede apreciar que el proceso de identificación es casi instantáneo. El objetivo de control es llevar el rotor desde el reposo hasta una velocidad de operación de  $z_{6f}=300$  rad/s.

En la Figura 8 se muestra la amplitud resultante de vibración del rotor, usando el controlador PI, para tres diferentes posiciones constantes del cojinete derecho. Se puede notar que para una longitud pequeña  $l=0.55\text{m}$  ( $z_7 = 0.25\text{m}$ ), el rotor presenta una frecuencia más grande y, para una longitud más grande  $l=0.65\text{m}$  ( $z_7 = 0.35\text{m}$ ) se tiene una frecuencia natural más pequeña. De aquí que para tener una respuesta mínima al desequilibrio, la longitud del rotor debería iniciar en  $l=0.55\text{m}$  y, posteriormente, cambiar repentinamente a  $l=0.65\text{m}$ , en el momento en que la respuesta para  $l=0.55\text{m}$  cruce con la respuesta para  $l=0.65\text{m}$ .

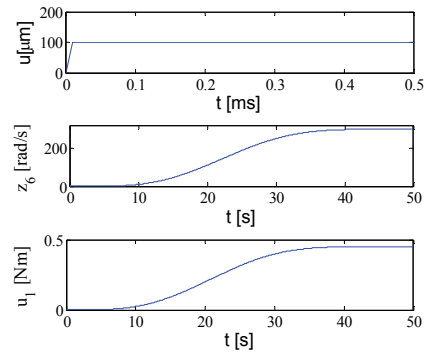


Figura 7. Respuesta en lazo cerrado utilizando el controlador PI e identificación de la excentricidad.

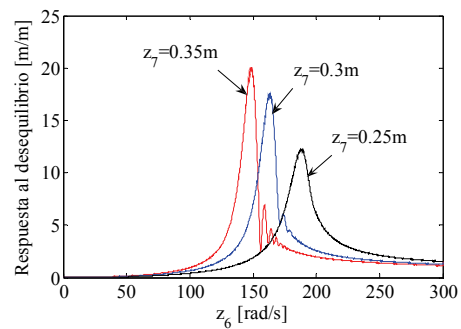


Figura 8 Respuesta al desequilibrio para diferentes posiciones constantes del cojinete derecho.

### 2.5 Control de posición del soporte móvil

La dinámica asociada al cojinete móvil está dada por las ecuaciones 7 y 8 de (7),

$$\begin{aligned} \dot{z}_7 &= z_8 \\ \dot{z}_8 &= -\frac{c_b}{m_b} z_8 + \frac{1}{m_b} u_2. \end{aligned}$$

Se propone el siguiente controlador Proporcional Integral Generalizado (GPI por sus siglas en inglés) para el seguimiento robusto y asintótico de la trayectoria deseada  $z_7^*(t)$  para la posición y velocidad del cojinete móvil:

$$\begin{aligned} u_2 &= m_b v - c_b \hat{z}_8 \\ v &= \dot{z}_7^*(t) - \alpha_2 (\hat{z}_8 - z_7^*(t)) \\ &\quad - \alpha_1 (z_7 - z_7^*) - \alpha_0 \int (z_7 - z_7^*) \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $\hat{z}_8$  es un reconstructor integral de la velocidad del cojinete, el cual está dado por:

$$\hat{z}_8 = -\frac{c_b}{m_b} z_7 + \frac{1}{m_b} \int_0^t u_2(\sigma) d\sigma.$$

Los parámetros de diseño  $\alpha_i$ ,  $i=0, \dots, 2$ , son seleccionados de manera que el polinomio característico del sistema en lazo cerrado sea Hurwitz, para garantizar que la dinámica del error sea globalmente asintóticamente estable. El controlador GPI (17) requiere solo mediciones de la posición del cojinete.

### 2.6 Respuesta en lazo cerrado

La Figura 9 muestra la respuesta al desequilibrio del rotor Jeffcott-cojinete móvil utilizando, simultáneamente, el controlador de velocidad PI, la identificación algebraica y el controlador GPI de posición del cojinete. Se puede apreciar que el cambio de posición del cojinete produce pequeñas oscilaciones transitorias debido a la inercia y efectos centrífugos en el rotor. El cambio de posición del cojinete se implementa de manera que cuando el rotor es acelerado del reposo, inicie con la posición de  $z_{7i}=0.25\text{m}$  (i.e.,  $l=0.55\text{m}$ ) y posteriormente cambie a  $z_{7i}=0.35\text{m}$  (i.e.,  $l=0.65\text{m}$ ) exactamente en el punto de cruce mostrado en la respuesta de la Figura 8. La velocidad y el tiempo en que ocurre el cambio es cuando  $z_6=170.6\text{rad/s}$  y  $t=23.9\text{s}$ . La respuesta de la posición del cojinete  $z_7(t)$  se muestra en la Figura 10 junto con la fuerza de control requerida  $u_2$ .

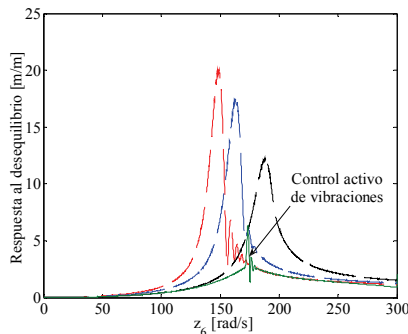


Figura 9. Respuesta al desequilibrio con el control activo de vibraciones usando un cojinete móvil.

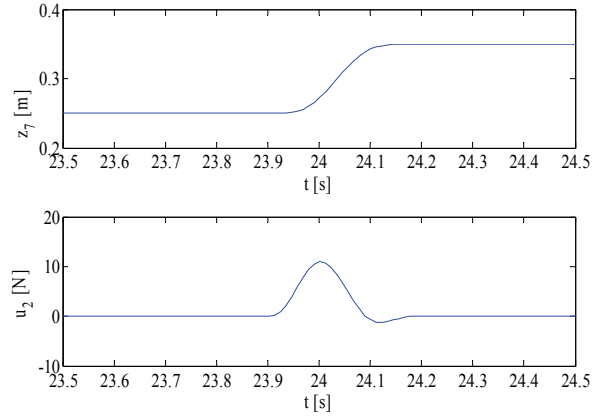


Figura 10. Respuesta de la posición del cojinete móvil utilizando el controlador GPI.

Comparando la respuesta obtenida en lazo abierto y la respuesta en lazo cerrado, se puede observar que en la respuesta al desequilibrio obtenida en la Figura 9 presenta una reducción del 64% con respecto a la respuesta obtenida para una configuración del rotor Jeffcott.

## 3. DISCO EQUILIBRADOR ACTIVO

### 3.1 Descripción del sistema

Considere un rotor Jeffcott, en donde,  $M$  representa la masa del rotor concentrada en el disco montada en la mitad de un eje de masa despreciable y de rigidez  $k$  como se muestra en la Figura 11. Debido a la presencia del desequilibrio, el centro de masa  $G$  se encuentra a una distancia  $u$  del centro geométrico  $S$ , a esta distancia se le conoce como excentricidad del disco. La propuesta para implementar equilibrado activo consiste en agregar un disco y cercano al disco principal (inercia desequilibrada).

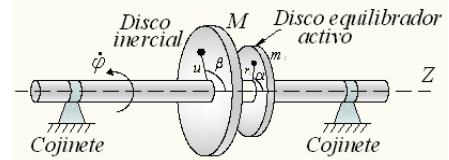


Figura 11. Sistema rotor-cojinetes con disco equilibrador activo.

El Disco Equilibrador Activo (DEA) propuesto (ver Blanco-Ortega *et al.*, 2008) es diseñado de manera que la masa equilibradora  $m_1$  se pueda mover en todas las posiciones angulares y radiales dentro del disco, las cuales están denotadas por  $\alpha$  y  $r_1$ , respectivamente (Figuras 11 y 12). Estos movimientos pueden obtenerse mediante el uso de un tornillo o husillo para el movimiento radial y con un sistema de engranes cónicos se puede obtener el movimiento angular. La masa  $m_1$  y la distancia radial  $r_1$  son parámetros de diseño del disco y dependerán del tamaño y peso de la máquina rotatoria a equilibrar, de manera que con estos parámetros se puedan generar las fuerzas centrífugas que permitan contrarrestar la fuerza generada por la masa de desequilibrio del sistema principal.

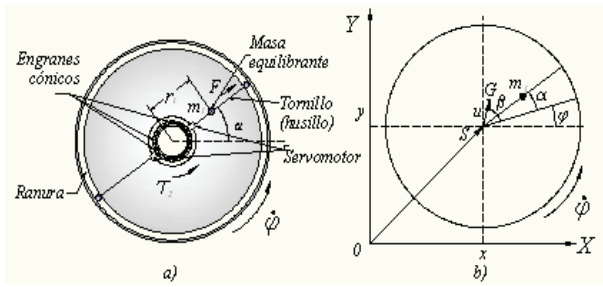


Figura 12. Disco Equilibrador activo: (a) configuración de los elementos principales y (b) vista lateral del DBA y disco inercial principal.

El modelo matemático de cinco grados de libertad para el sistema rotor-cojinetes con el DBA puede ser obtenido mediante el formulismo de Euler-Lagrange, el cual está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} (M + m_1)\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= p_x(t) \\ (M + m_1)\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= p_y(t) \\ J_e\ddot{\varphi} + c_\varphi\dot{\varphi} &= \tau_1 + p_\varphi(t) \\ m_1r_1^2\ddot{\alpha} + 2m_1r_1\dot{r}_1\dot{\alpha} + m_1gr_1 \cos \alpha &= \tau_2 \\ m_1\ddot{r}_1 - m_1r_1\dot{\alpha}^2 + m_1g \sin \alpha &= F \end{aligned} \quad (18)$$

con

$$\begin{aligned} p_x(t) &= Mu[\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \beta) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \beta)] \\ &\quad + m_1r_1[\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha)] \\ p_y(t) &= Mu[\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \beta) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \beta)] \\ &\quad + m_1r_1[\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha)] \\ p_\varphi(t) &= Mu[\ddot{x} \sin(\varphi + \beta) - \dot{y} \cos(\varphi + \beta)] \\ &\quad + m_1r_1[\ddot{x} \sin(\varphi + \alpha) - \dot{y} \cos(\varphi + \alpha)] \end{aligned}$$

donde  $J$  y  $c_\varphi$  son el momento polar de inercia y el amortiguamiento viscoso,  $\tau_1(t)$  es el torque aplicado para regular la velocidad de rotación del rotor,  $x$  y  $y$  son las coordenadas ortogonales que describen la posición del disco,  $r_1$  y  $\alpha$  denotan la posición radial y angular de la masa de equilibrado, las cuales son controladas por medio de la fuerza de control  $F(t)$  y el torque  $\tau_2(t)$ , respectivamente.

Para el diseño de los controladores se considera el siguiente cambio de variables, donde,  $z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = y, z_4 = \dot{y}, z_5 = \varphi, z_6 = \dot{\varphi}, z_7 = r_1, z_8 = \dot{r}_1, z_9 = \alpha$  y  $z_{10} = \dot{\alpha}$ , para representar el modelo matemático (18) en espacio de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + g_1(z)u_1 + g_2(z)u_2 \\ y_u &= h(z) = z_1^2 + z_3^2 \end{aligned} \quad (19)$$

donde  $z \in R^{10}$ ,  $u_1, u_2 \in R$ , y  $y_u \in R$  es la magnitud del desequilibrio,  $f, g_1$  y  $g_2$  son funciones suaves.

### 3.2 Control activo de vibraciones

De las Figuras 11 y 12 se puede apreciar que si la masa  $m_1$  es posicionada en  $(\bar{r} = \frac{Mu}{m_1}, \bar{\alpha} = \beta + \pi)$ , el desequilibrio puede ser cancelado. Para el diseño de los controladores para posicionar la masa  $m_1$ , se considera su dinámica asociada dada por las ecuaciones 4 y 5 de (18), representadas en el espacio de estados. A partir de estas ecuaciones se proponen los controladores no-lineales para llevar la masa equilibradora al punto de equilibrio  $(y_2 = \bar{r} = \frac{Mu}{m_1}, y_3 = \bar{\alpha} = \beta + \pi)$ :

$$F = m_1v_2 + gm_1 \sin z_9 - m_1z_7z_{10}^2 \quad (20)$$

$$\tau_2 = m_1z_7^2v_3 + gm_1z_7 \cos z_9 + 2m_1z_7z_8z_{10} \quad (21)$$

con

$$\begin{aligned} v_2 &= \ddot{y}_2^*(t) - \gamma_{22}[\dot{y}_2 - \dot{y}_2^*(t)] - \delta_{21}[y_2 - y_2^*(t)] \\ &\quad - \delta_{20} \int_0^t [y_2 - y_2^*(\sigma)] d\sigma \\ v_3 &= \ddot{y}_3^*(t) - \gamma_{32}[\dot{y}_3 - \dot{y}_3^*(t)] - \delta_{31}[y_3 - y_3^*(t)] \\ &\quad - \delta_{30} \int_0^t [y_3 - y_3^*(\sigma)] d\sigma \end{aligned}$$

donde  $y_2^*(t)$  y  $y_3^*(t)$  son las trayectorias deseadas para las salidas  $y_2$  y  $y_3$ . El error de seguimiento para cada salida está dado por  $e_2 = y_2 - y_2^*(t)$  y  $e_3 = y_3 - y_3^*(t)$ , cuyas dinámicas en lazo cerrado están dadas por:

$$\begin{aligned} e_2^{(3)} + \gamma_{22}e_2 + \gamma_{21}\dot{e}_2 + \gamma_{20}e_2 &= 0 \\ e_3^{(3)} + \gamma_{32}e_3 + \gamma_{31}\dot{e}_3 + \gamma_{30}e_3 &= 0 \end{aligned}$$

y se igualan a unos polinomios de Hurwitz para determinar los parámetros de diseño  $\{\gamma_{20}, \gamma_{21}, \gamma_{30}, \gamma_{31}, \gamma_{32}\}$ .

Como se puede apreciar en los controladores (20) y (21) se requiere información de la excentricidad del disco  $u, \beta$ , por lo que se procede a implementar un método para la identificación algebraica de la excentricidad.

### 3.3 Control de velocidad del rotor

Para controlar la velocidad del rotor, considere su dinámica asociada, ecuación 3 de (18), bajo la suposición de que el desequilibrio fue cancelado por el disco activo y que la excentricidad del disco  $(u, \beta)$  es conocida. A partir de esta ecuación, se propone un controlador PI para el seguimiento de una trayectoria de referencia deseada  $y_1^*(t)$ :

$$\begin{aligned} \tau &= [J + (Mu^2 + m_1r_1^2)]v_1 + c_\varphi z_6 \\ v_1 &= \dot{y}_1^*(t) - \gamma_{11}[y_1 - y_1^*(t)] - \gamma_{10} \int_0^t [y_1 - y_1^*(\sigma)] d\sigma. \end{aligned} \quad (22)$$

Los parámetros de diseño  $\{\gamma_{10}, \gamma_{11}\}$  son seleccionados de manera que el polinomio característico del sistema en lazo cerrado sea Hurwitz.

### 3.4 Identificación algebraica en línea de la excentricidad

Considere las dos primeras ecuaciones de (18), donde las medidas de las coordenadas de posición del disco  $(z_1, z_3)$  están disponibles para ser utilizadas en el esquema de identificación.

$$\begin{aligned} (M + m_1)\dot{z}_2 + cz_2 + kz_1 &= Mu[\dot{z}_6 \sin(z_5 + \beta) \\ &\quad + \dot{z}_6^2 \cos(z_5 + \beta)] \\ &\quad + m_1r_1[\dot{z}_6 \sin(z_5 + \alpha) \\ &\quad + \dot{z}_6^2 \cos(z_5 + \alpha)] \\ (M + m_1)\dot{z}_4 + cz_4 + kz_3 &= Mu[\dot{z}_6^2 \sin(z_5 + \beta) \\ &\quad - \dot{z}_6 \cos(z_5 + \beta)] \\ &\quad + m_1r_1[\dot{z}_6^2 \sin(z_5 + \alpha) \\ &\quad - \dot{z}_6 \cos(z_5 + \alpha)] \end{aligned} \quad (23)$$

Multiplicando (23) por  $t^2$  e integrando el resultado dos veces con respecto al tiempo  $t$ .

$$\begin{aligned} & \int^{(2)} \left[ (M + m_1) t^2 \frac{dz_2}{dt} + ct^2 z_2 + kt^2 z_1 \right] \\ &= \int^{(2)} Mut^2 \frac{d}{dt} [z_6 \sin(z_5 + \beta)] \\ &+ \int^{(2)} m_1 r_1 t^2 \frac{d}{dt} [z_6 \sin(z_5 + \alpha)] \\ & \int^{(2)} \left[ (M + m_1) t^2 \frac{dz_4}{dt} + ct^2 z_4 + kt^2 z_3 \right] \\ &= \int^{(2)} Mut^2 \frac{d}{dt} [z_6 \cos(z_5 + \beta)] \\ &+ \int^{(2)} m_1 r_1 t^2 \frac{d}{dt} [z_6 \cos(z_5 + \alpha)] \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$\int^{(n)} \varphi(t)$  son integrales iteradas de la forma  $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} \varphi(\sigma_n) d\sigma_n \dots d\sigma_1$ , con  $\int \varphi(t) = \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma$  y  $n$  un entero positivo.

Posteriormente, después de integrar por partes y de algunas manipulaciones algebraicas, (24) se pueden expresar en un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$A(t)\theta = b(t) \quad (25)$$

donde  $\theta = [u_\eta = u \cos \beta, u_\xi = u \sin \beta]^T$  denota el vector de la excentricidad a ser identificado y  $A(t)$ ,  $b(t)$  son matrices de  $2 \times 2$  y  $2 \times 1$ , respectivamente, las cuales están dadas por

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ -a_{12}(t) & a_{11}(t) \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

donde

$$a_{11} = M \left[ \int t^2 z_6 \sin z_5 - 2 \int^{(2)} t z_6 \sin z_5 \right]$$

$$a_{12} = M \left[ \int t^2 z_6 \cos z_5 - 2 \int^{(2)} t z_6 \cos z_5 \right]$$

$$\begin{aligned} b_1 &= (M + m_1) t^2 z_1 + \int (ct^2 z_1 - 4(M + m_1) t z_1) \\ &+ \int (m_1 z_6 z_7 t^2 \sin(z_5 + \alpha)) \\ &+ \int^{(2)} (2(M + m_1) z_1 - 2ct z_1 + kt^2 z_1) \\ &+ \int^{(2)} 2m_1 z_6 z_7 t \sin(z_5 + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= (M + m_1) t^2 z_3 + \int (ct^2 z_3 - 4(M + m_1) t z_3) \\ &+ \int (m_1 z_6 z_7 t^2 \cos(z_5 + \alpha)) \\ &- \int^{(2)} 2m_1 z_6 z_7 t \cos(z_5 + \alpha) \end{aligned}$$

De la ecuación (25) se puede concluir que el vector  $\theta$  es identificable algebraicamente si, y solo si, la trayectoria del sistema dinámico es persistente en el sentido establecido por Fliess y Sira-Ramírez, 2003, es decir, las trayectorias o el comportamiento dinámico del sistema satisface la condición  $\det A(t) \neq 0$ . En general, esta condición se mantiene al menos en

un intervalo pequeño  $(t_0, t_0 + \delta]$ , donde  $\delta_0$  es un valor positivo y suficientemente pequeño.

Resolviendo las ecuaciones (25) se obtiene el siguiente identificador algebraico para los parámetros de la excentricidad desconocidos.

$$\left. \begin{aligned} u_{\eta e} &= \frac{b_1 a_{11} - b_2 a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ u_{\xi e} &= \frac{b_1 a_{12} + b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\ u_e &= \sqrt{u_{\eta e}^2 + u_{\xi e}^2} \\ \beta_e &= \cos\left(\frac{u_{\eta e}}{u_e}\right) \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \delta_0] \quad (26)$$

### 5.3 Resultados de simulación

En la Tabla 2 se muestran los parámetros del sistema rotor-disco equilibrador activo empleados en las simulaciones.

**Tabla 2. Parámetros de Simulación del rotor**

$M=1.2\text{kg}$	$D=0.01\text{m}$	$u=100\mu\text{m}$	$B=\pi/6$
$m_l=0.003\text{kg}$	$r_{\text{disk}}=0.04\text{m}$	$a=b=0.3\text{m}$	$\alpha=0$
$c_\phi=1.5 \times 10^{-3} \text{Nms/rad}$			

En la Figura 13 se puede apreciar que la estimación de la posición angular y de la excentricidad es rápida y precisa ( $t \ll 0.1\text{s}$ ).

La trayectoria para la salida  $y_1 = z_6$  está dada por el polinomio de Bezier (12), donde  $y_{if} = 300\text{rad/s}$ ,  $t_i = 0\text{s}$  y  $t_f = 50\text{s}$ .

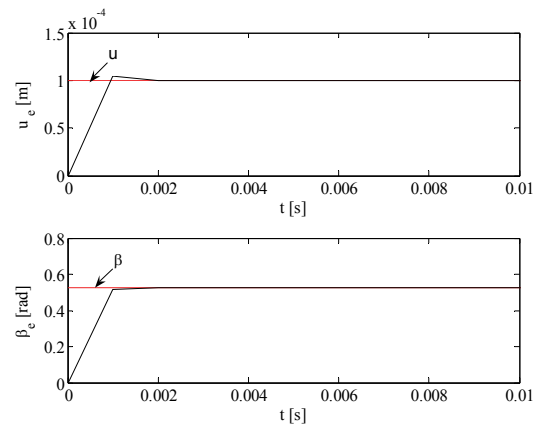


Figura 13. Identificación de la excentricidad ( $u$ ) y de la posición angular ( $\beta$ ).

La Figura 14 muestra el comportamiento dinámico del controlador para llevar la masa de equilibrado a la posición de equilibrio ( $\bar{r} = \frac{M}{m_1} u_e, \bar{\alpha} = \beta_e + \pi$ ). En esta posición el disco activo cancela el desequilibrio, como se muestra en la Figura 15.

Las ganancias de los controladores fueron seleccionadas a partir del polinomio característico de tercer orden  $r(s) = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ , con  $\zeta = 0.7071$ ,  $\omega_n = 12$ , y  $p = 10$ .

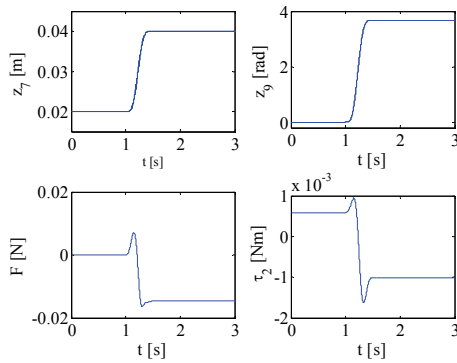


Figura 14. Respuesta dinámica de la masa de equilibrado: posición radial ( $z_7$ ), posición angular ( $z_9$ ), fuerza ( $F$ ) y torque ( $\tau_2$ ).

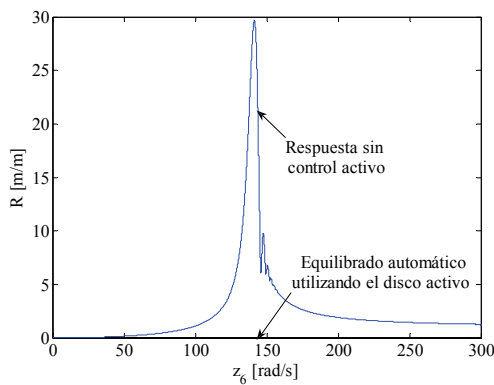


Figura 15. Respuesta del equilibrado activo utilizando el disco activo.

#### 4. CONCLUSIÓN

En este artículo se presenta un breve estado del arte de dispositivos utilizados para el control activo de vibraciones en maquinaria rotatoria, y se presenta el desarrollo de dos propuestas. La primera propuesta consiste en utilizar un cojinete móvil en un rotor Jeffcott, de manera que la longitud efectiva del rotor es controlada y como consecuencia la rigidez del rotor es modificada para reducir la respuesta al desequilibrio mientras el rotor pasa a través de la primera velocidad crítica. Se presentan simulaciones numéricas donde se muestra que la respuesta de vibración del rotor puede tener una reducción del 64% con respecto a la respuesta obtenida para una configuración del rotor Jeffcott. La segunda propuesta consiste en agregar un disco activo, al sistema principal, el cual puede ser utilizado para atenuar vibraciones en la maquinaria rotatoria, tanto en estado transitorio como en velocidades de operación constante. El disco equilibrador activo utiliza sólo una masa de equilibrado la cual debe ser posicionada para producir una fuerza centrífuga que se oponga a la masa de desequilibrio del sistema principal. Es importante mencionar que se pueden utilizar varios discos activos y combinar con métodos tradicionales de equilibrado para atenuar las vibraciones en rotores flexibles.

#### REFERENCIAS

Blanco-Ortega, A., Beltrán-Carbajal, F. and Silva-Navarro, G. (2008). Active Disk for Automatic Balancing of Rotor-Bearing Systems. *American Control Conference, ACC2008*.  
Blanco-Ortega, A., Silva-Navarro, G. and Gómez-Mancilla, J.C. (2003). Dynamic Stiffness Control and Acceleration

Scheduling for the Active Balancing Control of a Jeffcott-Like Rotor System, *Proc. of The tenth International Congress on Sound and Vibration*, 227-234.  
C. Carmignani, P. Forte and E. Rustighi (2001). Active Control of Rotors by Means of Piezoelectric Actuators, *Proceedings of Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*.  
L. Chong-Won (2006). Mechatronics in Rotating Machinery. *7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics*, Vienna, Austria, 25-28.  
S. W. Dyer, J. Ni, J. Shi and K. Shin (2002). Robust Optimal Influence-Coefficient Control of Multiple-Plane Active Rotor Balancing Systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **124**, 41-46.  
M. Fliess and H. Sira-Ramírez (2003). An algebraic framework for linear identification, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, **9**, 151-168.  
Green K, Champneys A.R., Friswell M.I. y Muñoz (2008) A.M. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors. *Royal Society Publishing*, **366**, No. 1866. 705-728.  
Y. Guozhi, Y. F. Fah, C. Guang, M. Guang, F. Tong and Q. Yang (2000). Electro-Rheological Multi-layer Squeeze Film Damper and its Application to Vibration Control of Rotor System, *Journal of Vibration and Acoustics*, **122** (1), 7-11.  
J. P. Hathout and A. El-Shafei (1997). PI Control of HSFDS for Active Control of Rotor-Bearing Systems, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **119**(3), 658-667.  
B. Hredzak and G. Guo (2006). Adjustable Balancer With Electromagnetic Release of Balancing Members. *IEEE Transactions on Magnetics*, **42**(5), 1591-1596.  
J. M. Krodkiewski and L. Sun (1998). Modelling of Multi-Bearing Rotor Systems Incorporating an Active Journal Bearing, **10** (2), 215-229.  
J. H. Lee, P. E. Allaire, G. Tao and X. Zhang (2001). Integral Sliding-Mode Control of a Magnetically Suspended Balance Beam: Analysis, Simulation, and Experiment, *Transactions on Mechatronics*, **6** (3), 338-346.  
A. B. Palazzolo, S. Jagannathan, A. F. Kaskaf, G. T. Monatgue and L.J. Kiraly (1993). Hybrid Active Vibration Control of Rotorbearing Systems Using Piezoelectric Actuators, *Journal of Vibration and Acoustics*, **115** (1), 111-119.  
A. El-Shafei (2000). Active Control Algorithms for the Control of Rotor Vibrations Using HSFDS. *Proc. of ASME TURBOEXPO 2000*, Munich Germany.  
G. J. Sheu, S. M. Yang and C. D Yang (1997). Design of Experiments for the Controller of Rotor Systems With a Magnetic Bearing, *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**(2), 200-207.  
L. Sun, J. Krodkiewski, and Y. Cen (1997). Control Law Synthesis for Self-Tuning Adaptive Control of Forced Vibration in Rotor Systems. *2nd International Symposium MV2 on Active Control in Mechanical Engineering*, S9-25-37. Lyon, France.  
Thearle, E.L. (1932). A New Type of Dynamic Balancing Machine, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **54**, 131-141.  
T. D. Ward (2004). Method and System for Balancing a Rotating Machinery Operating at Resonance. United States Patent. 6789422B1.  
S. Zhou and J. Shi (2001). Active Balancing and Vibration Control of Rotating Machinery: a survey, *The Shock and Vibration Digest*, **33**(4), 361-371.